

# Učeničko razumijevanje vektora u različitim kontekstima

---

Tušek, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:270081>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Učeničko razumijevanje vektora u različitim kontekstima

---

Tušek, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:270081>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Filip Tušek

**UČENIČKO RAZUMIJEVANJE VEKTORA U RAZLIČITIM  
KONTEKSTIMA**

Diplomski rad

Voditeljica rada:  
doc. dr. sc. Ana Sušac

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem se svojoj mentorici doc. dr. sc. Ani Sušac na ukazanom povjerenju, pruženoj pomoći i podršci tijekom izrade diplomskog rada.*

*Hvala svim učenicima koji su dobrovoljno sudjelovali u istraživanju.*

*Hvala svim prijateljima i prijateljicama koji su mi pomogli tijekom studiranja.*

*I na kraju najviše zahvaljujem svojoj obitelji. Hvala vam na pruženoj podršci, odricanju i strpljenju tijekom cijelog mog obrazovanja.*

*Ovaj rad posvećujem Vama.*

## SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
2. PREGLED PRIJAŠNJIH ISTRAŽIVANJA .....	4
3. METODE.....	8
3.1. ISPITANICI.....	8
3.2. MATERIJALI.....	9
4. REZULTATI I DISKUSIJA.....	13
4.2. USPOREDBA POKRETA OČIJU TIJEKOM RJEŠAVANJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE I FIZIKE.....	18
4.3. ANALIZA POJEDINIH ZADATAKA.....	28
4.3.1. OSNOVNI POJMOVI (SMJER, DULJINA, KOMPONENTE VEKTORA) .....	28
4.3.2. OSNOVNE OPERACIJE S VEKTORIMA (ZBRAJANJE, ODUZIMANJE, MNOŽENJE SKALAROM).....	40
4.3.3. SKALARNI UMNOŽAK VEKTORA.....	49
5. ZAKLJUČAK.....	56
6. LITERATURA .....	59
7. POPIS TABLICA .....	61
8. POPIS SLIKA.....	62
9. SAŽETAK .....	64
10. SUMMARY.....	65
11. ŽIVOTOPIS.....	66

## 1. UVOD

U svakodnevnom životu mnoge veličine izražavaju se brojem i nazivaju se skalarima. No, postoje veličine koje se ne mogu opisati samo brojem. Kod veličina kao što su: brzina, sila, akceleracija, moment sile, itd., bitan je iznos, smjer djelovanja i orijentacija. Takve veličine nazivaju se vektori. Učenici o vektorima uče u nastavi matematike i fizike u osnovnoj i srednjoj školi.

Vektori su se u Nastavnom planu i programu za osnovnu školu u iz 2006. u matematici spominjali tek u 8. razredu. Od učenika se očekivalo ostvarivanje sljedećih odgojno-obrazovnih ishoda (postignuća): crtati zadane vektore, prepoznati i crtati jednake i suprotne vektore; zbrajati i oduzimati vektore primjenom pravila trokuta [15]. Učenici su nastavljali učiti o vektorima u matematici u 3. razredu gimnazija i nekih strukovnih škola. Po gimnazijskom programu učenici su u sklopu analitičke geometrije u ravnini radili pojam vektora, zbrajanje vektora, množenje vektora realnim brojem, duljinu vektora i skalarni produkt vektora. U prirodoslovno-matematičkim gimnazijama su radili vektorski i mješoviti produkt vektora [18]

Zanimljivo je primijetiti da su se po prijašnjem Nastavnom planu i programu za osnovnu školu u fizici vektori prvi put spominjali i uvodili u 7. razredu osnovne škole, kao i danas, unutar obrazovnog sadržaja kada se uvodi pojam sile i tada je jedan od obrazovnih ishoda bio nacrtati i objasniti silu kao vektor [17]. Po novom kurikulumu iz fizike vektori se prvi put javljaju kod analiziranja međudjelovanja gdje se od učenika očekuje da grafički i računski određuju rezultantnu silu [15].

Prema novom predmetnom kurikulumu za matematiku vektori se sada spominju već u 7. razredu osnovne škole te se od učenika očekuje ostvarivanje sljedećih ishoda: crta i opisuje vektor, njegov smjer, orijentaciju i duljinu; opisuje odnose između dvaju ili više vektora matematičkim jezikom; prepoznaje i crta jednake i suprotne vektore, opisuje nul-vektor; zbraja i oduzima vektore u ravnini [16].

Obrazovni sadržaji iz matematike o vektorima se zatim nadograđuju u 3. razredu srednje škole četverogodišnjih programa, dok se u pojedinim trogodišnjim strukovnim školama spominju u 2. ili 3. razredu. Po novom kurikulumu iz matematike račun s vektorima se može uvesti kao izborni sadržaj već u 1. razredu.

U gimnazijama učenici trebaju postići sljedeće ishode vezane uz vektore: prepoznaje, opisuje i rabi elemente vektora; računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu, određuje duljinu vektora, računa skalarni umnožak vektora i primjenjuje ga za uvjet okomitosti vektora; dijeli dužinu u zadanome omjeru; primjenjuje svojstva vektora u problemskim zadacima, rastavlja vektore koristeći linearnu kombinaciju vektora (računski ili grafički); računa i geometrijski interpretira vektorski umnožak i mješoviti umnožak [16].

U matematici vektori se definiraju kao klasa ekvivalencije skupa usmjerenih dužina ili pomoću: duljine (iznos, modul), smjerom (pripadaju paralelnim pravcima) i orijentacijom (orijentacija strelice). U fizici se ne uvodi stroga definicija vektora, nego se govori o duljini i smjeru vektora  $\vec{v}$ , za razliku od matematike, obično se ne govori o orijentaciji nego se za kolinearne vektore kaže da su istog ili suprotnog smjera.

Dakle, može se primijetiti kako učenici već u ranoj fazi obrazovanja uče osnovne pojmove vezane uz vektore. Općenito, vektori su jako važna matematička cjelina koja se koristi i primjenjuje u razumijevanju pojmova iz fizike. Prema redoslijedu uvođenja vektora u matematici i fizici može se zaključiti koliko je razumijevanje vektora bitno, što potvrđuje činjenica da se vektori u fizici primjenjuju kroz gotovo cijeli obrazovni program učenika.

Iskustvo nastavnika fizike i edukacijska istraživanja pokazuju da učenici imaju poteškoća s primjenom matematike u nastavi fizike. Nastavnici fizike često učeničke poteškoće u fizici pripisuju njihovom nedostatku matematičkih znanja. No, neka istraživanja su pokazala da nedostatak matematičkih znanja i vještina nije jedini uzrok učeničkih poteškoća u fizici jer učenici koji su uspješno riješili neke vrste zadataka u matematici, nisu mogli riješiti slične zadatke u kontekstu fizike (Leinhardt i sur., 1990) [9]. To ne čudi jer rješavanje zadataka u fizici uključuje dodatni korak, tj. prepoznavanje koju matematičku proceduru treba primijeniti u danom fizikalnom kontekstu. Nastavnici fizike često misle da je učenicima lakše rješavanje zadataka u kontekstu fizike jer je manje apstraktno i bliže njihovom svakodnevnom iskustvu. U jednom istraživanju su nastavnici fizike rangirali četiri konceptualna pitanja o nagibu pravca u kontekstu matematike i fizike prema očekivanoj težini za učenike [13]. Većina nastavnika je zaključila da su učenicima teži zadaci u kontekstu matematike jer su apstraktniji, iako su učenički rezultati pokazali



suprotno. Učenici su bolje riješili zadatke iz matematike nego iz fizike. Zanimljivo je da dio nastavnika koji predaju i matematiku i fiziku nije imao stav da su zadaci iz fizike učenicima lakši što pokazuje da oni vjerojatno imaju bolji uvid u učeničke poteškoće.

Da bi se istražila primjena matematičkih znanja u fizici često se konstruiraju paralelni (izomorfni) zadaci koji se odnose se na isti koncept i zahtijevaju isti matematički postupak, samo su zadani u različitim kontekstima. U istraživanjima koji su koristili paralelne zadatke iz matematike i fizike, učenici često nisu uočili da su zadaci vrlo slični pa su koristili različite strategije prilikom rješavanja tih zadataka. Druga česta pogreška je da učenici nisu mogli matematičke komponente zadatka interpretirati u fizici, makar su imali potrebno matematičko znanje. Time se pokazalo da je transfer znanja iz matematike u fiziku u određenim situacijama za učenike jako zahtjevan.

U ovom diplomskom radu želi se usporediti kako učenici razumiju vektore u kontekstu matematike i fizike. Učenici zadatke bez dodatnog konteksta najčešće susreću u nastavi matematike, tako da će se, zbog jednostavnosti, takve zadatke nazivati zadacima iz matematike. Istraživanje je provedeno pomoću testa kojeg su razvili Pablo Barniol i Genaro Zavala [1]. Test se sastoji od 12 paralelnih (izomornih) zadataka iz matematike i fizike koji su gotovo identični, tj. odnose se na isti vektorski koncept, ali su postavljeni u različitim kontekstima.

Također, tijekom rješavanja testa učenicima su mjereni pokreti očiju što je omogućilo analizu njihove pažnje i koncentracije pri čitanju i rješavanju zadataka. To je omogućilo dodatni uvid u učeničko razumijevanje vektora u različitim kontekstima.

Istraživanje je provedeno u suradnji s učenicima četvrtih razreda općih i prirodoslovno-matematičkih zagrebačkih gimnazija. Testiranje je provedeno pojedinačno zbog mjerenja pokreta očiju. Analizirani su dobiveni podaci koji su pokazali s kojim vektorskim konceptima učenici imaju najviše poteškoća na završetku srednje škole. U nastavku će također biti navedene implikacije dobivenih rezultata za nastavu matematike i fizike.

## 2. PREGLED PRIJAŠNJIH ISTRAŽIVANJA

Primjena matematike u fizici je neophodna, pa je tako razumijevanje vektora vrlo važno u poučavanju fizike gdje se vektori koriste za prikaz različitih fizikalnih veličina. Iako su matematika i fizika usko povezane, događa se da se u nastavi fizike matematika koristi samo kao alat za izražavanje odnosa između različitih fizikalnih pojmova. Taj pogled na ulogu matematike u fizici dovodi do razdvajanja između matematičkog koncepta i konceptualnog aspekta fizikalne teorije.

Brojna istraživanja pokazala su da se studenti suočavaju s poteškoćama u prijenosu matematičkih znanja u kontekst fizike. Analiza predavanja iz elektromagnetizma iskusnog sveučilišnog nastavnika je pokazala kako on naglašava strukturnu ulogu matematike u svojim predavanjima i ukazala na tri aspekta kojima treba posvetiti vremena u nastavi fizike [5]. Prvo treba posvetiti znatnu količinu vremena za izgradnju matematičkih reprezentacija fizikalnih koncepata. Drugi aspekt se odnosi se na tumačenje novih koncepata gdje se posebna pažnja treba posvetiti vizualizaciji i povezivanju novih koncepata sa svakodnevnim životnim situacijama. I posljednje se navodi da je potrebno uključiti i motivirati studente na postavljanje pitanja i razmišljanja pomoću kojih se dolazi do filozofskih rasprava o prirodi fizike i osobinama fizikalnih spoznaja, kao i do metakognitivnih uvida.

Vektori se uvode na početku sveučilišnih kolegija iz fizike. Prva istraživanja na studentima pokazala su da studenti imaju značajnih poteškoća s osnovnim vektorskim konceptima. Većina sveučilišnih nastavnika fizike pretpostavlja da studenti imaju potrebno znanje iz vektora te im je dovoljan kratak pregled i ponavljanje gradiva. To je potaknulo sveučilišnog profesora R. Knighta da provede istraživanje pomoću Testa poznavanja vektora [6]. Tim testom je provjerio znanje o vektorima na studentima fizike prve godine fakulteta. Iz testa je zaključio da 35% studenata ima potrebno znanje za sudjelovanje u sveučilišnoj nastavi fizike. Također, utvrdio je da 15% studenata ima znanje o vektorima, ali ga ne znaju primijeniti u zadacima iz fizike, dok 50% studenata nema potrebno znanje za sudjelovanje u nastavi fizike.

Nguyen i Meltzer proveli su slično istraživanje na studentima fizike prvog i drugog semestra [8]. Njihovo istraživanje ispitivalo je konceptualno razumijevanje veličine i

smjera vektora te zbrajanja vektora. Zaključili su da 50% studenata nije znalo zbrojiti vektore u dvije dimenzije. Također, studenti su imali poteškoća sa smjerom vektora i translacijom vektora. Rezultati ovog istraživanja su pokazali da u uvodnim kolegijima iz fizike potrebno posvetiti više nastavnog vremena kada se rade vektorski koncepti.

Nadalje, Shaffer i McDermott su proveli istraživanje pomoću kojeg su provjeravali znanje i primjenu vektora u kinematici [11]. Pokazalo se da kinematika predstavlja velike poteškoće ne samo studentima prve godine fakulteta, već i studentima koji su pred kraj studija pa čak i doktorskim studentima. Većina studenata nije znala odrediti promatranu brzinu i akceleraciju. No, zanimljivo je da većini slučajeva poteškoće su bile konceptualne, a ne matematičke. Istraživanje je pokazalo kako treba dati više naglaska na operacije s vektorima u nastavnom planu i programu te je potaknulo istraživače da razviju nastavne materijale koji će pomoći studentima u razumijevanju vektora i njihovoj primjeni u kinematici.

U istraživanju koje su proveli na budućim nastavnicima fizike, Sirait i Oktavianty su zaključili da je većina studenata točno riješila zadatke sa zbrajanjem kolinearnih vektora, iste i suprotne orijentacije [12]. Problemi su ustanovljeni kod oduzimanja kolineranih vektora gdje su studenti često zanemarili predznak minus i odmah prvi vektor zbrojili s drugim vektorom umjesto da zbroje suprotan vektor. Budući nastavnici fizike su također pokazali poteškoće sa zbrajanjem i oduzimanjem vektora u dvije dimenzije.

Heckler i Scaife proveli su istraživanje u kojem su uspoređivali studentsko razumijevanje vektora, zbrajanje i oduzimanje vektora, u matematičkom i fizikalnom kontekstu gdje su vektori izraženi pomoću strelica i u obliku ortonormirane baze vektora  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  [4]. Pokazalo se da studenti puno bolje rješavaju jednodimenzionalne i dvodimenzionalne zadatke u matematici i fizici pomoću  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  formata gdje je riješenost zadataka iznad 90%. Također, ispostavilo se da studenti drugačije razumiju vektore kada su zadani u formatu strelica i formatu jediničnih vektora. Zaključili su i predlažu da se u nastavi fizike više radi na različitim zapisima vektora te se s time poboljšava razumijevanje vektora.

U različitim područjima fizike koriste se skalarni i vektorski umnožak vektora. Kustusch je napravila istraživanje u kojem je kod studenata provjeravala razumijevanje vektorskog umnoška i primjenu pravila desne ruke [7]. U tom istraživanju pokazalo se da studenti najviše poteškoća imaju s konceptualnim razumijevanjem vektorskog umnoška i određivanjem orijentacije vektorskog umnoška te da kontekst i reprezentacija vektora imaju značajan učinak na primjenu pravila desne ruke.

Na temelju prijašnjih istraživanja Pablo Barniol i Genaro Zavala sastavili su Test razumijevanja vektora (eng. *TUV – Test of Understanding of Vectors*). TUV je konceptualni test s višestrukim izborom odgovora [2]. Test sadrži 20 pitanja od čega je 11 zadataka koji provjeravaju konceptualno razumijevanje vektora zadano grafički, 7 zadataka provjerava vektorske koncepte pomoću računanja i 2 zadatka sadrže grafičku i računsku provjeru vektorskih koncepata. TUV testira 10 vektorskih koncepata koji se koriste u uvodnim satima fizike na sveučilišnoj razini. Prve verzije testa imale su više od četiri distraktora (netočna odgovora) kako bi se utvrdili oni najfrekventniji. Konačna verzija testa sastoji se od četiri distraktora i jednog točnog odgovora. Test su rješavali brojni studenti kako bi se zadaci rangirali po težini te su provedene detaljne analize o studentskom razumijevanju svakog zadatka na TUV-u. Test su rješavali studenti u Meksiku [1], Tajlandu [10] i Hrvatskoj [13]. Rezultati su pokazali da je TUV najkorisniji za testiranje vektorskih koncepata kada je sposobnost ispitanika osrednja, dok se test pokazao prelaganim kada je sposobnost ispitanika iznad toga. To se pokazalo u istraživanju u Hrvatskoj gdje su studenti prve godine tehničkih i prirodoslovno-matematičkih fakulteta imali puno bolje rezultate nego studenti u istraživanjima provedenim u Meksiku i Tajlandu.

Zatim su Barniol i Zavala pomoću TUV-a osmislili dvije kraće verzije s 12 zadataka. U prvoj verziji su zadaci bez mehaničkog konteksta (eng. *TUV-12 items no context*), a u drugoj zadaci s mehaničkim kontekstom (eng. *TUV-12 items mechanics*). U mehaničkom kontekstu su korištene sljedeće fizikalne veličine: sila, brzina i rad. Dakle, test se sastoji od 24 zadatka gdje je 12 paralelnih (izomorfnih) zadataka koji ispituju sedam vektorskih koncepata. Kao što je već spomenuto, zadaci bez dodatnog konteksta najčešće se koriste u nastavi matematike, pa ćemo takve zadatke nazivati zadacima iz matematike, a zadatke s kontekstom iz mehanike ćemo zvati zadacima iz fizike. Ti zadaci su korišteni i u ovom diplomskom radu.

Prvo istraživanje učinka različitih konteksta na učeničko razumijevanje vektorskih koncepata je provedeno na privatnom sveučilištu u Meksiku gdje su ispitanici bili studenti prve godine tehničkih studija. Prvo testiranje provedeno je se na 608 studenata pri čemu je 304 studenta rješavalo test iz matematike i 304 test iz fizike. Istraživanje se tada fokusiralo na usporedbu studentskih postignuća na oba testa. Dok se drugo testiranje provodilo na 203 studenta gdje je njih 103 rješavalo test iz matematike i 100 test iz fizike.

U drugom testiranju fokus je bio na zadacima u kojima su se utvrdile razlike između matematike i fizike te se od studenata tražilo obrazloženje odgovora u pisanom obliku. Ukupno nije bilo statistički značajne razlike u riješenosti oba testa, ali se razlika pojavila kod nekih vektorskih koncepata, tj. zadataka. U dva zadatka u kojima je ispitivan skalarni umnožak dobivena je statistički značajna razlika za matematički i fizikalni kontekst i u oba slučaja su bolje riješeni zadaci u fizikalnom kontekstu. Zadatak koji je ispitivao geometrijsku interpretaciju skalarnog umnoška točno je riješilo 52% studenata u fizikalnom kontekstu i 27% studenata u matematičkom kontekstu. Zadatak u kojem se tražilo prepoznavanje formule za skalarni produkt ( $AB\cos\theta$ ) točno je riješilo 81% studenata u fizikalnom kontekstu i 60% studenata u matematičkom kontekstu. Također iz pisanih obrazloženja studenata može se zaključiti kako im je fizikalni kontekst pomogao pri rješavanju zadataka.

Većina istraživanja razumijevanja vektora je provedena na studentima, ali bilo je i pokušaja razvoja nastavnih materijala za učenike srednjih škola. Tako su Wutchana i suradnici razvili Radni list za poboljšanje učeničkog razumijevanja vektora (eng. *A Worksheet for the Recovery of Students' Vector Understanding*) [14]. U istraživanju provedenom u tri razreda srednje škole prosječni faktori prirasta (g-faktor) bili su 0.7, 0.76 i 0.69 iz čega se može zaključiti da su učenici pokazali značajan napredak u razumijevanju vektorskih koncepata te da su razvijeni materijali bili vrlo učinkoviti.

### **3. METODE**

#### **3.1. ISPITANICI**

U ovom istraživanju sudjelovalo je 34 učenika četvrtih razreda prirodoslovno-matematičkih i općih gimnazija u Zagrebu. Istraživanju su svi učenici pristupili dobrovoljno, a testiranje je provedeno na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu u veljači i ožujku 2019. godine. Zbog tehničkih poteškoća, podaci o pokretima očiju četiri učenika nisu bili dovoljno dobre kvalitete, pa su analizirani podaci od preostalih 30 učenika.

U istraživanju su sudjelovali učenici četvrtih razreda jer nas je zanimalo razumijevanje vektora na kraju srednje škole. Naravno, učenici koji su sudjelovali u istraživanju su zainteresirani za matematiku i fiziku i nisu tipični predstavnici maturanata. No, oni vjerojatno mogu predstavljati skupinu maturanata koji upisuju prirodoslovno-matematičke i tehničke fakultete.

Kao što je navedeno u uvodu diplomskog rada, do uvođenja novog kurikulumu, u Hrvatskoj su se vektori u nastavi matematike prvi put uvodili u osmom razredu osnovne škole. Zatim su učenici znanje o vektorima razvijali i nadograđivali u trećem razredu srednje škole gdje su vektori definirani kao klasa ekvivalencije skupa usmjerenih dužina, prikazivani u koordinatnom sustavu te je uveden skalarni umnožak vektora (i vektorski umnožak u prirodoslovno-matematičkim gimnazijama).

U nastavi fizike mehanika se predaje u prvom razredu srednje škole i tada se pomak, brzina, akceleracija i sila uvode kao vektorske veličine. Rad se uvodi kao skalarna veličina koja za konstantnu silu ovisi o iznosu sile, pomaku i kutu između sile i pomaka. Pritom se rad ne definira strogo kao skalarni umnožak jer se skalarni umnožak spominje tek kasnije u nastavi matematike.

### 3.2. MATERIJALI

U istraživanju se koristio test koji se sastoji od 12 paralelnih (izomornih) zadataka iz matematike i fizike kojeg su razvili Pablo Barniol i Genaro Zavala sa Sveučilišta Monterrey u Meksiku. Test je za svrhu ovog istraživanja preveden s engleskog jezika na hrvatski. Svaki par zadataka sadržava dio bez fizikalnog konteksta (matematički kontekst) i dio s mehaničkim kontekstom (fizikalni kontekst) pri čemu su bili ponuđeni odgovori s višestrukim izborom. U zadacima iz fizike su se koristile sljedeće fizikalne veličine: sila, brzina i rad. U testu je ispitivano razumijevanje sedam vektorskih koncepata: smjera, duljine (modula, iznosa), komponenti, zbrajanja, oduzimanja, množenja skalarom i skalarnog umnoška vektora. [Tablica 1](#) prikazuje koji zadatak je ispitivao određeni vektorski koncept, dan je kratki opis zadatka te navedena fizikalna veličina koja je korištena u fizikalnom kontekstu.

Vektorski koncept	Broj zadatka	Opis	Fizikalna veličina
1. Smjer	5	Odabir vektora s istim smjerom između nekoliko grafova	Sila
2. Duljina (modul, iznos)	11	Izračun duljine vektora zapisanog u notaciji jediničnih vektora	Sila
3. Komponente	3	Grafički prikaz $y$ komponente vektora	Sila
	7	Grafički prikaz $x$ komponente vektora	Sila
	10	Izračun $x$ komponente vektora	Sila
4. Zbrajanje	1	Grafičko zbrajanje vektora u 2D	Sila

5. Množenje skalarom	8	Grafički prikaz vektora pomnoženog negativnim skalarom	Brzina
6. Oduzimanje	12	Grafičko oduzimanje vektora u 1D	Brzina
	9	Grafičko oduzimanje vektora u 2D	Brzina
7. Skalarni umnožak	2	Geometrijska interpretacija skalarnog umnoška	Rad
	4	Izračun skalarnog umnoška pomoću izraza $AB\cos\theta$	Rad
	6	Izračun skalarnog umnoška vektora zapisanih pomoću jediničnih vektora	Rad

Tablica 1 Opis zadataka i pripadajući vektorski koncept koji ispituju i fizikalna veličina koja je korištena u kontekstu mehanike [11]

### 3.3. MJERENJE POKRETA OČIJU

Mjerenje pokreta očiju može se provoditi na dva načina: pomoću uređaja za mjerenje koji se nalazi na zaslonu računala i pomoću naočala s ugrađenim kamerama. Pomoću kamere prati se centar zjenice i mjesto gdje se svjetlost odbija od rožnice (*Pupil Center Corneal Reflection*, PCCR). Kako se oko pomiče, pomiče se položaj zjenice, dok refleksija svjetlosti od rožnice ostaje na približno istom položaju (Slika 1). Prije početka snimanja podataka potrebno je napraviti kalibraciju uređaja.



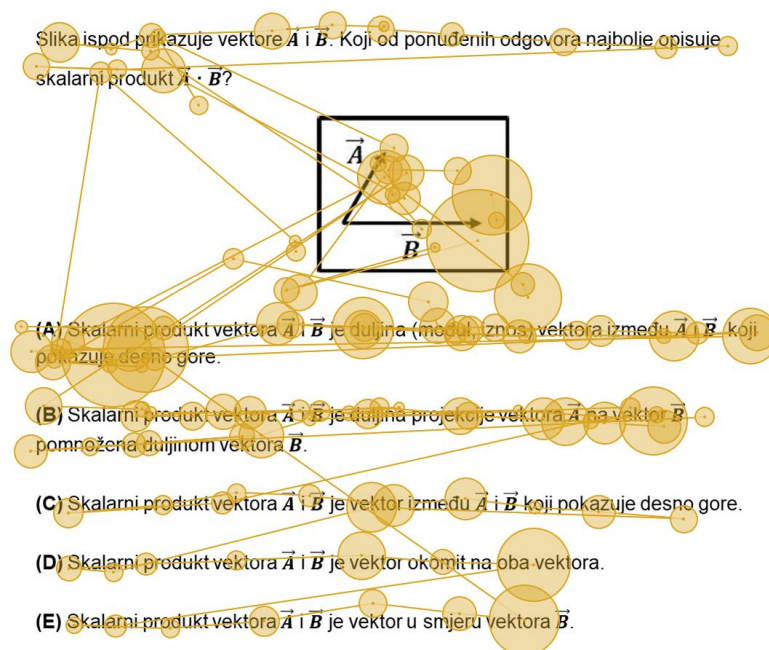
Slika 1 Relativni položaj zjenice i refleksije svjetlosti na rožnici [3].



Pri ovom testiranju pokreti očiju su mjereni pomoću SMI uređaja RED-m (Sensomotoric Instruments G.m.b.H.) s frekvencijom od 120 Hz. Učenicima su pitanja prikazana na zaslonu računala koji je postavljen na udaljenosti 50 cm od njihovih očiju. Kalibracija uređaja odvijala se za svakog učenika posebno pomoću algoritma za kalibraciju u 5 točaka. Jedna polovica učenika prvo je rješavala zadatke s matematičkim kontekstom, dok je druga polovica učenika prvo rješavala zadatke s kontekstom fizike. Kada su učenici odabrali jedan od ponuđenih odgovora prešli bi na sljedeće pitanje te se više nisu mogli vraćati. Također, učenici nisu imali vremenska ograničenja za odabir odgovora.

### 3.4. ANALIZA PODATAKA

Dobiveni podaci o pokretima očiju analizirani su pomoću softvera BeGaze koji omogućuje određivanje fiksacija i sakada pomoću algoritma *Identification by Dispersion-Threshold* (IDT). Fiksacija opisuje stanje kada oko ostaje relativno mirno, dok je sakada brzi pokret oka između dvije fiksacije. Na [slici 2](#) se može vidjeti primjer fiksacija i sakada jednog ispitanika u ovom istraživanju. Fiksacije su prikazane kao krugovi čiji je polumjer proporcionalan duljini trajanja fiksacije, a sakade su linije koje povezuju fiksacije.

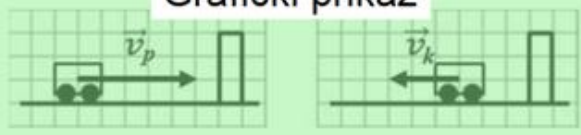


Slika 2 Prikaz fiksacija i sakada


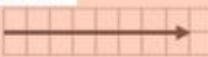
U svakom zadatku definirana su tri manja pravokutna područja interesa (*Areas of interest* - AOI): *Korijen zadatka*, *Grafički prikaz* i *Višestruki izbor* (slika 3) i jedan veliki AOI *Sve* koji uključuje sva tri manja područja interesa.. Zadatak 6 i 11 nisu imali AOI *Grafički prikaz*. AOI *Sve* služi za određivanje učenikovog ukupnog vremena zadržavanja na zadatku, tj. vremena gledanja (*dwell time*).

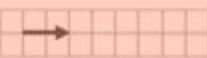
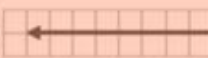
Promotri kolica koja se sudaraju sa zidom. Slika prikazuje početnu brzinu  $\vec{v}_p$  prije sudara **Korijen zadatka** akon sudara. Odaberi odgovor koji prikazuje promjenu vektora brzine, tj. razliku  $\vec{v}_k - \vec{v}_p$ .

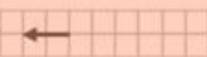
**Grafički prikaz**



**Višestruki izbor**

(A)  (D) 

(B)  (E) 

(C) 

Slika 3 Primjer AOI-a na zadatku 12 iz fizike

Za svaki zadatak određeno je vrijeme gledanja, broj fiksacija i prosječno trajanje fiksacije za svaki AOI, no te varijable međusobno su zavisne pa će se najviše prikazati i komentirati rezultati za varijablu vrijeme gledanja. Za usporedbu učeničkih rezultata i vremena zadržavanja na zadacima korišten je  $t$ -test<sup>1</sup> i  $\chi^2$  test. Prag  $p = 0.05$  korišten je za određivanje razine značajnosti učinka u svim provedenim testovima.

<sup>1</sup>  $t$ -test je statistički postupak za testiranje značajnosti razlike između dva uzorka. Uspoređuju se aritmetičke sredine uzoraka [19].

<sup>2</sup> Hi-kvadrat test koristi se kada se treba odrediti razlikuju li se frekvencije dvaju uzoraka u mjerenim svojstvima.

## 4. REZULTATI I DISKUSIJA

### 4.1. USPOREDBA UČENIČKIH REZULTATA NA ZADACIMA IZ MATEMATIKE I FIZIKE

Za usporedbu značajnosti razlika između rezultata učenika na ispitu matematike i fizike korišten je  $t$ -test za male zavisne uzorke (do 30 uzoraka). Prosječni rezultat učenika i standardna devijacija bili su  $(67 \pm 21)\%$  na matematičkim zadacima i  $(66 \pm 24)\%$  na zadacima iz fizike. Između ovih rezultata nije bilo statistički značajne razlike ( $t(29) = 0.66, p > 0.05$ ). Prosječni rezultati pojedinog učenika na ispitu iz matematike i fizike prikazani su u [tablici 2](#).

Učenik	Matematika (%)	Fizika (%)
1	25	42
2	75	92
3	50	58
4	67	83
5	92	91
6	100	100
7	100	92
8	75	75
9	83	67
10	50	58
11	92	83
12	75	75
13	92	100
14	67	58
15	92	67
16	58	58
17	42	42
18	58	42
19	50	67
20	67	83
21	83	58
22	67	58
23	50	33
24	50	25

25	50	33
26	67	58
27	83	100
28	25	17
29	50	50
30	83	100

Tablica 2 Prosječni rezultati pojedinog učenika na ispitu iz matematike i fizike

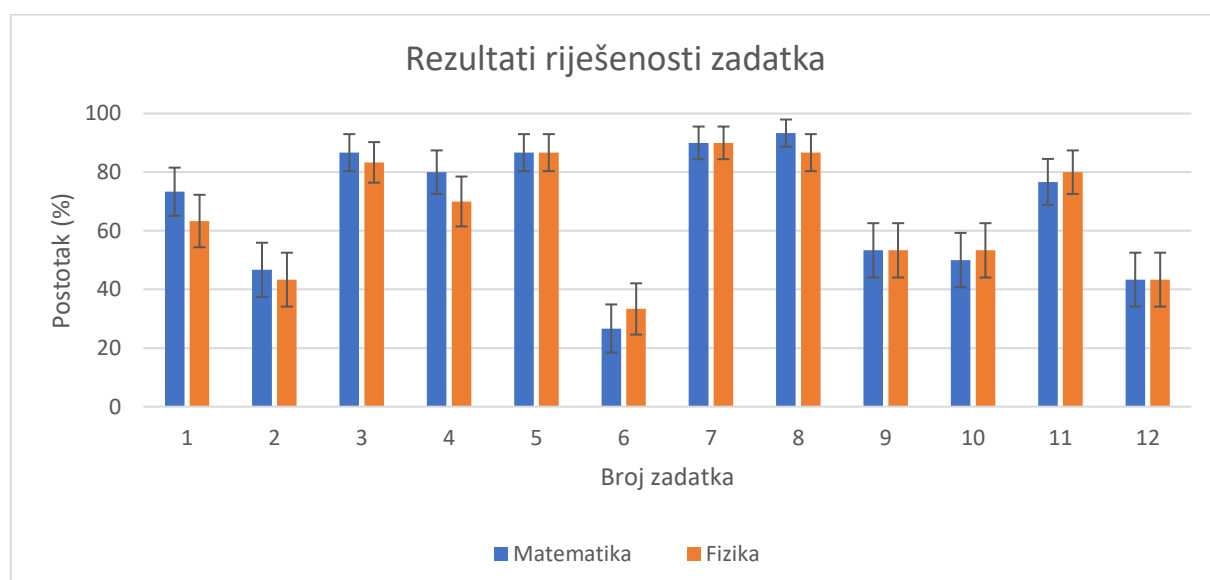
Iz tablice vidimo da su dva učenika test iz matematičkog konteksta riješili 100%, dok je test iz fizike 100% riješilo 4 učenika pri čemu je samo jedan učenik oba testa riješio 100%. Uočimo da su tri učenika test iz matematičkog konteksta riješili s manje od 50%, dok je test iz fizike s manje od 50% riješilo sedam učenika pri čemu su dva učenika na oba testa imali manje od 50%.

Na [slici 4](#) vidljiv je grafički prikaz rezultata riješenosti pojedinih zadataka u oba konteksta. Iz grafa je vidljivo da nema značajne razlike u postotku točnih odgovora u zadacima u oba konteksta, iako su u većini slučajeva učenici nešto bolje riješili zadatke u kontekstu matematike. Može se uočiti kako je u matematičkom kontekstu najbolje riješen 8. zadatak kojeg je 93% učenika riješilo točno. U tom zadatku učenici su trebali odrediti grafički prikaz vektora pomnožen negativnim skalarom. U kontekstu fizike učenici su najbolje riješili 7. zadatak gdje su određivali  $x$ -komponentu sile  $\vec{F}$  i 90% je točno odgovorilo. Osim tih zadataka dobro su riješeni 3., 4., 5. i 11. zadatak u oba konteksta. U trećem zadatku učenici su trebali odrediti  $y$ -komponentu vektora  $\vec{A}$ , odnosno sile  $\vec{F}$ . U četvrtom zadatku su trebali odrediti skalarni umnožak vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ , odnosno rad  $W$ . U petom zadatku su trebali odrediti vektore istog smjera, odnosno sile, a u jedanaestom zadatku duljinu vektora zadanog u ortonormiranoj bazi, odnosno iznos sile izraženu u njutnima.

U oba konteksta najlošije je riješen 6. zadatak kojeg je točno riješilo 27% učenika u kontekstu matematike, odnosno 33% u kontekstu fizike. U tom zadatku učenici su trebali odrediti skalarni produkt vektora u ortonormiranoj bazi u kontekstu matematike, odnosno izračunati rad u kontekstu fizike. Može se uočiti da su osim 6. zadataka, lošije riješeni 2. i 12. zadatak koje su točno riješili manje od 50% učenika. U 2. zadatku učenici su trebali

odrediti geometrijsku interpretaciju skalarnog umnoška, odnosno u kontekstu fizike izračunati rad kao umnožak iznosa sile u smjeru pomaka i duljine pomaka. U 12. zadatku učenici su u ispitu iz matematike trebali odrediti razliku kolinearnih vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ , a iz fizike odrediti razliku vektora brzine u 1D. Općenito, učenici su najlošije riješili zadatke u kojima se ispitivao skalarni produkt i oduzimanje vektora.

U [tablici 3](#) prikazani su rezultati  $\chi^2$  testova riješenosti pojedinog zadatka. Iz tablice se može primijetiti kako nema statistički značajne razlike u postotku točnih odgovora na pojedinim zadacima iz matematike i fizike.



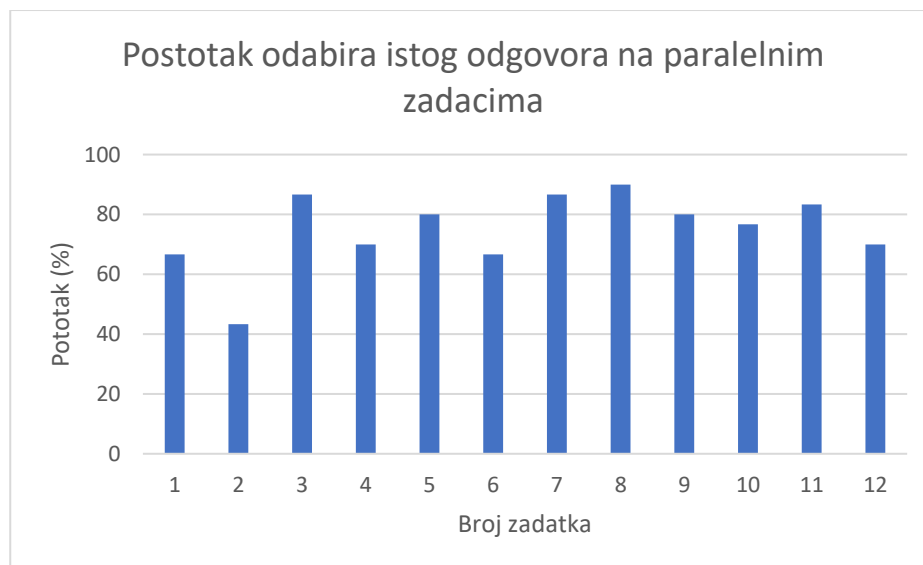
Slika 4 Grafički prikaz rezultata riješenosti pojedinog zadatka

Broj zadatka	$\chi^2$	$p$
1	0.69	0.41
2	0.07	0.80
3	0.13	0.72
4	0.80	0.37
5	0.00	1.00
6	0.32	0.57
7	0.00	1.00
8	0.74	0.39
9	0.00	1.00
10	0.07	0.80

11	0.10	0.75
12	0.00	1.00

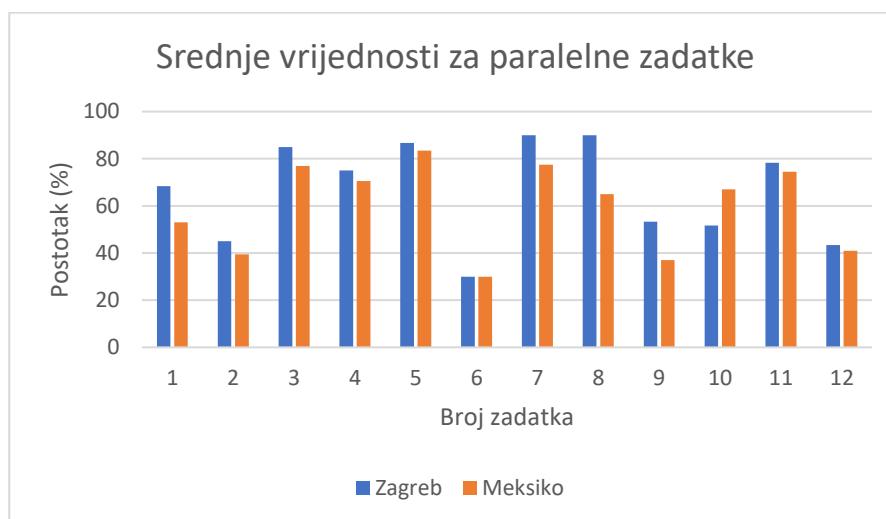
Tablica 3  $\chi^2$  test za usporedbu riješenosti pojedinih zadataka iz matematike i fizike

Na [slici 5](#) prikazan je grafički prikaz postotka odabira istih odgovora na paralelnim (izomorfnim) zadacima neovisno o tome je li odabir odgovora točan ili netočan. Na temelju podataka može se primijetiti kako je čak na 6 zadataka više od 80% učenika odabralo isti odgovor. Na drugom zadatku (geometrijska interpretacija skalarnog umnoška) svega je 43% učenika odabralo isti odgovor, što je najmanji postotak u odnosu na preostale zadatke. Na temelju toga može se zaključiti kako učenici prilikom odabira odgovora u tom zadatku nisu razmišljali na sličan način za oba konteksta. Promatrajući cjelokupne rezultate, čak 75% učenika je odabiralo isti odgovor na paralelnim zadacima iz oba konteksta. Navedena brojka je relativno visoka iz čega se može zaključiti kako su učenici uglavnom primjenjivali slične metode u rješavanju istog zadatka unutar oba konteksta.



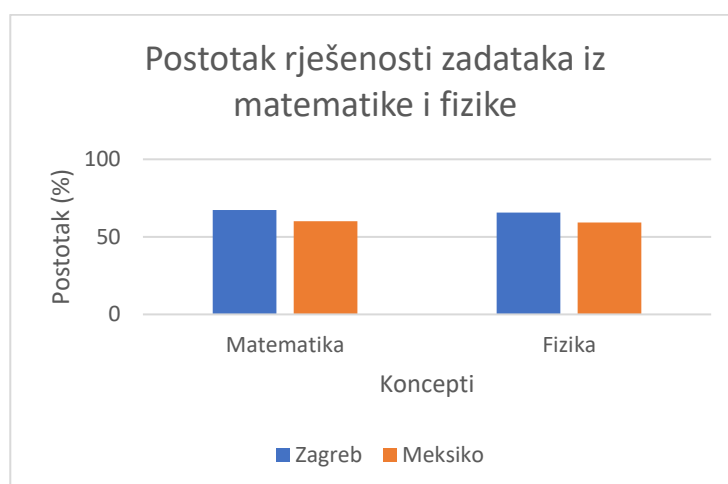
Slika 5 Grafički prikaz postotka odabira istih odgovora na paralelnim zadacima

Kako je navedeno u [2. poglavlju](#), slično istraživanje proveli su Pablo Barniol i Genaro Zavala u Meksiku gdje su zadatke rješavali studenti prve godine fakulteta. Na [slici 6](#) prikazana je usporedba rezultata učenika u Zagrebu i studenata u Meksiku. Prikazane su srednje vrijednosti za paralelne zadatke iz matematike i fizike.



*Slika 6 Usporedba rezultata učenika u Zagrebu i studenata u Meksiku*

[Slika 6](#) pokazuje da su učenici iz Zagreba većinu zadataka riješili nešto bolje od studenata iz Meksika. Razlog tome je vjerojatno taj što su naši ispitanici bili dobrovoljci koji su motivirani za nastavu matematike i fizike, dok su u Meksiku bili testirani svi studenti na godini. Jedino su 10. zadatak (izračun komponente vektora) bolje riješili studenti iz Meksika vjerojatno zato što imaju više iskustva s trigonometrijskim funkcijama. Također, može se primijetiti kako su težine zadataka bile slične za učenike iz Hrvatske i studente iz Meksika. Na primjer za obje grupe ispitanika je 6. zadatak bio najteži. Dodatno, na [slici 7](#) prikazan je ukupni postotak riješenosti svih zadataka iz matematike i fizike. Iz prikaza je vidljivo kako je veći postotak učenika iz Zagreba riješio točno zadatke iz oba konteksta, no ta razlika nije bila velika.



Slika 7 Ukupni postotak riješenosti koncepta matematike i koncepta fizike za učenike iz Zagreba i studente iz Meksika

## 4.2. USPOREDBA POKRETA OČIJU TIJEKOM RJEŠAVANJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE I FIZIKE

Ukupno vrijeme gledanja učenika i standardna devijacija bili su  $(25 \pm 9)\%$  na matematičkim zadacima i  $(30 \pm 9)\%$  na zadacima iz fizike. Između ovih rezultata prisutna je statistički značajna razlika ( $t(29) = 2.29$ ,  $p = 0.03$ ). Ukupno vrijeme gledanja cjelokupnog zadatka pojedinog učenika na ispitu iz matematike i fizike prikazano je u [tablici 4](#).

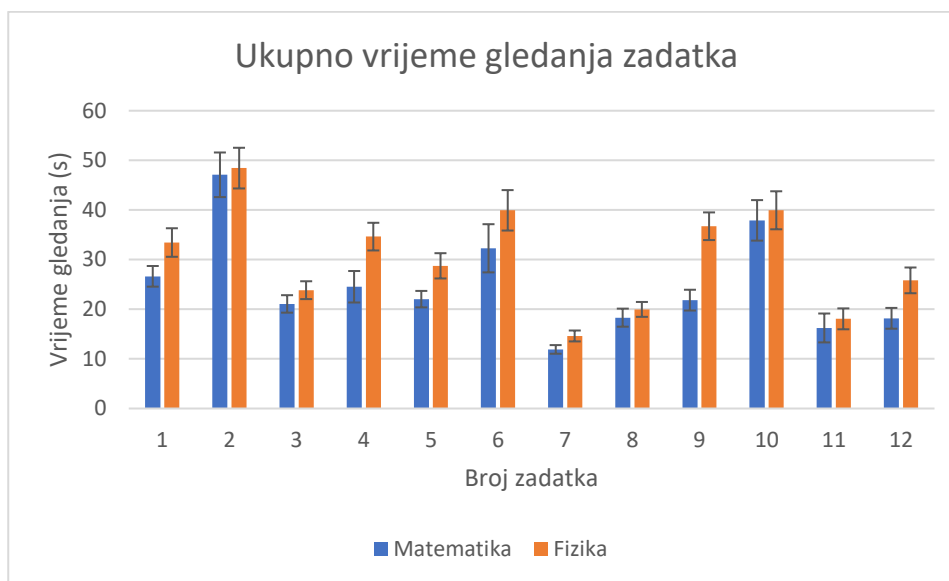
Učenik	Matematika (s)	Fizika (s)
1	31	28
2	31	40
3	25	22
4	28	27
5	31	17
6	30	17
7	18	16
8	29	20
9	29	26
10	26	29
11	30	28
12	42	33



13	24	18
14	32	22
15	55	35
16	9	41
17	21	43
18	22	39
19	23	37
20	19	32
21	16	29
22	16	33
23	16	23
24	20	38
25	13	22
26	24	47
27	22	49
28	26	34
29	26	37
30	9	27

*Tablica 4 Ukupno vrijeme gledanja cjelokupnog zadatka*

Na [slika 8](#) dan je grafički prikaz ukupnog vremena gledanja pojedinih zadataka. Iz tog prikaza se može primijetiti kako je ukupno vrijeme gledanja bilo dulje za zadatke iz fizike u odnosu na matematiku. U [tablici 5](#) prikazani su rezultati  $t$ -testova ukupnog vremena gledanja pojedinog zadatka. Iz tablice se može primijetiti statistički značajna razlika u zadacima 4 (izračun skalarnog umnoška pomoću izraza  $AB\cos\theta$ ), 5 (odabir vektora s istim smjerom između nekoliko grafova), 7 (grafički prikaz  $x$  komponente vektora), 9 (grafičko oduzimanje vektora u 2D) i 12 (grafičko oduzimanje vektora u 1D).



Slika 8 Ukupno gledanje pojedinih zadataka

Broj zadatka	$t$	$p$
1	2.02	0.05
2	0.27	0.79
3	1.18	0.25
4	2.64	0.01
5	2.70	0.01
6	1.11	0.28
7	2.38	0.02
8	0.64	0.53
9	5.09	<0.0001
10	0.32	0.75
11	0.48	0.63
12	2.39	0.02

Tablica 5  $t$ -test za ukupno vrijeme gledanje zadataka

Prosječni broj fiksacija učenika i standardna devijacija bili su  $(78 \pm 27)$  na matematičkim zadacima i  $(98 \pm 28)$  na zadacima iz fizike. Između ovih rezultata prisutna je statistički značajna razlika ( $t(29) = 2.89, p = 0.007$ ). Prosječni broj fiksacija pojedinog učenika na ispitu iz matematike i fizike prikazan je u [tablici 6](#).

Učenik	Matematika	Fizika
1	94	83
2	93	118
3	85	83
4	82	80
5	99	69
6	98	65
7	67	61
8	97	72
9	88	83
10	67	72
11	93	89
12	109	91
13	70	63
14	94	71
15	175	128
16	34	134
17	67	136
18	71	120
19	81	126
20	51	90
21	48	75
22	66	132
23	58	85
24	67	124
25	43	68
26	79	148
27	67	147
28	74	103
29	83	129
30	35	88

*Tablica 6 Prosječni broj fiksacija pojedinog učenika*

Prosječno vrijeme trajanja fiksacija učenika i standardna devijacija bili su ( $294 \pm 42$ ) ms na matematičkim zadacima i ( $286 \pm 43$ ) ms na zadacima iz fizike. Između ovih rezultata nije bilo statistički značajne razlike ( $t(29) = 1.59, p > 0.05$ ). Prosječno vrijeme trajanja fiksacija pojedinog učenika na ispitu iz matematike i fizike prikazano je u [tablici 7](#).

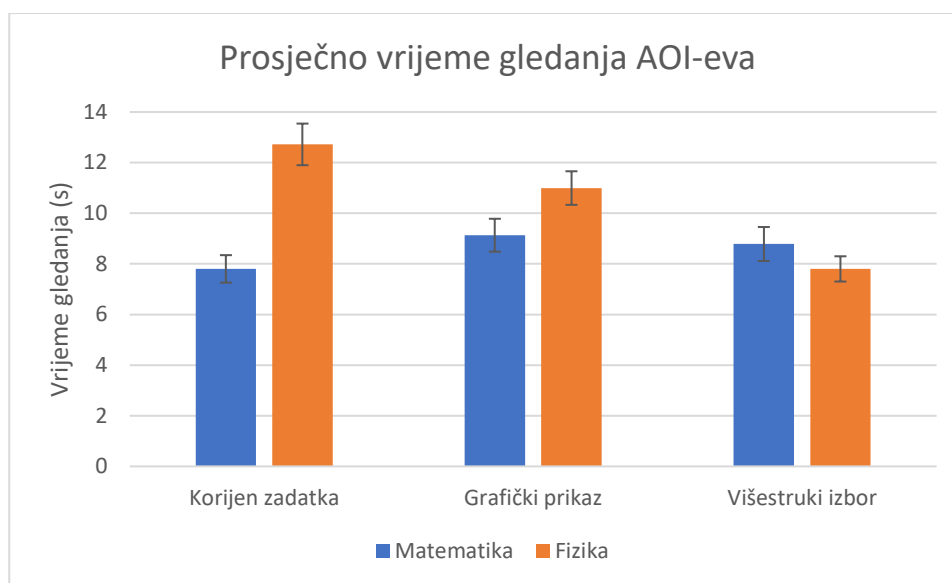
Učenik	Matematika (ms)	Fizika (ms)
1	318	305
2	316	313
3	255	236
4	328	319
5	294	226
6	269	223
7	244	236
8	261	227
9	304	293
10	369	376
11	291	299
12	380	335
13	307	260
14	315	293
15	305	257
16	269	288
17	295	296
18	290	315
19	257	259
20	393	361
21	298	356
22	205	205
23	252	232
24	284	291
25	267	292
26	271	294
27	321	317
28	338	315
29	294	272
30	239	287

Tablica 7 Prosječno vrijeme trajanja fiksacija pojedinog učenika

Da bismo dalje istražili uočene razlike u vremenu gledanja na zadacima iz matematike i fizike, analizirali smo podatke za manja područja interesa (AOI-eve): *Korijen zadatka*, *Grafički prikaz* i *Višestruki izbor*.

Na [slici 9](#) prikazan je grafički prikaz prosječnog vremena gledanja tih područja interesa za sve zadatke. iz kojeg se vidi trend da su učenici dulje gledali *Višestruki izbor*

za zadatke iz matematike, dok su manje vremena gledali *Korijen zadatka* i *Grafički prikaz* u zadacima iz matematike nego iz fizike. U [tablici 8](#) prikazani su rezultati *t*-testova prosječnog vremena gledanja AOI-eva. Iz tablice se može primijetiti statistički značajna razlika jedino kod *Korijena zadatka* gdje se dulje vrijeme može pripisati dužem tekstualnom dijelu zadatka iz fizike u odnosu na zadatke iz matematike.



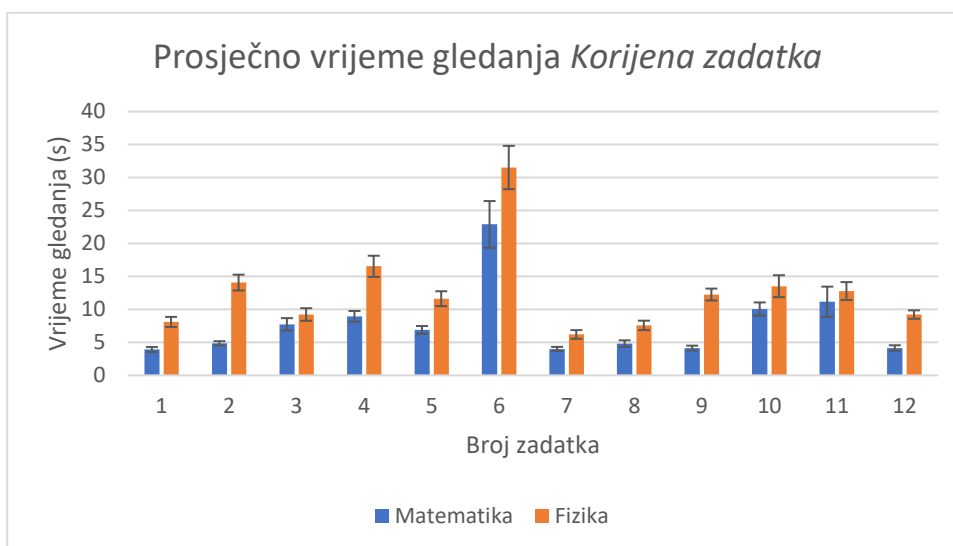
Slika 9 Prosječno vrijeme gledanja AOI-eva za sve zadatke

AOI	<i>t</i>	<i>p</i>
Korijen zadatka	5.12	<0.0001
Grafički prikaz	1.98	0.06
Višestruki izbor	1.18	0.25

Tablica 8 *t*-test prosječnog vremena gledanja AOI-eva

U nastavku se nalaze grafički prikazi prosječnog vremena gledanja pojedinih AOI-eva na temelju svakog zadatka. Na [slici 10](#) vidljiv je grafički prikaz prosječnog vremena gledanja *Korijena zadatka*. Iz prikaza se može primijetiti kako je vrijeme gledanja *Korijena zadatka* bilo dulje za zadatke iz fizike u odnosu na matematiku. U [tablici 9](#) prikazani su rezultati *t*-testova za vrijeme gledanja *Korijena* pojedinog zadatka. Iz tablice se može primijetiti statistički značajna razlika kod zadataka 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 i 12. Zanimljivo je primijetiti kako je učenicima najviše vremena trebalo za zadatak 6 koji je

bio jedan od zadataka koje su učenici najlošije riješili u oba konteksta. Dugo vrijeme gledanja nije uzrokovano samo duljinom teksta nego ukazuje i na veće kognitivno opterećenje tijekom rješavanja tog zadatka.

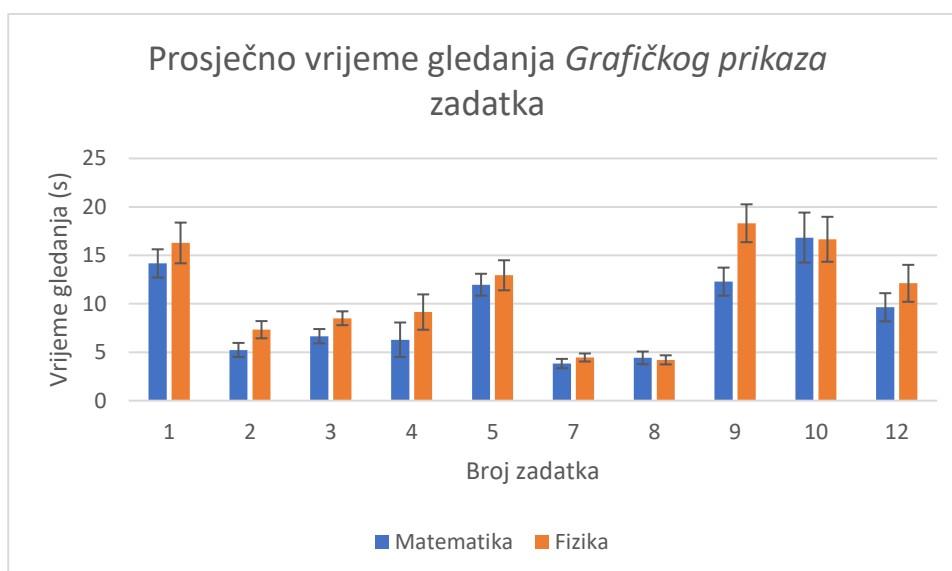


Slika 10 Prosječno vrijeme gledanja Korijena zadatka

Broj zadatka	$t$	$p$
1	5.21	<0.0001
2	7.63	<0.0001
3	1.24	0.23
4	4.90	<0.0001
5	4.51	<0.0001
6	1.65	0.11
7	3.62	0.001
8	3.09	0.004
9	10.60	<0.0001
10	1.83	0.08
11	0.55	0.59
12	7.31	<0.0001

Tablica 9 t-test za vrijeme gledanja Korijena zadatka

Na [slici 11](#) prikazano je prosječno vrijeme gledanja *Grafičkog prikaza* pojedinog zadatka. Može se primijetiti kako je vrijeme gledanja *Grafičkog prikaza* slično u oba konteksta. U [tablici 10](#) prikazani su rezultati *t*-testova za vrijeme gledanja *Grafičkog prikaza* pojedinog zadatka. Iz tablice se može primijetiti statistički značajna razlika kod zadataka 2, 3 i 9. Zanimljivo je primijetiti kako su učenici najdulje gledali *Grafički prikaz* u zadatku 9 iz fizike gdje postoji mogućnost da je učenicima pažnju privukla kružna petlja koja predstavlja putanju i koja čini taj prikaz kompleksnijim nego u zadatku iz matematike. Slično su tako učenici dulje gledali *Grafički prikaz* u zadatku 2 iz fizike nego iz matematike vjerojatno zato jer je taj prikaz bio kompleksniji.



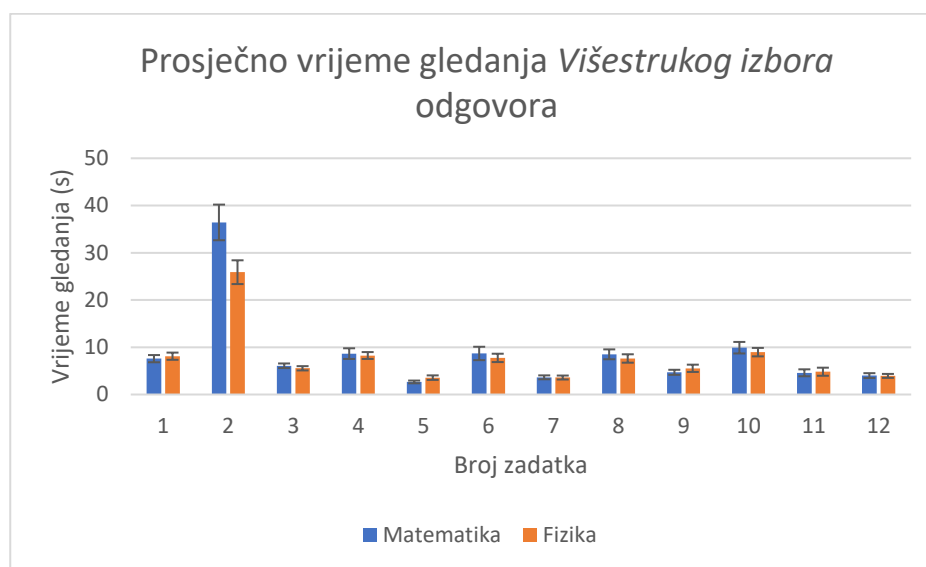
Slika 11 Prosječno vrijeme gledanja *Grafičkog prikaza* zadatka

Broj zadatka	<i>t</i>	<i>p</i>
1	1.00	0.38
2	2.21	0.03
3	2.17	0.04
4	1.38	0.18
5	0.57	0.58
7	1.26	0.22
8	0.26	0.80
9	3.06	0.004
10	0.05	0.96

12	1.04	0.31
----	------	------

Tablica 10 *t*-test za prosječno gledanje Grafičkog prikaza

Na [slici 12](#) prikazan je grafički prikaz prosječnog vremena gledanja *Višestrukog izbora* odgovora. U [tablici 11](#) prikazani su rezultati *t*-testova za vrijeme gledanja *Višestrukog izbora* pojedinog zadatka. Iz tablice se može primijetiti statistički značajna razlika kod zadataka 2 i 5. Iz prikaza se može primijetiti kako je učenicima najviše vremena trebalo u drugom zadatku iz matematike gdje se dulje vrijeme gledanja može pripisati duljem tekstu ponuđenih odgovora u odnosu na fiziku. U petom zadatku učenici su dulje gledali ponuđene odgovore iz fizike nego iz matematike vjerojatno zato što su oznake vektora u matematici ( $\vec{H}, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}, \vec{L}$ ) bile jednostavnije nego u fizici ( $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$ ) pa je lakše bilo pronaći točan odgovor.



Slika 12 Prosječno vrijeme gledanja Višestrukog izbora odgovora

Broj zadatka	<i>t</i>	<i>p</i>
1	0.62	0.54
2	2.76	0.01
3	0.75	0.46
4	0.29	0.77
5	1.76	0.09



6	0.55	0.58
7	0.08	0.93
8	0.62	0.54
9	1.02	0.32
10	0.56	0.58
11	0.23	0.82
12	0.10	0.92

Tablica 11 t-test za prosječno gledanje Višestrukog izbora

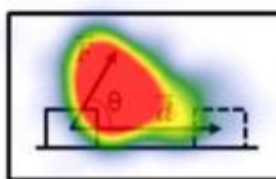
Razlike u vremenu gledanja, tj. pažnji ispitanika su uglavnom uzrokovane duljim tekstom ili kompleksnijim grafičkim prikazom. Za ilustraciju možemo promotriti toplinske mape prikazane na [slici 13](#) i [slici 14](#). Pomoću toplinskih mapa se može lako vizualizirati koji elementi zadatka su učenicima privlačili najviše pažnje. Crvena područja sugeriraju visok broj fiksacija i povećanu razinu interesa, dok žuta i zelena područja pokazuju manji broj fiksacija i manju razinu interesa. Područja bez boja nisu privlačili pažnju učenika. Toplinske mape na slikama 13 i 14 pokazuju da su učenici dulje čitali korijen zadatka iz fizike jer je tekst dulji. Također se može vidjeti da su se najviše zadržali na točnom odgovoru (B) kojeg su najčešće birali, ali da im je bio privlačan i odgovor (D).



Slika 13 Prikaz toplinske mape na zadatku 4 iz matematike

Pri stalnom djelovanju sile  $\vec{F}$  kutija izvrši pomak  $\vec{d}$ .  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$  zatvaraju kut  $\theta$ .  $|\vec{F}|$  je iznos sile  $F$  i  $|\vec{d}|$  iznos pomaka  $d$ . Koji od ponuđenih odgovara predstavlja rad koji je izvršila sila  $\vec{F}$  na kutiju? Rad definiramo kao skalarni produkt  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ .

- (A)  $|\vec{F}||\vec{d}|$
- (B)  $|\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$
- (C)  $|\vec{F}|\cos\theta + |\vec{d}|\sin\theta$
- (D)  $|\vec{F}||\vec{d}|\sin\theta$
- (E)  $|\vec{F}|\cos\theta |\vec{d}|\sin\theta$



Slika 14 Prikaz toplinske mape na zadatku 4 iz fizike

### 4.3. ANALIZA POJEDINIH ZADATAKA

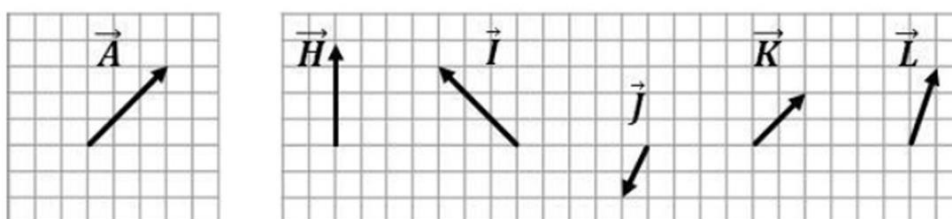
U nastavku će se analizirati pojedini zadaci grupirani prema vektorskim konceptima koji se ispituju – osnovni pojmovi (smjer, duljina i komponente vektora), osnovne operacije s vektorima (zbrajanje, oduzimanje, množenje skalarom) i skalarni umnožak vektora.

#### 4.3.1. OSNOVNI POJMOVI (SMJER, DULJINA, KOMPONENTE VEKTORA)

U testu su ispitivani sljedeći osnovni pojmovi vezani uz vektore: smjer, duljina i komponente vektora. 5. zadatak ispitivao je pojam smjera, 11. zadatak pojam duljine, a 3., 7. i 10. zadatak ispitivali su komponente vektora. Na [slici 15](#) prikazan je 5. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali na

temelju ponuđenog vektora  $\vec{A}$  odrediti vektore koji imaju isti smjer kao vektor  $\vec{A}$ . Na [slici 16](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu fizike gdje su učenici trebali na temelju ponuđene sile  $\vec{F}_1$  odrediti sile koje imaju isti smjer kao sila  $\vec{F}_1$ . U zadatku su se provjeravali sljedeći obrazovni ishodi: učenik crta i opisuje vektor, njegov smjer, orijentaciju i duljinu. U nastavku su prikazani ukupni rezultati učenika.

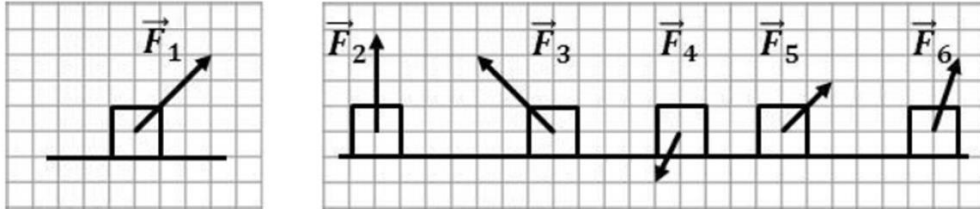
Slika ispod prikazuje vektor  $\vec{A}$  i skupinu drugih vektora. Koji vektor/i sa slike ima/ju isti smjer kao vektor  $\vec{A}$ ?



- (A)  $\vec{K}, \vec{L}$
- (B)  $\vec{I}, \vec{K}$
- (C)  $\vec{K}$
- (D)  $\vec{H}, \vec{K}, \vec{L}$
- (E) Nijedan vektor nema isti smjer kao vektor  $\vec{A}$ .

Slika 15 Peti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

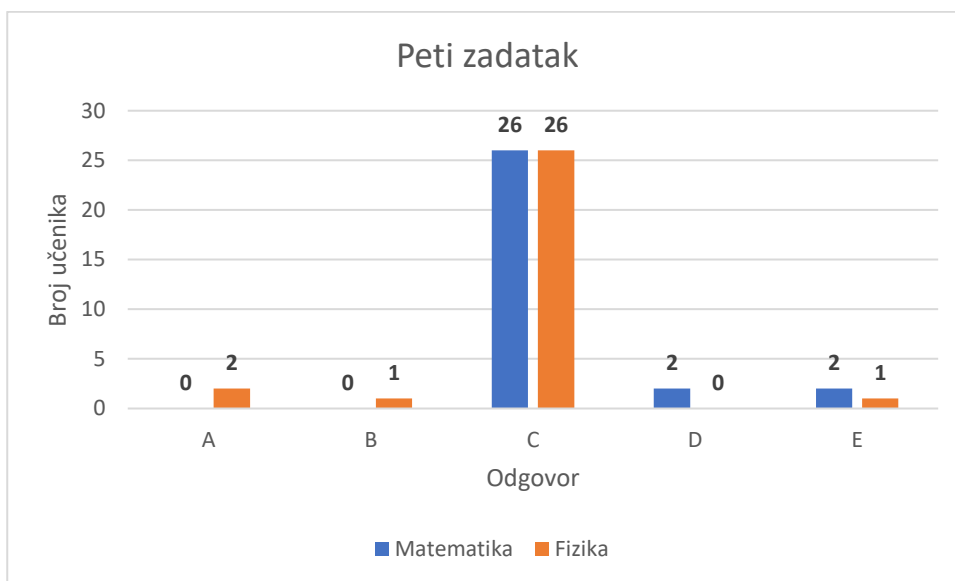
Slika ispod prikazuje silu  $\vec{F}_1$  koja djeluje na kutiju i skupinu drugih vektora koji djeluju na različite kutije. Koja/koje od ponuđenih sila ima/ju isti smjer kao sila  $\vec{F}_1$ ?



- (A)  $\vec{F}_5, \vec{F}_6$
- (B)  $\vec{F}_3, \vec{F}_5$
- (C)  $\vec{F}_5$
- (D)  $\vec{F}_2, \vec{F}_5, \vec{F}_6$
- (E) Nijedan vektor nema isti smjer kao sila  $\vec{F}_1$ .

*Slika 16 Peti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike*

Na [slici 17](#) dan je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (C), čak njih 86%, koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Može se primijetiti kako su pojedini učenici iz matematike odabrali odgovor (D), iz čega zaključujemo kako pojedini učenici smjer vektora shvaćaju „prema gore“, a ne obraćaju pažnju jesu li ti vektori paralelni s danim vektorom. Slično se može pretpostaviti i za dva učenika koja su za rješenje iz fizike odabrala (A).



Slika 17 Grafički prikaz učeničkih odgovora za peti zadatak

Na [slici 18](#) prikazan je 11. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali na temelju zadanog vektora  $\vec{A}$  u ortonormiranoj bazi odrediti duljinu (modul) tog vektora. Na [slici 19](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali na temelju zadane sile  $\vec{F}$  u ortonormiranoj bazi odrediti iznos sile u njutnima (N). U zadatku se provjeravao sljedeći obrazovni ishod: učenik određuje duljinu (modul) vektora. U nastavku su prikazani ukupni rezultati učenika.

Neka je vektor  $\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ . Koji je od ponuđenih odgovora duljina tog vektora?

(A) 2

(B)  $\sqrt{8}$

(C) 4

(D)  $\frac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{j}$

(E) 8

*Slika 18 Jedanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike*

Neka je sila  $\vec{F} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$  (N). Koji je od ponuđenih odgovora iznos te sile izražen u njutnima (N)?

(A) 2

(B)  $\sqrt{8}$

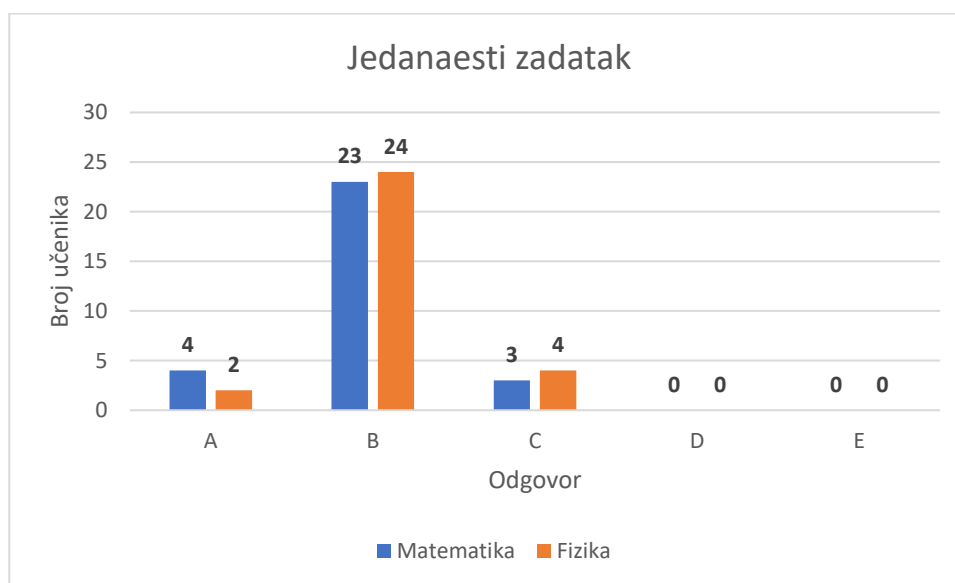
(C) 4

(D)  $\frac{2}{\sqrt{8}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{j}$

(E) 8

*Slika 19 Jedanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike*

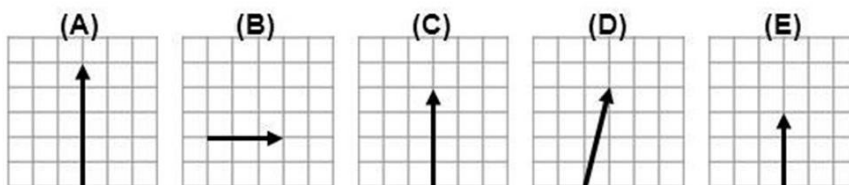
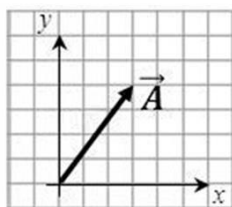
Na [slici 20](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (B) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Iz matematike je 76% učenika odgovorilo točno, dok je iz fizike odgovorilo njih 80%. Na temelju rezultata samo nekolicina učenika nije točno odgovorila na postavljeno pitanje, umjesto na odgovor (B), pojedini su odabrali odgovore (A) ili (C) koji odgovaraju algebarskom (ne vektorskom) zbroju komponenti ili pojedinim komponentama zadanih vektora.



Slika 20 Grafički prikaz učeničkih odgovora za jedanaesti zadatak

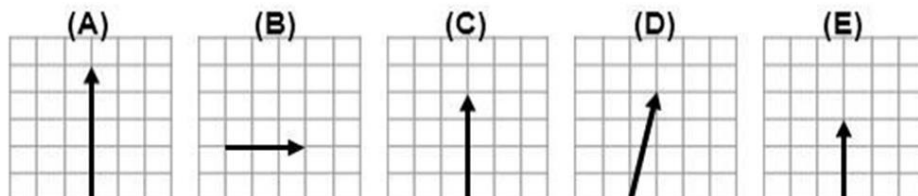
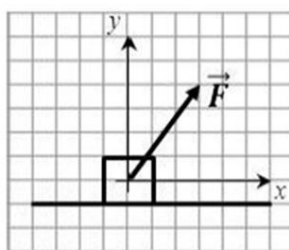
Na [slici 21](#) prikazan je 3. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali odrediti  $y$ -komponentu vektora  $\vec{A}$ . Na [slici 22](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali grafički odrediti  $y$ -komponentu sile  $\vec{F}$ . U zadatku se provjeravao sljedeći obrazovni ishodi: učenik rastavlja vektore na njegove komponente.

Slika ispod prikazuje vektor  $\vec{A}$ . Odaberi sliku koja prikazuje  $y$ -komponentu vektora  $\vec{A}$ , (tj.  $\vec{A}_y$ ).



Slika 21 Treći zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

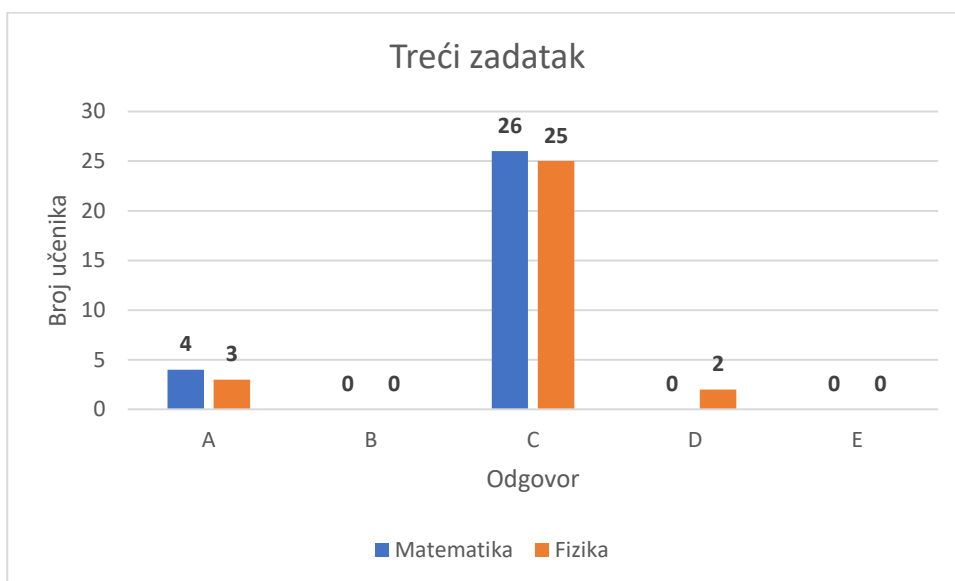
Slika ispod prikazuje silu  $\vec{F}$  koja djeluje na kutiju. Odaberi sliku koja prikazuje  $y$ -komponentu sile  $\vec{F}$  (tj.  $\vec{F}_y$ )?



Slika 22 Treći zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike



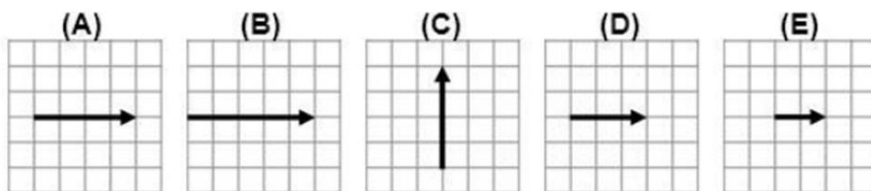
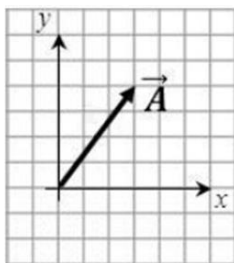
Na [slici 23](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (C) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Iz matematike je 86% učenika odgovorilo točno, dok je iz fizike odgovorilo njih 83%. Može se primijetiti kako su pojedini učenici u oba zadatka, iz matematike i fizike, odabrali odgovor (A), što predstavlja  $y$ -komponentu vektora, ali krive duljine. Ovakve pogreške mogu se vjerojatno pripisati nepažnji i dekoncentraciji učenika.



Slika 23 Grafički prikaz učeničkih odgovora za treći zadatak

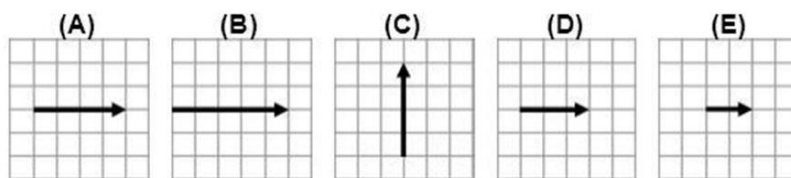
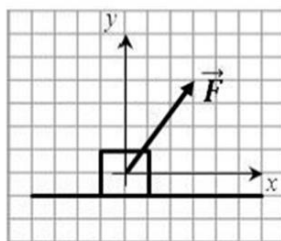
Na [slici 24](#) prikazan je 7. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali grafički odrediti  $x$ -komponentu vektora  $\vec{A}$ . Na [slici 25](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali odrediti  $x$ -komponentu sile  $\vec{F}$ . U zadatku se provjeravao sljedeći obrazovni ishod: učenik rastavlja vektore na njegove komponente.

Slika ispod prikazuje vektor  $\vec{A}$ . Odaberi sliku koja prikazuje x-komponentu vektora  $\vec{A}$ , (tj.  $\vec{A}_x$ ).



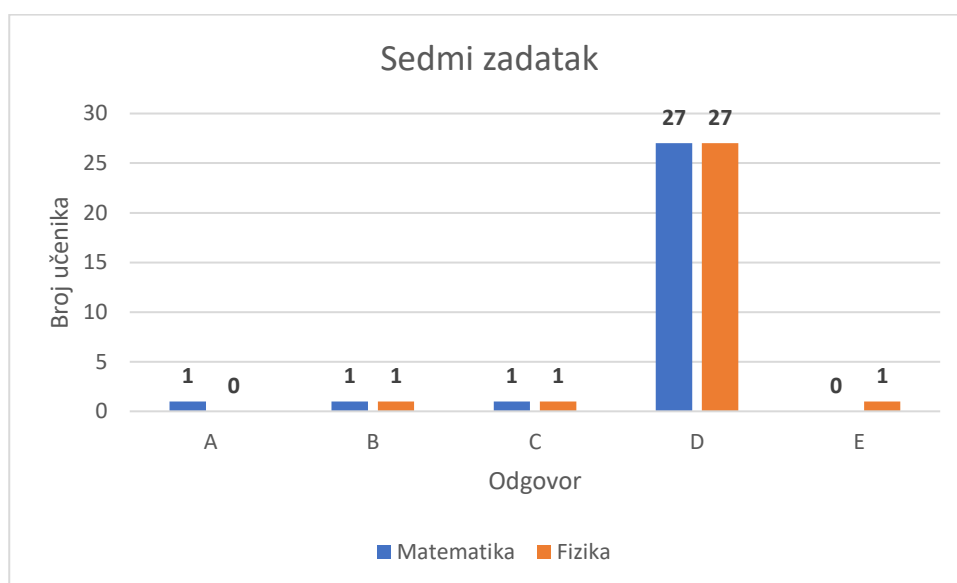
Slika 24 Sedmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

Slika ispod prikazuje silu  $\vec{F}$  koja djeluje na kutiju. Odaberi sliku koja najbolje prikazuje x-komponentu sile  $\vec{F}$  (tj.  $\vec{F}_x$ ).



Slika 25 Sedmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike

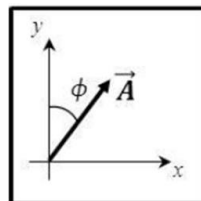
Na [slici 26](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (D) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Iz matematike je 90% učenika odgovorilo točno, isto kao i iz fizike. Može se primijetiti kako su pojedini učenici u oba zadatka, i matematike i fizike, odabrali odgovor (A), (B) i (E) što predstavlja  $x$ -komponentu vektora, ali krive duljine. Kao i u prethodnom zadatku, moguće je da su ove pogreške uzrokovane dekoncentracijom učenika.



Slika 26 Grafički prikaz učeničkih odgovora za sedmi zadatak

Na [slici 27](#) prikazan je 10. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali računski odrediti  $x$ -komponentu vektora  $\vec{A}$  pomoću kuta  $\phi$ . Na [slici 28](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali računski odrediti  $x$ -komponentu sile  $\vec{F}$  pomoću kuta  $\phi$ . U zadatku se provjeravao sljedeći obrazovni ishod: učenik računski rastavlja vektore na njegove komponente.

Slika ispod prikazuje vektor  $\vec{A}$  koji zatvara kut  $\phi$  s vertikalnom osi.  $|\vec{A}|$  je duljina vektora  $\vec{A}$ . Koji od ponuđenih odgovora prikazuje duljinu x-komponente vektora  $\vec{A}$ , (tj.  $|\vec{A}_x|$ )?



(A)  $|\vec{A}_x| = |\vec{A}| \tan \phi$

(B)  $|\vec{A}_x| = \frac{|\vec{A}|}{\cos \phi}$

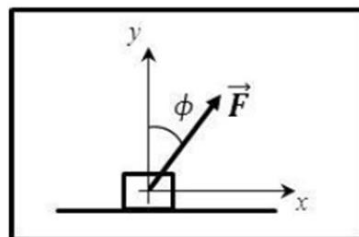
(C)  $|\vec{A}_x| = |\vec{A}| \sin \phi$

(D)  $|\vec{A}_x| = |\vec{A}| \cos \phi$

(E)  $|\vec{A}_x| = \frac{|\vec{A}|}{\sin \phi}$

Slika 27 Deseti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

Slika ispod prikazuje silu  $\vec{F}$  koja djeluje na kutiju te zatvara kut  $\phi$  s vertikalnom osi.  $|\vec{F}|$  je iznos sile  $\vec{F}$ . Koji od ponuđenih odgovora prikazuje iznos x-komponentu sile  $\vec{F}$  (tj.  $|\vec{F}_x|$ )?



(A)  $|\vec{F}_x| = |\vec{F}| \tan \phi$

(B)  $|\vec{F}_x| = \frac{|\vec{F}|}{\cos \phi}$

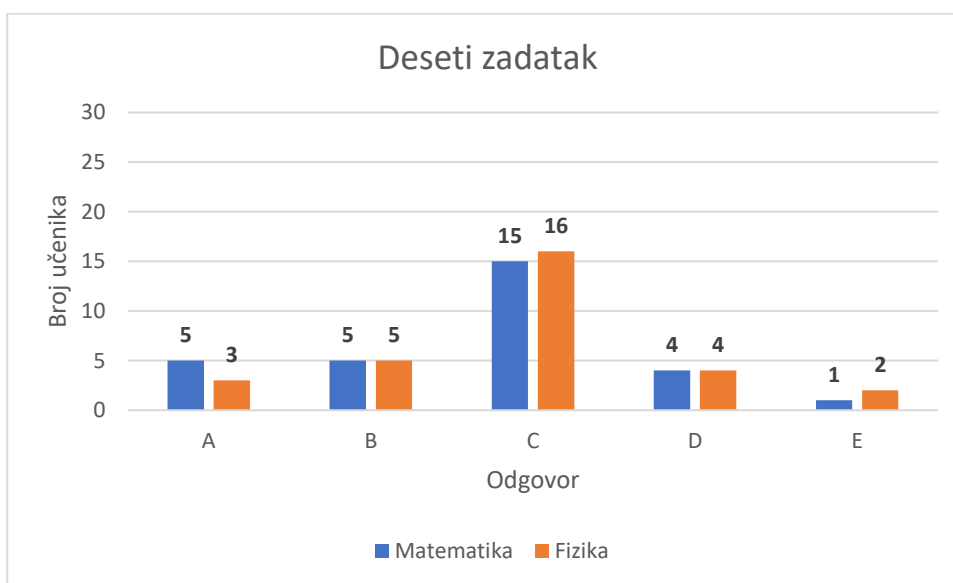
(C)  $|\vec{F}_x| = |\vec{F}| \sin \phi$

(D)  $|\vec{F}_x| = |\vec{F}| \cos \phi$

(E)  $|\vec{F}_x| = \frac{|\vec{F}|}{\sin \phi}$

Slika 28 Deseti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike

Na [slici 29](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (C) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Iz matematike je 50% učenika odgovorilo točno, a iz fizike njih 53%. Iz rezultata vidimo da su učenici imali poteškoća pri rješavanju ovakvog tipa zadatka. U oba konteksta najviše su griješili birajući odgovore (B), (A) i (D) iz čega zaključujemo da su učenicima teži zadaci u kojima je potrebna primjena trigonometrijskih omjera.



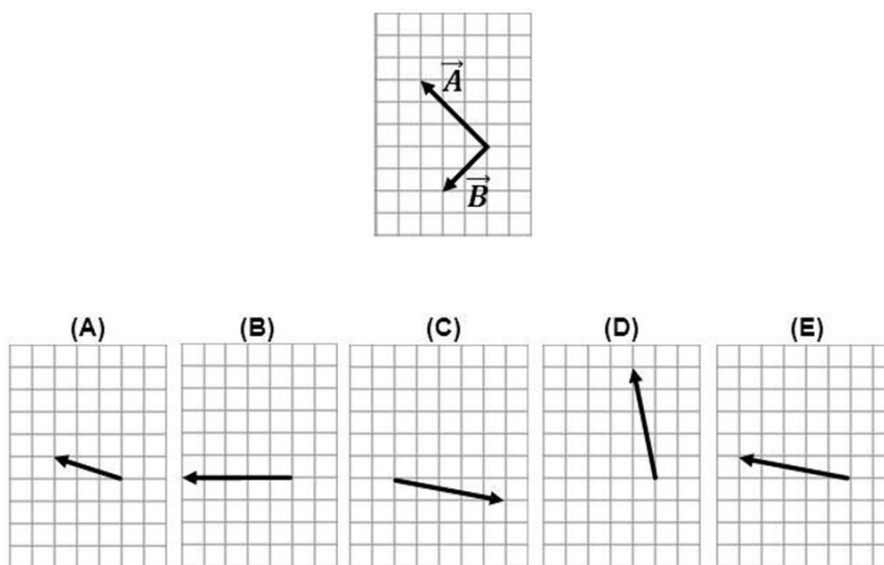
Slika 29 Grafički prikaz učeničkih odgovora za deseti zadatak

Na temelju prethodno analiziranih podataka može se zaključiti kako je u ovoj grupi zadataka koji se odnose na osnovne vektorske pojmove najbolje riješen 7. zadatak u kojem je trebalo grafički odrediti  $x$ -komponentu vektora i na koji je točno odgovorilo preko 90% učenika. Zadaci 3., 5. i 11. se također mogu smatrati uspješno riješenim, s preko 80% točnih odgovora. Najviše poteškoća su učenici imali s računanjem komponente vektora i samo je oko 50% studenata točno riješilo taj 10. zadatak.

### 4.3.2. OSNOVNE OPERACIJE S VEKTORIMA (ZBRAJANJE, ODUZIMANJE, MNOŽENJE SKALAROM)

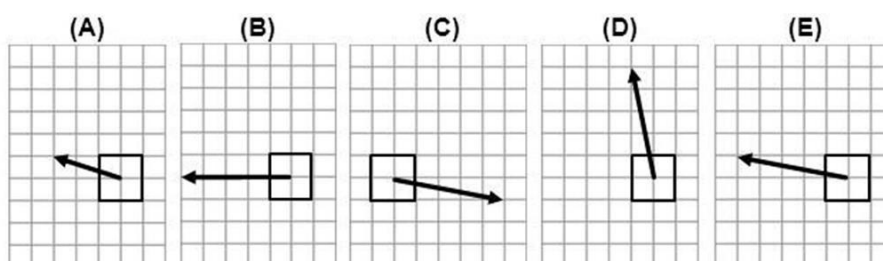
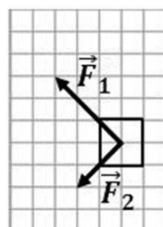
U testu su ispitivane sljedeće osnovne operacije s vektorima: zbrajanje, oduzimanje i množenje vektora skalarom. Za zbrajanje vektora bio je postavljen 1. zadatak, za oduzimanje 9. i 12. zadatak, a za množenje vektora skalarom 8. zadatak. Na [slici 30](#) prikazan je 1. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali na temelju dva ponuđena vektora odabrati sliku koja prikazuje zbroj tih vektora. Na [slici 31](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali na temelju dvije sile odabrati resultantnu silu, tj. sliku koja odgovara zbroju tih sila. U zadatku su se provjeravali sljedeći obrazovni ishodi: učenik prepoznaje, opisuje i koristi elemente vektora; računa s vektorima te su u nastavku prikazani ukupni rezultati učenika.

Slika ispod prikazuje vektore  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Odaberi sliku koja prikazuje zbroj  $\vec{A} + \vec{B}$ .



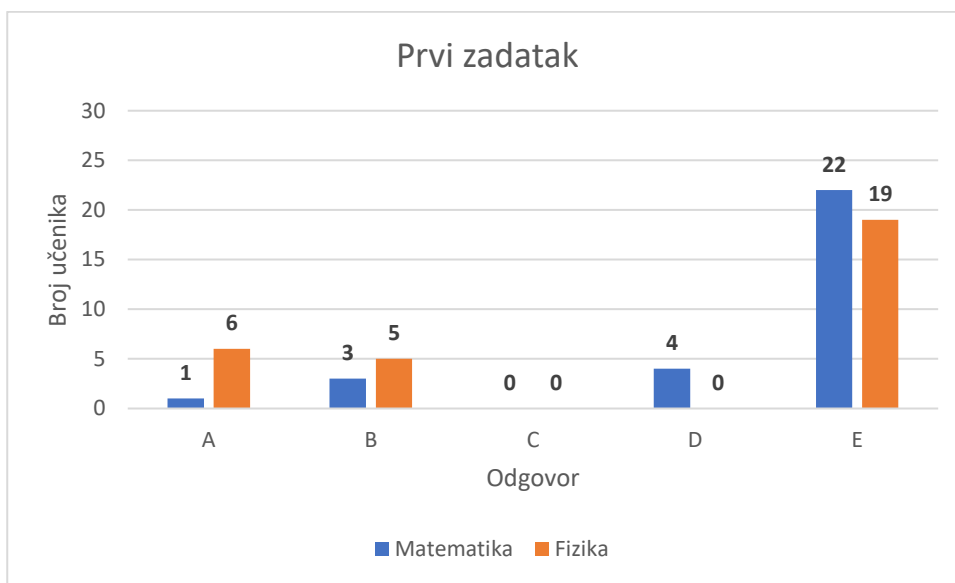
Slika 30 Prvi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

Slika ispod prikazuje kutiju (gledanu odozgor). Dvije sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  djeluju na kutiju. Odaberi sliku koja prikazuje ukupnu silu  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  na kutiju.



Slika 31 Prvi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike

Na [slici 32](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (E) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Iz matematike je 73% učenika odgovorilo točno, dok je iz fizike odgovorilo njih 63%. Može se primijetiti kako su pojedini učenici iz matematike odabrali odgovor (D), što predstavlja razliku vektora umjesto njihov zbroj. Nekolicina učenika je odabrala i odgovor (B) iz čega se može zaključiti kako nisu obratili pažnju na duljine pojedinih vektora. U kontekstu fizike pojedini učenici su odabrali odgovore (A) i (B) gdje se opet može zaključiti kako nisu pažljivo primijenili pravilo paralelograma ili pravilo trokuta. Zanimljivo je kako niti jedan učenik u kontekstu fizike nije odabrao odgovor (D) gdje je ponuđeno oduzimanje sila  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ .

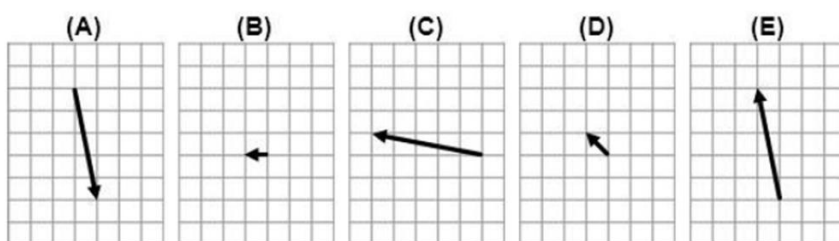
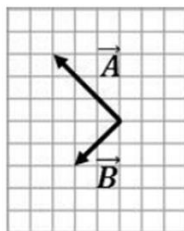


Slika 32 Grafički prikaz učeničkih odgovora za prvi zadatak

Na [slici 33](#) prikazan je 9. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali na temelju dva ponuđena vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  odabrati vektor koji odgovara razlici tih vektora. Na [slici 34](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali na temelju dvije brzine  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  odrediti promjenu brzine, tj. odabrati vektor koji odgovara razlici tih brzina. U zadatku su se provjeravali sljedeći obrazovni ishodi: učenik prepoznaje i računa s vektorima (oduzimanje vektora). U nastavku su prikazani ukupni rezultati učenika.

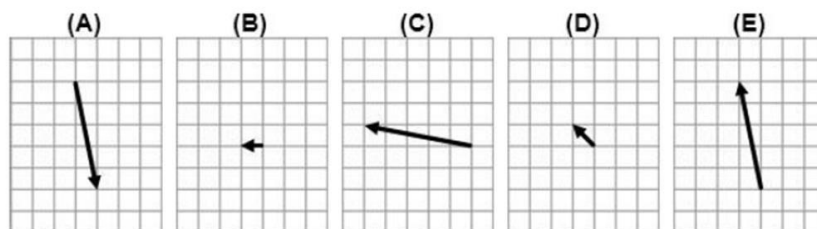
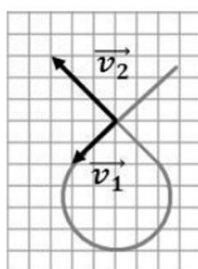


Slika ispod prikazuje vektore  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Odaberi sliku koji prikazuje razliku  $\vec{A} - \vec{B}$ .



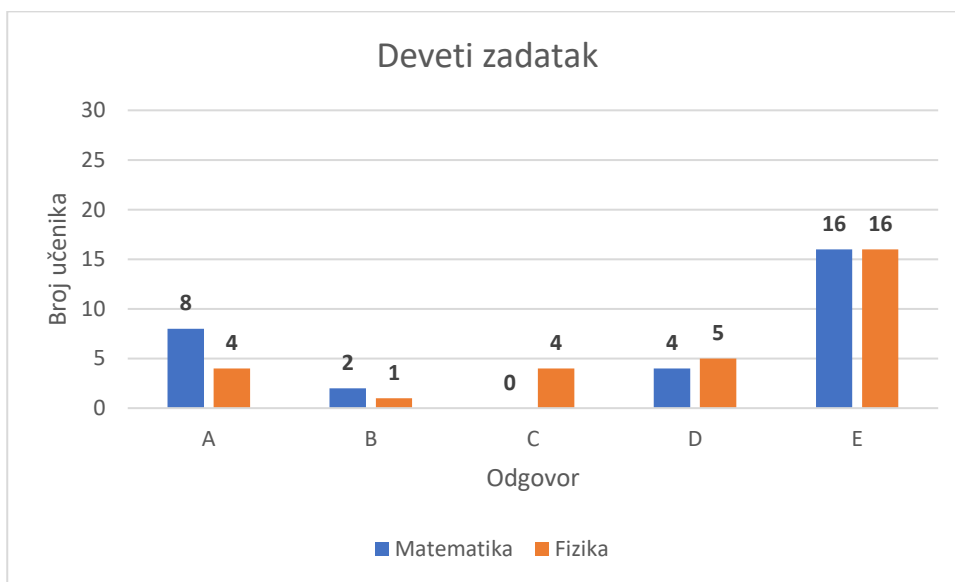
Slika 33 Deveti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

Na slici je prikazana krivulja po kojoj se giba auto (gledano odozgo). Slika također prikazuje brzine auta  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  u dva trenutka. Odaberi odgovor koji prikazuje promjenu vektora brzine, tj. razliku  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ .



Slika 34 Deveti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike

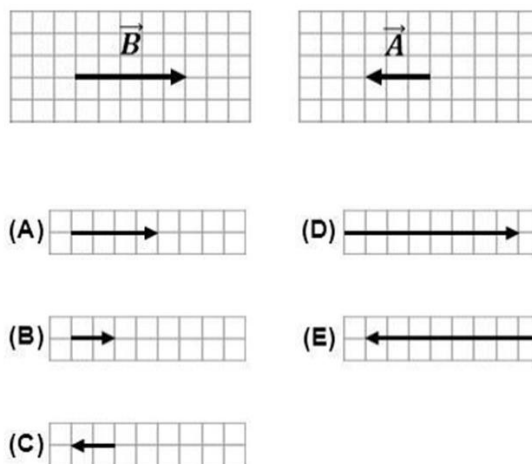
Na [slici 35](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (E) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka, no vidimo kako su učenici imali dosta poteškoća pri rješavanju ovog zadatka jer su odgovori bili podijeljeni. Iz matematike je 53% učenika odgovorilo točno, isto kao i iz fizike. Može se primijetiti kako su pojedini učenici iz matematike i fizike odabrali odgovor (A), koji odgovara razlici vektora  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ . Nekolicina učenika je odabrala i odgovor (D) iz čega se može zaključiti da su u potpunosti promijenili vektor  $\vec{v}_1$  i oduzeli ga od vektora  $\vec{v}_2$  kao da su vektori kolinearni, a ne okomiti. U kontekstu fizike pojedini učenici su odabrali odgovor (C) koji odgovara zbroju vektora  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$ .



Slika 35 Grafički prikaz učeničkih odgovora za deveti zadatak

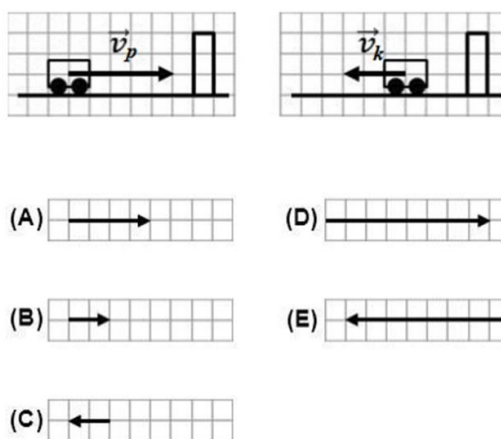
Na [slici 36](#) prikazan je 12. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali na temelju dva zadana kolinearna vektora odabrati sliku koja prikazuje razliku tih vektora. Na [slici 37](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali na temelju dvije zadane brzine odabrati vektor koji odgovara razlici tih brzina. U zadatku su se provjeravali sljedeći obrazovni ishodi: učenik prepoznaje, opisuje i koristi elemente vektora; računa s kolinearnim vektorima.

Slika ispod prikazuje vektore  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Odaberi sliku koja prikazuje razliku  $\vec{A} - \vec{B}$ .



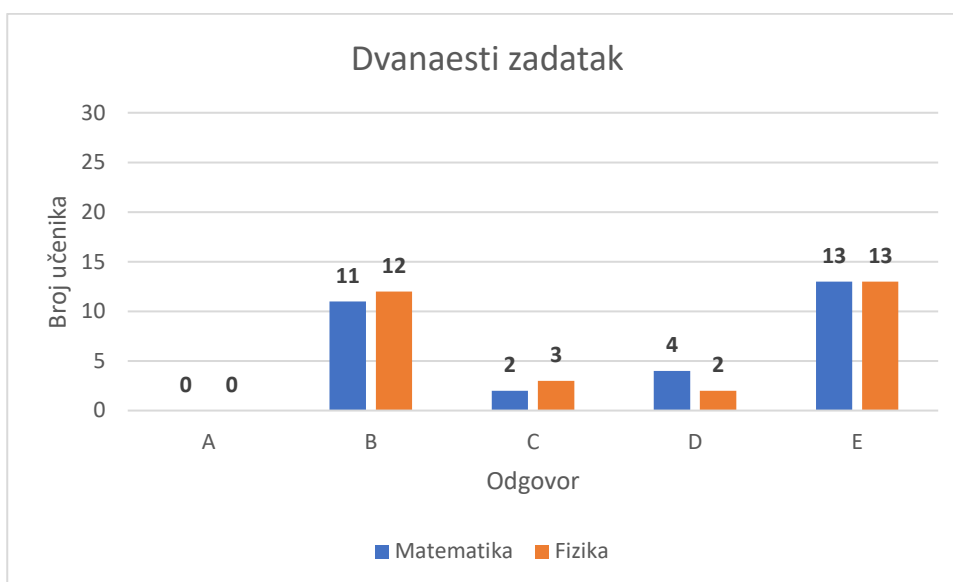
Slika 36 Dvanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

Promotri kolica koja se sudaraju sa zidom. Slika prikazuje početnu brzinu  $\vec{v}_p$  prije sudara i konačnu brzinu  $\vec{v}_k$  nakon sudara. Odaberi odgovor koji prikazuje promjenu vektora brzine, tj. razliku  $\vec{v}_k - \vec{v}_p$ .



Slika 37 Dvanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike

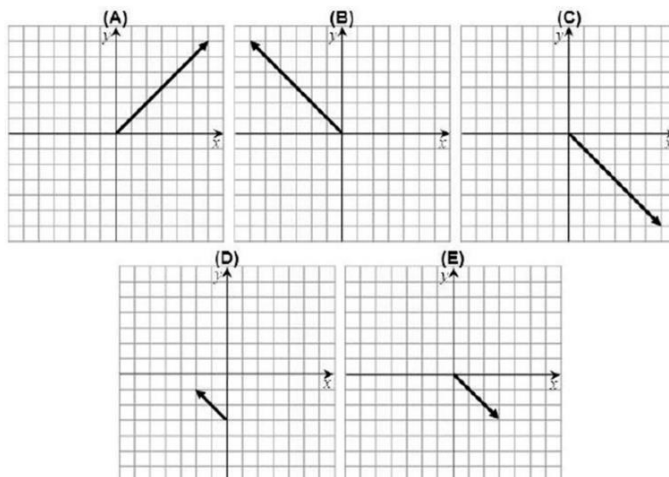
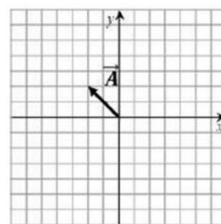
Na [slici 38](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (E) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Učenici su u oba konteksta najčešće birali distraktor (B) koji prikazuje zbroj zadanih vektora. Neki učenici su izabrali odgovor (D) koji prikazuje razliku  $\vec{B} - \vec{A}$ , a nekolicina je izabrala odgovor (C) koji ukazuje na to da su oni zbrojili zadane vektore, a onda tom vektoru zbroja promijenili orijentaciju. Iz matematike je 43% učenika odgovorilo točno, isto kao i iz fizike. Može se primijetiti kako je ovo jedan od lošije riješenih zadataka. Prijašnja istraživanja [\[12\]](#) su također pokazala kako učenici imaju poteškoća pri oduzimanju vektora, što se i ovdje potvrdilo.



Slika 38 Grafički prikaz učeničkih odgovora za dvanaesti zadatak

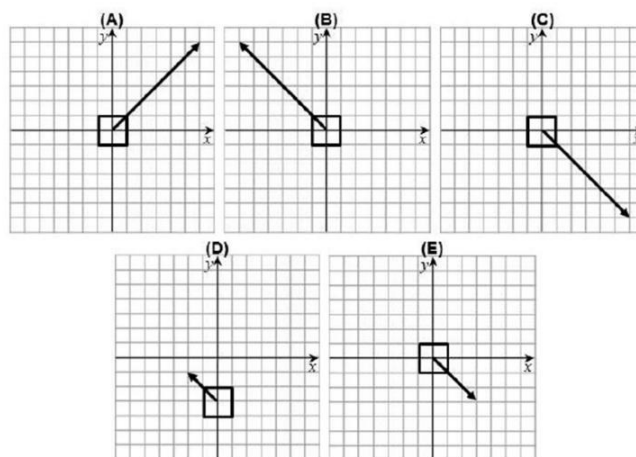
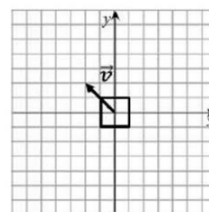
Na [slici 39](#) prikazan je 8. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali na temelju danog vektora  $\vec{A}$  odabrati sliku koja prikazuje vektor  $-3\vec{A}$ . Na [slici 40](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali na temelju dane brzine  $\vec{v}$  odabrati sliku koja prikazuje brzinu  $-3\vec{v}$ . U zadatku su se provjeravali sljedeći obrazovni ishodi: učenik prepoznaje suprotne vektore, računa s vektorima (množi sa skalarom).

Slika desno prikazuje vektor  $\vec{A}$ . Odaberi sliku koja prikazuje vektor  $-3\vec{A}$ .



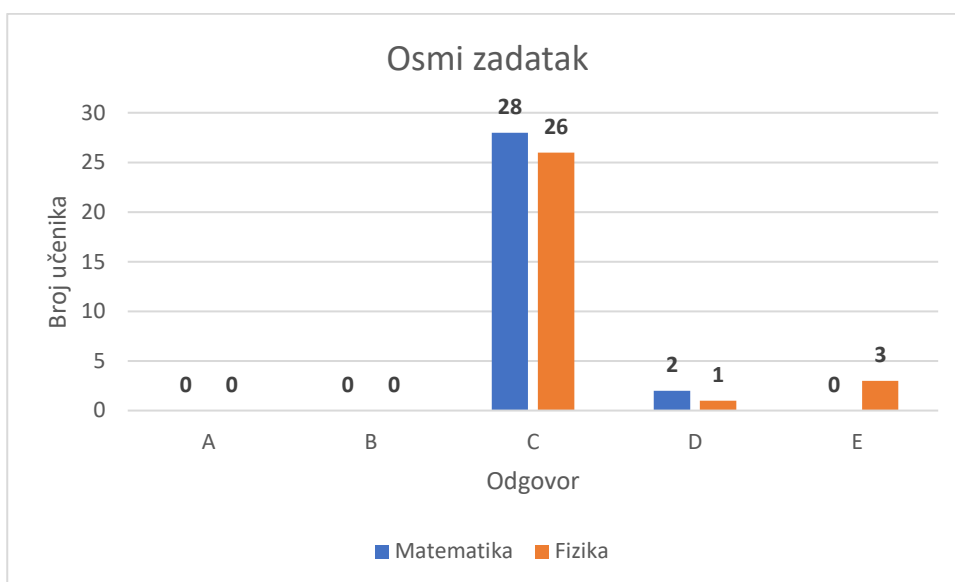
Slika 39 Osmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

Slika desno prikazuje kutiju (gledano odozgor) koja se giba brzinom  $\vec{v}$ . Odaberi sliku koja prikazuje kutiju koja se giba brzinom  $-3\vec{v}$ .



Slika 40 Osmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike

Na [slici 41](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (C) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Iz matematike je 93% učenika odgovorilo točno, dok je iz fizike odgovorilo njih 86%. Može se primijetiti kako su pojedini učenici iz matematike odabrali odgovor (D), gdje je vektor istog smjera i orijentacije kao dani vektor  $\vec{A}$ , no translatican je za tri jedinične dužine na y-osi. U kontekstu fizike pojedini učenici su odabrali odgovor (E) gdje je nacrtan vektor suprotne orijentacije od zadanog vektora, ali krivog iznosa (pojedine komponente su duge kao tri kvadratića na slici).



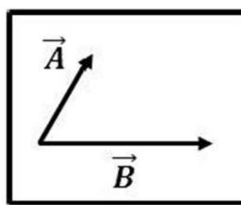
Slika 41 Grafički prikaz učeničkih odgovora za osmi zadatak

U ovoj grupi zadataka koji se odnose na osnovne operacije s vektorima može se primijetiti kako su učenici najbolje riješili 8. zadatak u kojem se tražila primjena množenja skalarom, pri čemu je bilo oko 90% točnih odgovora. Najlošije su bili riješeni 9. i 12. zadatak u kojem je trebalo oduzeti vektore u 1D i 2D. Također, na temelju naših rezultata vidljivo je kako su učenici bili uspješniji u rješavanju zadataka koji su ispitivali osnovne pojmove nego kada je trebalo primijeniti osnovne operacije s vektorima, što se pokazalo i u prijašnjih istraživanjima [1].

### 4.3.3. SKALARNI UMNOŽAK VEKTORA

Razumijevanje skalarnog umnoška vektora bilo je ispitano pomoću zadataka 2, 4 i 6. Na [slici 42](#) prikazan je 2. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali između ponuđenih odgovora odabrati točnu geometrijsku interpretaciju skalarnog produkta vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Na [slici 43](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali prepoznati geometrijsku interpretaciju rada na kutiju kojeg izvrši sila  $\vec{F}$  u smjeru pomaka  $\vec{d}$ . U zadatku se provjeravao sljedeći obrazovni ishod: učenik riječima definira skalarni produkt vektora.

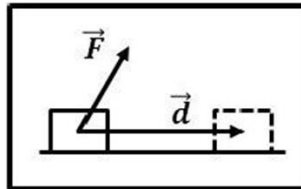
Slika ispod prikazuje vektore  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Koji od ponuđenih odgovora najbolje opisuje skalarni produkt  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ?



- (A) Skalarni produkt vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  je duljina (modul, iznos) vektora između  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  koji pokazuje desno gore.
- (B) Skalarni produkt vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  je duljina projekcije vektora  $\vec{A}$  na vektor  $\vec{B}$  pomnožena duljinom vektora  $\vec{B}$ .
- (C) Skalarni produkt vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  je vektor između  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  koji pokazuje desno gore.
- (D) Skalarni produkt vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  je vektor okomit na oba vektora.
- (E) Skalarni produkt vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  je vektor u smjeru vektora  $\vec{B}$ .

*Slika 42 Drugi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike*

Pri stalnom djelovanju sile  $\vec{F}$  kutija izvrši pomak  $\vec{d}$ . Koji od ponuđenih odgovora najbolje opisuje rad koji je izvršila sila  $\vec{F}$  na kutiju? Rad definiramo kao skalarni produkt  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ .

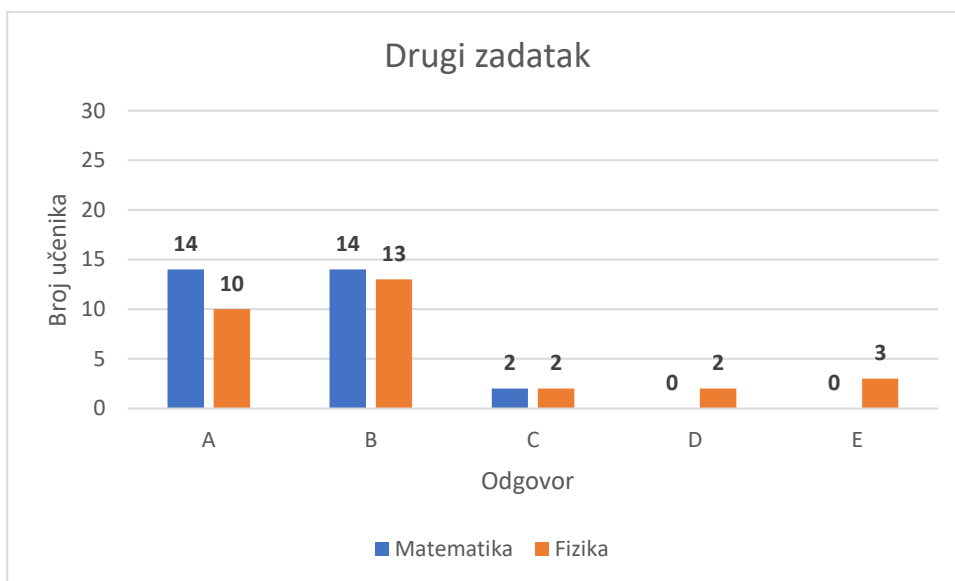


- (A) Rad je iznos (duljina, modul) vektora između  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$  koji pokazuje desno gore.
- (B) Rad je iznos projekcije vektora  $\vec{F}$  na vektor  $\vec{d}$  pomnožen iznosom vektora pomaka  $\vec{d}$ .
- (C) Rad je vektor između  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$  koji pokazuje desno gore.
- (D) Rad je vektor okomit na silu i pomak.
- (E) Rad je vektor u smjeru pomaka  $\vec{d}$ .

*Slika 43 Drugi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike*

Na [slici 44](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako su učenički odgovori uglavnom bili podijeljeni između opcija (A) i (B). U zadatku iz matematike, 47% učenika je odabralo ponuđeni odgovor pod slovom (B) koje je ujedno bilo i točan odgovor, ali se ujedno isti broj učenika odlučio za odgovor (A). U zadatku iz fizike, 43% učenika je odabralo točno rješenje, ali se može primijetiti kako su se pojedini učenici odlučili i za odgovore (D) i (E). Na ovom zadatku su učenici uglavnom birali različite odgovore u kontekstu matematike i fizike, što dodatno ukazuje na njihove poteškoće u razumijevanju geometrijske interpretacije skalarnog produkta.

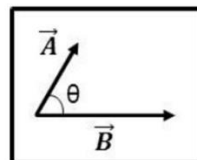




Slika 44 Grafički prikaz učeničkih odgovora za drugi zadatak

Na [slici 45](#) prikazan je 4. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali između ponuđenih odgovora odabrati formulu skalarnog produkta vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Na [slici 46](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali odabrati formulu za rad na kutiju koji izvrši sila  $\vec{F}$  u smjeru pomaka  $\vec{d}$ . U zadatku se provjeravao sljedeći obrazovni ishod: učenik formulom definira skalarni produkt vektora.

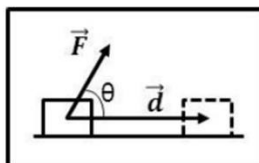
Slika ispod prikazuje vektore  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  koji zatvaraju kut  $\theta$ .  $|\vec{A}|$  je duljina vektora  $\vec{A}$ , a  $|\vec{B}|$  je duljina vektora  $\vec{B}$ . Koji je od ponuđenih odgovora skalarni produkt  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ?



- (A)  $|\vec{A}||\vec{B}|$
- (B)  $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$
- (C)  $|\vec{A}|\cos\theta + |\vec{B}|\sin\theta$
- (D)  $|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$
- (E)  $|\vec{A}|\cos\theta |\vec{B}|\sin\theta$

Slika 45 Četvrti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike

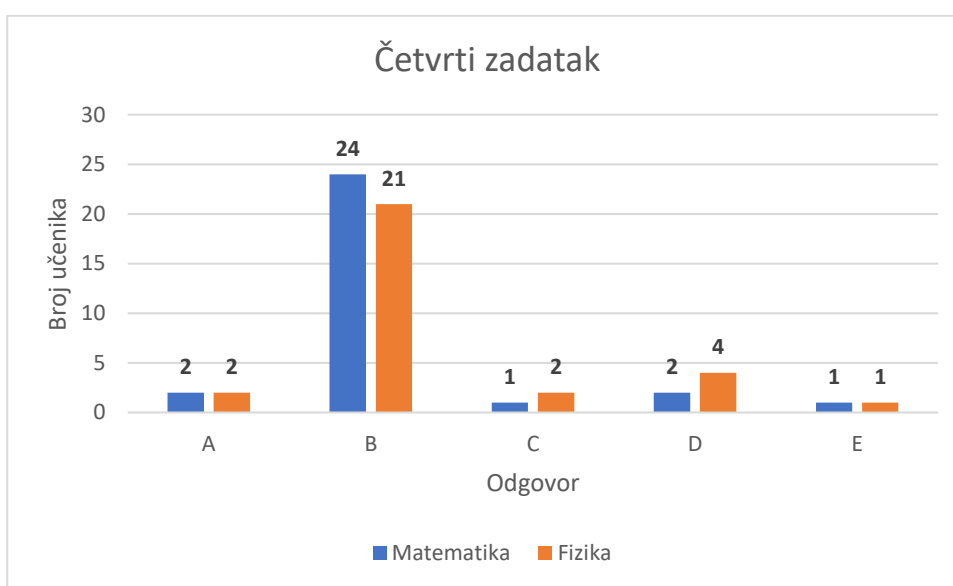
Pri stalnom djelovanju sile  $\vec{F}$  kutija izvrši pomak  $\vec{d}$ .  $\vec{F}$  i  $\vec{d}$  zatvaraju kut  $\theta$ .  $|\vec{F}|$  je iznos sile  $\vec{F}$  i  $|\vec{d}|$  iznos pomaka  $\vec{d}$ . Koji od ponuđenih odgovora predstavlja rad koji je izvršila sila  $\vec{F}$  na kutiju? Rad definiramo kao skalarni produkt  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ .



- (A)  $|\vec{F}||\vec{d}|$
- (B)  $|\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$
- (C)  $|\vec{F}|\cos\theta + |\vec{d}|\sin\theta$
- (D)  $|\vec{F}||\vec{d}|\sin\theta$
- (E)  $|\vec{F}|\cos\theta |\vec{d}|\sin\theta$

Slika 46 Četvrti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike

Na [slici 47](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako je većina učenika odabrala ponuđeno rješenje pod slovom (B) koje je ujedno bilo i točan odgovor za oba konteksta zadatka. Iz matematike je 80% učenika odgovorilo točno, dok je iz fizike točno odgovorilo njih 70%. Može se primijetiti kako su učenici najčešće griješili odabirom odgovora pod (D) gdje su zamijenili funkcije sinus i kosinus. Zanimljivo je da su učenici definiciju skalarnog umnoška pomoću formule riješili puno bolje nego kada su u drugom zadatku trebali definirati skalarni umnožak riječima, tj. kada se od njih tražila geometrijska interpretacija skalarnog umnoška.



Slika 47 Grafički prikaz učeničkih odgovora za četvrti zadatak

Na [slici 48](#) prikazan je 6. zadatak postavljen u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike, pri čemu su učenici trebali na temelju ponuđenih vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  u ortonormiranoj bazi odrediti skalarni produkt vektora  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  u dvije dimenzije. Na [slici 49](#) prikazan je isti taj zadatak u kontekstu sadržaja iz fizike gdje su učenici trebali na temelju ponuđene sile  $\vec{F}$  u njutnima (N) i pomaka  $\vec{d}$  u metrima (m) odrediti rad u džulima (J). U zadatku se provjeravao sljedeći obrazovni ishod: učenik računa skalarni umnožak vektora.

Neka je vektor  $\vec{A} = 1\vec{i} + 3\vec{j}$  i vektor  $\vec{B} = 5\vec{i}$ . Koji je od ponuđenih odgovora skalarni produkt  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ?

- (A) 5
- (B)  $-15\vec{k}$
- (C)  $5\vec{i} + 3\vec{j}$
- (D)  $6\vec{i} + 3\vec{j}$
- (E)  $5\vec{i}$

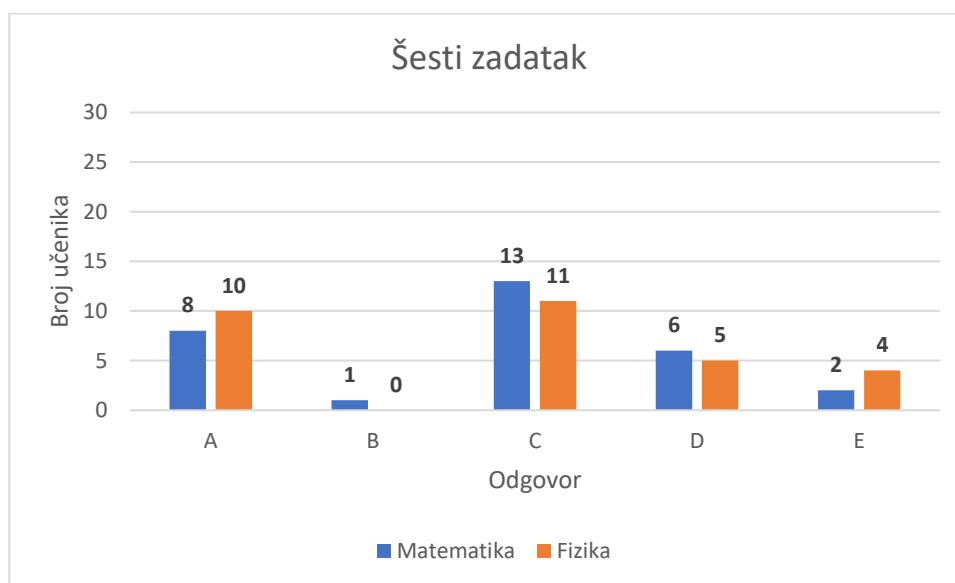
*Slika 48 Šesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike*

Pri stalnom djelovanju sile  $\vec{F} = 1\vec{i} + 3\vec{j}$  (N) kutija izvrši pomak  $\vec{d} = 5\vec{i}$  (m). Koji je od ponuđenih odgovora rad u džulima (J) koji je izvršila sila  $\vec{F}$  na kutiju? Rad definiramo kao skalarni produkt  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ .

- (A) 5
- (B)  $-15\vec{k}$
- (C)  $5\vec{i} + 3\vec{j}$
- (D)  $6\vec{i} + 3\vec{j}$
- (E)  $5\vec{i}$

*Slika 49 Šesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike*

Na [slici 50](#) vidljiv je grafički prikaz učeničkih odgovora pri čemu se može primijetiti kako su učenici bili podijeljeni pri odgovorima. Najviše učenika je odabralo odgovore (A) i (C) u oba konteksta, pri čemu je (C) točan odgovor. 26% učenika odgovorilo je točno na zadatak iz matematike, dok je njih 33% točno odgovorilo na zadatak iz fizike. Iz ovog primjera može se zaključiti kako učenici nisu uzeli u obzir da rad nije vektor već skalar. Samo jedan od ponuđenih odgovora je bio skalar, dok su svi ostali odgovori bili vektori pa su učenici eliminacijom odgovora mogli doći do točnog rješenja.



Slika 50 Grafički prikaz učeničkih odgovora za šesti zadatak

U grupi zadataka koji su ispitivali razumijevanje skalarnog umnoška učenici su najuspješnije riješili 4. zadatak (matematički kontekst 80% i fizikalni kontekst 70%) koji je ispitivao poznavanje formule za skalarni umnožak. Najlošije riješen zadatak na testu je 6. zadatak u kojem je trebalo izračunati skalarni umnožak vektora. Ukupno, učenicima su bili najteži zadaci u kojima se ispitivalo dublje razumijevanje i primjena skalarnog umnoška, a najbolje su riješili zadatke vezane uz osnovne vektorske koncepte (smjer, duljinu i komponente vektora).

## 5. ZAKLJUČAK

U okviru ovog diplomskog rada napravljeno je istraživanje razumijevanja vektora kod učenika četvrtih razreda općih i prirodoslovno-matematičkih gimnazija. Učenicima su mjereni pokreti očiju dok su rješavali test koji se sastojao od 12 paralelnih zadataka iz matematike i fizike u kojima se ispitivao isti vektorski koncept. Zadaci su ispitivali sljedeće vektorske koncepte: smjer i duljinu vektora, komponente vektora, zbrajanje, oduzimanje, množenje skalarom i skalarni umnožak vektora.

Rezultati su pokazali da su učenici podjednako dobro rješavali zadatke iz matematike i fizike te su u velikom broju slučajeva (75%) birali isti odgovor u paralelnim zadacima. Razlog tome je što su zadaci bili konstruirani tako da su u zadacima iz fizike jasno bili naznačeni vektorski koncepti koji su se ispitivali. Na primjer, bilo je naznačeno da rad definiramo kao skalarni umnožak  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ , tako da su učenici koji nisu učili u fizici rad kao skalarni umnožak sile i pomaka, mogli primijeniti znanje o skalarnom umnošku na tom primjeru. U smislu transfera znanja iz matematike na primjer iz mehanike, moglo bi se reći da su učenici bili uspješni. No, ostaje pitanje koliko bi bio uspješan transfer da su učenici sami trebali napraviti taj prvi korak identifikacije rada kao skalarnog umnoška sile i pomaka.

Mjerenje pokreta očiju omogućilo je dodatni uvid u pažnju učenika dok su rješavali zadatke koji su ispitivali razumijevanje vektora. Pokazalo se da su učenici dulje rješavali zadatke iz fizike jer je tekst bio dulji, a i neki grafički prikazi kompleksniji. Najveće razlike su uočene za korijen zadataka višestrukog izbora jer su zadaci iz fizike često sadržavali dodatno obrazloženje, npr. da je rad skalarni umnoška  $\vec{F} \cdot \vec{d}$ .

Analiza pojedinačnih zadataka pokazala je da su učenici najviše poteškoća imali s računanjem skalarnog umnoška vektora u ortonormiranoj bazi, razumijevanjem geometrijske interpretacije skalarnog umnoška i oduzimanjem vektora u 1D i 2D. Rezultati su slični rezultatima prethodnih istraživanja, posebno onog u kojem su korišteni isti zadaci kao u ovom diplomskom radu. Rezultat od 67% i 66% točno riješenih zadataka iz matematike i fizike ne čini se tako loš, ali treba uzeti u obzir da se ovim testom ispituju samo osnovni pojmovi i operacije s vektorima. U sveučilišnoj nastavi fizike razumijevanje

tih vektorskih koncepata je nužni preduvjet za uvođenje mnogih fizikalnih veličina i zakona. Nastavnici na fakultetima očekuju da učenici na kraju srednje škole posjeduju dobro konceptualno i proceduralno znanje o vektorima.

Jedan od mogućih razloga učeničkih poteškoća u razumijevanju vektora je što kurikulumi matematike i fizike nisu bili usklađeni pa je nastavnicima bilo teško uspostaviti korelaciju između ta dva predmeta. Sve do donošenja novog predmetnog kurikuluma iz matematike, vektori su se u nastavi fizike poučavali u 7. razredu, a iz matematike tek u 8. razredu što je većini učenika predstavljalo problem. Po novom kurikulumu iz matematike iz 2019. vektori se spominju već u 7. razredu što će uvelike pomoći učenicima u razumijevanju vektorskih veličina u fizici. Također, u srednjoj školi vektori se mogu obraditi kao izborni sadržaj iz matematike da bi se uspostavila bolja korelacija s nastavom fizike u 1. razredu srednje škole kada se obrađuju teme iz mehanike gdje je ključno razumijevanje vektora.

Vektori se počinju zbrajati i oduzimati već u osnovnoj školi pa kako bi učenicima objasnili i predočili osnovne operacije s vektorima dobro je koristiti što više grafičkih prikaza pomoću kojih učenici vide kako se na početak jednog vektora stavlja kraj drugog vektora tj. kako se primjenjuju pravilo trokuta. Preporučljivo je u nastavi koristiti i razne animacije i prezentacije koje mogu prikazati situacije bliske učenicima. Također, važno je proći što više primjera u kojima imamo dva ili više vektora, kolinearne ili nekolinearne vektore, pri čemu je korisno zadatke povezati s fizikom tj. primjerima iz svakodnevnog života. Kada učenici dobiju primjer matematičkog zadatka povezanog sa svakodnevnim životom lakše će ga vizualizirati, zapamtiti i primijeniti u nastavi fizike i ostalih stručnih predmeta. Nastavnici matematike bi trebali posvetiti više nastavnog vremena osnovnim vektorskim konceptima u koje spada i oduzimanje vektora te s učenicima riješiti što više grafičkih i računskih zadataka jer većina učenika taj matematički alat koristi u daljnjem obrazovanju te ostalim predmetima. Slično tome, nastavnici fizike bi trebali naglašavati da su operacije s vektorima jednake u matematici i fizici te ukazivati na primjenu vektorskih koncepata u različitim područjima fizike.

Učenici se sa skalarnim umnoškom u matematici susreću tek u trećem razredu srednje škole, no u fizici ga indirektno rade u prvom razredu kada uče koncept rada. Tada sile rastavljaju na komponente i definiraju rad kao umnožak pomaka i komponente sile u

smjeru pomaka. Nastavnici fizike bi mogli spomenuti da se taj koncept zove skalarni umnožak i koristiti taj izraz pri rješavanju zadataka. Na taj način bi učenici lakše došli do definicije skalarnog umnoška u matematici, tj. promišljanjem na primjeru iz fizike mogli bi probati sami postaviti definiciju iz matematike. Također, nastavnici matematike kao uvodni primjer skalarnog umnoška mogu upravo koristiti koncept rada koji je učenicima od prije poznat te tako i jedni i drugi postižu korelaciju matematike i fizike.

U srednjoj školi u nastavi matematike uvodi se zapis vektora pomoću ortonormirane baze. Tada se također mogu kombinirati i usporediti grafički i računski zadaci s osnovnim konceptom vektora. Kako se navodi u istraživanju Hecklera i Saife važno je da učenici riješe što više zadataka s vektorima prikazanim u različitim reprezentacijama. Također, pri uvođenju vektorskih koncepata nekad je učenicima lakše koristiti zapis pomoću strelice, a nekad pomoću ortonormirane baze pa i time učenicima možemo olakšati shvaćanje tih koncepata.



## 6. LITERATURA

- [1] P. Barniol, G. Zavala, Force, velocity, and work : *The effects of different contexts on students' understanding of vector concepts using isomorphic problems*, Physical review special topics - physics education research 10 (2014), 020115.
- [2] P. Barniol, G. Zavala, *Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test*, Physical review special topics - physics education research 10 (2014), 010121.
- [3] A. Duchowski, *Eye Tracking Methodology Theory and Practice Second Edition*, British Library Cataloguing, London, 2007.
- [4] A. F. Heckler, T. M. Scaife, *Adding and subtracting vectors: The problem with the arrow representation*, Physical review special topics - physics education research 11 (2015), 010101.
- [5] R. Karam, *Framing the structural role of mathematics in physics lectures: A case study on electromagnetism*, Physical review special topics - physics education research 10 (2014), 010119.
- [6] R. D. Knight, *The vector knowledge of beginning physics students*, The physics teacher vol. 33 (1995), 74-77.
- [7] M. B. Kustusch, *Assessing the impact of representational and contextual problem features on student use of right-hand rules*, Physical review physics education research 12 (2016), 010102.
- [8] N.-L. Nguyen, D. E. Meltzer, *Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics courses*, Am. J. Phys. 71 (2003).
- [9] M. Planinić, Ž. Milin-Šipuš, H. Katić, A. Sušac, L. Ivanjek, *Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics*, International Journal of Science and Mathematics Education (2012), 10:1393Y1414.
- [10] S. Rakkapao, S. Prasitpong, K. Arayathanitkul, *Analysis test of understanding of vectors with the three-parameter logistic model of item response theory and item response curves technique*, Physical review physics education research 12 (2016), 020135.

- [11] P. S. Shaffer, L. C. McDermott, *A research-based approach to improving student understanding of the vector nature of kinematical concepts*, Am. J. Phys. 10 (2005).
- [12] J.H. Sirait, E. Oktavianty, *Analysis of Pre-Service Physics Teachers' Understanding of Vectors and Forces*, Turkish science education Volume 14, Issue 2 (2017), 82-95.
- [13] A. Sušac, M. Planinić, D. Klemenčić, Ž. Milin-Šipuš, Using the Rasch model to analyze the test of understanding of vectors, Physical review physics education research 14 (2018), 023101.
- [14] U. Wutchana, K. Bunrangsri, N. Emarat, *Teaching Basic Vector Concepts: A Worksheet for the Recovery of Students' Vector Understanding*, Eurasian J. Phys. & Chem. Educ. 7 (2015), 18-28.
- [15] Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta fizike, dostupno na [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_10\\_210.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_10_210.html) (kolovoz 2020.)
- [16] Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta matematike, dostupno na [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html) (kolovoz 2020.)
- [17] Nastavni plan i program za osnovnu školu 2006. godine, dostupno na [https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelj/RM/Nastavni\\_plan\\_i\\_program\\_za\\_osnovnu\\_skolu\\_-\\_MZOS\\_2006\\_.pdf](https://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelj/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf) (kolovoz 2020.)
- [18] Nastavni programi za gimnazije 1995. godine, dostupno na: [http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni\\_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf](http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf) (rujan 2020.)
- [19] Zdravstveno veleučilište u Zagrebu, *T-TEST*, dostupno na [https://ldap.zvu.hr/~oliverap/VjezbeIzStatistike/7\\_T-test%20vje%C5%BEbe.pdf](https://ldap.zvu.hr/~oliverap/VjezbeIzStatistike/7_T-test%20vje%C5%BEbe.pdf) (kolovoz 2020.)

## 7. POPIS TABLICA

Tablica 1 Opis zadataka i pripadajući vektorski koncept koji ispituju i fizikalna veličina koja je korištena u kontekstu mehanike [11] .....	10
Tablica 2 Prosječni rezultati pojedinog učenika na ispitu iz matematike i fizike.....	14
Tablica 3 $\chi^2$ test za usporedbu riješenosti pojedinih zadataka iz matematike i fizike.....	16
Tablica 4 Ukupno vrijeme gledanja cjelokupnog zadatka.....	19
Tablica 5 t-test za ukupno vrijeme gledanje zadatka.....	20
Tablica 6 Prosječni broj fiksacija pojedinog učenika .....	21
Tablica 7 Prosječno vrijeme trajanja fiksacija pojedinog učenika .....	22
Tablica 8 t-test prosječnog vremena gledanja AOI-eva.....	23
Tablica 9 t-test za vrijeme gledanja Korijena zadatka .....	24
Tablica 10 t-test za prosječno gledanje Grafičkog prikaza.....	26
Tablica 11 t-test za prosječno gledanje Višestrukog izbora .....	27

## 8. POPIS SLIKA

Slika 1 Relativni položaj zjenice i refleksije svjetlosti na rožnici [3].	10
Slika 2 Prikaz fiksacija i sakada	11
Slika 3 Primjer AOI-a na zadatku 12 iz fizike	12
Slika 4 Grafički prikaz rezultata riješenosti pojedinog zadatka	15
Slika 5 Grafički prikaz postotka odabira istih odgovora na paralelnim zadacima	16
Slika 6 Usporedba rezultata učenika u Zagrebu i studenata u Meksiku	17
Slika 7 Ukupni postotak riješenosti koncepta matematike i koncepta fizike za učenike iz Zagreba i studente iz Meksika	18
Slika 8 Ukupno gledanje pojedinih zadatka	20
Slika 9 Prosječno vrijeme gledanja AOI-eva za sve zadatke	23
Slika 10 Prosječno vrijeme gledanja Korijena zadatka	24
Slika 11 Prosječno vrijeme gledanja Grafičkog prikaza zadatka	25
Slika 12 Prosječno vrijeme gledanja Višestrukog izbora odgovora	26
Slika 13 Prikaz toplinske mape na zadatku 4 iz matematike	27
Slika 14 Prikaz toplinske mape na zadatku 4 iz fizike	28
Slika 15 Peti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike	29
Slika 16 Peti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike	30
Slika 17 Grafički prikaz učeničkih odgovora za peti zadatak	31
Slika 18 Jedanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike	32
Slika 19 Jedanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike	32
Slika 20 Grafički prikaz učeničkih odgovora za jedanaesti zadatak	33
Slika 21 Treći zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike	34
Slika 22 Treći zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike	34
Slika 23 Grafički prikaz učeničkih odgovora za treći zadatak	35
Slika 24 Sedmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike	36
Slika 25 Sedmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike	36
Slika 26 Grafički prikaz učeničkih odgovora za sedmi zadatak	37
Slika 27 Deseti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike	38
Slika 28 Deseti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike	38

Slika 29 Grafički prikaz učeničkih odgovora za deseti zadatak .....	39
Slika 30 Prvi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike .....	40
Slika 31 Prvi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike.....	41
Slika 32 Grafički prikaz učeničkih odgovora za prvi zadatak .....	42
Slika 33 Deveti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike .....	43
Slika 34 Deveti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike.....	43
Slika 35 Grafički prikaz učeničkih odgovora za deveti zadatak.....	44
Slika 36 Dvanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike .....	45
Slika 37 Dvanaesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike.....	45
Slika 38 Grafički prikaz učeničkih odgovora za dvanaesti zadatak .....	46
Slika 39 Osmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike .....	47
Slika 40 Osmi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike.....	47
Slika 41 Grafički prikaz učeničkih odgovora za osmi zadatak.....	48
Slika 42 Drugi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike.....	49
Slika 43 Drugi zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike .....	50
Slika 44 Grafički prikaz učeničkih odgovora za drugi zadatak .....	51
Slika 45 Četvrti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike.....	52
Slika 46 Četvrti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike .....	52
Slika 47 Grafički prikaz učeničkih odgovora za četvrti zadatak .....	53
Slika 48 Šesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz matematike .....	54
Slika 49 Šesti zadatak u kontekstu obrazovnog sadržaja iz fizike.....	54
Slika 50 Grafički prikaz učeničkih odgovora za šesti zadatak .....	55

## 9. SAŽETAK

Brojna istraživanja su pokazala da učenici i studenti imaju poteškoća u prijenosu konceptualnih i proceduralnih matematičkih znanja u kontekst fizike. Vektori su važna tema u nastavi matematike, a nužni su za razumijevanje mnogih fizikalnih koncepata. U ovom diplomskom radu napravljeno je istraživanje razumijevanja vektora kod učenika četvrtih razreda općih i prirodoslovno-matematičkih gimnazija. Mjereni pokreti očiju učenika dok su rješavali test koji se sastojao od 12 izomorfnih zadataka iz matematike i fizike u kojima se ispitivao isti vektorski koncept. Zadaci su ispitivali sljedeće vektorske koncepte: smjer i duljinu vektora, komponente vektora, zbrajanje, oduzimanje, množenje skalarom i skalarni umnožak vektora.

Rezultati su pokazali da su učenici slično riješili zadatke iz matematike i fizike te su često birali isti odgovor u paralelnim zadacima. Moglo bi se reći da su učenici uspješno primijenili znanja o vektorima u oba konteksta, vjerojatno zbog toga što su u zadacima iz fizike jasno bili naznačeni vektorski koncepti koji su se ispitivali. Mjerenje pokreta očiju omogućilo je dodatni uvid u pažnju učenika dok su rješavali zadatke koji su ispitivali razumijevanje vektora. Pokazalo se da su učenici dulje rješavali zadatke iz fizike jer je tekst bio dulji, a i neki grafički prikazi kompleksniji. Analiza pojedinačnih zadataka pokazala je da su učenici najviše poteškoća imali s računanjem skalarnog umnoška vektora u ortonormiranoj bazi, razumijevanjem geometrijske interpretacije skalarnog umnoška i oduzimanjem vektora u 1D i 2D. Razmatrane su implikacije dobivenih rezultata za nastavu matematike i fizike.

## 10. SUMMARY

Numerous studies have shown that pupils and students have difficulties transferring conceptual and procedural mathematical knowledge into the context of physics. Vectors are an important topic in mathematics instruction and are necessary for understanding many physical concepts. In this diploma thesis, understanding of vectors in fourth-grade students of general and science high schools was investigated. Students' eye movements were measured while they solved a test consisting of 12 isomorphic mathematics and physics items in which the same vector concept was examined. The items examined the following vector concepts: direction and length of vectors, vector components, addition, subtraction, scalar multiplication, and scalar product of vectors.

The results showed that students solved mathematics and physics items similarly and often chose the same answer in parallel items. It could be said that the students successfully applied the knowledge of vectors in both contexts, probably because in the physics items the vector concepts to be examined were clearly indicated. Measurement of eye movements provided additional insight into students' attention as they solved items that examined vector understanding. It turned out that students took longer to solve physics items because the text was longer, and some graphical representations were more complex. The analysis of individual items showed that students had the most difficulties with calculating the scalar product of vectors in the orthonormal base, understanding the geometric interpretation of the scalar product, and subtracting vectors in one and two dimensions. The implications of the obtained results for the teaching of mathematics and physics are discussed.

## 11. ŽIVOTOPIS

Rođen sam 16. svibnja 1991. godine u Zagrebu kao drugo dijete Marijana i Branke Tušek. U Zagrebu sam uspješno završio osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje u Osnovnoj školi Trnsko i u I. tehničkoj školi Tesla; smjer: elektrotehničar.

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij Matematika i fizika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu upisao sam 2010. godine. Tijekom svog obrazovanja redovito sam održavao instrukcije učenicima osnovnih i srednjih škola kojima je to bilo potrebno te obavljao razne studentske poslove.

Sudjelovao sam u brojnim sveučilišnim gradskim, državnim i međunarodnim košarkaškim natjecanjima. Predstavljajući Prirodoslovno-matematički fakultet izborio sam nastup za sveučilišnu ekipu Zagreba s kojom sam postao višestruki prvak Hrvatske. Ističe se nastup na Europskim sveučilišnim igrama održanim u Zagrebu i Rijeci na kojima smo osvojili drugo mjesto. Naknadno su nam uručene posebne rektorove nagrade.

Također, tijekom studiranja nastupao sam za brojne klubove s kojima sam izborio nastup u Prvoj Hrvatskoj košarkaškoj ligi u kojoj sam potom i nastupao.