

# Plohe drugog reda i primjene

---

**Vukić, Barbara**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:630852>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-28**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Plohe drugog reda i primjene

---

**Vukić, Barbara**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:630852>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-19**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Barbara Vukić

**PLOHE DRUGOG REDA I PRIMJENE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc.Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima, sestrama i Matiji. Hvala vam za potporu, ljubav i vjeru u mene! Posebno bih se zahvalila dragoj mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na savjetima i pomoći kod pisanja i dovršavanja rada.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Primjena linearne algebre u klasifikaciji ploha drugog reda</b>	<b>3</b>
1.1 Definicije i osnovni pojmovi . . . . .	3
1.2 Klasifikacija ploha drugog reda . . . . .	8
<b>2 Diferencijalno-geometrijski opis ploha drugog reda</b>	<b>17</b>
2.1 Definicije i osnovni pojmovi . . . . .	17
2.2 Plohe drugog reda . . . . .	19
2.3 Pravčaste plohe drugog reda . . . . .	43
<b>3 Primjena ploha u arhitekturi</b>	<b>49</b>
3.1 Plohe drugog reda . . . . .	49
3.2 Istaknute plohe višeg stupnja . . . . .	54
<b>Bibliografija</b>	<b>59</b>

# Uvod

*"The more you know mathematical tools the more you understand and appreciate the form's beauty."*

Nepoznati autor

Teorija kvadratnih formi kao dio linearne algebre nalazi primjenu u mnogim područjima matematike kao što su vjerojatnost i statistika, optimizacija funkcija više varijabli, diferencijalna geometrija, topologija, teorija brojeva. U prvom poglavlju ovog rada dat ćemo pregled teorije linearne algebre i realnih simetričnih kvadratnih formi što će nam omogućiti klasifikaciju ploha drugog reda u realnom afinom prostoru. Na primjerima ćemo pokazati kako odrediti vrstu plohe drugog reda koristeći alate linearne algebre.

Slijedi diferencijalno-geometrijski opis i definicije ploha drugog reda. Plohe drugog reda generaliziraju ravninske krivulje drugog stupnja, kao što su na primjer kružnica, elipsa, hiperbola i parabola. Način na koji se to može zorno vidjeti je presjekom plohe koordinatnom ravninom. Proučit ćemo zakrivljenost plohe i Veličanstveni Gaussov teorem te opisati rotacijske, translacijske i posebno pravčaste plohe drugog reda čiju veliku primjenu vidimo u modernoj arhitekturi 20. stoljeća. Posebnu primjenu vitoperih pravčastih ploha drugog reda nailazimo u natkrivanju zgrada i krovnim konstrukcijama. Takve plohe koje određuju oblik zgrade često su vrlo elegantne i proporcionalne te kao takve promatrača ostavljaju zadivljenog svojom ljepotom. Razvojem računalnih softvera omogućen je njihov sve složeniji i unaprijeđeni arhitektonski dizajn. Osim toga, u suvremenom graditeljstvu u obzir se uzimaju i neki važni tehnički elementi kao što su funkcionalnost, minimizacija troškova energije te sklad s prirodom. Sklad i ljepota ne proizlazi samo iz umjetnikove kreativnosti, već je usko povezana s matematikom i geometrijom što ćemo uvidjeti na primjerima.





# Poglavlje 1

## Primjena linearne algebre u klasifikaciji ploha drugog reda

### 1.1 Definicije i osnovni pojmovi

Simetrične matrice su zbog svojih svojstava od posebnog interesa u primjenjenoj matematici. Stoga ćemo u ovom poglavlju navesti osnovne definicije i teoreme iz linearne algebre koji će nam onda omogućiti klasifikaciju ploha drugog reda koristeći dijagonalizaciju kvadratne forme.

**Definicija 1.1.1.** Matrica  $A \in M_n(\mathbb{F})$  je *simetrična* ako vrijedi  $A = A^T$ .

**Definicija 1.1.2.** Neka je  $V$  vektorski prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $A \in L(V)$ . Za skalar  $\lambda \in \mathbb{F}$  kažemo da je *svojstvena ili karakteristična vrijednost* operatora  $A$  ako  $\exists x \in V, x \neq 0_v$ , tako da  $Ax = \lambda x$ , taj vektor zove se *svojstveni vektor* operatora  $A$  pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ . Skup svih svojstvenih vrijednosti naziva se *spektar*, označavamo ga s  $\sigma(A)$ .

**Propozicija 1.1.1.** Neka je  $A \in L(V)$ . Ako je  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  svojstvena vrijednost operatora  $A$ , onda je  $\lambda_0$  rješenje algebarske jednadžbe  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

**Definicija 1.1.3.** Neka je  $A \in L(V)$ . Polinom  $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  zove se *karakteristični ili svojstveni polinom* operatora  $A$ .

**Definicija 1.1.4.** Neka je  $A \in L(V)$ , te  $\lambda \in \sigma(A)$ . Potprostor  $V_A(\lambda)$  naziva se *svojstveni potprostor* pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ .

**Propozicija 1.1.2.** Neka je  $V$   $n$ -dimenzionalni vektorski prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $A \in L(V)$ . Skalar  $\lambda_0$  je svojstvena vrijednost operatora  $A$  ako i samo ako je  $\lambda_0$  nultočka karakterističnog polinoma  $k_A(\lambda)$  i  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ .

**Definicija 1.1.5.** Kažemo da se operator  $A \in L(V)$  može **dijagonalizirati**, odnosno da je dijagonalizabilan, ako postoji baza prostora  $V$  u kojoj  $A$  ima dijagonalnu matricu.

Kvadratna matrica  $A$  je dijagonalizabilna ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici, to jest ako postoji regularna matrica  $D$  za koju je  $Q^{-1}AQ$  dijagonalna matrica.

**Propozicija 1.1.3.** Neka je  $V$  konačno dimenzionalan realni unitarni prostor. Linearni operator  $A \in L(V)$  je simetričan operator ako i samo ako je njegova matrica u bilo kojoj ortonormiranoj bazi simetrična.

**Propozicija 1.1.4.** Neka je  $A$  simetrični operator na unitarnom prostoru  $V$ . Tada vrijedi

a) Ako je  $\lambda \in \sigma(A)$ , onda je  $\lambda$  realan broj.

b) Ako su  $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$  različite svojstvene vrijednosti, a  $v_1, v_2$  pripadni svojstveni vektori, tada su  $v_1$  i  $v_2$  ortogonalni vektori. Odatle slijedi da su svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.

**Teorem 1.1.1.** Svaki simetrični operator na konačnodimenzionalnom prostoru može se dijagonalizirati i to u ortonormiranoj bazi. Dijagonalni oblik simetričnog operatora je realna dijagonalna matrica.

Posljedica ovog teorema je sljedeća tvrdnja za matrice koja će nam biti od posebne važnosti.

**Korolar 1.1.1.** Ako je  $A \in M_n(\mathbb{R})$  simetrična matrica, onda postoje dijagonalna matrica  $D \in M_n(\mathbb{R})$  i ortogonalna matrica  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  takve da vrijedi  $Q^T A Q = D$ .

*Dokaz.* Označimo s  $\{e_1, \dots, e_n\}$  kanonsku bazu prostora  $\mathbb{R}^n$ . Izaberimo normirani jedinični vektor  $v_1$  koji odgovara svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_1$ . Nadopunimo ga Gram-Schmidtovim postupkom do ortonormirane baze  $w_1, \dots, w_n$ . Matrica  $Q_1 = [v_1, w_1, \dots, w_n]$  je ortogonalna matrica. Stavimo  $A_1 = Q_1^T A Q_1$ . Tada je

$$A_1 e_1 = Q_1^T A (Q_1 e_1) = Q_1^T (\lambda_1 v_1) = \lambda_1 Q_1^{-1} v_1 = \lambda_1 e_1.$$

Ovaj vektor je prvi stupac matrice  $A_1$ . Primijetimo nadalje da je  $A_1$  simetrična matrica. Dakle je

$$A_1^T = (Q_1^T A Q_1)^T = Q_1^T A^T Q_1^T T = Q_1^T A Q_1.$$

Iz istog je razloga i njezin prvi redak istog oblika. Imamo :

$$A_1 = Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Dokaz nastavljamo matematičkom indukcijom. Za  $n = 2$  ova je matrica već dijagonalna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve realne simetrične matrice reda  $n - 1$ . Tada se realna simetrična matrica  $B$  reda  $n - 1$  koja se pojavljuje u 1.1 može dijagonalizirati. To znači da postoji ortogonalna matrica  $Q_2$  takva da je

$$Q_2^T B Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sada možemo zaključiti da je i  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$  ortogonalna jer su joj stupci ortonormirani. Umnožak dviju ortogonalnih matrica je ortogonalna matrica, pa je prema tome i matrica  $Q = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$  ortogonalna. Za nju vrijedi:

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} Q_1^T A Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q_2^T B Q_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. □

Dakle, za svaku simetričnu matricu postoji ortogonalna matrica  $Q$  takva da je umnožak  $Q^T A Q$  dijagonalna matrica. Matrice shvaćamo kao matrice prikaze simetričnog operatora. Kasnije ćemo primijeniti dijagonalizaciju simetričnih matrica na plohe 2. reda.

## Kvadratna forma

Kvadratna forma je homogeni polinom drugog stupnja od  $n$  varijabli.

**Definicija 1.1.6.** *Simetrična kvadratna forma je funkcija  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s*

$$f(x) = x^T A x,$$

gdje je  $A$  simetrična realna  $n \times n$  matrica.

**Definicija 1.1.7.** *Kvadratna forma je kanonska ako je pripadna matrica dijagonalna.*

Svaka se kvadratna forma može svesti na kanonsku izborom novih koordinata i to pomoću sljedeće leme.

**Lema 1.1.1.** *Neka je  $x^T Ax$  kvadratna forma u varijablama  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , gdje je  $A$  simetrična matrica. Ako je  $Q$  matrica prijelaza između  $A$  i njenog dijagonalnog prikaza  $D$  i ako su nove varijable  $y_1, y_2, \dots, y_n$  definirane jednadžbom  $x = Qy$ , onda njeno uvrštavanje u  $x^T Ax$  daje*

$$x^T Ax = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad (1.2)$$

gdje su  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  svojstvene vrijednosti matrice  $A$  i

$$Q^T A Q = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

U 1.2 zapravo nakon supstitucije  $x = Qy$  imamo

$$x^T Ax = (Qy)^T A (Qy) = y^T Q^T A Q y = y^T Dy.$$

Ovom Lemom opisana je promjena varijabli koja daje novu kvadratnu formu  $y^T Dy$ . Dakle, kvadratnu formu zapisujemo pomoću simetrične kvadratne matrice  $A$  i dijagonalizacijom matrice  $A$  dobivamo kanonski oblik kvadratne forme. Pokažimo na primjeru postupak svođenja kvadratne forme na kanonski oblik.

**Primjer 1.** Svedimo na kanonski oblik kvadratnu formu

$$f(x) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz.$$

*Rješenje* Kvadratna forma odgovara sljedećoj simetričnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo svojstvene vrijednosti od  $A$ . Po Propoziciji 1.1.2,  $\lambda$  je svojstvena vrijednost od  $A$  ako i samo ako je  $\lambda$  nultočka od  $k_A(\lambda)$ . Karakteristični polinom dan je s

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
 k_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) = \\
 &= (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda+7-\lambda) = \\
 &= (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 8(6-\lambda) = \\
 &= (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = \\
 &= (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)
 \end{aligned}$$

Spektar se sastoji od svojstvenih vrijednosti,  $\sigma(A) = \{3, 6, 9\}$ . Pronađimo pripadne svojstvene vektore. Za svaki  $\lambda_j$  rješavamo  $(A - \lambda_j I)X = 0$  i dobit ćemo bazu  $V_A(\lambda_j)$  svojstvenog potprostora. Za  $\lambda_1 = 3$  imamo

$$\begin{aligned}
 (A - 3I)X &= 0 \\
 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

Rješavamo sustav

$$\begin{aligned}
 3x - 2y + 2z &= 0 \\
 2x + 2y &= 0 \\
 2x + 4z &= 0
 \end{aligned}$$

Pripadni svojstveni vektor je  $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Na sličan način za svojstvene vrijednosti  $\lambda_2 = 6$  i

$\lambda_3 = 9$  dobivamo pripadne svojstvene vektore  $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  i  $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Sljedeći korak je ortonormirati bazu. Budući da su vektori već ortogonalni, nadalje trebamo normirati vektore  $v_1, v_2, v_3$  i od njih formiramo stupce ortogonalne matrice  $Q$  koja dijagonalizira matricu  $A$ . Imamo

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Po 1.1.1 uvodimo supstituciju  $y = Q^T x$ , tj.  $x = Qy$  i uvrstimo u početnu formu  $f(x)$ . Odnosno, kraće

$$x^T A x = y^T D y = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2.$$

Time smo dobili kanonski oblik kvadratne forme.

Koristeći sljedeći teorem za kvadratne forme, pronalazimo maksimalnu vrijednost kvadratne forme  $f(x)$ .

**Propozicija 1.1.5.** *Neka je  $A$  simetrična  $n \times n$  matrica takva da je  $A = QDQ^{-1}$ . Neka su u dijagonalnoj matrici  $D$  svojstvene vrijednosti takve da  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  i neka su stupci u matrici  $Q$  odgovarajući svojstveni vektori  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Tada je za  $k = 2, \dots, n$ , maksimalna vrijednost od  $x^T A x$ , uz uvjete*

$$x^T x = 1, \quad x^T v_1, \dots, x^T v_{k-1} = 0$$

*svojstvena vrijednost  $\lambda_k$ . Maksimum se postiže u  $x = v_k$*

Prema prethodnoj propoziciji zaključujemo da je u *Primjeru 1.* maksimalna vrijednost od  $x^T A x$  svojstvena vrijednost  $\lambda_3 = 9$ . Postiže se u pripadnom svojstvenom vektoru

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Klasifikacija ploha drugog reda

**Definicija 1.2.1.** *Ploha drugog reda ili kvadrika je skup točaka  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  koji zadovoljava jednadžbu*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0 \quad (1.3)$$

*za neke  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$  i barem jedan od koeficijenata  $a, b, c, d, e, f \neq 0$ .*

Ploha drugog reda je kvadratni polinom u varijablama  $x, y, z$

$$P(x) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j.$$

Po definiciji (1.1.6) kvadratna forma dana je s

$$f(x) = x^T A x.$$

Polinom možemo zapisati kao produkt matrica  $P(x, y, z) = x^T A x = 0$ , gdje je  $x = (x, y, z, 1)^T$  i  $A$  je simetrična  $4 \times 4$  matrica. Neka je  $f$  kvadratna forma

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz.$$

Zapišimo kvadratnu matricu  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e & g \\ d & b & f & h \\ e & f & c & i \\ g & h & i & j \end{bmatrix}.$$

Podmatricu  $3 \times 3$  matrice  $A$  označit ćemo s  $A_Q$

$$A_Q = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

i ona se naziva gornja podmatrica matrice  $A$ .

Neka je  $A$  realna simetrična matrica reda  $n$ . Svojevne vrijednosti od  $A$  su realni brojevi.

**Definicija 1.2.2.** Neka je  $\sigma^+ = \sigma^+(A)$  broj pozitivnih svojstvenih vrijednosti i  $\sigma^- = \sigma^-(A)$  broj negativnih svojstvenih vrijednosti od  $A$ . Par

$$\sigma = \sigma(A) = (\sigma^+(A), \sigma^-(A))$$

se naziva **inercija** od  $A$ .

Uočimo da je rang od  $A$  dan s  $r = \sigma^+ + \sigma^-$ .

**Definicija 1.2.3.** Za dvije simetrične matrice  $A$  i  $B$  kažemo da su **kongruentne** ako postoji invertibilna matrica  $Q$  takva da je

$$A = Q^T B Q.$$

Sljedi važan teorem za simetrične matrice koji će nam kasnije koristiti u primjerima.

**Teorem 1.2.1. (Sylvesterov zakon inercije)** Neka su  $A$  i  $B$  realne simetrične matrice.  $A$  i  $B$  su kongruentne ako i samo ako je  $\sigma(A) = \sigma(B)$ .

Uočimo da dijagonalna matrica predznaka

$$\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, \dots, 0)$$

ima inerciju  $(\sigma^+, \sigma^-)$ . Dakle, iz Teorema 1.2.1 slijedi da je svaka simetrična realna matrica kongruentna takvoj dijagonalnoj matrici predznaka. Kao posljedicu imamo sljedeći Korolar.

**Korolar 1.2.1.** *Realne simetrične matrice  $A$  i  $B$  su kongruentne ako i samo ako imaju istu inerciju.*

U nastavku ćemo koristeći inerciju klasificirati plohe drugog reda. Također, proučit ćemo geometrijsku pozadinu i interpretaciju kod računskog određivanja vrsta ploha. Klasifikacija ploha drugog reda dana u afinom i realnom prostoru dana je u sljedećoj tablici.

	Naziv plohe drugog reda	Kanonska jednadžba	$\sigma$	$\sigma_Q$
1.	Elipsoid	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	(3,1)	(3,0,0)
2.	Hiperboloidi			
	Jednoplošni hiperboloid	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	(2,2)	(2,1,0)
	Dvoplošni hiperboloid	$x^2 + y^2 - z^2 = -1$	(3,1)	(2,1,0)
3.	Paraboloidi			
	Eliptički paraboloid	$x^2 + y^2 - z = 0$	(3,1)	(2,0,1)
	Hiperbolički paraboloid	$x^2 - y^2 - z = 0$	(2,2)	(1,1,1)
4.	Eliptički stožac	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	(2,1)	(2,1,0)
5.	Valjci			
	Eliptički valjak	$x^2 + y^2 = 1$	(2,1)	(2,0,1)
	Hiperbolički valjak	$x^2 - y^2 = -1$	(2,1)	(1,1,1)
	Parabolički valjak	$x^2 = z$	(2,1)	(1,0,0)
6.	Ravnine			
	Par paralelnih ravnina	$x^2 - 1 = 0$	(1,1)	(1,0)
	Podudarne ravnine ( jedna ravnina)	$x^2 = 0$	(1,0)	(1,0)
	Par ravnina koje se sijeku	$x^2 - y^2 = 0$	(1,1)	(1,1)
7.	Točka	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	(3,0)	(3,0)
8.	Prazan skup	$1 = 0$	(1,0)	(0,0)
9.	Cijeli prostor	$0 = 0$	(0,0)	(0,0)

Tablica 1.1: Klasifikacija ploha drugog reda u  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$



Uz nazive ploha i njihove kanonske jednadžbe, ono po čemu ustvari prepoznamo o kojoj plohi je riječ je inercija dana u četvrtom i petom stupcu tablice. Napomenimo da je u četvrtom stupcu kao treća koordinata u definiciji 1.2.2 dodan broj svojstvenih vrijednosti  $\lambda = 0$ . Elipsoide, hiperboloide, paraboloid, stošce i valjke nazivamo **nedegenerirane** plohe drugog reda, a ostale nazivamo **degenerirane**.

Vratimo se na **Primjer 1.** u kojem smo imali zadanu kvadratnu formu

$$f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz.$$

Sveli smo ju na kanonski oblik i dobili kvadratnu formu  $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2$ . Izračunali smo svojstvene vrijednosti od  $f(x, y, z)$  i dobili  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$ . Dakle, imamo sve 3 pozitivne svojstvene vrijednosti. Odnosno, po definiciji 1.2.2 je  $\sigma_Q = (3, 0)$  i nemamo svojstvene vrijednosti  $\lambda = 0$ . Iz tablice (1.2) iščitavamo da je zadana ploha elipsoid.

**Primjer 2.** Odredi plohu zadanu jednadžbom

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 8y - 2z^2 - 12z - 11 = 0.$$

*Rješenje* Kvadratna forma odgovara sljedećoj simetričnoj matrici

$$A_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti su  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$  pa je prema tome inercija  $\sigma_Q = (2, 1, 0)$ . Matrica A koja je pridružena plohi je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ -1 & 4 & -6 & -10 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo njezine svojstvene vrijednosti i dobijemo 2 pozitivne i dvije negativne svojstvene vrijednosti. Vrijedi  $\sigma = (2, 2, 0)$  i iz tablice (1.2) zaključujemo da je ploha jednoplošni hiperboloid.

Riješimo zadatak na drugi način, geometrijski, transformacijom koordinata. Nadopunimo koordinate do potpunog kvadrata. Imamo

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 8y - 2z^2 - 12z - 11 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (\sqrt{2}y)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 8 - 8 - ((\sqrt{z})^2 + 2 \cdot \sqrt{z} \cdot 3\sqrt{2} + 18 - 18) - 11 = 0$$

$$(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 - 2(z + 3)^2 = 2$$

$$\frac{(x - 1)^2}{2} + (y + 2)^2 - (z + 3)^2 = 1 \quad (1.4)$$

Uočavamo jednadžbu jednoplošnog hiperboloida s centrom u  $(1, -2, -3)$  i duljinama poluosi  $\sqrt{2}, 1, 1$ . Supstitucijom  $x = \sqrt{2}x' + 1, y = y' - 2, z = z' - 3$  dobivamo

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1.$$

Ovom translacijom smo (1.4) pomaknuli u ishodište i tako dobili kanonsku jednadžbu jednoplošnog hiperboloida.

**Primjer 3.** Odredi plohu zadanu jednadžbom

$$9x^2 + 20y^2 + 20z^2 - 40yz - 36x - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}z + 4 = 0.$$

*Rješenje* Matrica kvadratne forme je

$$A_Q = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo svojstvene vrijednosti od  $A_Q$ .

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 20 - \lambda & -20 \\ 0 & -20 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 40) \end{aligned}$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 40$ . Imamo  $\sigma_Q = (2, 0)$  i imamo jednu svojstvenu vrijednost  $\lambda = 0$ . Izračunajmo svojstvene vrijednosti matrice koja odgovara matrici zadane plohe

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 20 & -20 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -20 & 20 & 2\sqrt{2} \\ -18 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}.$$

Dobijemo inerciju  $\sigma = (2, 1)$  te iz tablice (1.2) zaključujemo da je dana ploha eliptički valjak.

Raspišimo dalje zadatak na drugi način kako bismo geometrijski i bez tablice uočili transformacije plohe. Dakle, izračunali smo svojstvene vektore  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 40$ . Odgovarajući normirani svojstveni vektori daju matricu prijelaza

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Uz supstituciju  $x = Qy$  imamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Promotrimo matricu  $Q$ , ona je zapravo matrica rotacije oko  $x$ -osi za kut  $\varphi$ . Vrijedi

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & -s \\ 0 & s & r \end{bmatrix}$$

Odredimo kut rotacije

$$r = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \varphi = 45^\circ$$

Provjerom ostalih vrijednosti dobijemo matricu  $Q$ . Dakle, jednadžbom (1.5) je određena rotacija za  $45^\circ$  oko  $x$ -osi. Na taj način smo eliminirali mješoviti član  $yz$  u jednadžbi zadane plohe. Nove koordinate iz (1.5) izrazimo pomoću starih i imamo

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z &= \frac{-1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{aligned}$$

uvrstimo u početnu jednadžbu plohe i dobivamo

$$9x'^2 + 40y'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0.$$

Nadopunimo do potpunog kvadrata te imamo

$$9(x'^2 - 4x' + 4) + 40\left(y'^2 - \frac{1}{5}y' + \frac{1}{100}\right) = 32.4$$

$$9(x' - 2)^2 + 40\left(y' - \frac{1}{10}\right)^2 = 32.4$$

$$\frac{(x' - 2)^2}{3.6} + \frac{\left(y' - \frac{1}{10}\right)^2}{0.81} = 1$$

Uz supstituciju  $x' = x'' + 2, y' = y'' + \frac{1}{10}$  je

$$\frac{x''^2}{3.6} + \frac{y''^2}{0.81} = 1$$

Nadopunom do potpunog kvadrata zapravo smo rotiranu plohu sa središtem u  $\left(2, \frac{1}{10}\right)$  sveli na jednostavniji oblik kako bi lakše prepoznali plohu. Supstitucijom smo plohu translaterali u ishodište. Prepoznamo jednadžbu eliptičkog valjka.

**Primjer 4.** Odredi plohu zadanu jednadžbom

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0.$$

*Rješenje* Kvadratna forma odgovara sljedećoj simetričnoj matrici

$$A_Q = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo svojstvene vrijednosti od  $A_Q$ .

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ -5 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda(\lambda - 9)(\lambda + 9) \end{aligned}$$

Dakle,  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9$ . Imamo  $\sigma_Q = (1, 1)$  i jednu svojstvenu vrijednost  $\lambda = 0$ . Izračunajmo svojstvene vrijednosti matrice koja odgovara matrici zadane plohe.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & -8 \\ -5 & 4 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & -8 & -4 \\ -8 & -8 & -4 & 72 \end{bmatrix}.$$

Dobijemo inerciju  $\sigma = (2, 2)$  te iz tablice (1.2) zaključujemo da je dana ploha hiperbolički paraboloid.

Raspišimo dalje zadatak kao i u prethodnim primjerima. Uočit ćemo geometrijsku pozadinu te bez tablice zaključiti koja ploha je zadana u zadatku. Dakle, izračunali smo

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -9. \text{ Pripadni svojstveni vektori su } v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ i } v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ i } v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ortonormiranjem pripadnih svojstvenih vektora dobijemo novu bazu i matricu prijelaza

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Uvođenjem supstitucije  $y = Q^T x$ , tj.  $x = Qy$  je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Promotrimo geometrijski, kao i u prethodnom primjeru, matricu  $Q$ . U ovom primjeru ne uočavamo odmah koju rotaciju plohe daje ova matrica, ali ona je produkt dviju rotacija. Uvjerimo se u to. Neka je sa  $R_z$  dana rotacija oko  $z$ -osi, odnosno sa  $R_y$  rotacija oko  $y$ -osi

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -s & 0 \\ s & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Kao produkt dobivamo

$$R_z R_y = \begin{bmatrix} ra & -s & -br \\ as & r & -bs \\ b & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Usporedimo tu matricu sa  $Q$ . Vidimo da je  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $a = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ . Provjerimo i ostale elemente  $as$ ,  $ba$ ,  $ar$ ,  $br$  i vidimo da smo dobili matricu  $Q$ . Dakle, matricu  $Q$  možemo shvatiti kao produkt dviju rotacija oko  $z$  i  $y$ -osi. Odredimo još kutove rotacije. Vrijedi

$$r = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \varphi = 45^\circ,$$

$$a = \cos \psi = \frac{4}{3\sqrt{2}} \implies \psi = 19^\circ 28' 16.39''$$

Nove koordinate iz (1.6) izrazimo pomoću starih i imamo

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{3}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{3\sqrt{2}}z' \\y &= \frac{2}{3}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{3\sqrt{2}}z' \\z &= \frac{2}{3}x' + \frac{4}{3\sqrt{2}}z'\end{aligned}$$

uvrstimo u početnu jednadžbu plohe i dobivamo

$$9y'^2 - 9z'^2 - 24x' + 72 = 0. \quad (1.7)$$

Uočimo, rotacijama oko  $z$  i oko  $y$ -osi zapravo smo eliminirali mješovite članove  $xy$  i  $xz$  zadane jednadžbe plohe i dobili kvadratnu formu (1.7). Uvedimo sada supstituciju kojom ćemo smjestiti rotiranu plohu u ishodište, odnosno dobiti njezinu kanonsku jednadžbu. Neka je  $x = x' + 3, y = \frac{y'}{3}, z = \frac{z'}{3}$ . Uvrštavanjem u (1.7) dobivamo

$$9\left(\frac{y'}{3}\right)^2 - 9\left(\frac{z'}{3}\right)^2 - 24x' = 0$$

Stavimo  $x'' = \frac{x'}{24}, y' = y'', z' = z''$ , te dobivamo

$$y''^2 - z''^2 - x'' = 0$$

što je kanonska jednadžba hiperboličkog paraboloida.

## Poglavlje 2

# Diferencijalno-geometrijski opis ploha drugog reda

### 2.1 Definicije i osnovni pojmovi

Kako bismo nadalje mogli dodatno proučiti svaku od ploha drugog reda, promatrat ćemo ih i sa stanovišta diferencijalne geometrije. Stoga u ovom poglavlju uvodimo temeljne potrebne pojmove (primjerice, Gaussovu zakrivljenost) i odgovarajuće teoreme iz područja diferencijalne geometrije. Plohu definiramo na sljedeći način

**Definicija 2.1.1.** Podskup  $S \subset \mathbb{R}^3$  je **ploha** ako za svaku točku  $p \in S$  postoji otvorena okolina  $V \in \mathbb{R}^3$  i preslikavanje  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  s otvorenog skupa  $U \in \mathbb{R}^2$  koje je

1. homeomorfizam otvorenih skupova,
2. glatko preslikavanje.

Ako je i diferencijal preslikavanja  $\mathbf{x}$  injektivan, za plohu kažemo da je **regularna**. Preslikavanje  $\mathbf{x}$  nazivamo **lokalnom parametrizacijom, kartom ili koordinatom** okoline točke  $p$  plohe  $S$ . Pišemo

$$\mathbf{x} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Homeomorfizam znači da je preslikavanje  $\mathbf{x}$  bijekcija koja je neprekidna i kojoj je inverz neprekidan. Bijektivnost preslikavanja  $\mathbf{x}$  osigurava da ploha nema samopresjecanja. Neprekidnost inverza je nužna za dokazivanje neovisnosti nekih veličina o parametrizaciji, odnosno o promjeni karte. Preslikavanje je glatko što znači da postoje i neprekidne su sve parcijalne derivacije. Promotrimo diferencijal preslikavanja  $\mathbf{x}$ . Diferencijal je linearni operator  $D\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  u paru kanonskih baza dan Jacobijevom matricom

$$D\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Diferencijal je injektivan ako i samo ako je njegova jezgra trivijalna. Po teoremu o rangu i defektu tada je njegova slika 2-dimenzionalna. Slika diferencijala je razapeta stupcima matičnog prikaza s vektorima  $\mathbf{x}_u := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$  i  $\mathbf{x}_v := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ . Dakle, diferencijal je injektivan ako i samo ako su ti vektori linearno nezavisni

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}.$$

Definirajmo sada glatke krivulje na plohi.

**Definicija 2.1.2.** Svako glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow S, I \in \mathbb{R}$ , nazivamo **glatkom krivuljom na plohi**. Pritom, za preslikavanje  $c : I \rightarrow S$  kažemo da je glatko ako je preslikavanje  $\mathbf{x}^{-1} \circ c : I \rightarrow S, c(I) \subset \mathbf{x}(U)$ .

**Propozicija 2.1.1.** Neka je  $c : I \rightarrow S$  glatka krivulja takva da je  $c(I) \subset \mathbf{x}(U) \subset S$ . Tada postoje jedinstvene glatke funkcije  $u = u(t), v = v(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je

$$c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)).$$

**Definicija 2.1.3.** Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$  lokalna parametrizacija plohe  $S$  i  $(u_0, v_0) \in U$ . Krivulje  $u \mapsto \mathbf{x}(u_0, v_0), v \mapsto \mathbf{x}(u_0, v_0)$  nazivaju se **parametarskim u i v-krivuljama**.

**Definicija 2.1.4.** Krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazivamo **regularnom** ako je  $\dot{c}(t) \neq \mathbf{0}, t \in I$ .

Plohe u diferencijalnoj geometriji mogu se zadati parametarski i implicitnom jednačbom. Definiramo ih kao zadane parametarski. Pokažimo da se svaka implicitno zadana ploha može parametrizirati.

**Propozicija 2.1.2.** Neka je  $g : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^3$  otvoren, glatka funkcija. Podskup

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = c \neq 0\},$$

gdje je  $c \in \mathbb{R}$ , je regularna ploha ako je gradijent funkcije  $g$

$$\nabla g := \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

različit od 0 u svim točkama od  $S$ .



*Dokaz.* Neka je  $p \in S$  po volji odabrana točka skupa  $S$ . Treba naći kartu koja pokriva okolinu od  $p$ . Kako je  $\nabla g \neq 0$ , tada je barem jedna parcijalna derivacija od  $g$  u točki  $p$  različita od 0. Uzimo neke je to  $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ . Prema Teoremu o implicitnim funkcijama, jednačba  $g(x, y, z) = c$  može se riješiti po  $z$ , odnosno, postoji glatka funkcija  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$  otvoren, takva da vrijedi

- 1.)  $g(u, v, f(u, v)) = c, (u, v) \in U$ ,
- 2.) točke  $(u, v, f(u, v)), (u, v) \in U$ , čine otvorenu okolinu točke  $p$ .

Odavde slijedi da je preslikavanje  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3, x(u, v) = (u, v, f(u, v))$  karta oko  $p$ . Zbog proizvoljnosti od  $p$ , dokazali smo da je  $S$  regularna ploha.  $\square$

## 2.2 Plohe drugog reda

Definirat ćemo i opisati svaku od ploha drugog reda. Prikazat ćemo i proučiti presjeka ploha drugog reda s koordinatnim ravninama.

### Sfera

**Definicija 2.2.1.** *Sfera je skup točaka prostora koje su jednako udaljene od čvrste točke  $S(x_0, y_0, z_0)$  tog prostora. Točka  $S$  naziva se središte sfere, a udaljenost od točke sfere do  $S$  zovemo radijus. Dana je jednačbom*

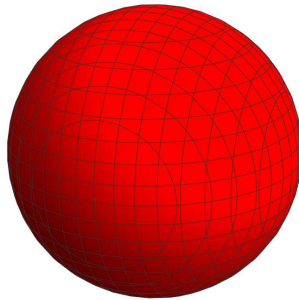
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Sfera sa središtem u ishodištu je dana jednačbom  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Najjednostavnija je od svih ploha drugog reda. Presjeci sfere s koordinatnim ravninama su kružnice. U daljnjem tekstu promatrat ćemo normalne kanonske jednačbe sfere i ostalih ploha.

**Definicija 2.2.2.** *Skup točaka koji nastaje rotacijom neke ravninske krivulje oko pravca u toj ravnini (koji ne siječe krivulju) nazivamo **rotacijskom plohom**. Krivulju koja rotira nazivamo generatrisom plohe, a pravac oko kojeg krivulja rotira os rotacije.*

Sfera nastaje rotacijom polukružnice oko svog promjera te je ona rotacijska ploha. Jedna moguća parametrizacija sfere je

$$x(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u), u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$



Slika 2.1: Sfera

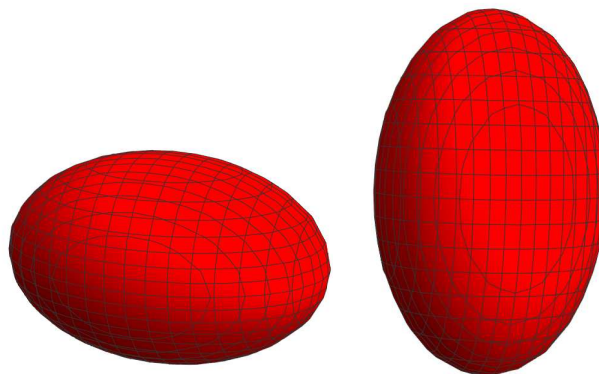
## Elipsoidi

**Definicija 2.2.3.** *Elipsoid je ploha drugog reda određena jednačbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ako je  $a > b > c > 0$  tada kažemo da je  $a$  velika poluos,  $b$  srednja i  $c$  mala poluos elipsoida. Kada je

$a = b$ ili $b = c$	elipsoid se naziva sferoid ili tzv. rotacijski elipsoid
$a = b$	obli ili spljošteni elipsoid
$b = c$	izduženi elipsoid
$a = b = c$	dobivamo sferu.



Slika 2.2: Spljošteni i izduženi rotacijski elipsoidi

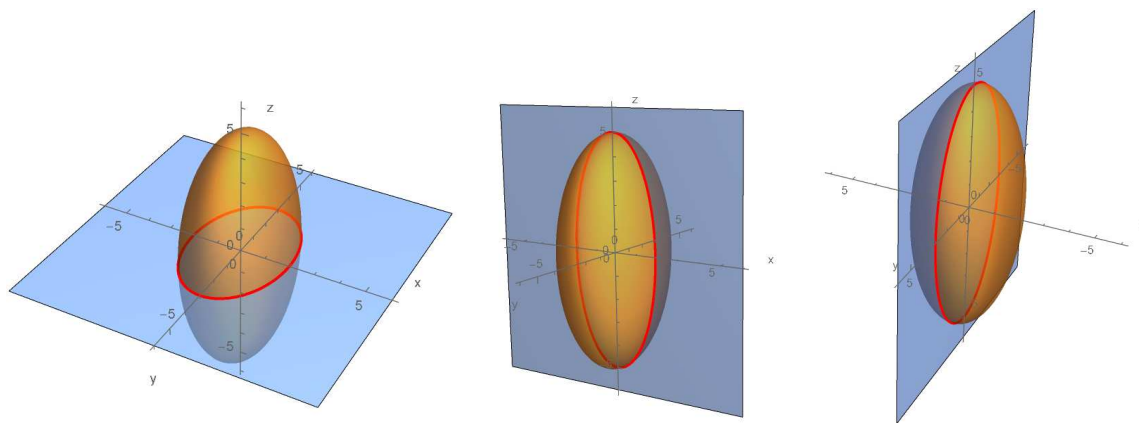
Izduženi rotacijski elipsoid nastaje rotacijom elipse oko svoje glavne osi, a spljošteni rotacijski elipsoid nastaje rotacijom oko svoje sporedne osi.

Presjeci elipsoida s koordinatnim ravninama su elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{je presjek s } xy \text{ – ravninom}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{je presjek s } xz \text{ – ravninom}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{je presjek s } yz \text{ – ravninom}$$



Slika 2.3: Elipse u ravninama  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$

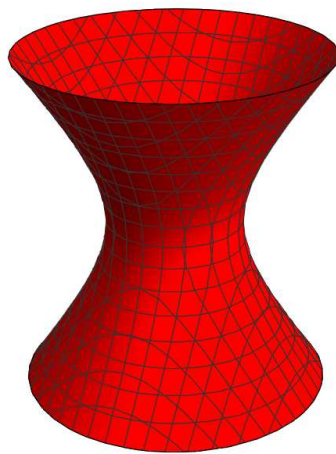
## Hiperboloidi

Hiperboloide dijelimo na jednoplošne i dvoplošne.

**Definicija 2.2.4.** Ploha dana jednačžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b$$

*naziva se jednoplošni hiperboloid.*

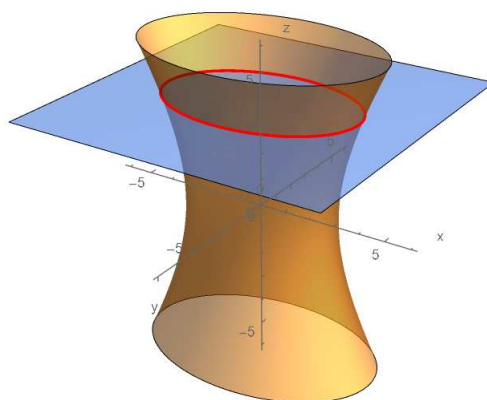


Slika 2.4: Jednoplošni hiperboloid

Pogledajmo presjeke jednoplošnog hiperboloida s ravninama paralelnim koordinatnim ravninama.

Presjek s ravninom  $z = k$  je elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

Slika 2.5: Presjek jednoplošnog hiperboloida i ravnine  $z = k$ 

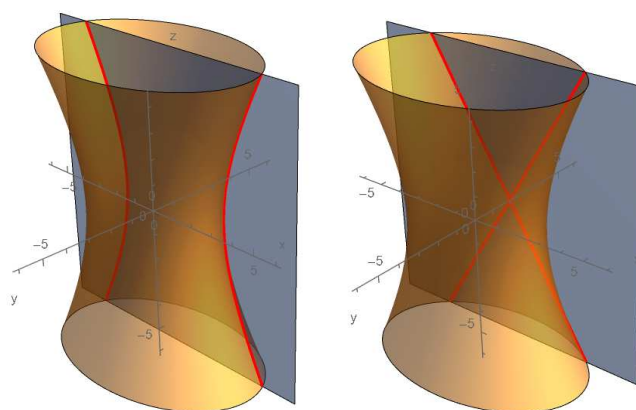
Presjek s ravinom  $y = k$

za  $k \neq \pm b$  je hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

za  $k = \pm b$  su pravci

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{c}{a}x$$

Slika 2.6: Presjeci jednoplošnog hiperboloida s ravinom  $y = k$

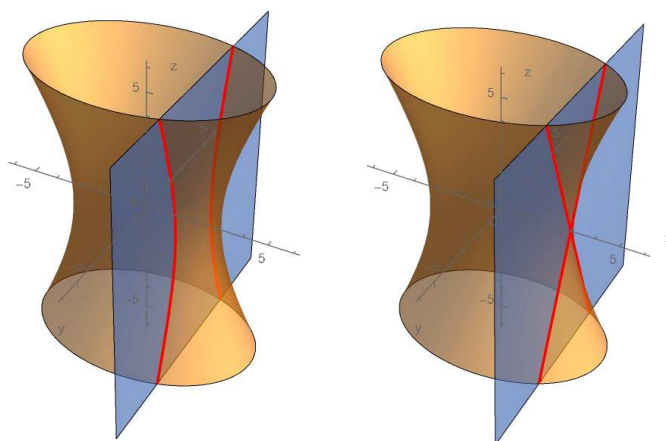
Presjek s ravninom  $x = k$

za  $k \neq \pm a$  je hiperbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

za  $k = \pm a$  su pravci

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{c}{b}y$$



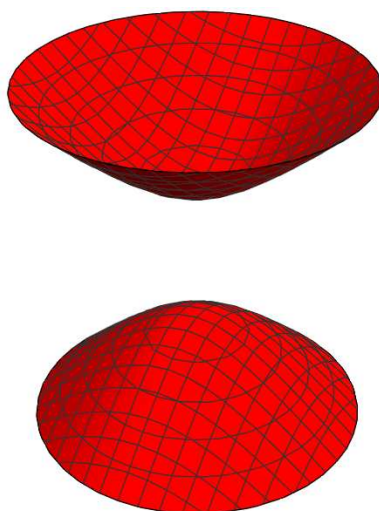
Slika 2.7: Presjeci jednoplošnog hiperboloida s ravninom  $x = k$

Jenoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbolje  $y^2 - z^2 = 1$  oko  $z$ -osi pa ga svrstavamo u rotacijske plohe.

**Definicija 2.2.5.** Ploha dana jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b$$

naziva se **dvoplošni hiperboloid**.



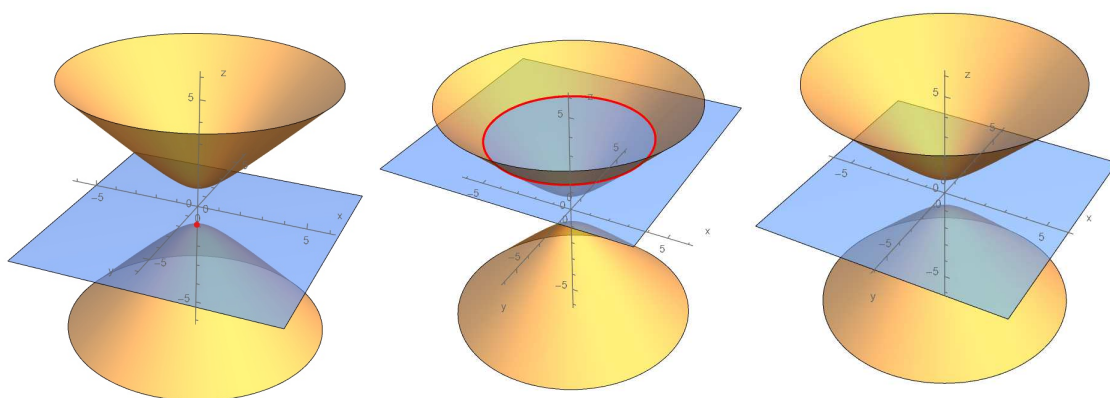
Slika 2.8: Dvoplošni hiperboloid

Pogledajmo presjke dvoplošnog hiperboloida s ravninama paralelnim koordinatnim ravninama. Presjek s ravninom  $z = k$  je

$$\text{za } k = \pm c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow T(0, 0, \pm c)$$

za  $|k| > c \Rightarrow$  elipsa

$$\text{za } |k| < c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 \Rightarrow \text{nema presjeka}$$

Slika 2.9: Presjeci dvoplošnog hiperboloida s ravninom  $z = k$

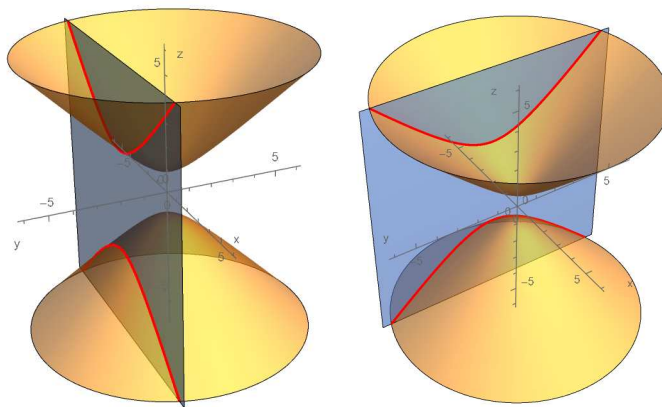
Presjek s ravninom

$y = k$  je hiperbola

$x = k$  je hiperbola

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2}$$



Slika 2.10: Presjeci dvoplošnog hiperboloida s ravninama  $y = k$ ,  $x = k$

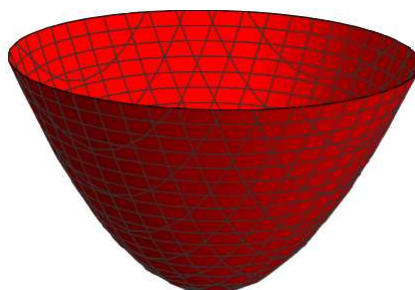
Dvoplošni rotacijski hiperboloid nastaje rotacijom hiperbole  $y^2 - z^2 = -1$  oko  $z$ -osi i on je također rotacijska ploha.

## Paraboloidi

**Definicija 2.2.6.** *Eliptički paraboloid je ploha dana jednadžbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \quad p > 0.$$





Slika 2.11: Eliptički paraboloid

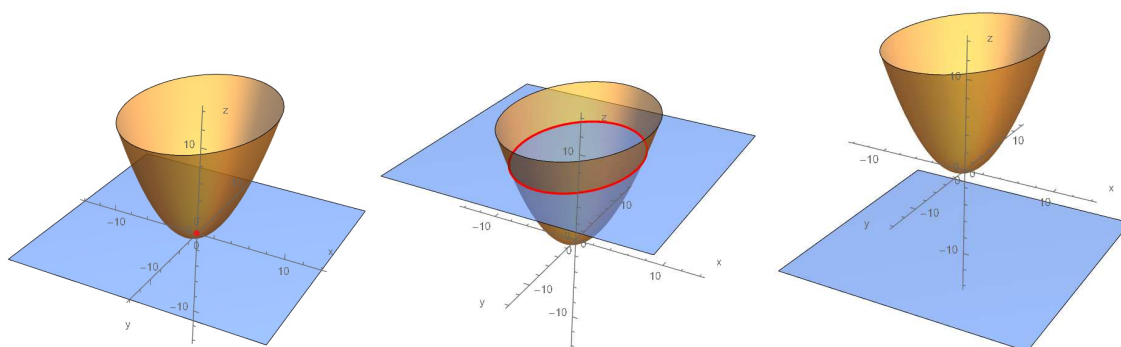
Pogledajmo presjeka eliptičkog paraboloida s ravninama.

Presjek s ravninom  $z = k$  je  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pk$

$$\text{za } k = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow T(0, 0, 0)$$

za  $|k| > 0 \Rightarrow$  elipsa

$$\text{za } |k| < 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pk \Rightarrow \text{nema presjeka}$$

Slika 2.12: Presjeci eliptičkog paraboloida s ravninom  $z = k$ 

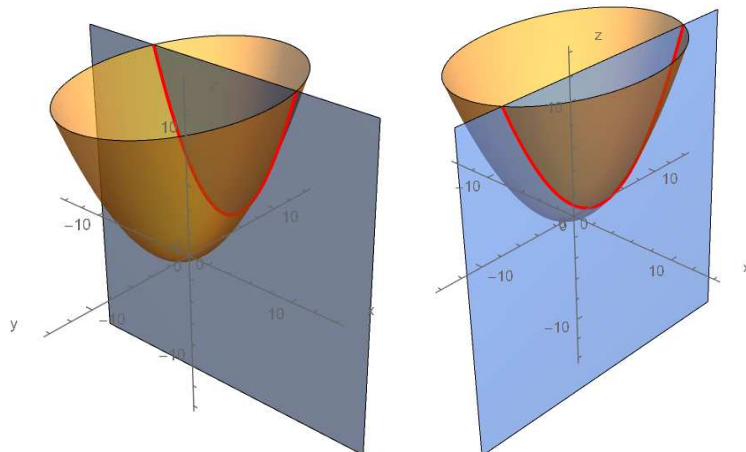
Presjek s ravninom

$y = k$  je parabola

$x = k$  je parabola

$$\frac{x^2}{a^2} = 2pz - \frac{k^2}{b^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 2pz - \frac{k^2}{a^2}$$

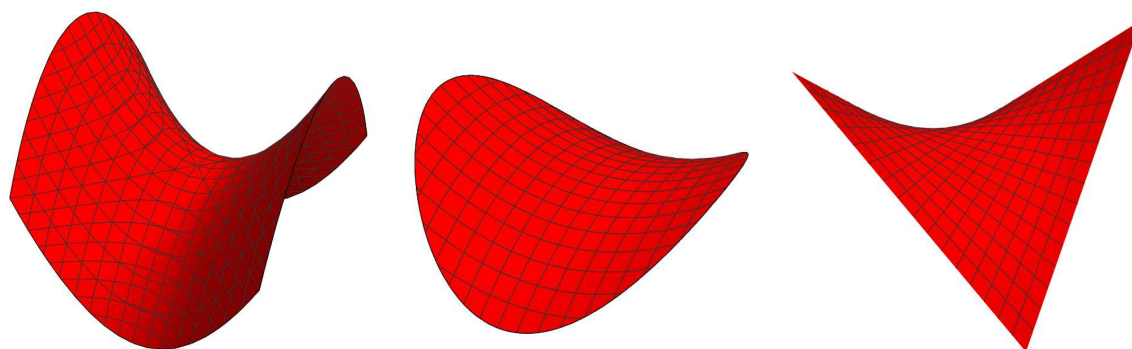


Slika 2.13: Presjeci eliptičkog paraboloida s ravninama  $y = k$ ,  $x = k$

Rotacijski paraboloid nastaje rotacijom parabole oko svoje osi, a njegova jednadžba je  $z = a(x^2 + y^2)$ .

**Definicija 2.2.7.** *Hiperbolički paraboloid ili hipar* zadan je jednadžbom

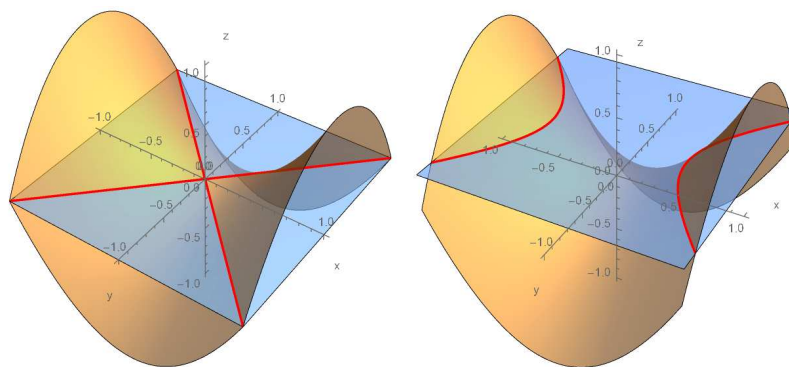
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz, \quad p > 0.$$



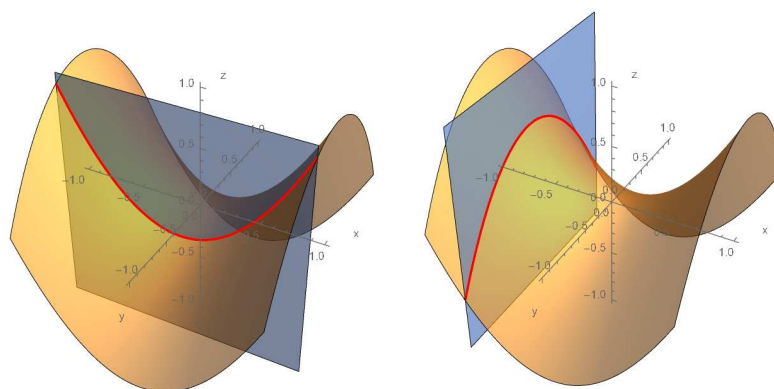
Slika 2.14: Hiperbolički paraboloid ili hipar

Budući da hiperbolički paraboloid ima oblik sedla nazivamo ga još sedlasta ploha.  
Presjek s ravninom

$$\begin{array}{ll}
 z = 0 \text{ su pravci} & y = \pm \frac{b}{a}x \\
 z = k, k \neq 0 \text{ je hiperbola} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pk \\
 y = k \text{ je parabola} & \frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{k^2}{b^2} \\
 x = k \text{ je parabola} & \frac{y^2}{b^2} = -2pz + \frac{k^2}{a^2}.
 \end{array}$$



Slika 2.15: Presjek hiperboličkog paraboloida s ravninom  $z = 0$  i  $z = k$



Slika 2.16: Presjek hiperboličkog paraboloida s ravninom  $y = k$  i  $x = k$

Eliptički i hiperbolički paraboloidi spadaju u skupinu translacijskih odnosno kliznih ploha. Translacijske plohe nastaju gibanjem jedne krivulje po drugoj.

**Definicija 2.2.8.** Jednostavna ploha koja dopušta parametrizaciju

$$x(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$$

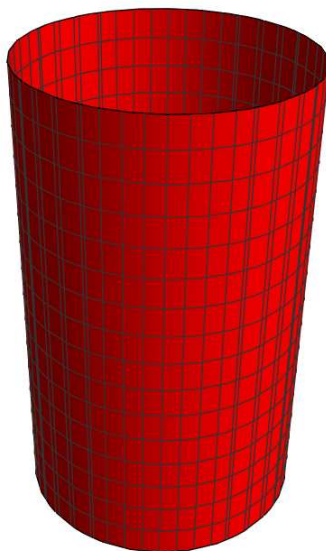
naziva se **translacijska ploha**. Krivulje  $c_1(u)$  i  $c_2(v)$  nazivamo *generatrisama plohe*.

Eliptički i hiperbolički paraboloidi nastaju gibanjem jedne parabole po drugoj.

### Valjkaste plohe

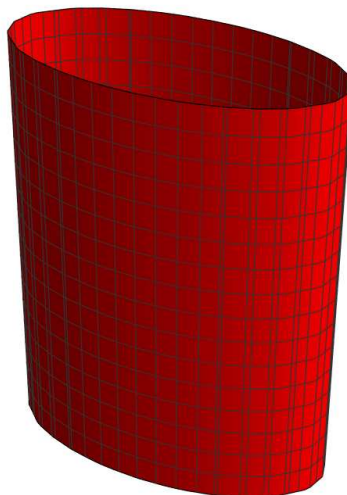
Ako svakom točkom krivulje (ravninske ili prostorne) povučemo pravac paralelan s nekim pravcem prostora, dobit ćemo skup točaka koji zovemo valjkastom ili cilindričnom plohom. Ti se pravci zovu izvodnice valjkaste plohe, a krivulja njezinom direktrisom. Promatramo slučaj kada je direktrisa ravninska krivulja 2. drugog reda. U tom slučaju ploha se zove valjkasta ploha 2. reda.

Neka je izvodnica kružnica  $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$  u  $xy$ -ravnini, a izvodnice paralelne s osi  $z$ , onda se ploha zove **kružni valjak**.



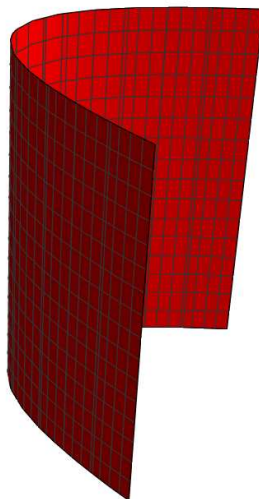
Slika 2.17: Kružni valjak

Ako je direktrisa elipsa  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ , a izvodnice paralelne s osi  $z$ , onda se ploha zove **eliptički valjak**.



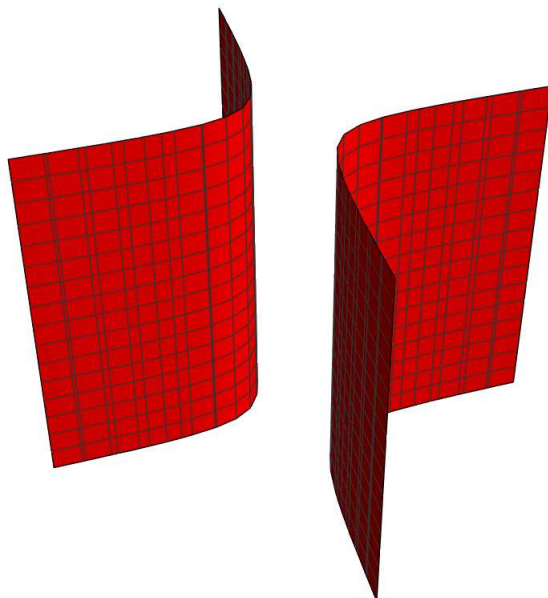
Slika 2.18: Eliptički valjak

Ako je direktrisa parabola  $y^2 = 2px, z = 0$ , a izvodnice paralelne s osi  $z$ , onda se ploha zove **parabolički valjak**.



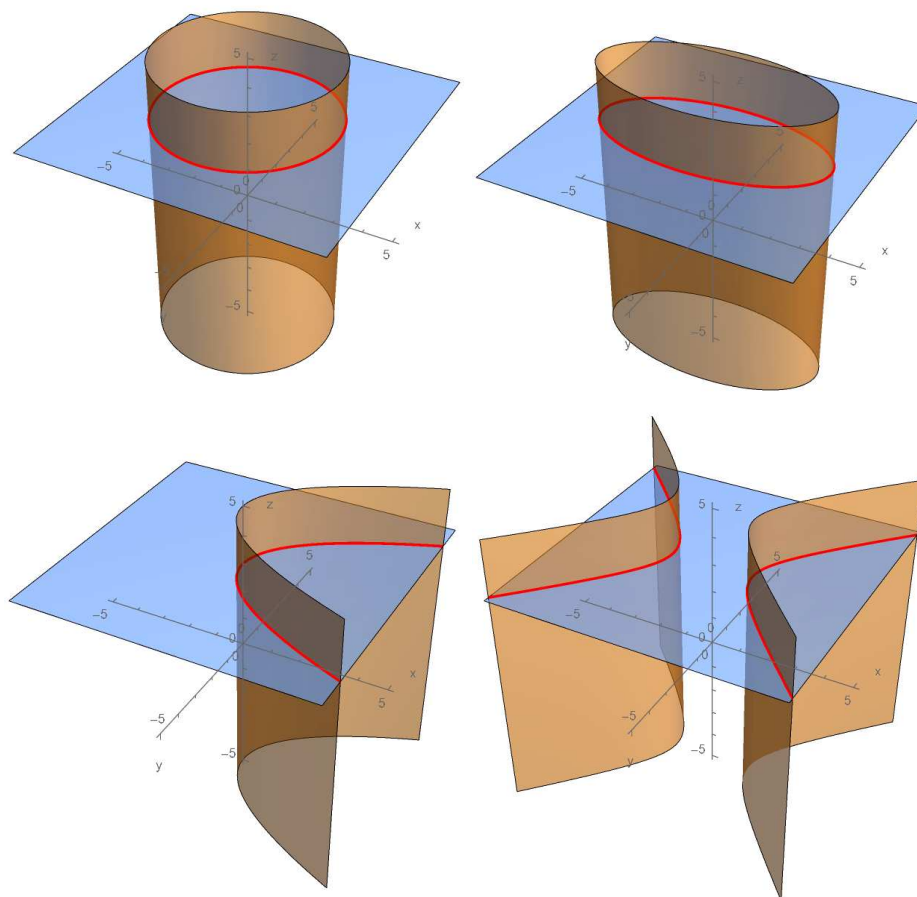
Slika 2.19: Parabolički valjak

Ako je direktrisa hiperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ , a izvodnice paralelne s osi  $z$  onda se ploha zove **hiperbolički valjak**.



Slika 2.20: Hiperbolički valjak

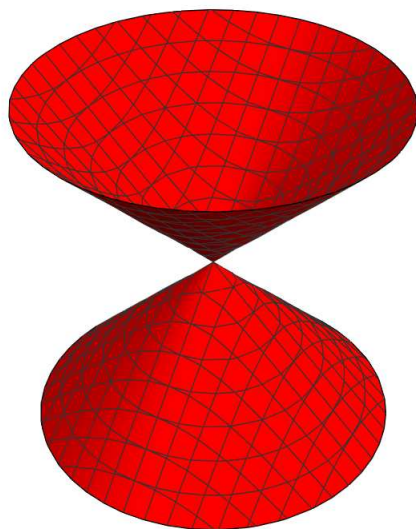
Uočimo da dane jednadžbe valjkastih ploha opisuju kružnicu, elipsu, parabolu, odnosno hiperbolu u  $xy$ -ravnini i ne ovise o  $z$ . Možemo ih zamišljati kao translaciju kružnice, elipse, parabole, odnosno hiperbole duž  $z$ -osi pa ih svrstavamo u translacijske plohe.

Slika 2.21: Presjeci valjkastih ploha u  $xy$ -ravnini

### Stožaste plohe

**Definicija 2.2.9.** *Eliptički stožac ili konus je ploha dana jednačžbom*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

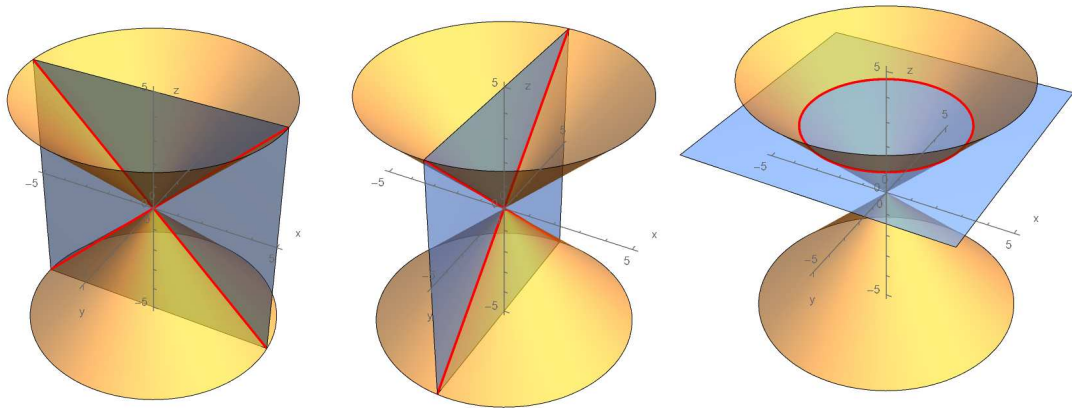


Slika 2.22: Eliptički stožac

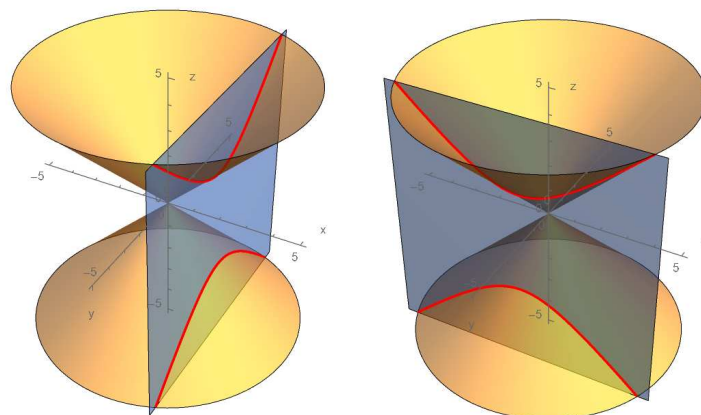
Pogledajmo presjeke eliptičkog stošca s ravninama. Presjek s ravninom

$$\begin{array}{ll}xz \text{ su pravci} & z = \pm \frac{x}{a} \\yz \text{ su pravci} & z = \pm \frac{y}{b} \\xy \text{ je elipsa} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.\end{array}$$



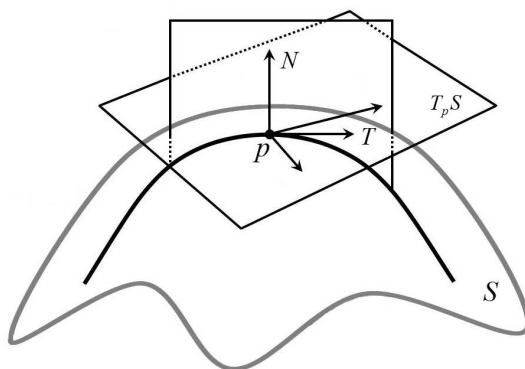
Slika 2.23: Presjeci stošca u  $xz$ ,  $yz$ ,  $xy$ -ravnini

Presjeci s ravninama  $x = k$  i  $y = k$  su hiperbole.

Slika 2.24: Presjeci stošca s ravninama  $x = k$ ,  $y = k$

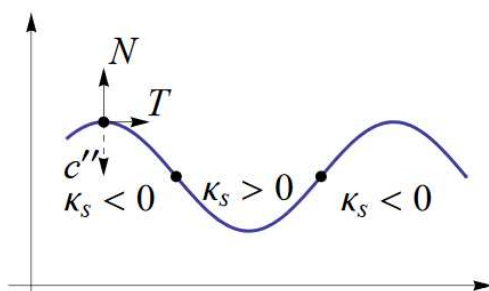
### Zakrivljenosti ploha i Veličanstveni teorem

Sljedeći cilj je promotriti zakrivljenosti ploha drugog reda. Promatramo točku  $p$  plohe  $S$ . U  $p \in S$  definirat ćemo tangencijalnu ravninu koja dira plohu u  $p$  i promatrati vektor normale. Odnosno, promatramo sve ravnine koje sadrže tu normalu i prolaze kroz  $p$ . Takve ravnine će sjeći plohu te tako u presjeku dobivamo beskonačno mnogo krivulja koje prolaze točkom  $p$ .



Slika 2.25: Zakrivljenost plohe

Svaka od tih krivulja ima zakrivljenost, a nama su od posebnog interesa one parametar-ske krivulje koje imaju minimalnu i maksimalnu zakrivljenost te ćemo njih nazvati glavne zakrivljenosti plohe  $S$  u  $p$ . Zakrivljenost krivulje mjeri brzinu promjene jediničnog tangencijalnog polja  $T$ . Ona je pozitivna (negativna) ako se  $T$  zakreće u pozitivnom (negativnom) smjeru rasta parametra krivulje što možemo vidjeti na slici (2.26).



Slika 2.26: Zakrivljenost krivulje

Definirajmo sada opisane pojmove.

**Definicija 2.2.10.** Neka je  $S$  regularna ploha i  $p \in S$ . Tangencijalni vektor u točki  $p$  je vektor  $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$  za koji postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$ , takva da je

$$c(0) = p, c'(0) = v_p.$$

Skup svih tangencijalnih vektora u  $p$  označavamo s  $T_pS$ . Prostor  $T_pS$  se naziva **tangencijalna ravnina plohe  $S$  u točki  $p$** .

Odredimo  $c'(0)$ . Krivulju u karti zapisujemo  $c(t) = x(u(t), v(t))$  pa je

$$\begin{aligned} c'(t) &= x_u(u_0, v_0)u'(t) + x_v(u_0, v_0)v'(t), \\ v_p = c'(0) &= x_u(u_0, v_0)u'(0) + x_v(u_0, v_0)v'(0). \end{aligned}$$

Vektor  $v_p \in T_pS$  je linearna kombinacija vektora  $x_u$  i  $x_v$ . Oni su tangencijalni vektori dviju parametarskih krivulja  $c_1(u) = x(u, v_0)$  i  $c_2(v) = x(u_0, v)$ . Vrijedi  $c_1'(u) = x_u$ ,  $c_2'(v) = x_v$ . Dakle,  $\{x_u, x_v\}$  je linearno nezavisan skup izvodnica koji određuje tangencijalnu ravninu plohe  $T_pS$ .

**Definicija 2.2.11.** Neka je  $S$  regularna ploha i  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  karta koja pokriva područje  $x(U)$  plohe  $S$ . Tangencijalna ravnina  $T_pS$  plohe  $S$  u točki  $p$  je ravnina razapeta vektorima  $x_u, x_v$ . Jedinični vektor normale te ravnine u točki  $p$  je

$$n = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}.$$

Taj vektor nazivamo **standardnim jediničnim vektorom normale karte  $x$** .

Pogledajmo što se događa kod promjene karte  $\tilde{x}$ .

Ako je  $\tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  druga karta, tada vrijedi

$$\tilde{x}_{\tilde{u}} \times \tilde{x}_{\tilde{v}} = \det(J)x_u \times x_v,$$

gdje je  $J$  Jacobijeva matrica funkcije prijelaza s  $x$  na  $\tilde{x}$ . Odavde je

$$\tilde{n} = \pm n,$$

gdje je predznak  $\pm$  određen predznakom determinate  $\det(J)$ .

**Definicija 2.2.12.** Kažemo da je ploha **orijentabilna** ako za svaku funkciju prijelaza između različitih karata vrijedi  $\det J > 0$ .

Dakle, ako postoji normalno jedinično polje ploha je orijentabilna.

**Definicija 2.2.13.** Preslikavanje  $S_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$  definirano s

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} n(p)$$

nazivamo **operatorom oblika plohe  $S$  u točki  $p$**  (ili Weingartenovim preslikavanjem).

Operator oblika plohe, je dakle, usmjerena derivacija u smjeru vektora  $v_p$  od jediničnog normalnog polja u točki  $p$ . Vrijedi  $S_p(v_p) = -(\nabla n_1(p) \cdot v_p, \nabla n_2(p) \cdot v_p, \nabla n_3(p) \cdot v_p)$ .

Budući da je derivacija definirana djelovanjem diferencijala koji je linearan operator zaključujemo da je operator oblika plohe linearan operator.

**Definicija 2.2.14.** Neka je  $S$  orijentirana ploha i neka je  $S_p : T_p S \rightarrow T_p S$  operator oblika plohe od  $S$ . **Gaussova zakrivljenost** plohe  $S$  u točki  $p$  je funkcija  $K : S \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s

$$K(p) = \det S_p.$$

**Srednja zakrivljenost** plohe  $S$  u točki  $p$  je funkcija  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S_p.$$

Za operator oblika plohe također vrijedi

$$S_p(v) \cdot w = v \cdot S_p(w), \quad v, w \in T_p S.$$

te je  $S_p$  simetričan linearan operator. Prema tome postoji ortonormirana baza  $\{e_1, e_2\}$  od  $T_p S$  u kojoj je njegov matrični prikaz dijagonalna matrica

$$S_p = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Svojtvene vrijednosti  $k_1(p), k_2(p)$  operatora  $S_p$  nazivamo **glavne zakrivljenosti** plohe  $S$  u točki  $p$ , a vektore  $e_1, e_2$  (jediničnim) **glavnim vektorima**. Ono što još možemo dobiti je veza između glavnih zakrivljenosti  $k_1(p), k_2(p)$  operatora  $S_p$  i Gaussove i srednje zakrivljenosti. Glavne zakrivljenosti su svojtvene vrijednosti operatora oblika plohe, odnosno nultočke karakterističnog polinoma

$$k(\lambda) = \lambda^2 - (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2,$$

odnosno iz Vietovih formula je

$$\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p).$$

Dobivamo sljedeće veze

$$k_{1,2} = H \sqrt{H^2 - K}$$

$$H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}.$$

Možemo zaključiti da ukoliko promatramo neku plohu i želimo izračunati njezinu zakrivljenost, moramo uočiti dvije glavne zakrivljenosti plohe  $k_1$  i  $k_2$  u promatranoj točki. Zaključujemo da su Gaussova i srednja zakrivljenost jednake

$$K(p) = k_1 k_2, \quad H(p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Nadalje, ovisno o predznaku glavnih zakrivljenosti Gaussova zakrivljenost može biti veća, manja ili jednaka 0 što nam daje zanimljive informacije o točkama plohe koje su dane u sljedećim definicijama.

**Definicija 2.2.15.** Za točku  $p \in S$  kažemo da je **eliptička** ako je  $K(p) > 0$ .

U eliptičkoj točki su glavne zakrivljenosti  $k_1, k_2$  istog predznaka. Svaka točka elipsoida je eliptička točka.

**Definicija 2.2.16.** Za točku  $p \in S$  kažemo da je **pupčasta** ako je  $K(p) > 0$  i  $k_1 = k_2$ .

Za takve točke je  $H^2 = K$ . Sve točke sfere su pupčaste točke.

**Definicija 2.2.17.** Za točku  $p \in S$  kažemo da je **hiperbolička** ako je  $K(p) < 0$ .

Glavne zakrivljenosti u hiperboličkoj točki su različitih predznaka. Svaka točka jednoplošnog hiperboloida je hiperbolička.

**Definicija 2.2.18.** Za točku  $p \in S$  kažemo da je **parabolička** ako je  $K(p) = 0$ .

Tada je barem jedna od glavnih zakrivljenosti jednaka 0 pa prema tome razlikujemo dva slučaja:

- i) Samo je jedna glavna zakrivljenost jednaka 0. Primjer takve točke je svaka točka kružnog cilindra.
- ii) Obje glavne zakrivljenosti su jednake 0. Takvu točku nazivamo ravninskom ili točkom spljoštenosti. Primjer je svaka točka ravnine.

**Definicija 2.2.19.** Za plohu  $S$  kažemo da je **plosnata** ako je  $K(p) = 0$  za svaku točku  $p$  plohe.

Za plohu  $S$  kažemo da je **minimalna** ako je  $H(p) = 0$  za svaku točku  $p$  plohe.

Za plohu  $S$  kažemo da je **ploha konstantne zakrivljenosti** ako je  $K(p) = \text{const.}$  za svaku točku  $p$  plohe.

**Definicija 2.2.20.** Neka su  $E, F, G, L, M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$E = x_u^2, \quad F = x_u \cdot x_v, \quad G = x_v^2.$$

$$L = S_p(x_u(u_0, v_0)) \cdot x_u(u_0, v_0),$$

$$M = S_p(x_u(u_0, v_0)) \cdot x_v(u_0, v_0) = x_u(u_0, v_0) \cdot S_p(x_v(u_0, v_0)),$$

$$N = S_p(x_v(u_0, v_0)) \cdot x_v(u_0, v_0).$$

Funkcije  $E, F, G$  nazivamo **fundamentalnim veličinama prvog reda** plohe  $S$  u karti  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Funkcije  $L, M, N$  nazivamo **fundamentalnim veličinama drugog reda** plohe  $S$  u karti  $x$ .

**Propozicija 2.2.1.** Neka je  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  karta za plohu  $S$ . Neka su  $E, F, G, L, M, N$  fundamentalne veličine prvog i drugog reda s obzirom na kartu  $x$ . Tada je Gaussova zakrivljenost dana formulom

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

*Dokaz.* Neka je  $T_p S$  tangencijalna ravnina plohe  $S$  u točki  $p$ , a vektori  $x_u$  i  $x_v$  linearno nezavisni vektori koji razapinju  $T_p S$ . Ti vektori čine bazu za  $T_p S$ .

Tada je

$$S_p(x_u) = \lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v$$

$$S_p(x_v) = \mu_1 x_u + \mu_2 x_v$$

Matrica operatora  $S_p$  u paru baza  $\{x_u, x_v\}$  dana je s

$$S_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Iz definicije Gaussove zakrivljenosti je

$$K(p) = \det S_p = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$$

Uočimo da vrijedi

$$S_p(x_u) \times S_p(x_v) = x_u \times x_v \cdot (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)$$

$$S_p(x_u) \times S_p(x_v) = x_u \times x_v \cdot K(p) \tag{2.1}$$

Sada pomožimo jednakost 2.1 skalarno s  $(x_u \times x_v)$ , dobivamo

$$(S_p(x_u) \times S_p(x_v)) \cdot (x_u \times x_v) = (x_u \times x_v)^2 \cdot K(p) \tag{2.2}$$

Iskoristimo sljedeći identitet koji vrijedi za svaka četiri vektora  $a, b, c, d$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}.$$

Lijeva strana jednakosti 2.2 jednaka je

$$(S_p(x_u) \times S_p(x_v)) \cdot (x_u \times x_v) = \begin{vmatrix} S_p(x_u)x_u & S_p(x_u)x_v \\ S_p(x_v)x_u & S_p(x_v)x_v \end{vmatrix}$$

Koristimo definicije 2.2.20 te je tada

$$(S_p(x_u) \times S_p(x_v)) \cdot (x_u \times x_v) = \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = LN - M^2.$$

Desna strana jednakosti 2.2 jednaka je

$$(x_u \times x_v)^2 \cdot K(p) = \begin{vmatrix} x_u \cdot x_u & x_u \cdot x_v \\ x_v \cdot x_u & x_v \cdot x_v \end{vmatrix} \cdot K(p)$$

Ponovno koristeći definicije 2.2.20 je

$$(x_u \times x_v)^2 \cdot K(p) = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2$$

Konačno, dobivamo

$$K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

što je i trebalo dokazati. □

Pogledajmo što geometrijski znači Gaussova zakrivljenost. U dokazu prethodne propozicije vrijedilo je

$$S_p(x_u) \times S_p(x_v) = x_u \times x_v \cdot K(p)$$

što povlači

$$\|S_p(x_u) \times S_p(x_v)\| = \|x_u \times x_v\| \cdot |K(p)|.$$

Vrijedi

$$S_p(x_u) = -n_u, \quad S_p(x_v) = -n_v$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} \|n_u \times n_v\| &= \|x_u \times x_v\| \cdot |K(p)| \\ |K(p)| &= \frac{\|n_u \times n_v\|}{\|x_u \times x_v\|} \end{aligned}$$

Dva linearno nezavisna vektora  $x_u$  i  $x_v$  razapinju paralelogram čija je površina njihov vektorski produkt. Sada je izrazom  $dP := \|x_u \times x_v\|$  određen diferencijal površine dijela plohe.

**Definicija 2.2.21.** *Normalna zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $p$  u smjeru tangencijalnog vektora  $v_p$  je realan broj*

$$k(v_p) = \frac{S_p(v_p) \cdot v_p}{v_p \cdot v_p}.$$

Geometrijska interpretacija normalne zakrivljenosti plohe  $S$  u  $p$  u smjeru  $v_p$  je, do na predznak, jednaka fleksiji normalnog presjeka plohe  $S$  u  $p$  u smjeru vektore  $v_p$ .  $S_p$  je simetričan linearan operator te je normalna zakrivljenost  $k(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p, \|v_p\| = 1$  kvadratna forma pa prema tome vrijedi sljedeći korolar.

**Korolar 2.2.1.** *Glavne zakrivljenosti  $k_1, k_2$  su kao svojstvene vrijednosti operatora oblika plohe minimum i maksimum normalne zakrivljenosti i obratno.*

Posebno važan teorem u diferencijalnoj geometriji je Gaussov Theorema Egregium ili Veličanstveni teorem koji je Carl Friedrich Gauss dokazao 1827. godine.

**Teorem 2.2.1.** *Zakrivljenost  $K$  je invarijantna pri lokalnim izometrijama, tj. ako je  $F : M \rightarrow N$  lokalna izometrija, tada je*

$$K(p) = K(F(p)), p \in M.$$

Zakrivljenost plohe može se odrediti samim promatranjem na plohi, odnosno mjerenjem kutova i udaljenosti na plohi. Ona ne ovisi o tome kako je ploha smještena u prostoru. Teorem nam govori da Gaussova zakrivljenost ostaje ista ako plohu savinemo ili zarolamo bez da ju rastrgamo ili rastegnemo. Posljedica ovog teorema je na primjer da ravnina i sfera nisu izometrične. Dakle, sferu ne možemo omotati papirom koji predstavlja ravninu bez da se taj papir na neki način rastrga ili preklopi. Gaussova zakrivljenost ravnine je 0. Izračunajmo Gaussovu zakrivljenost sfere.

Neka je  $S$  sfera dana implicitnom jednačbom  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Jedinično normalno polje je

$$n = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{r}(x, y, z)$$

Za po volji odabran tangencijalni vektor  $v \in T_p S$  je operator oblika plohe

$$S_p(v) = -\left(\nabla\left(\frac{x}{r}\right) \cdot v, \nabla\left(\frac{y}{r}\right) \cdot v, \nabla\left(\frac{z}{r}\right) \cdot v\right) = -\frac{1}{r}v.$$

Matrica operatora oblika plohe  $S_p$  je dana s

$$S_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$



te je Gaussova zakrivljenost sfere  $K = \det S_p = \frac{1}{r^2}$  što je različito od Gaussove zakrivljenosti ravnine pa te plohe nisu izometrične. Sfera ima konstantnu pozitivnu zakrivljenost. Još možemo uočiti da su sve točke sfere pupčaste točke jer je  $K(p) > 0$  i  $k_1 = k_2$ . Promotrimo ravninu i kružni cilindar. Rolanjem ravnine možemo dobiti kružni cilindar. Ako promatramo jednu točku kružnog cilindra njome prolaze dvije glavne krivulje. Jedna krivulja je konveksna i ima negativnu glavnu zakrivljenost dok je druga krivulja pravac koji je ostao isti savijanjem ravnine i njegova glavna zakrivljenost je 0. Budući da je Gaussova zakrivljenost determinanta matrice operatora oblika plohe, dobivamo da je za kružni cilindar  $K = 0$ . Dakle, Gaussove zakrivljenosti ravnine i kružnog cilindra su jednake 0, a "razvijanjem" otvorenog kružnog cilindra (bez jedne izvonice) u ravninu možemo se uvjeriti da su plohe izometrične. Sljedeće je proučiti upravo takve plohe kod kojih svakom točkom plohe prolazi pravac koji čitavi leži na toj plohi.

### 2.3 Pravčaste plohe drugog reda

Ako svakom točkom neke plohe prolazi pravac koji čitav leži na toj plohi, onda takvu plohu zovemo pravčastom plohom. Nastaju gibanjem pravca duž neke krivulje  $c$ . U ovom poglavlju ćemo ih pobliže definirati i opisati. Gaussova zakrivljenost opisana u prethodnom poglavlju će nam dati karakterizaciju pravčastih ploha.

**Definicija 2.3.1.** *Neka je  $c : I \rightarrow R$  regularna krivulja,  $e = e(u)$  jedinično polje duž  $c$ . Jednostavna ploha koja dopušta parametrizaciju*

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u), u \in I, v \in R,$$

*naziva se pravčastom plohom.*

Krivulja  $c(u)$  naziva se direktrisa plohe koja siječe svaku izvodnicu u jednoj točki. Pravci određeni vektorom smjera  $e(u)$  su izvodnice plohe.

Da bi skup točaka definiran tom parametrizacijom bio regularna ploha, nužno je

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \dot{c} \times e + v\dot{e} \times e \neq 0.$$

Pravčaste plohe dijelimo na razvojne i na nerazvojne pravčaste plohe koje još nazivamo vitopere. U razvojne pravčaste plohe svrstavamo cilindrične, konusne i tangentne plohe i njih možemo razviti u ravninu za razliku od vitoperih koje se ne mogu razviti u ravninu. U vitopere pravčaste plohe svrstavamo jednoplošni hiperboloid, hiperbolički paraboloid, helikoid i Möbiusovu traku. Za razvojne pravčaste plohe vrijedi da im je Gaussova zakrivljenost jednaka 0, dok je Gaussova zakrivljenost vitoperih pravčastih ploha je različita od 0.

*Primjer 1.* Gaussova zakrivljenost kružnog cilindra.

Neka je  $S$  kružni cilindar dan s  $x^2 + y^2 = r^2$ . Tada je za funkciju  $g(x, y, z) = x^2 + y^2$

$$n = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}.$$

Dakle,  $n(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, 0)$ .

Uočimo dva tangencijalna vektora  $e_1 = (0, 0, 1)$  i  $e_2 = (-y, x, 0)$ . Oni su tangencijalni vektor smjera  $z$ -osi i tangencijalni vektor poprečne kružnice cilindra i čine bazu za  $T_p S$ . Tada je

$$\begin{aligned} S_p(e_1) &= -D_{e_1} n = (0, 0, 0) = 0 \cdot e_1, \\ S_p(e_2) &= -D_{e_2} n = -\left(\nabla\left(\frac{x}{r}\right) \cdot e_2, \nabla\left(\frac{y}{r}\right) \cdot e_2, 0\right) = \\ &= -\left(\left(\frac{1}{r}, 0, 0\right) \cdot e_2, \left(0, \frac{1}{r}, 0\right) \cdot e_2, 0\right) = \\ &= -\frac{1}{r}(-y, x, 0) = -\frac{1}{r} \cdot e_2 \end{aligned}$$

Matrica operatora oblika plohe  $S_p$  u bazi  $\{e_1, e_2\}$  od  $T_p S$  je dana s

$$S_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Gaussova zakrivljenost kružnog cilindra je

$$K = \det S_p = 0.$$

Prema tome, kružni cilindar je razvojna pravčasta ploha i svaka njegova točka je parabolička točka.

*Primjer 2.* Gaussova zakrivljenost jednoplošnog hiperboloida.

Neka je  $S$  jednoplošni hiperboloid dan s  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Tada je za funkciju  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} \\ &= \frac{2(x, y, -z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{1 + 2z^2}} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 + 2z^2}}, \frac{-z}{\sqrt{1 + 2z^2}}\right) \end{aligned}$$

Uočimo dva tangencijalna vektora  $e_1 = (0, 0, 1)$  i  $e_2 = (-y, x, 0)$ . Tada je

$$\begin{aligned} S_p(e_1) &= -D_{e_1}n = -(0, 0, \nabla\left(\frac{-z}{\sqrt{1+2z^2}}\right) \cdot e_1) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{1+2z^2} \cdot (1+2z^2)}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2z^2} \cdot (1+2z^2)} \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_p(e_2) &= -D_{e_2}n = -\left(\nabla\left(\frac{-y}{\sqrt{1+2z^2}}\right) \cdot e_2, \nabla\left(\frac{x}{\sqrt{1+2z^2}}\right) \cdot e_2, 0\right) = \\ &= 0 \cdot e_1 - \frac{1}{\sqrt{1+2z^2}} \cdot e_2 \end{aligned}$$

Matrica operatora oblika plohe  $S_p$  u bazi  $\{e_1, e_2\}$  od  $T_pS$  je dana s

$$S_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+2z^2} \cdot (1+2z^2)} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+2z^2}} \end{bmatrix}$$

Gaussova zakrivljenost jednoplošnog hiperboloida je

$$K = \det S_p = \frac{1}{\sqrt{1+2z^2} \cdot (1+2z^2)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1+2z^2}}\right) = \frac{-1}{1+4z^2+4z^4}.$$

Dakle, vidimo da je  $K \neq 0$  te je jenoplošni hiperboloid vitopera pravčasta ploha. Štoviše,  $K < 0$  pa je svaka njegova točka hiperbolička.

## Razvojne pravčaste plohe

**Definicija 2.3.2.** Valjkasta ploha dana je parametrizacijom

$$x(u, v) = c(u) + ve,$$

gdje je  $c$  regularna krivulja,  $e$  konstantno polje duž  $c$ .

**Definicija 2.3.3.** Stožasta ploha dana je parametrizacijom

$$x(u, v) = p + ve(u),$$

gdje je  $p$  fiksna točka (krivulja  $c$  je degenerirala u točku). Vrh  $p$  konusa ne zadovoljava definiciju plohe ( tj. stožac kao ploha je skup navedenih točaka bez  $p$ ).

**Definicija 2.3.4.** *Tangentna ploha dana je parametrizacijom*

$$x = c(u) + vc'(u),$$

gdje je  $c$  regularna krivulja,  $c'$  njezino tangencijalno polje.

Tangentne plohe nisu regularne duž krivulje  $c$  - ona se naziva grebenom tih ploha.

### Vitopere pravčaste plohe

Promotrimo **jednoplšni hiperboloid**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Kao pravčasta ploha ima sljedeću parametrizaciju

$$x(u, v) = (a \cos u - av \sin u, bv \cos u + b \sin u, cv) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v(-a \sin u, b \cos u, c).$$

Pokažimo da je jednoplšni hiperboloid pravčasta ploha. Zapišimo njegovu jednadžbu na sljedeći način

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Zaključujemo da skupovi točaka sa sljedećim jednadžbama zadovoljavaju polaznu jednadžbu jednoplšnog hiperboloida

$$k\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1 - \frac{x}{a}\right), \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = k\left(1 + \frac{x}{a}\right), k \in \mathbb{R}$$

$$l\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 - \frac{x}{a}\right), \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = l\left(1 + \frac{x}{a}\right), l \in \mathbb{R}.$$

Ovi skupovi su dvije familije pravaca koji su zadani kao presjeci ravnina.

Dakle, jednoplšni hiperboloid je dvostruko pravčasta ploha.

**Hipar** odnosno hiperbolički paraboloid dan je parametarski

$$x(u, v) = (u + v, u - v, auv) = (u, u, av) + v(1, -1, au).$$

Pokažimo da je hipar dan s  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ ,  $p > 0$  također pravčasta ploha. Zapišimo jednadžbu na sljedeći način

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2pz.$$

Skupovi točaka sa sljedećim jednažbama zadovoljavaju polaznu jednažbu hiperboličkog paraboloida

$$k\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2pz, k \in \mathbb{R}$$

$$l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2pz, l \in \mathbb{R}$$

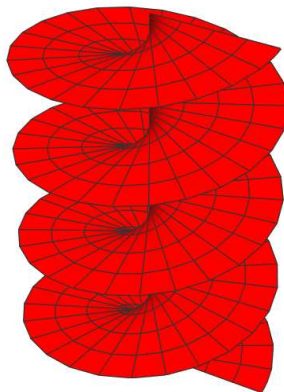
Dakle, hipar je također dvostruko pravčasta ploha.

Sljedeća dva primjera nisu plohe drugog reda, ali jesu pravčaste plohe.

### Helikoid

$$x(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu) = (0, 0, bu) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

Nastaje istovremenom rotacijom i translacijom pravca, odnosno zavojnim helikoidalnim gibanjem oko fiksnog pravca na kojeg je okomit, pri čemu je brzina translacije proporcionalna brzini rotacije.



Slika 2.27: Helikoid

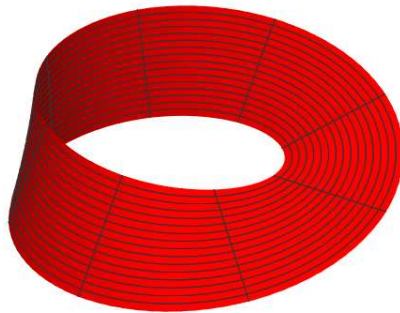
**Möbiusova traka** Dana je parametarski

$$x(u, v) = (r \cos u + v \cos(u/2) \cos u, r \sin u + v \cos(u/2) \sin u, v \sin(u/2)).$$

Možemo pisati

$$x(u, v) = (r \cos u, r \sin u, 0) + v(\cos(u/2) \cos u, \cos(u/2) \sin u, \sin(u/2)).$$

Möbiusova traka je ploha koju možemo napraviti od pravokutne trake tako što se jedna stranica zarotira za 180 stupnjeva i "zalijepi" sa suprotnom stranicom. Ona ima samo jednu stranu i jednu graničnu komponentu. Također, predstavlja osnovni primjer neorijentabilne plohe.



Slika 2.28: Möbiusova traka

Pravčaste plohe su vrlo su bitne u graditeljstvu. Duž smjera tih pravaca postiže se iznimna čvrstoća i napetost plohe, dok dvostruko zakrivljene pravčaste plohe kao na primjer spomenuti hipar ili jednoplošni hiperboloid pružaju još veću nosivost konstrukcije, odnosno pružaju veće dopušteno maksimalno opterećenje nosača konstrukcije to ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju.

## **Poglavlje 3**

# **Primjena ploha u arhitekturi**

U posljednjem desetljeću velikim napretkom računalnih softvera arhitektima je omogućeno unaprijeđeno dizajniranje složenih arhitektonskih oblika. Tako su nastale veličanstvene zgrade u čijem obliku ili u krovnim konstrukcijama možemo prepoznati plohe drugog reda. Navest ćemo samo neke od brojnih primjera moderne arhitekture.

### **3.1 Plohe drugog reda**

#### **Sfera**

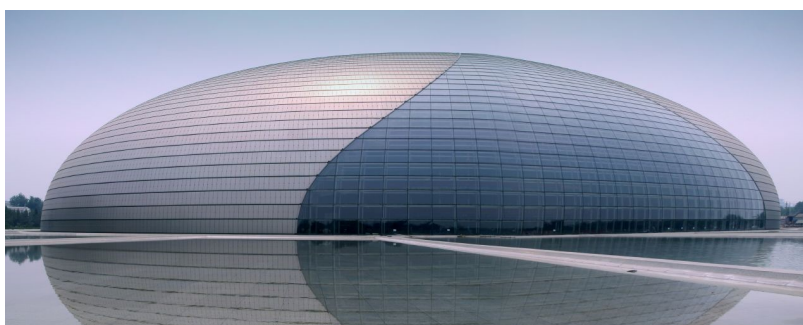
Znanstveni muzej Nagoya u Japanu ima oblik sfernog globusa koji kao da visi u zraku između dvije zgrade. Nazivaju ga Brat Zemlje. Kupola planetarija ima unutarnji promjer 35 metara, a sastoji se od oko 700 ploča solarnih panela koje se međusobno spajaju i čine glatku površinu. Na slici (3.1) se lijepo vide dvije familije parametarskih krivulja paralele i meridiajnih koje čine koordinatnu mrežu. Unutar kupole nalazi se 350 zasebnih sjedala koja su raspoređena u koncentrične krugove oko zvjezdanog projektora. Najveći je planetarij na svijetu i u njemu se može vidjeti položaj više od 9 000 zvijezda kao i svakodnevno kretanje planeta i faza Mjeseca.



Slika 3.1: Znanstveni muzej, Nagoya, Japan

### Elipsoid

Nacionalno kazalište u Pekingu je dizajn francuskog arhitekta Paula Andreua dovršen 2007. godine i najveći je kazališni kompleks u Aziji. U njemu se nalaze glazbene, kazališne, izložbene i umjetničke dvorane te restorani. Ima polu elipsoidni oblik i struktura je napravljena od jedne zakrivljene čelične grede, od 18 000 komada metalnih ploča i 1 200 komada staklenih ploča u sredini. Ukupna površina je 36 000 četvornih metara i to ju čini najvećom kupolom na svijetu koja nije podržana stupom. Okružuje ju umjetno jezero. Kako zgrada ne bi bila veliki bubanj kad padne kiša, sturučnjaci su koristeći nano materijale i tehnologiju napravili zvučnu izolaciju i omogućili da kiša ne ostaje na površini. Zbog podzemnih voda, pod zemljom se nalazi čak 60% građevinske površine zgrade.

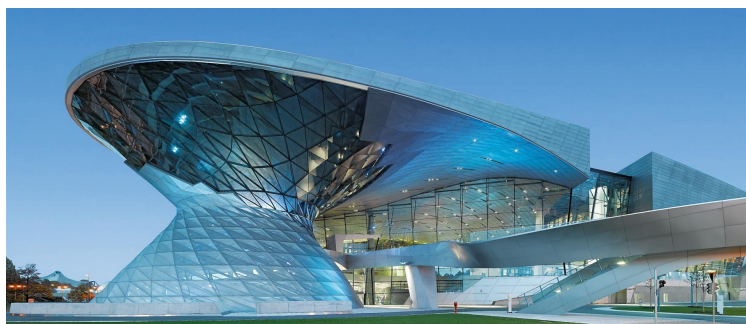


Slika 3.2: Nacionalno kazalište, Peking, Kina



**Dvostruki stožac**

BMW Welt muzej automobila u Münihu u Njemačkoj sagrađen je 1973. i obnovljen 2008. Za moderni dizajn zaslužan je uz ostale arhitekt Coop Himmelblau. Na južnoj strani BMW Welt centra smješten je jedinstveni oblik dvostrukog stošca koji podsjeća na tornado. U njemu se nalaze ugostiteljski objekti, rotirajuće platforme za koncerte i izložbe, te prostori za izlaganje automobila. Napravljen je od stakla i čelične konstrukcije te predstavlja ključni oslonac za krov koji je njegovo proširenje. Krov tako izgleda kao da lebdi na svojoj potpornoj konstrukciji od samo 12 stupova.



Slika 3.3: Muzej BMW Welt, Münich, Njemačka

**Jednoplošni hiperboloid**

Jednoplošni hiperboloid se kao pravčasta ploha može čitavi diobiti kao unija pravaca. Najčešće su u tom obliku izgrađeni dimnjaci nuklearnih centrala i njihovu okosnicu čine betonski blokovi. Gradnjom na taj način postiže se veća stabilnost konstrukcije, nego ako bi ona bila recimo cilindričnog oblika.



Slika 3.4: Dimnjaci nuklearnih elektrana

Na slici (3.5) vidimo katoličku katedralu Brasilia koja je također u obliku jednoplošnog hiperboloida. Dizajnirao ju je arhitekt Oscar Niemeyer i projektirao inženjer Joaquim Cardozo 1970. godine. Posvećena je Blaženoj Djevici Mariji koja je zaštitnica Brazila. Struktura je uokvirena sa 16 jednakih betonskih stupova koji su sastavljeni na licu mjesta i staklenim krovom koji seže prema nebu. Ovi stupovi s hiperboličkim presjekom predstavljaju dvije ruke koje se kreću prema nebu.



Slika 3.5: Katedrala Brasilia, Brazil

### Hiperbolički paraboloid ili hipar

Na slici (3.6) možemo vidjeti kompleks akvarija L'Oceanografic u Valenciji u Španjolskoj. Dizajnirali su ga arhitekt Felix Candela, inženjeri Alberto Domingo i Carlos Lazaro 1997. godine. Posvećen je mediteranskom podvodnom svijetu i u njemu živi 45 000 životinja. Najveći je ove vrste u Europi. Svaka od 9 podvodnih kula predstavljaju glavne ekosustave Zemlje. Krov čine 4 spojena hiperbolička paraboloida što omogućuje pokrivanje velikog područja te ima ukupno samo 8 nosača na njihovim spojevima. U sredini zgrade tako ostaje otvoreno područje jer nisu potrebni nosači da podupru krov. Otvori ispod nosača su zatvoreni staklom i čelikom. Na slici vidimo čeličnu konstrukciju na koju se onda postavlja drvena oplata.



Slika 3.6: LOceanografic, Valencija, Španjolska

Na sljedećoj slici vidimo crkvu u Katelville-u u New Yorku čiji krov ima oblik hipara. Izgrađena je u potpunosti od drveta, a dizajnirao ju je arhitekt James Mowry 1968. godine. Danas stoji prazna i na prodaju je.



Slika 3.7: Crkva, Kattelville, New York

## 3.2 Istaknute plohe višeg stupnja

Za kraj navedimo neke istaknute algebarske plohe višeg stupnja i njihovu primjenu u arhitekturi.

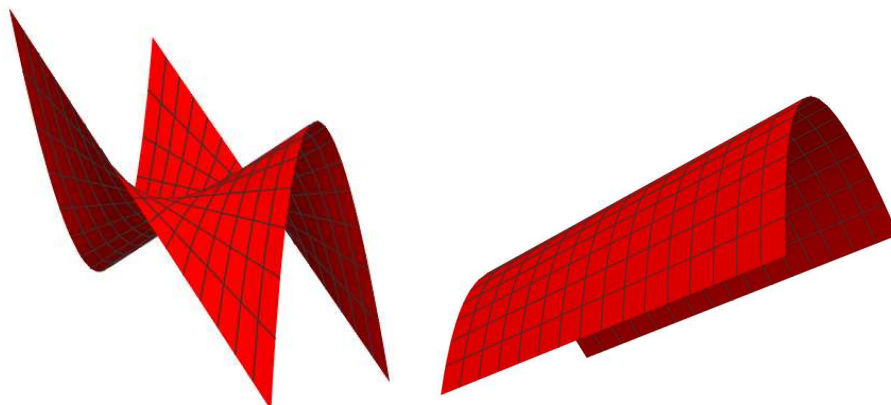
### Parabolički konoid

Konoidi su pravčaste plohe kojima je jedna ravnalica beskonačno daleki pravac neke ravnine koju nazivamo direkcijskom.

Parabolički konoid je ploha 3. stupnja dana parametarski s

$$x(u, v) = (1, u, -u^2) + v(-1, 0, u^2), u, v \in \mathbb{R}$$

Odnosno njegova jednadžba je  $z = -xy^2$ . Direktrisa mu je parabola, os je  $y$ -os i ravnina paralelna s  $xz$ -ravninom je direkcijska ravnina. Kada se parabola i os konoida sijeku, dobivamo hipar koji je dvostruki konoid 2. stupnja.



Slika 3.8: Parabolički konoid

U arhitekturi se koriste u natkrivanju i gradnji nadstrešnica zračne luke, željezničkog terminala i slično. Kod takvih mjesta unutrašnjost zgrade mora biti bez međuprostornih zidova ili stupova. Zbog njihove konstruktivne učinkovitosti potrebno je manje materijala u odnosu na tradicionalne krovove. Obično se grade pomoću greda i šipki ojačanih armiranim betonom i zbog toga se mogu lako proizvesti. Na slici (3.9) vidimo ratni muzej za zračna vozila u istočnoj Engleskoj u gradu Cambridgeshire. Dizajnirali su ga arhitekti Norman Foster i Chris Wise i ima oblik paraboličkog konoida.



Slika 3.9: Ratni muzej Duxford, Cambridgeshire, Engleska

**Torus**

Torus je rotacijska ploha koja nastaje rotacijom kružnice radijusa  $r$  u  $yz$ -ravnini oko  $z$ -osi. Središte rotirane kružnice se pritom giba po kružnici radijusa  $R$ . Kako ploha nebi imala samopresjecanja, uzima se  $r < R$ . Takav torus se još naziva prstenasti torus. Za  $r > R$  dobivamo vretenasti torus, a za  $r = R$  torus-rog.

Jednadžba kružnice koja rotira je

$$(y - R)^2 + z^2 = r^2, x = 0.$$

Implicitna jednadžba torusa je

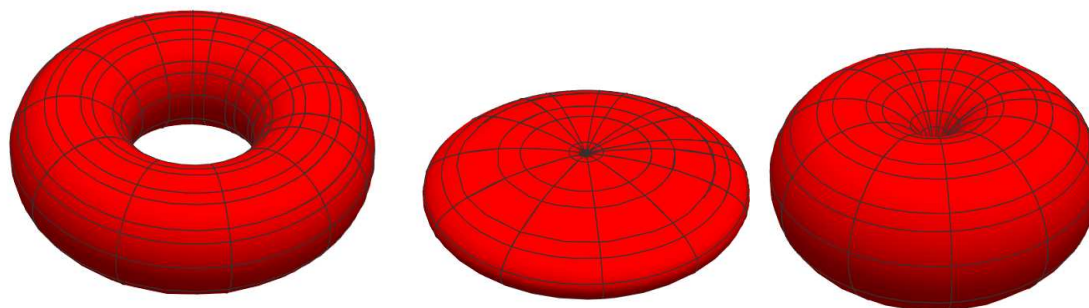
$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

ili

$$(x^2 + y^2 + R^2 + z^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

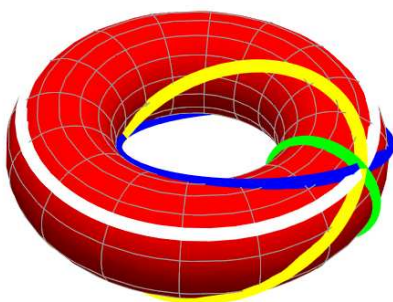
Dakle, torus je algebarska ploha 4. stupnja. Parametrizacija torusa je dana s

$$x(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad u, v \in [0, 2\pi].$$



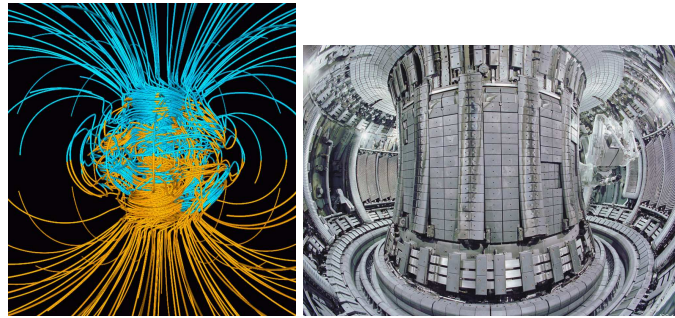
Slika 3.10: Torus, vretenasti torus i torus-rog

Kroz proizvoljnu točku P torusa možemo nacrtati 4 kružnice. Jedna kružnica je presjek torusa ravninom koja sadrži os rotacije, a druga je presjek torusa ravninom koja je okomita na os rotacije. Treća i četvrta koje nisu odmah očite su poznate kao Villarceau-ove kružnice. One se dobiju tako da se torus presječe dijagonalnom ravninom kroz središte torusa pod određenim kutom. Papirnati model torusa može se napraviti upravo koristeći ove 4 klase kružnica na torusu.



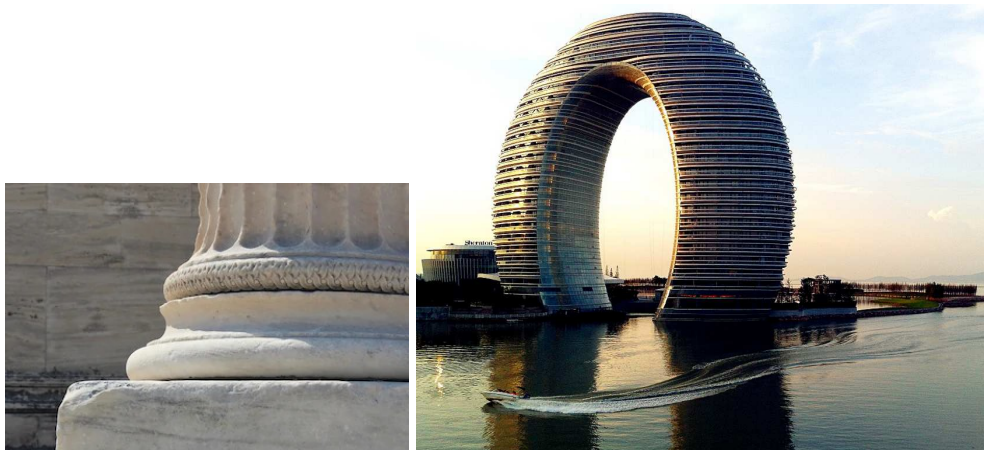
Slika 3.11: Četiri familije kružnica na torusu

Torus je dvostrana i zatvorena ploha bez rubova. Ima oblik prstena ili krafne ( "donut"). Primjere tog oblika možemo naći u prirodi kao na primjer presjek jabuke, jatu riba, Zemljinom magnetnom polju. U fizici je oblik torusa poznat kao najbolje okruženje u kojem se mogu ubrzati čestice. Toroidalna geometrija se koristi kod magneta i pohranjivanja svemirske energije jer rezultira malim vanjskim magnetnim poljima. Ovu ideju su u Rusiji 1950.-ih prvi put iskoristili u akceleratoru Tokamak koji djeluje na principu fuzije. Postoje ideje za primjenu takvih uređaja za generiranje električne energije.



Slika 3.12: Zemljino magnetno polje i akcelerator

U arhitekturi, na slici (3.13), vidimo primjer torusa kod gradnje stupova starogrčkih hramova. Na slici pokraj prikazan je luksuzni Sheraton Huzhou Hot Spring Resort koji ima oblik torusa. Napravljena je armirano-betonska konstrukcija koja zgradu čini čvršćom i ima odličnu potresnu otpornost. Noću se oblik prstena odražava u jezeru i izgleda poput sjaja punog mjeseca te je zbog toga nazvan Hotel mjesec.



Slika 3.13: Oblik torusa u arhitekturi





# Bibliografija

- [1] D. Bakić, *Linearna algebra 2 vježbe*, dostupno na:  
<https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/la2/dodatno/LA2-vjezbe-v7.pdf>
- [2] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra 2*,  
dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/%7Efran/predavanja-LA2.pdf>
- [3] S. Hak, M. Uroš, *Gaussova i srednja zakrivljenost ploha*, diplomski rad, dostupno na:  
<http://www.grad.hr/sgorjanc/Links/sanjaimario.pdf>
- [4] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th Edition, Pearson, 2016.
- [5] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2.*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [6] P. Rügge-Reymond, *Classification of Quadratic Surfaces*, 2012., dostupno na:  
[https://lcvwww.epfl.ch/PROJECTS/classification\\_quad.pdf](https://lcvwww.epfl.ch/PROJECTS/classification_quad.pdf)
- [7] Ž. M. Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*,  
dostupno na : <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/udg/userfiles/downloads/UDG-skripta-2.4.pdf>
- [8] Klasifikacija ploha drugog reda, dostupno na:  
<https://cs.nyu.edu/yap/bks/egc/09/21Surfaces.pdf>
- [9] Klasifikacija ploha drugog reda, dostupno na:  
<https://mathemanu.github.io/conics.pdf>
- [10] Parabolički konoid, dostupno na:  
<https://www.slideshare.net/SusmitaPaul12/shell-structure>
- [11] Pravčaste plohe, dostupno na:  
[http://www.grad.hr/itproject\\_math/Links/sonja/pravcaste/pravcaste.html](http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/pravcaste/pravcaste.html)

- [12] Presjeci ploha koordinatnim ravninama, dostupno na:  
[http://marjan.fesb.hr/~borka/files/UAAG%20analitgeom\\_pred5\\_16\\_17.pdf](http://marjan.fesb.hr/~borka/files/UAAG%20analitgeom_pred5_16_17.pdf)
- [13] Presjeci ploha koordinatnim ravninama, dostupno na:  
[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A\\_Calculus\\_\(OpenStax\)/12%3A\\_Vectors\\_in\\_Space/12.6%3A\\_Quadric\\_Surfaces](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/12%3A_Vectors_in_Space/12.6%3A_Quadric_Surfaces)
- [14] Presjeci ploha koordinatnim ravninama, dostupno na:  
<http://www.staff.city.ac.uk/o.castro-alvaredo/teaching/surfaces.pdf>
- [15] Sylvesterov zakon inercije, dostupno na:  
[http://palmer.wellesley.edu/~aschultz/w10/math416/coursenotes\\_and\\_handouts/coursenotes\\_100422.pdf](http://palmer.wellesley.edu/~aschultz/w10/math416/coursenotes_and_handouts/coursenotes_100422.pdf)
- [16] Torus, dostupno na:  
<http://harmonicresolution.com/Toroidal%20Space.htm>
- [17] Podatci o građevinama u arhitekturi preuzeti su s *Wikipedije*
- [18] Slike su napravljene u programu *Wolfram Mathematica*

# Sažetak

U ovom radu proučavamo plohe drugog reda. Glavni cilj rada je uz pomoć linearne algebre i kvadratne forme klasificirati plohe drugog reda u realnom afinom prostoru. Iskazan je Sylvesterov zakon inercije te je pomoću njega na primjerima ilustrirano kako odrediti vrstu plohe drugog reda. Također, opisan je geometrijski pristup određivanja vrsta ploha drugog reda.

Drugi dio bavi se osnovnim definicijama i teoremima iz diferencijalne geometrije i teorije ploha. Dane su definicije ploha drugog reda i njihovi presjeci koordinatnim ravninama. Opisali smo rotacijske i translacijske plohe, a u zasebnom poglavlju definirali zakrivljenost plohe te ju proćili na pravćastim plohamama. Na kraju dajemo primjere velićanstvenih građevina moderne arhitekture u kojima vidimo primjenu ploha drugog reda.



# Summary

In this thesis our main concern will be surfaces of second order. Using linear algebra and quadratic form theory our main goal is to provide classification of quadric surfaces in real affine space. In examples we illustrate how to determine the surface using the Sylvester's law of inertia. Furthermore, we describe geometrical approach of determining quadric surfaces.

The second chapter deals with definitions and theorems in differential geometry and surface theory. We defined second-order surfaces and presented their intersections with coordinate planes. Rotational and translational surfaces are described and in a separate section we defined surface curvature which we study on ruled surfaces. Finally, we provide examples of magnificent buildings in modern architecture in which we can see the implementation of this quadric surfaces.



# Životopis

Zovem se Barbara Vukić i rođena sam 18.04.1995. godine u Zaboku. Nakon završetka osnovne škole u Svetom Križu Začretju upisujem Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku. Gimnazijsko obrazovanje završavam 2012. godine i upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu. Preddiplomski studij matematike, smjer: nastavnički završavam 2018. godine. Upisujem isti smjer diplomskog studija koji završavam 2020. godine.