Algebarski skupovi u projektivnom prostoru P\(^n\)

Kupek, Karlo

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:936139

Algebarski skupovi u projektivnom prostoru P\(^n\)

Kupek, Karlo

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karlo Kupek

Algebarski skupovi u projektivnom prostoru $\mathbb{P}^n$

Diplomski rad

Zagreb, rujan 2020.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karlo Kupek

Algebarski skupovi u projektivnom prostoru $\mathbb{P}^n$

Diplomski rad

Voditelj rada:
akademik Goran Muić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru, akademiku Goranu Muiću na ukazanom povjerenju i pruženoj pomoći tijekom izrade diplomskog rada.

Zahvaljujem svojoj obitelji na pruženoj podršci tijekom cjelokupnog studija.

Sadržaj

Uvod

Algebarska geometrija je grana matematike čija je glavna zadaća opisivanje rješenja sustava polinomijalnih jednadžbi. Skupove rješenja polinomijalnih jednadžbi u više varijabli zanimljivo je promatrati kao geometrijske objekte. Upravo je ideja algebraizacije (svakom geometrijskom objektu pridružen je određeni prsten polinomijalnih funkcija čija svojstva odražavaju geometrijsku strukturu tog objekta) bila glavna ideja ove grane matematike koja se počela značajnije razvijati u devetnaestom stoljeću. Nakon proučavanja algebarske geometrije u afinom prostoru slijedi proširenje na projektivni prostor odnosno proučavanje projektivno algebarske geometrije. Cilj ovog diplomskog rada je upravo proširiti afini prostor do projektivnog, definirati projektivne mnogostrukosti, promotriti određena svojstva algebarskih skupova u projektivnom prostoru te napraviti poveznicu s afinim prostorom.

U prvom dijelu ovog rada napravljen je kratki pregled pojmova (vezanih za afini prostor) koji će nam biti potrebni u nastavku. Iznosimo definicije polja, polinoma, afinog prostora, afine mnogostrukosti i ideala te značajne teoreme, propozicije, korolare i leme vezane uz navedene pojmove. U drugom dijelu promatramo projektivnu ravninu odnosno projektivni prostor. Nakon promatranja i definiranja projektivne ravnine, projektivnog pravca i homogenih koordinata točke projektivne ravnine prelazimo na projektivni prostor. Definiramo projektivni prostor, homogene polinome, proširujemo definiciju afine mnogostrukosti na projektivni prostor (projektvina mnogostrukost) te se osvrćemo na poveznicu afinog i projektivnog prostora.

Poglavlje 1

Preliminarni rezultati

U ovom poglavlju osvrnut ćemo se na afini prostor i napraviti pregled najvažnijih pojmova vezanih za afini prostor, a koji će nam biti od velikog značaja u nastavku rada obzirom da je cilj ovog rada proučiti algebarske skupove u projektivnom prostoru.

1.1 Polja

Najprije je potrebno osvrnuti se na polja i precizno iskazati definiciju. Intuitivno nam je jasno da je polje skup na kojemu su definirane četiri osnovne operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) sa standardnim svojstvima. No, za preciznu definiciju polja potrebno je prisjetiti se definicija grupe i prstena.

Definicija 1.1.1. Neka je R neprazan skup i neka je $\circ$ binarna operacija na R. Uređeni par $(R, \circ)$ je **grupa** ako vrijedi

1. (asocijativnost) $(\forall a, b, c \in R) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. (neutralni element) $(\exists! e \in R)(\forall a \in R) \quad e \circ a = a \circ e = a$
3. (inverzni element) $(\forall a \in R)(\exists! b \in R) \quad a \circ b = b \circ a = e.$

Ako uz navedena tri svojstva vrijedi i komutativnost ($(\forall a, b \in R) \quad a \circ b = b \circ a$) onda kažemo da je grupa komutativna ili Abelova.

Definicija 1.1.2. Neka je R neprazan skup i neka su definirane binarne operacije zbrajanja $(+)$ i množenja $(\cdot)$ na R. Uređena trojka $(R, +, \cdot)$ je **prsten** ako vrijedi

1. $(R, +)$ je komutativna grupa s neutralnim elementom $0 = 0_R$

2. $(R, \cdot)$ je polugrupa, to jest množenje je asocijativno
3. vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju to jest

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$\forall x, y, z \in R$.

Element $0 = 0_R$ u grupi $(R, +)$ naziva se **nula** prstena R. Ako postoji **jedinični element** (kraće **jedinica**), $1 = 1_R \in R$ takav da je

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

$\forall x \in R$, onda kažemo da je R **prsten s jedinicom**. Prsten R je **komutativan prsten** ako vrijedi

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$\forall x, y \in R$. Inače kažemo da je prsten **nekomutativan**.

Nakon što smo definirali grupu i prsten sada možemo definirati i polje.

Definicija 1.1.3. Neka je R neprazan skup te neka su definrane binarne operacije zbrajanja i množenja na R. Uređena trojka $(R, +, \cdot)$ je **polje** ako vrijedi

1. $(R, +)$ je Abelova grupa
2. $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa
3. vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju.

Osnovni primjeri polja su polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ i polje komplenskih brojeva $\mathbb{C}$. U skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ operacija dijeljenja ne zadovoljava potrebna svojstva tako da polje cijelih brojeva zapravo ne postoji. Polja su zaista vrlo važna posebnice u linearnoj algebri. Najčešće se koriste polja realnih i kompleksnih brojeva te polje racionalnih brojeva. Mnoge teoreme i propozicije moguće je primijeniti i na opće polje $\mathbb{F}$.

1.2 Polinomi

Nakon što smo definirali polje sada možemo definirati polinome. Naravno, nas će zanimati definicija polinoma u više varijabli. Najprije definiramo monom pa zatim polinom.

Definicija 1.2.1. Monom u $x_1, ..., x_n$ je produkt oblika

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

u kojem su svi eksponenti $\alpha_1, ..., \alpha_n$ nenegativni cijeli brojevi. **Stupanj** ovog monoma je suma $\alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Oznaku za monome možemo pojednostavniti na sljedeći način. Neka je $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ n-torka nenegativnih cijelih brojeva. Tada definiramo

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Za $\alpha = (0, ..., 0)$ je $x^\alpha = 1$. Za stupanj monoma x^α koristimo oznaku $|\alpha|$.

Definicija 1.2.2. Polinom f u $x_1, ..., x_n$ s koeficijentima u $\mathbb{F}$ je konačna linearna kombinacija (s koeficijentima u $\mathbb{F}$) monoma. Polinom f zapisujemo u formi

$$f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{F}$$

gdje sumiramo konačan broj n-torki $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Skup svih polinoma u $x_1, ..., x_n$ s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ označavamo s $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$.

Osvrnimo se i na terminologiju vezanu uz polinome.

Definicija 1.2.3. Neka je $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ polinom u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$.

1. a_α zovemo **koeficijent** monoma x^α
2. ako je $a_\alpha \neq 0$ tada $a_\alpha x^\alpha$ zovemo **član** od f
3. **stupanj** od f, u oznaci $deg(f)$, je najveći $|\alpha|$ takav da je koeficijent a_α različit od nule dok stupanj nul-polinoma ne definiramo

Primjerice, polinom $f = 5x^4y^3z + \frac{1}{2}x^3y^5 - 2z$ ima tri člana i stupnja je osam. Primijetimo da su dva člana s maksimalnim stupnjem što je nemoguće kod polinoma u jednoj varijabli. Izdvojimo i nekoliko svojstava vezanih za polinome:

1. suma dva polinom je polinom
2. produkt dva polinom je polinom
3. kažemo da polinom f dijeli polinom g ako vrijedi $g = fh$, pri čemu je $h \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$
4. uz definirane operacije zbrajanja i množenja $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ je komutativan prsten s jedinicom.

1.3 Afini prostor

Nakon što smo definirali polja i polinome dolazimo do definicije afinog prostora.

Definicija 1.3.1. Neka je $\mathbb{F}$ proizvoljno polje i n neki prirodni broj. Tada skup

$$\mathbb{F}^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}\}$$

nazivamo n-dimenzionalni **afini prostor nad poljem** $\mathbb{F}$.

Primjerice, ako uzmemo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tada imamo poznati prostor $\mathbb{R}^n$. Općenito, $\mathbb{F}^1 = \mathbb{F}$ naziva se afina linija, a $\mathbb{F}^2$ afina ravnina. Sada ćemo promotriti kako su polinomi povezani s afinim prostorom. Ključna ideja koju ovdje koristimo je da polinom $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ daje funkciju

$$f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$$

definiranu tako da za dani $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n$ supstituiramo svaki x_i s a_i, $i = 1, ..., n$ u izrazu za f. Svi koeficijenti leže u $\mathbb{F}$ pa ova operacija daje element $f(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}$. Promatranje polinoma kao funkcije omogućava nam da povežemo algebru i geometriju. Ova dualna priroda polinoma ima neke, možemo reći, neočekivane posljedice. Primjerice, ako se pitamo je li $f = 0$ to može značiti da se pitamo

1. je li f nul-polinom odnosno jesu li svi članovi a_α jednaki nula ili

2. je li f nul-funkcija odnosno vrijedi li $f(a_1, ..., a_n) = 0$ za sve $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n$.

Također je iznenađujuće što tvrdnje da je polinom nul-funkcija i da je polinom nul-polinom nisu ekvivalente. Kako bismo to pokazali promotrit ćemo polje koje se sastoji od samo dva elementa, a to su 0 i 1. To je najmanje polje koje označavamo s $\mathbb{F}_2$ te u njemu vrijedi $1 + 1 = 0$. Promotrimo sada polinom $x^2 - x = x(x - 1) \in \mathbb{F}_2[x]$. Vrijednost tog polinoma je nula upravo u točkama 0 i 1, što znači da smo pronašli polinom različit od nul-polinoma koji daje nul-funkciju u afinom prostoru $\mathbb{F}_2^1$. Općenito, dokle god je $\mathbb{F}$ beskonačan, neće biti problema što se tiče dualne prirode polinoma. Izdvojimo sljedeći teorem.

Teorem 1.3.2. Neka je $\mathbb{F}$ beskonačno polje i neka je $f \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$. Tada je $f = 0$ u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ ako i samo ako je $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ nul-funkcija.

Primijetimo da u iskazu teorema 1.3.2. tvrdnja da je $f = 0$ u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ znači da je f nul-polinom odnosno da je svaki koeficijent od f jednak nula. Zbog toga koristimo isti simbol 0 da bismo označili nul-element od $\mathbb{F}$ i nul-polinom u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ no iz konteksta će biti jasno radi li se o nul-polinomu ili nul-elementu. Posljedica je da su dva polinoma jednaka točno onda kada daju istu funkciju u afinom prostoru što je navedeno u sljedećem korolaru.

Korolar 1.3.3. Neka je $\mathbb{F}$ beskonačno polje i neka su $f, g \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$. Tada je $f = g$ u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ ako i samo ako su $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ i $g : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ iste funkcije.

Posebno svojstvo polinoma nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ nalazimo u osnovnom teoremu algebre.

Teorem 1.3.4.(Osnovni teorem algebre) Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja većeg ili jednakog 1 ima rješenje u skupu kompleksnih brojeva.

Vrijedi izdvojiti još jednu definiciju.

Definicija 1.3.5. Polje $\mathbb{F}$ je **algebarski zatvoreno** ako svaki polinom $f \in \mathbb{F}[x]$ stupnja većeg ili jednakog 1 ima rješenje u $\mathbb{F}$.

Dakle, $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno polje dok $\mathbb{C}$ jest.

1.4 Afine mnogostrukosti

Definicija 1.4.1. Neka je $\mathbb{F}$ polje te neka su $f_1, ..., f_s$ polinomi u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$. Definiramo

$$\mathbf{V}(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n : f_i(a_1, ..., a_n) = 0 \ \forall i = 1, ..., s\}.$$

$\mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$ nazivamo **afina mnogostrukost** definirana polinomima $f_1, ..., f_s$.

Prema tome, afina mnogostrukost $V = \mathbf{V}(f_1, ..., f_s) \subset \mathbb{F}^n$ je skup svih rješenja sustava jednadžbi

$$f_1(x_1, ..., x_n) = ... = f_s(x_1, ..., x_n) = 0.$$

Afine mnogostrukosti najčešće se označavaju slovima V i W. Spomenut ćemo razne primjere od kojih su neki poznatiji, a neki manje poznati. Započnimo s poznatijim primjerima:

1. u ravnini $\mathbb{R}^2$ afina mnogostrukost $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 1)$ to jest kružnica radijusa 1 sa središtem u ishodištu

2. konusni presjeci (kružnice, elipse, parabole i hiperbole) su afine mnogostrukosti kao i grafovi polinomnih funkcija (graf od $y = f(x)$ je $\mathbf{V}(y - f(x))$) i grafovi racionalnih funkcija (primjerice graf od $y = \frac{x^3-1}{x}$ je mnogostrukost $\mathbf{V}(xy - x^3 + 1)$

3. u prostoru $\mathbb{R}^3$ afina mnogostrukost je dana rotacijskim paraboloidom $\mathbf{V}(z - x^2 - y^2)$ koji se dobije rotacijom parabole $z = x^2$ oko z osi

Sada ćemo navesti primjere mnogostrukosti viših dimenzija. Poznati primjer dolazi iz linearne algebre. Naime, fiksirajmo polje $\mathbb{F}$ i promotrimo sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, ..., x_n$ s koeficijentima u $\mathbb{F}$:

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m.$$

Rješenja ovih jednadžbi tvore afinu mnogostrukost u $\mathbb{F}^n$ koju zovemo linearna mnogostrukost. Dakle, pravci i ravnine su linearne mnogostrukosti. Napomenimo da su metode za pronalaženje svih rješenja ovakvog sustava jednadžbi poznate kao Gaussove eliminacije. Ako je V neprazan tada je dimenzija od V jednaka $n - r$ pri čemu je r rang matrice (a_{ij}). Možemo reći da je dimenzija određena brojem nezavisnih jednadžbi. Afine mnogostrukosti mogu biti i prazan skup. Primjerice, kada je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ vrijedi da je $\mathbf{V}(x^2 + y^2 + 1) = \emptyset$ budući da jednadžba $x^2 + y^2 = -1$ nema rješenja u skupu realnih brojeva. Još jedan zanimljiv primjer je $\mathbf{V}(xy, xy - 1)$ jer neovisno nad kojim smo poljem dani x i y ne mogu zadovoljavati istovremeno jednadžbe $xy = 0$ i $xy = 1$ pa je to također prazan skup. Afine mnogostrukosti imaju važno svojstvo koje je iskazano u sljedećoj lemi.

Lema 1.4.2. Ako su $V, W \subseteq \mathbb{F}^n$ afine mnogostrukosti onda su to i $V \cup W$ i $V \cap W$.

Ova lema iskazuje da su konačni presjeci i unije afinih mnogostrukosti ponovno afine mnogostrukosti. Kao primjer možemo pogledati uniju xy ravnine i z osi u trodimenzionalnom afinom prostoru. Prema lemi vrijedi

$$\mathbf{V}(z) \cup \mathbf{V}(x, y) = \mathbf{V}(zx, zy).$$

Primjere afinih mnogostrukosti koje smo naveli mogu nas dovesti do zanimljivih pitanja. Ako pretpostavimo da vrijedi $f_1, ..., f_s \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ pitamo se:

1. (konzistentnost) možemo li odrediti je li $\mathbf{V}(f_1, ..., f_s) \neq \emptyset$ odnosno imaju li jednadžbe $f_1 = ... = f_s = 0$ zajedničko rješenje
2. (ograničenost) možemo li odrediti je li $\mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$ konačan te ako jest, možemo li eksplicitno pronaći sva rješenja
3. (dimenzija) možemo li odrediti dimenziju od $\mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$.

Odgovor na sva ova pitanja je potvrdan pri čemu moramo oprezno odabrati polje $\mathbb{F}$.

1.5 Ideali

Ostaje nam još osvrnuti se na ideale, prikazati njihovo prirodno pojavljivanje te ih povezati s afinim mnogostrukostima.

Definicija 1.5.1. Podskup $I \subseteq \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ je **ideal** ako vrijedi

1. $0 \in I$
2. ako su $f, g \in I$ onda je i $f + g \in I$
3. ako $f \in I$ i $h \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ onda $hf \in I$.

Ideali su vrlo korisni iz razloga što nam daju algebarski jezik za računanje s afinim mnogostrukostima. Prvi pravi primjer ideala je ideal generiran konačnim brojem polinoma.

Definicija 1.5.2. Neka su $f_1, ..., f_s$ polinomi u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$. Definiramo

$$\langle f_1, ..., f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i : h_1, ..., h_s \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n] \right\}.$$

Lema 1.5.3. Ako su $f_1, ..., f_s \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ onda je $\langle f_1, ..., f_s \rangle$ ideal od $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$. $\langle f_1, ..., f_s \rangle$ naziva se **ideal generiran** polinomima $f_1, ..., f_s$.

Definicija 1.5.4. Za dani $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle \subseteq \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ **prvi eliminacijski ideal** je ideal od $\mathbb{F}[x_2, ..., x_n]$ definiran s

$$I_1 = I \cap \mathbb{F}[x_1, ..., x_n].$$

Ideal $\langle f_1, ..., f_s\rangle$ ima interpretaciju u terminima polinomijalnih jednadžbi. Za dane $f_1, ..., f_s \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ dobijemo sustav jednadžbi

$$f_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$f_s = 0.$$

Iz ovih jednadžbi mogu se izvesti ostale. Primjerice, ako pomnožimo prvu jednadžbu s $h_1 \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ drugu s $h_2 \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ i tako dalje redom do zadnje koju pomnožimo s $h_s \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ dobijemo

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + ... + h_s f_s = 0$$

što je posljedica početnog sustava. Primijetimo da je lijeva stana ove jednadžbe element ideala $\langle f_1, ..., f_s\rangle$. Dakle, možemo promatrati $\langle f_1, ..., f_s\rangle$ kao skup svih polinomijalnih posljedica jednadžbi $f_1 = f_2 = ... = f_s = 0$. Kako bi uvidjeli praktičnu primjenu pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 1.5.5. Promotrimo sljedeći parametarski prikaz

$$x = 1 + t$$
$$y = 1 + t^2.$$

Eliminacijom t dobivamo

$$y = x^2 + 2x + 2.$$

Ponovimo postupak koristeći gornje ideje. Zapišimo jednadžbe ovako:

$$x - 1 - t = 0$$
$$y - 1 - t^2 = 0. \qquad (1)$$

Kako bismo se riješili t, pomnožimo prvu jednadžbu s $x - 1 + t$, a drugu s -1:

$$(x - 1)^2 - t^2 = 0$$
$$-y + 1 + t^2 = 0$$

pa nakon toga zbrojimo dobivene jednadžbe i dobivamo

$$(x - 1)^2 - y + 1 = x^2 - 2x + 2 - y = 0.$$

U terminima ideala generiranog jednadžbama iz (1) možemo pisati

$$x^2 - 2x + 2 - y = (x - 1 + t)(x - 1 - t) + (-1)(y - 1 - t^2) \in \langle x - 1 - t, y - 1 - t^2 \rangle.$$

Važno je napomenuti da bilo koja polinomijalna posljedica od (1) daje element ovog ideala.

Kažemo da je ideal **I** konačno generiran ako postoje $f_1, ... f_s \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ takvi da je

$$\mathbf{I} = \langle f_1, ..., f_s \rangle$$

te za $f_1, ..., f_s$ kažemo da su baza od **I**. Napomenimo da dani ideal može imati i više različitih baza.

Teorem 1.5.6. (Hilbertov teorem o bazi) Neka je $I \subseteq \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ ideal. Tada postoje $f_1, ..., f_s \in I$ takvi da vrijedi

$$I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$$

to jest svaki ideal je konačno generiran.

Sljedeća propozicija pokazuje kako mnogostrukost ovisi samo o idealu generiranom definiranim jednadžbama.

Propozicija 1.5.7. Ako su $f_1, ..., f_s$ i $g_1, ..., g_t$ baze istog ideala u $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ takve da vrijedi $\langle f_1, ..., f_s \rangle = \langle g_1, ..., g_t$ tada je

$$\mathbf{V}(f_1, ..., f_s) = \mathbf{V}(g_1, ..., g_t).$$

Kao primjer promotrimo mnogostrukost

$$\mathbf{V}(2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3).$$

Lako je pokazati da vrijedi

$$\langle 2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3 \rangle = \langle x^2 - 4, y^2 - 1 \rangle$$

tako da prema navedenoj propoziciji vrijedi

$$\mathbf{V}(2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3) = \mathbf{V}(x^2 - 4, y^2 - 1) = \{(\pm 2, \pm 1)\}.$$

Dakle, promjena baze ideala olakšava proces određivanja mnogostrukosti. Mogućnost promjene baze bez utjecaja na mnogostrukosti je vrlo važna jer nas to navodi na razmatranje da su afine mnogostrukosti određene idealima, a ne jednadžbama.

Poglavlje 2

Algebarski skupovi

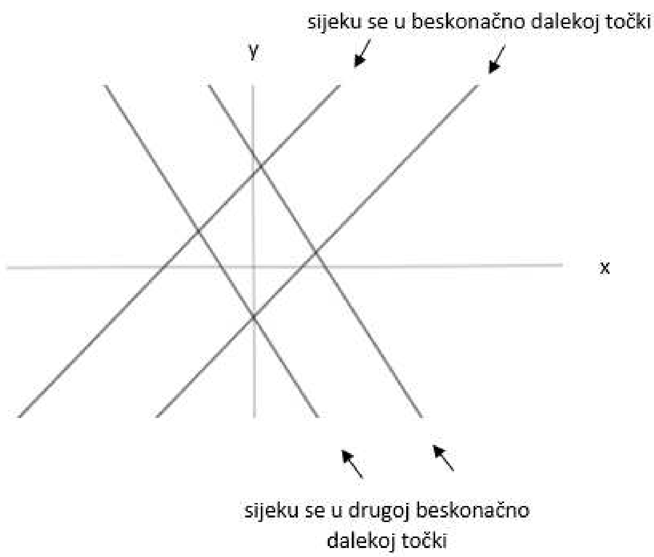
U ovom poglavlju promotrit ćemo projektivnu ravninu nad poljem realnih brojeva. Definirat ćemo homogene koordinate i projektivni pravac te konstrukciju projektivne ravnine generalizirati na n-dimenzionalni prostor. Zatim ćemo u tom (projektivnom) prostoru promotriti algebarske skupove.

2.1 Projektivna ravnina

Kako bi definirali projektivnu ravninu najprije trebamo promotriti pravce u ravnini $\mathbb{R}^2$. Položaj dvaju pravaca u $\mathbb{R}^2$ može biti:

1. pravci se sijeku
2. pravci su paralelni
3. pravci se podudaraju

pri čemu slučaj kada se pravci podudaraju možemo smatrati kao posebnu situaciju paralelnih pravaca. Primjetimo sada da dva pravca uvijek imaju sjecište osim u slučaju kada su paralelni. No, ako zamislimo da se čak i paralelni pravci sijeku u nekoj beskonačno dalekoj točki tada zapravo dobivamo tvrdnju da se svaka dva pravca u ravnini $\mathbb{R}^2$ sijeku i to u jednoj točki. Očito je da tada postoje različite beskonačno daleke točke, ovisno o smjeru pravaca, što prikazuje i sljedeća slika.



Znamo da za pravac p u ravnini $\mathbb{R}^2$ postoji beskonačno mnogo pravaca koji su paralelni s tim pravcem. Stoga definiramo relaciju ekvivalencije za pravce u ravnini:

$$p_1 \sim p_2 \text{ ako } p_1 \parallel p_2.$$

Tada klasa ekvivalencije $[p]$ postoji za sve pravce paralelne zadanom pravcu p. Prema tome uvodimo jednu beskonačno daleku točku za svaku klasu ekvivalencija $[p]$. Na temelju ove rasprave iznosimo privremenu definiciju projektivne ravnine.

Definicija 2.1.1. Projektivna ravnina nad poljem $\mathbb{R}$, u oznaci $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, je skup

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{jedna beskonačno daleka točka za svaku klasu ekvivalencija paralelnih pravaca}\}.$$

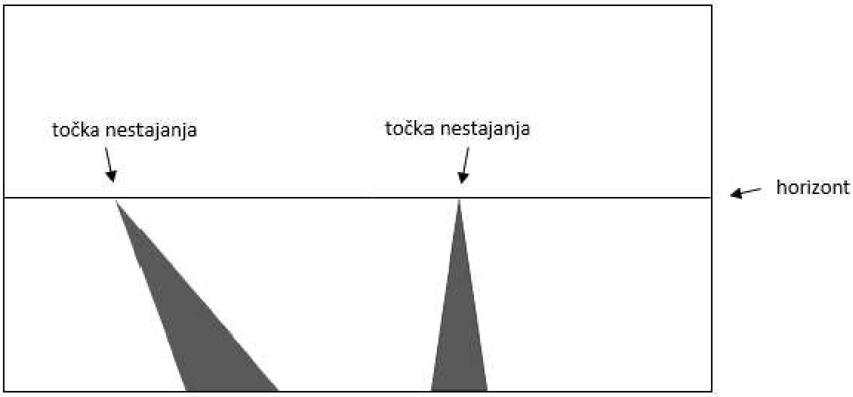
Primijetimo da bi bilo korisno uvesti posebnu oznaku za beskonačno daleku točku iz prethodne definicije. Stoga uvodimo oznaku $[p]_\infty$ za zajedničku beskonačno daleku točku svih pravaca paralelnih pravcu p. Skup

$$\overline{p} = p \cup [p]_\infty \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

nazivamo **projektivni pravac**, koji odgovara pravcu p.

Važno je napomenuti da se dva projektivna pravca uvijek sijeku u jednoj točki. Ako nisu paraleni sijeku se u jednoj točki ravnine $\mathbb{R}^2$, a ako su paralelni sijeku se u zajedničkoj beskonačno dalekoj točki. Promatrajući pravac u ravnini možemo pomisliti kako postoje dvije beskonačno daleke točke tog pravca, ovisno o orijentaciji po kojoj se krećemo duž pravca. No, ako bi postojale dvije takve točke onda bi paralelni pravci imali dvije točke presjeka što je ujedno razlog zašto želimo imati samo jednu beskonačno daleku točku. Primjerice, ako parametriziramo pravac $y = x$ kao $(x, y) = (t, t)$ tada beskonačno dalekoj točki tog pravca možemo pristupiti koristeći $t \to \infty$ ili $t \to -\infty$.

Sljedećom slikom prikazat ćemo kako se uobičajeno vizualiziraju beskonačno daleke točke.



Dakle, zamislimo naš planet Zemlju kao zastavu i zamislimo dvije ceste koje se protežu beskonačno daleko u razlčitim smjerovima. Za svaku cestu posebno, možemo reći da se dvije strane ceste (koje su paralene, iako se čini da konvergiraju) susreću u istoj točki na horizontu. Ta se točka u teoriji perspektiva naziva **točka nestajanja**. Štoviše, svaki pravac paralelan jednoj od navedenih cesti susreće se s tom cestom u njenoj točki nestajanja što pokazuje da točka nestajanja prikazuje odnosno prezentira beskonačno daleku točku tih pravaca. Na isti način dolazimo do bilo koje točke na horizontu pa možemo reći da horizont na slici prikazuje beskonačno daleke točke. Primijetimo da horizont ne sadrži sve beskonačno daleke točke jer nedostaje beskonačno daleka točka pravaca paralelnih horizontu.

Ova slika otkriva još jedno zanimljivo svojstvo projektivne ravnine: beskonačno daleke točke čine poseban projektivni pravac kojeg nazivamo **beskonačno daleki pravac**. Slijedi da $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sadrži projektivni pravac $\overline{p} = p \cup [p]_\infty$, pri čemu je p pravac u $\mathbb{R}^2$, zajedno s beskonačno dalekim pravcem. Važno je napomenuti da dva različita projektivna pravca u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ određuju jedinstvenu točku te da dvije različite točke u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ određuju jedinstven projektivni pravac.

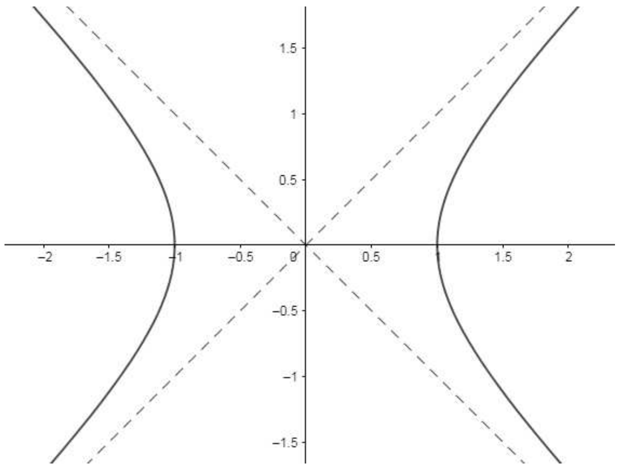
Kao primjer kako se beskonačno daleke točke mogu pojaviti u drugom kontekstu možemo navesti hiperbolu. Znamo da je jednadžba jedinične hiperbole

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Parametrizacijom dobivamo

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ y = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Kada je $t \neq \pm 1$ očito je da ovom parametrizacijom dobivamo sve točke hiperbole osim točke $(-1, 0)$. Promotrimo sada slučaj kada je $t = \pm 1$.



Ako stavimo $t \to 1^-$ tada se točka hiperbole (x, y) približava asimptoti hiperbole $y = x$ u prvom kvadrantu. Ako stavimo $t \to 1^+$ tada se točka hiperbole (x, y) približava asimptoti hiperbole $y = x$ u trećem kvadrantu. Dakle, možemo zaključiti da slučaj kada je $t = 1$ zapravo simbolizira beskonačno daleku točku asimptote hiperbole $y = x$. Analognim postupkom za $t = -1$ dobivamo da taj slučaj odgovara beskonačno dalekoj točki asimptote hiperbole $y = -x$.

Problem koji susrećemo u projektivnoj ravnini je nejedinstven način određivanja točaka. Točke u ravnini $\mathbb{R}^2$ određene su svojim koordinatama dok su beskonačno daleke točke određene pravcima. U svrhu rješavanja tog problema uvodimo homogene koordinate u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. No, za uvođenje homogenih koordinata trebamo novu definiciju projektivne ravnine odnosno prostora. Najprije definiramo relaciju za točke u $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ (pri čemu je $O = (0, 0, 0)$):

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$$

ako postoji realan broj $\lambda \neq 0$ takav da vrijedi

$$(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2).$$

Propozicija 2.1.2. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.

Dokaz. Pokažimo da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Prisjetimo se da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S ako vrijedi refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost. Pokažimo redom da vrijede ta tri svojstva.

1. Refleksivnost: $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_1, y_1, z_1)$ za sve $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, što znači da trebamo pronaći realan broj $\lambda \neq 0$ takav da vrijedi

$$(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_1, y_1, z_1),$$

   a to vrijedi za $\lambda = 1$ te je dokazano svojstvo refleksivnosti.

2. Simetričnost: $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ povlači $(x_2, y_2, z_2) \sim (x_1, y_1, z_1)$, za sve $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. To znači da uz pretpostavku da postoji realan broj $\lambda_1 \neq 0$ takav da je

$$(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1(x_2, y_2, z_2),$$

   trebamo pronaći realan broj $\lambda_2 \neq 0$ takav da vrijedi

$$(x_2, y_2, z_2) = \lambda_2(x_1, y_1, z_1).$$

   Stavljajući $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ dobivamo odgovarajući λ_2 te je dokazano svojstvo simetričnosti.

3. Tranzitivnost: $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ i $(x_2, y_2, z_2) \sim (x_3, y_3, z_3)$ povlači $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_3, y_3, z_3)$, za sve $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. To znači da uz pretpostavku da postoje realni brojevi $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ takvi da

$$(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1(x_2, y_2, z_2)$$

   i

$$(x_2, y_2, z_2) = \lambda_2(x_3, y_3, z_3),$$

   trebamo pronaći realan broj $\lambda_3 \neq 0$ takav da je

$$(x_1, y_1, z_1) = \lambda_3(x_3, y_3, z_3).$$

   Primijetimo da je

$$(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1(x_2, y_2, z_2) = \lambda_1\lambda_2(x_3, y_3, z_3)$$

   pa stavljajući $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2$ dobivamo odgovarajući λ_3 te je svojstvo tranzitivnosti dokazano.

Nakon definiranja relacije za točke u $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ potrebno je izdvojiti i definiciju kvocijentnog skupa. Dakle, skup $X/_\sim = \{[x] : x \in X\}$ naziva se **kvocijentni skup** skupa X obzirom na relaciju $\sim$, pri čemu je $[x]$ klasa ekvivalencije određena elementom x. Sada možemo preoblikovati definiciju projektivne ravnine.

Definicija 2.1.3. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ je kvocijentni skup skupa $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ obzirom na relaciju $\sim$. Sastoji se od klasa ekvivalencija koje označavamo $(x : y : z)$ definiranih kao

$$\{(x', y', z');\ \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{O\},\ \ (x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)\}.$$

Možemo zapisati

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{O\})/^\sim.$$

$(x : y : z)$ su **homogene koordinate** točke projektivne ravnine, a (x, y, z) je predstavnik te klase ekvivalencija.

Ako pogledamo dvije navedene definicije projektivne ravnine, uočavamo da nije odmah jasno da se radi o istom objektu. Dakle, sada se trebamo uvjeriti da je zaista tako. Homogene koordinate razlikuju se od uobičajenih koordinata točaka po tome što nisu jedinstvene. Primjerice $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, (π, π, π) i $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ predstavljaju istu točku u projektivnom prostoru. Kako bi objasnili kako se zapravo koriste homogene koordinate potrebno je definirati pojam projektivnog pravca.

Definicija 2.1.4. Neka su A, B i C realni brojevi različiti od 0. Tada skup

$$\{p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : (x, y, z) \text{ predstavnik homogenih koordinata od } p \text{ i } Ax + By + Cz = 0\}$$

nazivamo **projektivni pravac** u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Važno je napomenuti da ako predstavnik homogenih koordinata (x, y, z) točke $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zadovoljava jednadžbu $Ax + By + Cz = 0$ tada tu jednadžbu zadovoljavaju homogene kordinate točke p. To vrijedi jer ostale mogu biti zapisane kao

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

pa je

$$A \cdot \lambda x + B \cdot \lambda y + C \cdot \lambda z = \lambda(Ax + By + Cz) = 0.$$

Kako bi povezali dvije definicije projektivne ravnine koristit ćemo preslikavanje

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \qquad (1)$$

definirano tako da se točka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ preslika u točku $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ čiji je predstavnik homogenih koordinata $(x, y, 1)$. Ovo preslikavanje ima svojstva koja ćemo iskazati u sljedećem teoremu.

Teorem 2.1.5. Preslikavanje (1) je bijektivno i komplement od slike tog preslikavanja je projektivni pravac H_∞ koji definiramo kao $z = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da se (x, y) i (x', y') preslikavaju u istu točku $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Tada su $(x, y, 1)$ i $(x', y', 1)$ predstavnici homogenih koordinata od p pa vrijedi

$$(x, y, 1) = \lambda(x', y', 1)$$

za neki realan broj $\lambda \neq 0$. Prema trećoj koordinati slijedi da je $\lambda = 1$ pa dobivamo $(x, y) = (x', y')$. Pretpostavimo sada da su $(x : y : z)$ homogene koordinate točke $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Ako je $z = 0$ tada je p na projektivnom pravcu H_∞. Ako je $z \neq 0$ tada množenjem s $\frac{1}{z}$ dobivamo $\left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right)$ što pokazuje da p pripada slici preslikavanja (1). Dakle, za svaku točku p čije su homogene koordinate $(x : y : z)$ takve da je $z \neq 0$ vrijedi da je u slici od preslikavanja (1). Zaključujemo da je slika preslikavanja razdvojena od H_∞. Dakle, dokazali smo ovaj teorem.

Projektivni pravac H_∞ prozvat ćemo beskonačno daleki pravac. Uobičajeno je da se ravnina $\mathbb{R}^2$ poistovjećuje sa svojom slikom u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (iako to nije baš sasvim precizno) pa projektivnu ravninu možemo napisati kao uniju

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty.$$

Ostaje nam još pokazati da se H_∞ zapravo sadrži od beskonačno dalekih točaka. Kako bi to pokazali moramo promotriti kako su povezani pravci u $\mathbb{R}^2$ (koje ujedno nazivamo i afini pravci) s projektivnim pravcima. Pri tome će nam pomoći sljedeća tablica.

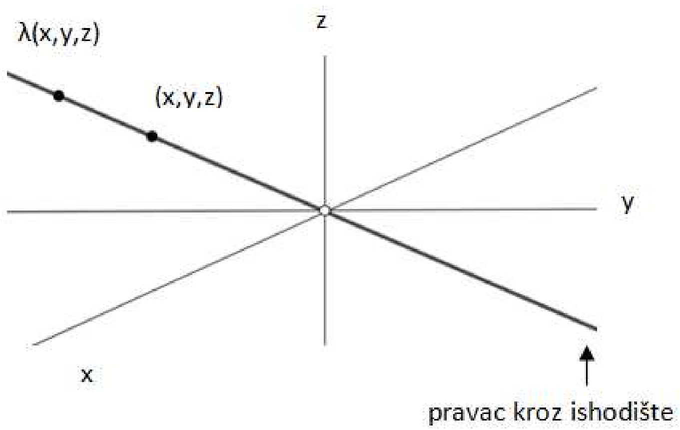
afini pravac		projektivni pravac		beskonačno daleka točka
$p ... y = mx + b$	$\rightarrow$	$\overline{p} ... y = mx + bz$	$\rightarrow$	$(1, m, 0)$
$p ... x = c$	$\rightarrow$	$\overline{p} ... x = cz$	$\rightarrow$	$(0, 1, 0)$

Najprije promotrimo afini pravac $p ... y = mx + b$. Kod preslikavanja (1) točka (x, y) na pravcu p preslikava se u točki $(x : y : 1)$ projektivnog pravca $\overline{p} ... y = mx + bz$. Tako p možemo smatrati kao podskup od $\overline{p}$. Prema teoremu 2.1.5. ostale točke pravca $\overline{p}$ dobivamo presjekom $\overline{p}$ sa $z = 0$. No, njihov presjek je $y = mx$ tako da rješenja pišemo u obliku $(x, mx, 0)$. $x \neq 0$ jer homogene koordinate ne mogu biti sve istovremeno jednake nula te dijeljenjem s x dobivamo

$(1, m, 0)$, a to je zapravo jedinstvena točka presjeka $\overline{p} \cap H_\infty$. Sada ćemo analogno postupiti za vertikalni afini pravac $x = c$. Dakle, tražimo presjek $x = cz$ i $z = 0$. Rješenja možemo zapisati u obliku $(0, y, 0)$ odnosno dijeljenjem s $y \neq 0$ dobivamo jedinstveno rješenje $(0, 1, 0)$.

Dakle, tablica pokazuje da se dva pravca u ravnini $\mathbb{R}^2$ sijeku odnosno dodiruju u beskonačno dalekoj točki ako i samo ako su paralelni. Za pravce koji nisu vertikalni beskonačno daleka točka određuje i njihov nagib, a za vertikalne pravce je drugačija beskonačno daleka točka. Sada možemo reći da H_∞ sadrži jedinstvenu beskonačno daleku točku za svaku klasu ekvivalencija paralelnih pravaca. Stoga $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup H_\infty$ pokazuje da obje definicije projektivne ravnine određuju isti objekt.

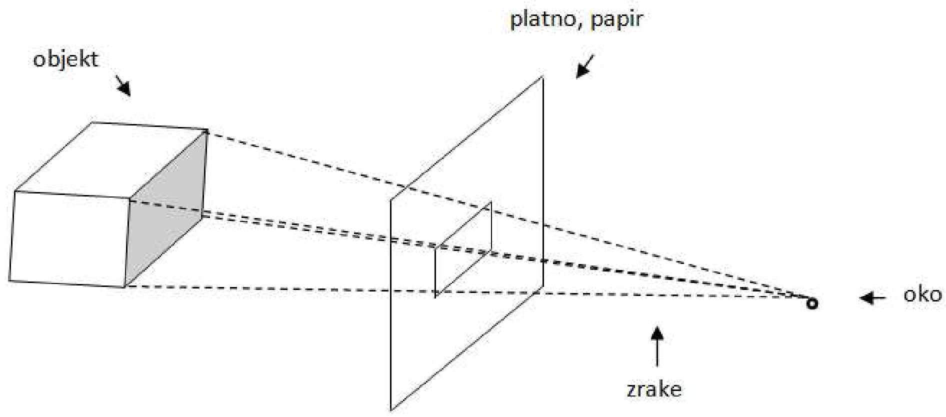
Točke u projektivnoj ravnini možemo promatrati i na drugačiji način odnosno pristupiti im više geometrijski. Neka su $(x : y : z)$ homogene koordinate točke $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (dakle (x, y, z) je predstavnik homogenih koordinata dok ostale nalazimo u obliku $\lambda(x, y, z)$ za neki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{O\}$). Presudno je zapaziti da sve te točke leže na istom pravcu kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$ što prikazuje i sljedeća slika.



Prisjetimo se da se u definiciji 2.1.3. zahtijeva uvjet $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ što nam osigurava postojanje pravca u $\mathbb{R}^3$. Vrijedi i obrnuto, odaberemo li proizvoljan pravac p kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$ i neku točku (x, y, z) koja pripada $p \setminus \{O\}$ dobivamo homogene koodrinate jedinstvene točke projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (sve ostale točke pravca $p \setminus \{O\}$ nalazimo u obliku $\lambda(x, y, z)$). Dakle, možemo reći da je $(x : y : z)$ zapravo pravac kroz ishosište u $\mathbb{R}^3$ bez ishodišta. Projektivnu ravninu možemo zamisliti kao skup pravaca kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$ i zapisati da vrijedi

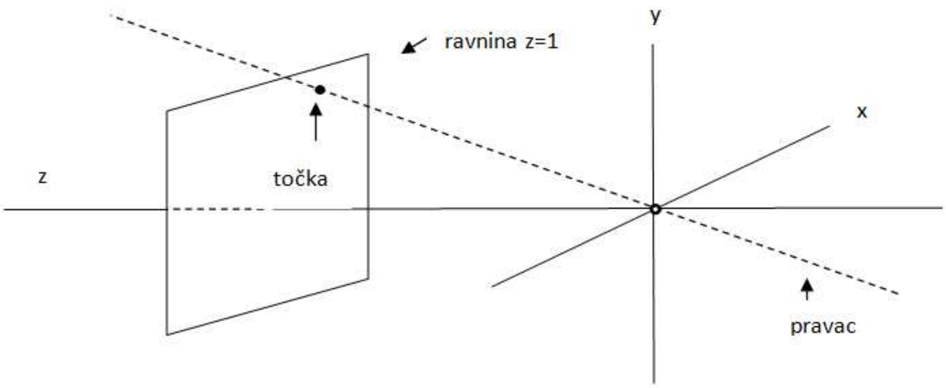
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \{\text{pravci kroz ishodište u } \mathbb{R}^3\}.$$

Nakon ove konstatacije čini se kako bi moglo biti teško razmišljati o točkama projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ kao o pravcima u $\mathbb{R}^3$ no postoji zanimljiv način kako to intuitivno objasniti. Trebamo proučiti kako trodimenzionalni objekt prikazati na dvodimenzionalnoj površini (npr. papiru ili platnu). Zamislimo pravce, odnosno zrake koje povezuju naše oko i točke na odabranom trodimenzionalnom objektu. Zatim radimo prikaz sukladno tome gdje zrake presjecaju papir kao što je prikazano i na slici.



Vrlo je važno naglasiti da svaka zraka točno jednom presjeca papir. Tako dobivamo vezu između zraka i točaka na papiru.

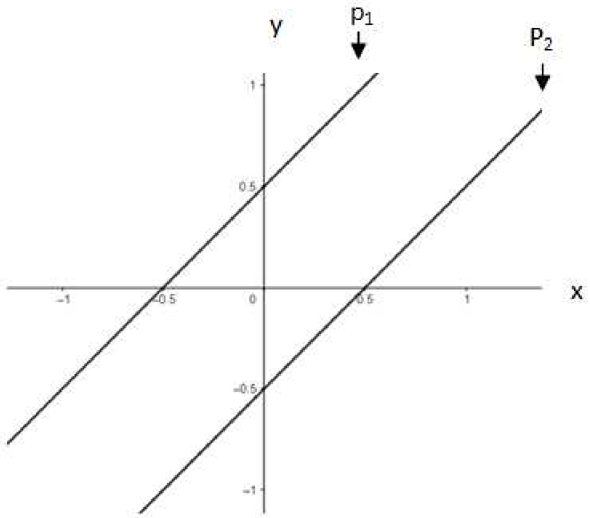
Sada ćemo papir i oko iz kojeg se promatra objekt smjestiti u $\mathbb{R}^3$ kako bi mogli lakše opisati zapažanja. Oko postavljamo u ishodište, a papir postavljamo kao ravninu $z = 1$ kao što i prikazuje slika.



Zrake koje povezuju oko i objekt koji promatramo su zapravo polupravci s početnom točkom u oku (odnosno ishodištu) pa ćemo umjesto zraka promatrati pravce kroz ishodište. Kao što možemo vidjeti na slici svaka točka ravnine $z = 1$ određuje jedinstven pravac kroz ishodište što nam dopušta promatranje točke ravnine kao pravca kroz ishodište u $\mathbb{R}^3$. Primijetimo da točka (x, y) u ravnini određuje točku $(x, y, 1)$ na našem papiru koji prikazuje ravninu $z = 1$ pa je odgovarajući pravac kroz ishodište zapravo točka $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ čije su homogene koordinate $(x : y : 1)$ stoga možemo reći da je to preslikavanje zapravo identično preslikavanju $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ iz teorema 2.1.5.

U mnogim situacijama korisno je promatrati projektivnu ravninu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ na oba načina: algebarski (u terminu homogenih koordinata) i geometrijski (u terminu pravaca kroz ishodište).

Homogene koordinate možemo iskoristiti kako bi detaljnije proučili beskonačno daleki pravac. Polazimo iz sljedećeg zapažanja. Pretpostavimo da smo odabrali točku čije su koordinate (x, y). Homogene koordinate te točke sadrže x, y i z koordinatu no možemo reći da zapravo z koordinata ništa posebno ne mijenja. Štoviše, ako želimo možemo postaviti koordinate x i z kao polazne, a y kao dodatnu koordinatu. To može biti vrlo korisno. Promotrimo pravce $p_1 ... y = x + \frac{1}{2}$ i $p_2 ... y = x - \frac{1}{2}$ u xy-ravnini prikazane na slici.



Ta dva pravca su paralelna, dakle sijeku se u beskonačnosti no slika ne prikazuje njihovo sjecište. Kako bi prikazali te pravce u beskonačnosti promotrimo projektivne pravce

$$\overline{p_1} ... y = x + \frac{1}{2} z$$

$$\overline{p_1} ... y = x + \frac{1}{2} z.$$

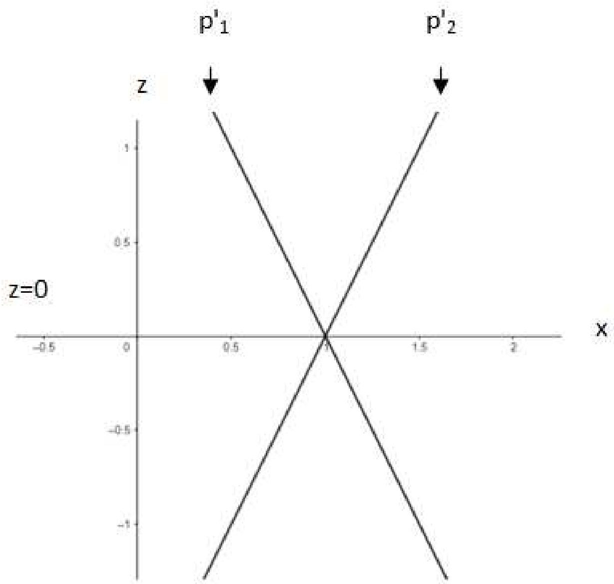
Postavimo sada koordinate x i z kao početne. Tako smo zapravo odredili preslikavanje xz-ravnine $\mathbb{R}^2$ u projektivnu ravninu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ kao $(x, z) \mapsto (x, 1, z)$. Prema teoremu 2.1.5. ovo preslikavanje je bijektivno i xz-ravninu možemo nadopuniti do projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ stavljajući $y = 1$. Ako to primijenimo na jednadžbe projektivnih pravaca $\overline{p_1}$ i $\overline{p_2}$ dobivamo

$$p_1' ... z = -2x + 2$$

i

$$p_2' ... z = 2x - 2.$$

Tako smo dobili sljedeću sliku u xz-ravnini.



Na prikazanoj slici os apscisa je definirana kao $z = 0$ što je zapravo beskonačno daleki pravac definiran u teoremu 2.1.5. Primijetimo da se p'_1 i p'_2 sijeku kada je $z = 0$ što odgovara činjenici da se p_1 i p_2 sijeku u beskonačnosti. Ova nam slika prikazuje kako se dva pravca ponašaju kada pristupe beskonačno dalekom pravcu. Zanimljivo je ovu sliku usporediti sa slikom prikazanom ranije u ovom poglavlju koja prikazuje horizont i točke nestajanja te primijetiti da horizont predstavlja beskonačno daleki pravac.

Zanimljivo je također primijetiti da pojam udaljenosti u Euklidskom prostoru nema značajnu ulogu u projektivnom prostoru. Primjerice, udaljenost pravaca p_1 i p_2 u xy-ravnini je konstantna dok se pravci p'_1 i p'_2 međusobno sve više približavaju u xz-ravnini. Dakle, geometrija projektivne ravnine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ znatno se razlikuje od Euklidske geometrije.

2.2 Projektivni prostor $\mathbb{P}^n$

Konstrukciju projektivne ravnine danu u definiciji 2.1.3. možemo generalizirati na projektivni prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$. Prije nego što definiramo projektivni prostor potrebno je definirati relaciju za točke u $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{O\}$ (pri čemu je $O = (0, ..., 0)$):

$$(x'_0, ..., x'_n) \sim (x_0, ..., x_n)$$

ako postoji $\lambda \in \mathbb{F}, \lambda \neq 0$ takav da vrijedi

$$(x_0', ..., x_n') = \lambda(x_0, ..., x_n).$$

Dokažimo sada da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije.

Propozicija 2.2.1 Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije u $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{\{O\}$.

Dokaz. Pokažimo da vrijede svojstva refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti.

1. Refleksivnost: $(x_0', ..., x_n') \sim (x_0, ..., x_n)$ za sve $(x_0', ..., x_n') \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{O\}$, što znači da trebamo pronaći $\lambda \in \mathbb{F}, \lambda \neq 0$ takav da vrijedi

   $$(x_0', ..., x_n') = \lambda(x_0, ..., x_n),$$

   a to vrijedi za $\lambda = 1$ te je dokazano svojstvo refleksivnosti.

2. Simetričnost: $(x_0', ..., x_n') \sim (x_0, ..., x_n)$ povlači $(x_0, ..., x_n) \sim (x_0', ..., x_n')$, za sve $(x_0', ..., x_n'), (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{O\}$. To znači da uz pretpostavku da postoji $\lambda_1 \in \mathbb{F}, \lambda_1 \neq 0$ takav da je

   $$(x_0', ..., x_n') = \lambda_1(x_0, ..., x_n),$$

   trebamo pronaći $\lambda_2 \in \mathbb{F}, \lambda_2 \neq 0$ takav da vrijedi

   $$(x_0, ..., x_n) = \lambda_2(x_0', ..., x_n').$$

   Stavljajući $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ dobivamo odgovarajući λ_2 te je dokazano svojstvo simetričnosti.

3. Tranzitivnost: $(x_0', ..., x_n') \sim (x_0, ..., x_n)$ i $(x_0, ..., x_n) \sim (x_0'', ..., x_n'')$ povlači $(x_0', ..., x_n') \sim (x_0'', ..., x_n'')$, za sve $(x_0', ..., x_n'), (x_0, ..., x_n), (x_0'', ..., x_n'') \in \mathbb{F}^{n+1} \setminus \{O\}$. To znači da uz pretpostavku da postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ takvi da

   $$(x_0', ..., x_n') = \lambda_1(x_0, ..., x_n)$$

   i

   $$(x_0, ..., x_n) = \lambda_2(x_0'', ..., x_n''),$$

   trebamo pronaći $\lambda_3 \in \mathbb{F}, \lambda_3 \neq 0$ takav da je

   $$(x_0', ..., x_n') = \lambda_3(x_0'', ..., x_n'').$$

   Primijetimo da je

   $$(x_0', ..., x_1') = \lambda_1(x_0, ..., x_n) = \lambda_1\lambda_2(x_0'', ..., x_n'')$$

   pa stavljajući $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2$ dobivamo odgovarajući λ_3 te je svojstvo tranzitivnosti dokazano.

Sada možemo definirati projektivni prostor $\mathbb{P}^n$, odnosno poopćiti definiciju 2.1.3.

Definicija 2.2.2. Projektivni prostor $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ nad poljem $\mathbb{F}$ je kvocijentni skup skupa $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{O\}$ obzirom na relaciju $\sim$. Sastoji se od klasa ekvivalencija koje označavamo $(x_0 : ... : x_n)$ definiranih kao

$$\{(x_0', ..., x_n');\ \ \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{O\},\ \ (x_0', ..., x_n') = (\lambda x_0, ..., \lambda x_n)\}.$$

Možemo zapisati

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) = (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{O\})/^{\sim}.$$

$(x_0 : ... : x_n)$ su **homogene koordinate** točke projektivnog prostora, a $(x_0, ..., x_n)$ je predstavnik te klase ekvivalencija.

Znamo da homogene koordinate nisu jedinstvene pa možemo kao i u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ navesti primjer za $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$. Uzmimo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Tada $(0, \sqrt{2}, 0, i)$ i $(0, 2i, 0, -\sqrt{2})$ predstavljaju istu točku jer je $(0, 2i, 0, -\sqrt{2}) = \sqrt{2}i(0, \sqrt{2}, 0, i)$. Projektivnom prostoru, kao što smo i projektivnoj ravnini, možemo pristupiti više geometrijski odnosno da ga zamislimo kao skup pravaca koji prolaze kroz ishodište u $\mathbb{F}^{n+1}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \cong \{\text{pravci kroz ishodište u } \mathbb{F}^{n+1}\}. \qquad (1)$$

Dakle, projektivna ravnina sadrži afinu ravninu $\mathbb{R}^2$, odnosno afina ravnina $\mathbb{R}^2$ je podskup projektivne ravnine dok je afini prostor $\mathbb{F}^n$ podskup prokjektivnog prostora $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$.

Teorem 2.2.3 Neka je

$$U_0 = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) : x_0 \neq 0\}.$$

Tada je preslikavanje $f : \mathbb{F}^n \to U_0 \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ definirano kao

$$f(a_1, ..., a_n) = (1, a_1, ..., a_n),$$

pri čemu je $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n$, a $(1 : a_1 : ... : a_n)$ homogene koordinate točke iz $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$, bijektivno.

Dokaz. Obzirom da je prva koordinata preslikavanja f različita od nule, dobivamo preslikavanje $f : \mathbb{F}^n \to U_0$. Sada možemo definirati i preslikavanje $f^{-1} : U_0 \to \mathbb{F}^n$ na sljedeći način. Neka je $p = (x_0, ..., x_n) \in U_0$. Kako je $x_0 \neq 0$, smijemo množiti sa skalarom $\lambda = \frac{1}{x_0}$ pa dobivamo homogene koordinate točke $p = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : ... : \frac{x_n}{x_0}\right)$. Dakle, vrijedi $f^{-1}(p) = \left(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right)$ što je zapravo element skupa $\mathbb{F}^n$. Preslikavanje f^{-1} je inverzno preslikavanju f pa je stoga dokaz ovog teorema dovršen.

Prema definiciji skupa U_0 možemo primijetiti da vrijedi da je $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) = U_0 \cup H$, pri čemu je

$$H = p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) : p = (1 : x_0 : ... : x_n). \quad (2)$$

Ako skup U_0 poistovjetimo s afinim prostorom $\mathbb{F}^n$, onda možemo o skupu H razmišljati kao o hiperravnini u beskonačnosti. Iz definicije skupa H možemo vidjeti da postoji bijekcija između skupa H i skupa koji sadrži sve uređene n-torke $(x_1 : ... : x_n)$, gdje dvije uređene n-torke predstavljaju istu točku skupa H ako je jedna nastala množenjem druge skalarom različitim od nule (pri čemu samo zanemarimo prvu koordinatu točke iz skupa H). Drugim riječima, skup H možemo poistovjetiti sa projektivnim prostorom manje dimenzije $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$. Dakle, možemo zapisati

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}). \quad (3)$$

Pogledajmo sada geometrijsku interpretaciju $H = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$. Primijetimo da točku $p \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$ možemo zamisliti kao pravac q u $\mathbb{F}^n$ koji prolazi kroz ishodište. Stoga točka p u (3) zapravo predstavlja smjer svih pravaca u $\mathbb{F}^n$ koji su paralelni s q što nam omogućuje da točku p smatramo kao beskonačno daleku točku. Time dolazimo do intuitivnog poimanja definicije projektivnog prostora.

Osvrnimo se sada na projektivni pravac $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$. Znamo da se $\mathbb{P}^0(\mathbb{F})$ sastoji od jedne točke (što slijedi iz definicije 2.2.2.). Uvrštavanjem $n = 1$ u (3) dobivamo

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^1 \cup \mathbb{P}^0(\mathbb{F}) = \mathbb{F} \cup \{\infty\},$$

pri čemu ∞ predstavlja tu jednu točku $\mathbb{P}^0(\mathbb{F})$. Ako promatramo točke iz $\mathbb{P}^1(\mathbb{F})$ kao pravce kroz ishodište u $\mathbb{F}^2$ (prema (1)) tada iz $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^1 \cup \mathbb{P}^0(\mathbb{F}) = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ slijedi da su ti pravci određeni svojim nagibom (pri čemu je nagib vertikalnog pravca jednak ∞). U slučaju da se nalazimo u polju kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ uobičajeno se

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

naziva *Riemannova sfera*. Napomenimo da pored U_0 postoje mnogobrojna preslikavanja $\mathbb{F}^n$ u $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ (pomoću kojih smo također mogli dokazati teorem 2.2.3.) pa tako dolazimo do leme koja obuhvaća sva ta preslikavanja odnosno generalizira teorem 2.2.3.

Lema 2.2.4. Neka je

$$U_i = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) : x_i \neq 0\}$$

pri čemu je $i = 0, ...n$. Tada vrijedi

1. postoji bijekcija između svakog U_i i $\mathbb{F}^n$
2. komplement od $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) \setminus U_i$ možemo poistovjetiti s $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$
3. $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}) = \cup_{i=0}^n U_i$.

Nakon što smo kratko promotrili projektivni prostor dolazimo do mnogostrukosti. Cilj je proširiti definiciju mnogostrukosti u afinom prostoru na projektivni prostor. Stoga promatramo mnogostrukost $\mathbf{V}(f)$ za polinom $f \in \mathbb{F}[x_0, ..., x_n]$. Već u jednostavnim primjerima vidimo da treba pripaziti kada se nalazimo u projektivnom prostoru. Primjerice, u $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ možemo konstruirati $\mathbf{V}(x_1 - x_2^2)$. Odaberimo sada točku $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ čiji je predstavnik homogenih koordinata $(x_0, x_1, x_2) = (1, 4, 2)$. Vidimo da koordinate točke p zadovoljavaju jednadžbu $x_1 - x_2^2 = 0$ što zapravo i tražimo. No, znamo da homogene koordinate točke p nisu jedinstvene pa dolazimo do problema ako odlučimo za predstavnika homogenih koordinata točke p uzeti primjerice $2(1, 4, 2) = (2, 8, 4)$ jer bi u tom slučaju vrijedilo

$$x_1 - x_2^2 = 8 - 4^2 = -8 \neq 0.$$

Dakle, homogene koordinate iste točke mogu dati različite rezultate. Kako bi izbjegli takve probleme, u projektivnom prostoru koristit ćemo homogene polinome. Slijedi definicija homogenih polinoma.

Definicija 2.2.5. Polinom $f \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ je **homogen stupnja** k ako mu je svaki monom stupnja k.

Pogledajmo neke primjere homogenih polinoma:

1. polinom $f = x_1 + x_2 + x_3$ je homogen stupnja 1
2. polinom $g = x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3$ je homogen stupnja 2
3. polinom $h = y_1y_2y_3^3 + y_1^5$ je homogen stupnja 5
4. nul-polinom je homogen svakog stupnja.

Ako je f homogeni polinom potpunog stupnja k tada svaki njegov član možemo zapisati u obliku

$$cx_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

pri čemu je $\alpha_0 + ... + \alpha_n = k$. Dakle, lako vidimo da vrijedi

$$f(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_0, ..., x_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}.$$

Naime, ako svaki član homogenog polinoma $f(x_0, ..., x_n)$ možemo zapisati kao $cx_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$, vrijedi i da svaki član od $f(\lambda x_0, ..., \lambda x_n)$ možemo zapisati u obliku

$$c(\lambda a_0)^{\alpha_0} \cdots (\lambda a_n)^{\alpha_n}$$

što je jednako

$$\lambda^{\alpha_0 + ... + \alpha_n} c a_0^{\alpha_0} \cdots a_n^{\alpha_n} = \lambda^k c a_0^{\alpha_0} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Sada je potrebno zbrojiti sve članove polinoma $f(\lambda x_0, ..., \lambda x_n)$ čime se dobiva jednakost $f(\lambda x_0, ..., \lambda x_n) = \lambda^k f(x_0, ..., x_n)$.

Primijetimo da polinom $f = x_1 - x_2^2$ nije homogen i to je razlog zbog kojeg smo dobili različite rezultate. Kod homogenih polinoma to neće biti slučaj.

Teorem 2.2.6. Neka je $f \in \mathbb{F}[x_0, ..., x_n]$ homogeni polinom. Ako je vrijednost polinoma f jednaka nula za nekog predstavnika homogenih koordinata točke $p \in \mathbb{P}^n$ tada je jednaka nula i za homogene koordinate te točke p. Posebno, $\mathbf{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) : f(p) = 0\}$ je dobro definiran podskup projektivnog prostora $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$.

Dokaz. Neka su $(a_0, ..., a_n)$ i $(\lambda a_0, ..., \lambda a_n)$ dva predstavnika homogenih koordinata točke $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ te pretpostavimo da je $f(a_0, ..., a_n) = 0$. Ako je f homogeni polinom potpunog stupnja k tada svaki njegov član možemo zapisati u obliku

$$cx_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

pri čemu je $\alpha_0 + ... + \alpha_n = k$. Kada napravimo supstituciju $x_i = \lambda a_i, i = 0, ...n$ dobivamo

$$c(\lambda a_0)^{\alpha_0} \cdots (\lambda a_n)^{\alpha_n} = \lambda^k c a_0^{\alpha_0} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Sumirajući po članovima od f dobivamo zajednički faktor te slijedi

$$f(\lambda a_0, ..., \lambda a_n) = \lambda^k f(a_0, ..., a_n) = 0.$$

Time je dokaz ovog teorema dovršen.

Primijetimo da iako je polinom f homognen, jednadžba $f = a$ nema smisla u projektivnom prostoru $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ dok je $0 \neq a \in \mathbb{F}$. Jednadžba $f = 0$ je posebno važna jer je zbog toga dobro definiran podskup u $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$. Napomenimo da također postoje i podskupovi od $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ koji su definirani sustavom homogenih polinoma (zanimljivi su homogeni polinomi različitih potpunih stupnjeva). Sada ćemo definirati projektivnu mnogostrukost.

Definicija 2.2.7. Neka je $\mathbb{F}$ polje te neka su $f_1, ..., f_s$ homogeni polinomi. Definiramo

$$\mathbf{V}(f_1, ..., f_s) = \{(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{F}) : f_i(a_0, ..., a_n) = 0 \ \forall i = 1, ..., s\}.$$

$\mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$ nazivamo **projektivna mnogostrukost** definirana polinomima $f_1, ..., f_s$.

Primjerice, u $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ bilo koji homogeni polinom stupnja 1

$$l(x_0, ..., x_n) = c_0x_0 + ... + c_nx_n$$

definira projektivnu mnogostrukost $\mathbf{V}(l)$ koju nazivamo hiperravnina. Jedan primjer koji smo već vidjeli je hiperravnina u beskonačnosti, definirana s $H = \mathbf{V}(x_0)$. Kada je $n = 2$ tada $\mathbf{V}(l)$ nazivamo projektivni pravac ili jednostavnije pravac u $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$. Slično, kada je $n = 3$ hiperravninu nazivamo ravninom u $\mathbb{P}^3(\mathbb{F})$. Mnogostrukosti definirane pomoću jednog ili više linearnih polinoma (homogenih polinoma stupnja 1) nazivaju se linearne mnogostrukosti u $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$. Primjerice, $\mathbf{V}(x_1, x_2) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{F})$ je linearna mnogostrukost koja je zapravo projektivni pravac u $\mathbb{P}^3(\mathbb{F})$.

Projektivne mnogostrukosti $\mathbf{V}(f)$ definirane jednom homogenom jednadžbom skupno se nazivaju hiperpovršine. Pojedinačne hiperpovršine su klasificirane prema stupnju definirane jednadžbe. Prema tome, ako je f stupnja 2 u $\mathbb{F}[x_0, ..., x_n]$ onda se uobičajeno $\mathbf{V}(f)$ naziva kvadratna hiperpovršina. Primjerice, $\mathbf{V}(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ je kvadratna hiperpovršina. Slično, hiperpovršine definirane jednadžbama stupnja 3 nazivaju se kubne hiperpovršine.

Sada ćemo se osvrnuti na vezu između afine i projektivne mnogostrukosti. Kao što smo vidjeli u lemi 2.2.4. podskupovi $U_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{F})$ su zapravo preslike $\mathbb{F}^n$. Stoga se možemo pitati kako se afine mnogostrukosti u $U_i \cong \mathbb{F}^n$ odnose prema projektivnim mnogostrukostima u $\mathbb{P}^n(\mathbb{F})$. Najprije, ako uzmemo projektivnu mnogostrukost V i presječemo ju sa nekim od U_i pitamo se dobivamo li opet projektivnu mnogostrukost. Odgovor na to pitanje je potvrdan te se jednadžbe mnogostrukosti $V \cap U_i$ mogu odrediti procesom koji se naziva *dehomogenizacija*. Prikazat ćemo to razmatranjem $V \cap U_0$. Iz dokaza teorema 2.2.3. znamo da ako je $p \in U_0$ tada p ima homogene koordinate u obliku $(1 : x_1 : ... : x_n)$. Ako $f \in \mathbb{F}[x_0, ..., x_n]$ definira jednu jednadžbu mnogostrukosti V tada je vrijednost polinoma

$$g(x_1, ..., x_n) = f(1, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$$

jednaka nula za svaku točku iz V_0. Stavljanjem $x_0 = 1$ u f dobivamo dehomogenizirani polinom g koji obično nije homogen. Dakle, tvrdimo da je $V \cap U_0$

afina mnogostrukost koja je dobivena dehomogenizacijom jednadžbi iz V. Tako dolazimo do sljedećeg teorema.

Teorem 2.2.8. Neka je $V = \mathbf{V}(f_1, ..., f_s)$ projektivna mnogostrukost. Tada $W = V_0$ možemo definirati kao afinu mnogostrukost $\mathbf{V}(g_1, ..., g_s) \subset \mathbb{F}^n$, pri čemu je $g_i(y_1, ..., y_n) = f_i(1, y_1, ..., y_n)$ za svaki $i = 1, ..., s$.

Dokaz. Koristimo isto preslikavanje kao i u teoremu 2.2.3. samo ćemo ga umjesto f označiti s φ kako nebi došlo do zabune što se tiče oznaka. Dakle $\varphi : U_0 \to \mathbb{F}^n$ i $\varphi(W) \subset \mathbf{V}(g_1, ..., g_s)$. S druge strane, ako je $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{V}(g_1, ..., g_s)$ tada točka homogenih kooridnata $(1 : a_1 : ... : a_n)$ pripada skupu U_0 i zadovoljava jednadžbe

$$f_i(1, a_1, ..., a_n) = g_i(a_1, ..., a_n) = 0.$$

Prema tome, $\varphi^{-1}(\mathbf{V}(g_1, ..., g_s)) \subset W$. Preslikavanja φ i φ^{-1} su inverzna pa postoji bijekcija između W i $\mathbf{V}(g_1, ..., g_s)$.

Primjerice, promotrimo projektivnu mnogostrukost

$$V = \mathbf{V}(x_1^2 - x_2x_0, x_1^3 - x_3x_0^2) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}).$$

Presjecanjem V sa U_0 dehomogeniziramo definirane jednadžbe što nam daje afinu mnogostrukost

$$\mathbf{V}(x_1^2 - x_2, x_1^3 - x_3) \subset \mathbb{R}^3.$$

Također, možemo napraviti dehomogenizaciju obzirom i na druge varijable. Na primjer, dokaz teorema 2.2.8. pokazuje nam da za bilo koju projektivnu mnogostrukost $V \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{F})$, $V \cap U_1$ možemo promatrati kao afinu mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$ definiranu jednadžbama koje su dobivene stavljanjem

$$g_i(x_0, x_2, x_3) = f_i(x_0, 1, x_2, x_3).$$

Kada to napravimo sa projektivnom mnogostrukosti $V = \mathbf{V}(x_1^2 - x_2x_0, x_1^3 - x_3x_0^2)$ (iz gornjeg primjera) vidimo da je $V \cap U_1$ zapravo afina mnogostrukost $\mathbf{V}(1 - x_2x_0, 1 - x_3x_0^2)$.

Krenemo li u suprotnom smjeru, možemo se pitati može li afina mnogostrukost u U_i biti napisana kao $V \cap U_i$ u nekoj projektivnoj mnogostrukosti V. Odgovor je i u ovom slučaju potvrdan te postoji više načina kako to učiniti no rezultati mogu ponekad biti iznenađujući. Jedna prirodna ideja koja se nameće je preokrenuti proces dehomogenizacije i homogenizirati definirane jednadžbe afine mnogostrukosti. Primjerice, pogledajmo afinu mnogostrukost $W = \mathbf{V}(x_2 - x_1^3 + x_1^2)$

u $U_0 = \mathbb{R}^2$. Definirane jednadžbe nisu homogene pa ne možemo direktno iz ove jednadžbe dobiti projektivnu mnogostrukost u $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. No možemo iskoristiti dodatnu varijablu x_0 kako bi $f = x_2 - x_1^3 + x_1^2$ postao homogen. Obzirom da je stupanj polinoma f 3, modificiramo polinom f tako da je svaki član stupnja 3. Tako dobivamo homogeni polinom

$$f^h = x_2 x_0^2 - x_1^3 + x_1^2 x_0.$$

Štoviše, primijetimo da je nehomogenizirani polinom f^h opet početni polinom f u varijablama x_1 i x_2. Naše razmatranje generalizirano je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.2.9. Neka je $g(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ polinom stupnja d.

1. Rastavimo g u homogene komponente $g = \sum_{i=0}^{d} g_i$, gdje su g_i homogeni polinomi stupnja i ili nul-polinomi. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} g^h &\stackrel{def}{=} x_0^d \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{d} g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i} \end{aligned}$$

2. Dehomogenizacijom g^h dobivamo g. Vrijedi $g^h(1, x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n)$. $\mathbf{V}(g^h) \cap U_0$ je afina mnogostrukost određena s g to jest ima jednazbu $g = 0$.

3. Neka je $F(x_0, ..., x_n)$ homogeni polinom i neka je x_0^e najveća potencija koja dijeli F. Ako je $f = F(1, x_1, ..., x_n)$ dehomogenizacija od F onda vrijedi $F = x_0^e \cdot f^h$.

Dokaz. Najprije dokažimo prvu tvrdnju. Dakle,

$$g^h \stackrel{def}{=} x_0^d \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right) = x_0^d \sum_{i=0}^{d} g_i\left(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Nadalje, iz razloga što su g_i homogeni polinomi stupnja i vrijedi da je

$$x_0^d \sum_{i=0}^{d} g_i\left(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right) = x_0^d \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{x_0^i} g_i(x_1, ..., x_n)$$

što konačno daje

$$= \sum_{i=0}^{d} g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i}.$$

Druga tvrdnja ovog teorema je očita, a dokaz treće tvrdnje nalazi se u lemi 9.2. iz 9. poglavlja bibliografije [2].

Pogledajmo sada na sljedećem primjeru računanje homogenizacije za dane polinome.

Primjer 2.2.10. Zadani su polinomi:

1. $g_1 = x_1 + 2x_2 - 1$
2. $g_2 = 2x_1 + x_2x_1 + x_2^2 - 5$
3. $g_3 = x_2 - x_1^2$
4. $g_4 = x_1^2 + x_2^2 - 1$
5. $g_5 = x_2^2 - x_1^2 - 1$.

Za polinome g_i potrebno je odrediti $g_i^h, i = 1, ..., 5$. Zadatak započinjemo tako da najprije odredimo koliki je stupanj polinoma te napravimo homogenizaciju. Započnimo s polinomom g_1 te zatim analogno postupamo i za preostale polinome:

1. stupanj polinoma g_1 je 1 pa je
$$g_1^h = x_0^1 \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_0 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} + 2 \cdot \frac{x_2}{x_0} - 1\right) = x_1 + 2x_2 - x_0$$
2. stupanj polinoma g_2 je 2 pa je
$$g_2^h = x_0^2 \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} \cdot \frac{x_1}{x_0} + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 5\right) =$$
$$= 2x_0x_1 + x_2x_1 + x_2^2 - 5x_0^2$$
3. stupanj polinoma g_3 je 2 pa je
$$g_3^h = x_0^2 \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = x_0^2 \cdot \left(\frac{x_2}{x_0} - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2\right) = x_2x_0 - x_1^2$$
4. stupanj polinoma g_4 je 2 pa je
$$g_4^h = x_0^2 \cdot g\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - 1\right) = x_1^2 + x_2^2 - x_0^2$$
5. stupanj polinoma g_5 je 2 pa je
$$g_5^h = x_0^2 \cdot g\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 1\Bigg) = x_2^2 - x_1^2 - x_0^2.$$

Bibliografija

[1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Undergraduate texts in mathematics.*, Springer Verlag, 1992.

[2] G. Muić, *predavanja iz kolegija Algebarske krivulje,*
https://web.math.pmf.unizg.hr/~ gmuic/Algebarske_krivulje_ispravljeno.pdf

Sažetak

U ovom radu najprije izlažemo pregled pojmova vezanih za afini prostor koji nam pomažu u daljnjem razmišljanju. Zatim definiramo projektivnu ravninu i projektivni prostor. Glavni cilj ovog rada je proširiti definiciju algebarskih skupova u afinom prostoru na projektivni prostor te promotriti svojstva tih skupova u projektivnom prostoru. Time se bavimo do kraja rada.

Summary

In this thesis we present the overwied of terms which are connected with affine space which is helping us in further reflection. Then we define the projective plane and projective space. The main aim of this thesis is to expand the definition of algebraic sets in affine space at the projective space and observe the properties of these sets in projective space. We engage this until the end of the thesis.

Životopis

Rođen sam 31. prosinca 1994. godine u Zagrebu. U Zaprešiću sam pohađao osnovnu i srednju školu (SŠ Ban Josip Jelačić, smjer opća gimnazija). U srpnju 2014. godine upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija upisujem Diplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički na istom odsjeku.