Hardyjevi prostori

Tomac, Fran Domagoj

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Fran Domagoj Tomac

HARDYJEVI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hrvoje Šikić

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Premda blisko povezana s konceptima Fourierove analize, klasična se teorija Hardyjevih prostora obično promatra kao poglavlje u teoriji kompleksnih funkcija. U tom se kontekstu pojavljuju u prvoj polovici 20. stoljeća, a predstavio ih je F. Riesz 1923. godine ([14]) koji im je naziv nadjenuo po engleskom matematičaru G. H. Hardyju zbog nasljeđa njegova rada iz 1915. godine ([11]). Od tada se Hardyjevi prostori promatraju kao određene klase holomorfnih funkcija na dijelovima kompleksne ravnine kao što su jedinični disk oko nule i gornja poluravnina — dobar je izvor za pregled ovog vida teorije Hardyjevih prostora [5]. Međutim, razvojem moderne analize nameće se potreba za proširivanjem teorije, a glavne su korake u tom smjeru načinili američki matematičari E. M. Stein, G. Weiss, R. Coifman i C. Fefferman u [6], [7] te [3] gdje su u posljednja dva rada postavljeni temelji za teoriju Hardyjevih prostora na $\mathbb{R}^n$ te detaljnije opisana neka njihova svojstva.

Radnja je ovog teksta podijeljena na tri poglavlja. U prvom je poglavlju dana kratka ekspozicija Schwartzovih prostora i temperiranih distribucija što čini okosnicu teorije razvijene u ostatku teksta. Hardyjevi prostori, kao klase temperiranih distribucija kojima su stanovite maksimalne funkcije [1] sadržane u L^p prostorima, uvedeni su u drugom poglavlju. Dva su važna rezultata dokazana u tom poglavlju: prvi govori da odabiru maksimalnog operatora kojeg koristimo u definiciji možemo pristupiti na više načina, a drugi se odnosi na egzistenciju atomarne dekompozicije — Hardyjeve prostore umijemo "razbiti" na jednostavnije objekte s nekim poželjnim svojstvima pomoću kojih onda možemo prikazati proizvoljan element tog prostora. Konačno, u posljednjem, trećem, poglavlju podrobnije proučavamo prostor H^1 i dokazujemo da je njegov dual upravo prostor funkcija ograničene srednje oscilacije, u oznaci BMO.

[1] Precizan smisao ovog pojma dan je u drugom poglavlju.

Poglavlje 0

Preliminarije

Ovo poglavlje sadrži sve rezultate koje ćemo koristiti za razvoj teorije na sljedećim stranicama, a reference na dokaze su dane.

0.1 Funkcionalna analiza

U ovom odjeljku donosimo pregled neki osnovnih pojmova i rezultata iz funkcionalne analize koji su sadržaj svih uvodnih tekstova u funkcionalnu analizu. Jedna referenca koju ovdje dajemo jest [13].
Također, u čitavom tekstu predmnijevamo poznavanje raznih topoloških pojmova iz teorije normiranih prostora kao što su topologija norme (uniformna topologija), slaba i slaba-* topologija i slično. Osim toga, smatramo da je čitatelj upoznat i s osnovama teorije Fréchetovih prostora i topologije na lokalno konveksnim prostorima (vidjeti, primjerice, [1]).

Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normirani prostori. Kažemo da je linearan operator $T : X \to Y$ ograničen ako postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad x \in X.$$

Osim kada postoji opasnost zabune, obje norme obično označavamo jednostavno sa $\|\cdot\|$.

Nije teško dokazati da je optimalna konstanta gore dana sa $C = \|T\| := \sup_{X \ni x \neq 0} \|Tx\|$. Veličinu $\|T\|$ nazivamo (operatorskom) normom operatora T. Štoviše, nije se teško uvjeriti da vrijedi

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Sa $\mathbb{B}(X, Y)$ označavmo skup svih ograničenih linearnih operatora sa X u Y:

$$\mathbb{B}(X, Y) := \{T : X \to Y;\ T \text{ je linearan i ograničen}\}.$$

Uz operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane po točkama skup $\mathbb{B}(X, Y)$ dobiva strukturu vektorskog prostora; a snabdjevan operatorskom normom on je, štoviše, i normiran prostor. Zaista, jednostavno se provjerava da preslikavanje koje smo gore uveli i zvali operatorskom normom zaista i jest norma na tom prostoru.

Temeljno svojstvo ograničenih operatora jest istoznačnost neprekidnosti i ograničenosti. Navedeni odnos precizno je izložen u sljedećem teoremu.

Teorem 0.1.1. *Neka su X i Y normirani prostori i $T : X \to Y$ linearan operator. Sljedeće su tvrdnje međusobno ekvivalentnte.*

(i) T je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$.

(ii) T je neprekidan na X.

(iii) T je uniformno neprekidan na X.

(iv) T je ograničen.

Dokaz ovog teorema sadržaj je bilo kojeg uvodnog teksta u funkcionalnu analizu.

Prisjetimo se da kažemo da je podskup $S \subseteq X$, gdje je X neki topološki prostor, *gust* u X ako je $\overline{S} = X$ (ovdje, kao i obično, $\overline{S}$ označava zatvarač skupa S u pripadnoj topologiji prostora X).
Često nam je zgodnije ograničeni operator[1] zadati na nekom gustom podskupu domene što opravdava sljedeći teorem.

Teorem 0.1.2. *Neka su X i Y normirani prostori pri čemu je Y i potpun. Nadalje, neka je $X_0 \leq X$ gusti potprostor od X i $\widetilde{T} : X_0 \to Y$ ograničen linearan operator. Tada postoji jedinstveno proširenje operatora $\widetilde{T}$ do linearnog operatora $T : X \to Y$ takvog da vrijedi $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.*

Osim prethodnog, koristan je i sljedeći rezultat o proširenju neprekidnih funkcionala.

Teorem 0.1.3 (Hahn-Banach)**.** *Neka je X vektorski prostor na kojem je zadana polunorma p te Y potprostor od X. Nadalje, neka je f linearan funkcional na Y takav da vrijedi $|f(x)| < p(y)$ za sve $y \in Y$. Tada postoji linearan funkcional F na X takav da je $F|_Y = f$ te $|F(x)| \leq p(x)$, za svaki $x \in X$.*

[1]Ukoliko to neće dovesti do zabune, atribut linearan uglavnom ispuštamo.

Za demonstraciju vidjeti teorem 3.2. u [15]. Dodajmo još i da kažemo da je $p : X \to \mathbb{R}$ polunorma na vektorskom prostoru X ako vrijedi

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{i} \quad p(tx) = tp(x)$$

za $x, y \in X$ i $t \geq 0$.
Razmatramo li neprekidne funkcionale na Hilbertovim prostorima, od neizmjerne je koristi i sljedeći rezultat o reprezentaciji.

Teorem 0.1.4 (Rieszov teorem o reprezentaciji)**.** *Neka je X Hilbertov prostor i $f \in X'$. Tada postoji jedinstveni $x_f \in X$ takav da je*

$$f(x) = (x, x_f), \quad x \in X$$

gdje $(\cdot, \cdot)$ označava skalarni produkt na X. Štoviše, vrijedi i $\|f\| = \|x_f\|$.

Za dokaz vidjeti teorem 3.8.1. u [13].

Navodimo i sljedeći veoma važan rezultat iz funkcionalne analize.

Teorem 0.1.5. *Neka je X normiran prostor. Tada je zatvorena jedinična kugla u X', odnosno $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$, je kompaktna u slabo-* topologiji.*

Cauchyjevost i konvergencija u normiranim je prostorima definirana na standardan način, a Cauchyjevi nizovi imaju i sljedeće korisno svojstvo.

Propozicija 0.1.6. *Neka je (x_n) Cauchyjev niz u normiranom prostoru X. Za svaki niz pozitivnih brojeva (ε_n) postoji podniz $(x_{p(n)})_n$ niza (x_n) sa svojstvom $\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \varepsilon_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Zbog pretpostavljene Cauchyjevosti niza (x_n) prvo pronalazimo $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $\|x_n - x_m\| < \varepsilon_1$ čim su $m, n > n_1$ pa stavimo $p(1) = n_1$. Na isti način pronalazimo $n_2 > n_1$ takav da vrijedi $\|x_n - x_m\| < \varepsilon_2$ čim su $m, n > n_2$; stavimo $p(2) = n_2$. Konstrukciju nastavljamo analogno i tvrdnja slijedi primjenom principa matematičke indukcije. □

0.2 Matematička analiza

Ovaj odjeljak sadrži konstrukcije i dobro poznate rezultate koje tradicionalno svrstavamo u područje matematičke analize, a koji će biti sveprisutni u ostatku materije.

Konvolucija

Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Konvoluciju* tih dviju funkcija, u oznaci $f * g$, definiramo sa

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Nije se teško uvjeriti da je definicija dobra. Zaista, budući da su f i g apsolutno integrabilne — po Fubini-Tonellijevom teoremu — dobro je definiran integral

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\,dy\,dx.$$

Međutim, zamjenom varijabli dobivamo

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\,dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)\,dy\,dx.$$

Primijenimo li još jednom Fubini-Tonellija dobivamo da je unutrašnji integral (koji je upravo $(f * g)(x)$) konačan.

Napomena 0.2.1. *Direktnim se računom lako provjerava da je operacija konvolucije komutativna i asocijativna:*

(i) $f * g = g * f, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $(f * g) * h = f * (g * h), \quad f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Operaciju konvolucije možemo, preko formule (1), *formalno* promatrati i za preslikavanja koja nisu nužno u $L^1(\mathbb{R}^n)$, a sljedeća nam dobro poznata nejednakost govori za koje će parove Lebesgueovih funkcija ona zacijelo biti dobro definirana.

Propozicija 0.2.2 (Youngova konvolucijska nejednakost)**.** *Neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ te $r \in \mathbb{R}$ takav da*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

uz $1 \leq p, q \leq r \leq +\infty$. Tada vrijedi

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Prostor C_c^∞ i aproksimacije identiteta

Podsjetimo se da je nosač funkcije zatvarač skupa na kojem ona ne iščezava. Preciznije, neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija; *nosač* funkcije f označavamo sa $\operatorname{supp}(f)$ [2] ili jednostavno $\operatorname{supp} f$ i definiramo sa

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Na $\mathbb{R}^n$ promatramo standardnu topologiju (n-dimenzionalne) Euklidske norme, a $\bar{S}$ označava odgovarajući zatvarač skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sada ćemo promatrati jedan neobično važan prostor funkcija; naime, onaj glatkih funkcija s kompaktnim nosačem. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Uvodimo oznaku

$$C_c^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} f \text{ je kompaktan u } \mathbb{R}^n\}.$$

Standardno taj prostor označavamo sa $\mathcal{D}$ i nazivamo ga prostrom *test funkcija* ili probnih funkcija.
Nama će napose od interesa biti slučaj $\Omega = \mathbb{R}^n$. Lako se može pokazati da je prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ netrivijalan: funkcija

$$\rho(x) := C \begin{cases} \exp(\frac{1}{|x|^2-1}), & |x| < 1 \\ \quad 0 \quad , & \text{inače} \end{cases}$$

je, primjerice, jedan njegov element. Također, konstantu C obično odabiremo tako da vrijedi $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$.

Napomena 0.2.3. *Uočimo da je prostor $\mathcal{D}$ zatvoren na produkte funkcija definirane po točkama.*

Ako nam je dana funkcija $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ promatramo (formalno) niz $u_k := u * \rho_k$ pri čemu je

$$\rho_k(x) := k^n \rho(kx), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$. Deriviranjem pod znakom integrala odmah uočavamo $u_k \in C^\infty$ (čim je konvolucija dobro definirana).
Sada smo spremni formulirati sljedeći vrlo važan teorem o aproksimaciji identiteta. Za dokaz vidjeti teorem 0.13 u [8].

Teorem 0.2.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Tada vrijedi $u_k \to u$ u $L^p(\Omega)$. Ako je $f \in L^\infty(\Omega)$ također i uniformno neprekidna na $V \subseteq \Omega$ onda vrijedi $u_k \to u$ uniformno na V.*

[2] Od engl. ili franc. *support*

Na $\mathcal{D}$ zadajemo topologiju koristeći činjenicu da vrijedi

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subseteq \Omega \\ K \text{ kompaktan}}} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

pri čemu je $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) : \mathrm{supp} f \subseteq K\}$. Može se pokazati da je svaki prostor $\mathcal{D}_K(\Omega)$ Fréchetov. Konačno, topologiju na $\mathcal{D}(\Omega)$ dobivamo kao strogi induktivni limes gornjih prostora. Za više detalja vidjeti, primjerice, točku 6.2. u [15]. Nadalje, topologija na $\mathcal{D}$ je inducirana familijom polunormi $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gdje je

$$\|\phi\|_k := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty, \quad \phi \in \mathcal{D} \tag{2}$$

(također točka 6.2. u [15]).

Radi relativno apstraktnog načina zadavanja topologije zgodno je imati nešto opipljiviji opis pojmova od najveće važnosti: nizovne konvergencije i neprekidnosti (linearnih) operatora na našem prostoru. Može se pokazati da vrijede sljedeća dva rezultata.

Teorem 0.2.5 (Nizovna konvergencija u $\mathcal{D}$)**.** *Neka je dan niz $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ te $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Tada vrijedi da $\phi_n \to \phi_0$ u topologiji prostora $\mathcal{D}(\Omega)$ ako i samo ako*

(i) postoji kompakt $K \subseteq \Omega$ takav da $\mathrm{supp}\phi_k \subseteq K$ za sve $k \in N_0$ i

(ii) $\partial^\alpha \phi_k \to \partial^\alpha \phi_0$ uniformno za svaki $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Za dokaz ovog rezultata vidjeti teorem 6.5. (e) u [15].
Slijedi i karakterizacija neprekidnosti linearnih operatora sa $\mathcal{D}(\Omega)$ u lokalno konveksni prostor (teorem 6.6. u [15]).

Teorem 0.2.6. *Neka je Y lokalno konveksan vektorski prostor, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren te $A : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ linearno preslikavanje. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(a) A je neprekidan.

(b) A je ograničen.

(c) Ako $\phi_i \to 0$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ onda $A\phi \to 0$ u Y.

Distribucije

Linearne funkcionale na $\mathcal{D}$ neprekidne u topologiji strogog induktivnog limesa nazivamo *distribucijama*.[3] Primijetimo da nam teorem 0.2.6 daje opis distribucija (na $\mathbb{R}$ promatramo konstantnu familiju (polu)normi od kojih je svaka jednaka aposlutnoj vrijednosti $|\cdot|$). Očekivano, prostor distribucija označavamo sa $\mathcal{D}'$. Također, obično za djelovanje distribucije T na funkciju ϕ koristimo oznaku $\langle T, \phi\rangle$ umjesto $T(\phi)$.

Distribucije tretiramo kao poopćenja klasičnog pojma funkcije. S druge strane, funkcije znamo zbrajati, množiti, derivirati i slično pa želimo te operacije uvesti i za distribucije — postupak je to koji se obično svodi na prikladno "prebacivanje" tih operacija na funkcije.

I zbrajanje distribucija je definirano po točkama; dakle, za $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ stavimo

$$\langle T_1 + T_2, \phi\rangle := \langle T_1, \phi\rangle + \langle T_2, \phi\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Deriviranje distribucija definiramo oponašajući slučaj distribucije T_f pridružene funkciji $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, a koju zadajemo sa $\langle T_f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\phi\, dx$. Parcijalnom integracijom dobivamo $\langle T_f', \phi\rangle = -\langle T_f, \phi'\rangle$.
Sada za distribuciju $T \in \mathcal{D}'$ i $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ stavimo

$$\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \phi\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Zgodno je imati i pojam nosača distribucije:

Definicija 0.2.7. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $\omega \subseteq \Omega$ otvoreni skup takav da je $\langle T, \phi\rangle = 0$ za sve $\phi \in \omega$. Tada kažemo da T ičšezava na ω. Komplement unije svih skupova na kojima T ičezava nazivamo nosačem distribucije T.*

Lako je provjeriti da skup distribucija s kompaktnim nosačem uz nasljeđene operacije zbrajanja i množenja skalarom ima strukturu vektorskog prostora. Osim toga, dobro je poznata sljedeća karakterizacija tog prostora (za dokaz vidjeti teorem 9.8. u [9]).

Teorem 0.2.8. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Prostor distribucija na Ω koje imaju kompaktan nosač se poklapa s dualom prostora $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ opremljenim Fréchetovom topologijom lokalno jednolike konvergencije.*

Sada smo spremni definirati integral distribucije. Ipak, to ne možemo načiniti za sve elemente $\mathcal{D}'$.

[3] Analogno, u slučaju da nas zanimaju funkcije s vrijednostima u $\mathbb{C}$ promatrat ćemo antilinearne funkcionale.

Definicija 0.2.9. *Označimo* $\mathbb{E} := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : T * \phi \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$. *Za* $u \in \mathbb{E}$ *sada definiramo njen integral* $\int u : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *sa:*

$$\langle \int u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi * u \, dx, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Definicija 0.2.10. *Kažemo da je distribucija* $u \in \mathbb{E}$ *integrabilna ako vrijedi* $u * \phi_n \to u * \phi$ *čim* $\phi_n \to \phi$ *u* $\mathcal{D}$.

Nije teško provjeriti da je, za u integrabilnu, i njen integral distribucija i da prostor svih integrabilnih distribucija (uz naslijeđene operacije) čini vektorski prostor (slijedi jednako kao lema 2.4. u [2]).

Napomena 0.2.11. *Jednostavno poopćenje propozicije* 2.7. *iz [2] nam pokazuje da su sve distribucije iz* $\mathcal{E}'$ *integrabilne. Uvažimo li teorem 0.2.8 zaključujemo da, čim distribucija ima kompaktan nosač, možemo govoriti o njenom integralu.*

Za detaljniju ekspoziciju distribucija vidjeti, primjerice, poglavlje 6 u [15].

0.3 Harmonijska analiza

Fourierova pretvorba

Osnovni pojam u harmonijskoj analizi svakako je onaj Fourierove pretvorbe. Promatramo li Fourierovu pretvorbu periodičkih funkcija (onih na (višedimenzionalnom) torusu) govorimo i o Fourierovom redu funkcije i pripadnim koeficijentima. Ipak, nas zanimaju funkcije definirane na čitavom $\mathbb{R}^n$.

Konstrukcija ove transformacije obično kreće s L^1 funkcijama, gdje za $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiramo

$$(\mathcal{F} f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

a koristi se i oznaka $\hat{f} := \mathcal{F} f$. Preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ nazivamo *Fourierovom pretvorbom*. Lako je provjeriti da je ta transformacija linearna:

Propozicija 0.3.1. *Za* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *te* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $\mathcal{F}(\lambda f + g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$.

Osim toga, direktna provjera korištenjem teorema o dominiranoj konvergenciji te Fubinijevog teorema lako daje:

Propozicija 0.3.2. *Neka je* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) $|(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ *za sve* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\mathcal{F}f$ *je uniformno neprekidna.*

(c) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$.

Napomena 0.3.3. *Primijetimo da nam (a) dio prethodne propozicije zapravo govori da je* $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ *ograničen linearan operator norme manje ili jednake* 1.

Odgovor na pitanje što je kodomena Fourierove pretvorbe sadržaj je sljedeće propozicije. Dokaz nije težak, a sastavni je dio bilo kojeg pregleda teorije Fourierove analize.

Propozicija 0.3.4 (Riemann-Lebesgueova lema)**.** *Neka je* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Tada vrijedi*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Prethodne tri propozicije nam stoga daju:

Korolar 0.3.5. *Fourierova pretvorba* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ *je linearan operator.*

Prirodno je pitati se postoji li inverz (na slici) Fourierove pretvorbe i znamo li ga zapisati. Odgovor na oba pitanja je potvrdan.

Teorem 0.3.6 (Formula inverzije)**.** *Neka je* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *takva da je i* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Tada vrijedi*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Često se koristi oznaka $\check{f} := \hat{\hat{f}}$.

Korištenjem Fubinijevog teorema lako dobivamo sljedeću korisnu formulu:

Propozicija 0.3.7. *Neka su* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*. Vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \hat{g}(\xi) \, d\xi.$$

Sada želimo proširiti operator $\mathcal{F}$ i na druge Lebesgueove prostore. Prvi korak na tom putu je sljedeći dobro poznati rezultat kojega nije teško dokazati (primjerice, teorem 8.29. u [9]).

Teorem 0.3.8 (Plancherelov teorem)**.** *Ako je* $f \in L^1 \cap L^2$*, tada je i* $\hat{f} \in L^2$*. Nadalje,* $\mathcal{F}|_{L^1 \cap L^2}$ *možemo na jedinstven način proširiti do unitarnog izomorfizma na* L^2.

Konačno, koristeći napomenu 0.3.3, prethodni rezultat i teorem o realnoj (multilinearnoj) interpolaciji (Riesz-Thorin; teorem 6.27. u [9]) dobivamo

Teorem 0.3.9 (Hausdorff-Youngova nejednakost)**.** *Neka je $p \in (1,2)$ te $1/p + 1/q = 1$. Tada je $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ ograničen linearan operator uz $\|\mathcal{F} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_L^p(\mathbb{R}^n)$.*[4]

Konačno, nije se teško uvjeriti da se sve "velike formule" poput propozicija 0.3.2 i 0.3.7 prenose i na L^p funkcije za $p \in (1,2]$.

Poissonova jezgra

Koncept Poissonove jezgre je sveprisutan ne samo u harmonijskoj analizi već i u drugim granama matematike kao što je teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Uzmimo da se nalazimo na $\mathbb{R}^n$; tada je Poissonova jezgra zadana kao

$$P(x) = c_n(1 + |x|^2)^{-(n+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pri čemu je

$$c_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}}, \tag{3}$$

a $|x|$ označava standardnu Euklidsku normu na $\mathbb{R}^n$, odnosno, $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ uz $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Prisjetimo se i da je "gama funkcija" Γ zadana sa

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Direktan račun pokazuje da vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\, dx = 1.$$

Maksimalne funkcije i lema o pokrivaču

Maksimalne funkcije su svakako jedan od najvažnijih pojmova u harmonijskoj analizi. Postoji mnogo varijanti istih, ali — govoreći slobodno — mogli bismo reći da će za danu funkciju njoj pridružena maksimalna funkcija sadržavati informaciju o tome kako se ponašaju "maksimumi sredina" te funkcije. Nerijetko je prikladnije umjesto same funkcije promatrati njenu maksimalnu funkciju koja će dati bolji uvid u neka njena svojstva;

[4]Za optimalnu konstantu vidjeti Babenko-Becknerovu nejednakost.

upravo je to tehnika kojom se dobiva, primjerice, i Claderón-Zygmundova dekompozicija o kojoj će biti više govora kasnije.
Slijedi pregled nekih osnovnih rezultata koje trebamo u sljedećim poglavljima.

Prepostavimo da je dana funkcija $F : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$ gdje je $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > 0\}$ gornji poluprostor. Za parametar $a > 0$, promatramo njenu netangencijalnu maksimalnu funkciju F^*_a danu sa

$$F^*_a(x) = \sup_{\substack{(y,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ \\ |y-x|<at}} |F(y,t)|.$$

Može se pokazati da za $a \geq b > 0$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} F^*_a(x)\, dx \leq c_n \left(\frac{a+b}{b}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} F^*_b(x)\, dx \tag{4}$$

gdje je c_n zadana sa (3). Dokaz se može pronaći u [18]: točka 2.5.1. u §2.

Za $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ stavimo

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

Preslikavanje $M : L^1_{loc} \to \mathbb{R}$ nazivamo Hardy-Littlewoodovim maksimalnom funkcijom i ono je jedno od najvažnijih takvih preslikavanja u harmonijskoj analizi. Lako se vidi da se radi o sublinearnoj funkciji, a vrijedi i sljedeće ocjene.

Teorem 0.3.10 (Hardy-Littlewoodov maksimalni teorem)**.** *Neka je* $1 < p \leq \infty$ *i* $n \in \mathbb{N}$. $M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *je ograničeni (sublinearni) operator:*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq c_p \|f\|_{L^p}.$$

Također, za $f \in L^1$ *vrijedi slaba ocjena*

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{c_d}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

Dakle, i $M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1_{weak}(\mathbb{R}^n)$ *je ograničen sublinearan operator.*

L^∞ ocjena se trivijalno dobiva, a za dokaz slabe se koristi Vitalijeva lema o pokrivaču (za potpuni tretman te leme i slabe ocjene vidjeti §3, točku 2 u [12]). Konačno, tvrdnja teorema slijedi primjenom Marcinkiewiczevog teorema o interpolaciji (teorem 6.28. u [9]).

Navodimo još poznatu Whitneyjevu lemu o pokrivaču dokaz koje se može pronaći u dodatku u [10].

Propozicija 0.3.11. *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ pravi otvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada postoji familija otvorenih kocki $\{Q_k\}$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\cup_k Q_k = \Omega$ *i* Q_k*-ovi imaju disjunktne interiore,*

(ii) $\sqrt{n} l(Q_k) \leq d(Q_k, \Omega^c) \leq 4\sqrt{n} l(Q_k)$,

(iii) ukoliko je $Q_k \cap Q_j \neq \emptyset$ *onda vrijedi*

$$\frac{1}{4} \leq \frac{l(Q_k)}{l(Q_j)} \leq 4.$$

Ovdje $l(Q)$ *označava duljinu stranice kocke* Q*, a* $d(Q, \Omega^c)$ *njenu udaljenost do* Ω^c.

Poglavlje 1

Schwartzove funkcije i temperirane distribucije

Elementi Hardyjevih prostora su specifične temperirane distribucije, dakle linearni funkcionali na prostoru Schwartzovih funkcija ($\mathcal{S}$) neprekidni u Fréchetovoj topologiji kojom je taj prostor opskrbljen.

1.1 Prostor $\mathcal{S}$ i njegova topologija

Pretpostavimo da se nalazimo u $\mathbb{R}^n$. Za funkciju $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i multi-indekse $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiramo polunorme

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right|.$$

Lako se provjeri da su definirana preslikavanja uistinu polunorme. Sada definiriamo prostor Schwartzovih funkcija sa

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_{\alpha,\beta} < +\infty, \ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

Dakle, prostor $\mathcal{S}$ sadrži glatke funkcije koje - zajedno sa svojim derivacijama - dovoljno brzo opadaju. Kako su polunorme homogene i subaditivne, očigledno je da se radi o *vektorskom prostoru*.

Nadalje, reći ćemo da niz $(f_n) \subseteq \mathcal{S})$ kovergira k $f \in \mathcal{S}$ ako kovergira u svakoj polunormi, odnosno, ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n) \ (n \geq n_0 \implies \|f_n - f\|_{\alpha,\beta} < \varepsilon).$$

Analogno se definira pojam Cauchyjevosti niza.

Uočimo sada da familija polunormi $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} \ : \ \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n\}$ *razlikuje točke*. Zaista, ako je $\|f\|_{\alpha,\beta} = 0$ u svakoj polunormi, onda posebno imamo $\|f\|_\infty = 0$ što daje $f \equiv 0$.

Prirodno je na $\mathcal{S}$ promatrati najslabiju topologiju u kojoj su sve polunorme $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ neprekidna preslikavanja. Uvažimo li prethodnu opservaciju i činjenicu da je familija polunormi koju promatramo prebrojiva zaključujemo da je (vidjeti, primjerice, 4. poglavlje, propoziciju 2.1., u [4]) $\mathcal{S}$ štoviše i *metrizabilan* te da se njegova topologija zapravo poklapa s topologijom induciranom tom metrikom (koju čak znamo i eksplicitno zapisati).

Konačno, uočimo da je $\mathcal{S}$ i *potpun* prostor. Doista, ako je $(f_n) \subseteq \mathcal{S}$ Cauchyjev niz onda, prema gornjim definicijama, imamo i da je uniformno (u normi $\|\cdot\|_\infty$) Cauchyjev pa pronalazimo funkciju f takvu da $f_n \to f$ uniformno. Sada nije teško pokazati da je ta funkcija u $\mathcal{S}$ te da $f_n \to f$ u svakoj polunormi $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$. Sve naše gornje primjedbe možemo koncizno rekapitulirati na sljedeći način.

Napomena 1.1.1. *Prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je Fréchetov prostor: potpun metrizabilan lokalno konveksan topološki vektorski prostor.*

Dodatno, pravilom za deriviranje produkta lako provjeravamo:

Napomena 1.1.2. *Prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je zatvoren na množenje funkcija pri čemu je ono definirano na uobičajen način — po točkama.*

1.2 Fourierova pretvorba na $\mathcal{S}$

Promatramo Fourierovu pretvorbu funkcija iz $\mathcal{S}$, a definiramo ju na potpuno isti način kao za L^1 funkcije.

Definicija 1.2.1. *Fourierova pretvorba na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ gdje je*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Može se pokazati da Fourierova pretvorba ima sljedeća algebarska svojstva. Za dokaz vidjeti, primjerice, propoziciju 2.1. u [16].

Propozicija 1.2.2. *Neka je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

(i) $f(x+h) \to \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot h}$ *za* $h \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $f(x)e^{-2\pi i x\cdot h} \to \hat{f}(\xi+h)$ *za* $h \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $f(\delta x) \to \delta^{-n}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$ *uz* $\delta > 0$.

(iv) $\partial^\alpha f(x) \to (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

(v) $(-2\pi i x)^\alpha f(x) \to \partial^\alpha \hat{f}(\xi)$.

(vi) $f(Rx) = \hat{f}(R\xi)$ *čim je* R *rotacija.*

Koristeći gornja svojstva, lako se pokaže da vrijedi.

Korolar 1.2.3. *Fourierova pretvorba na* $\mathcal{S}$ *je neprekidan linearan operator sa slikom sadržanom u* $\mathcal{S}$.

Dodatno, poznato je da vrijedi (teorem 2.4. u [16]) formula inverzije:

Propozicija 1.2.4. *Neka je* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Tada vrijedi*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Prethodna dva rezultata možemo pisati zajedno.

Korolar 1.2.5. *Fourierova pretvorba sa* $\mathcal{S}$ *u* $\mathcal{S}$ *je neprekidan i bijektivan linearan operator.*

1.3 Prostor $\mathcal{S}'$

Elemente topološkog duala prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nazivamo *temperiranim distribucijama*. Dakle, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ako vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = 0$$

čim $(\varphi_n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ takav da $\varphi_n \to \mathbf{0}$ u topologiji prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, odnosno, čim vrijedi

$$\|\varphi_n\|_{\alpha,\beta} \to 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Jasno je da su temperirane distribucije opet distribucije, odnosno da vrijedi $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ pri čemu je $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ topološki dual prostora $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ opskrbljenog topologijom strogog induktivnog limesa (vidjeti, primjerice, šesto poglavlje, sekcija 6.2. u [15]) pa i elemente prostora $\mathcal{S}'$ znamo derivirati, množiti glatkim funkcijama, konvoluirati sa Schwartzovim funkcijama i slično. Spomenute su operacije definirane na sljedeći način. Pri tome, od ovog mjesta nadalje, koristimo uobičajenu konvenciju da djelovanje funkcionala T na vektor ϕ označavamo sa $\langle T, \phi\rangle$ umjesto $T(\phi)$.

Definicija 1.3.1. *Neka je* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *te* $\alpha \in \mathbb{R}^n$. *Definiramo:*

(i) $\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\langle fT, \phi \rangle := \langle T, f\phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

(iii) $[\varphi * T](x) := \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle$. [1].

Na ovom smo mjestu dužni nekoliko napomena. Prvo, lako je dokazati da ćemo za T, f, φ te α kao u prethodnoj definiciji opet imati $fT, \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Nadalje, direktna provjera pokazuje i da je zadovoljeno pravilo produkta za deriviranje fT, a koje za derivacije prvog reda možemo zapisati kao

$$\partial_j(\phi T) = (\partial_j \phi) T + \phi(\partial_j T), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Za općeniti slučaj (∂^α) vidjeti poglavlje 6, odjeljak 6.15.u [15].
S druge strane, može se pokazati da vrijedi sljedeća propozicija (propozicija 9.10 u [9]).

Propozicija 1.3.2. *Neka je $T \in \mathcal{S}'$ i $\phi \in \mathcal{S}$. Tada je $\phi * T \in C^\infty$ sporo rastuća (najviše polinomijalno).*

Osim toga, oponašajući dokaz dijela (b) teorema 6.32. u [15] pri čemu koristimo činjenicu da je $\mathcal{D}$ gusto u $\mathcal{S}$ (vidjeti teorem 7.10. u [15]) lako dobivamo da vrijedi:

Propozicija 1.3.3. *Neka je $\phi \in \mathcal{S}$ takva da je $\int \phi \, dx = 1$ te $f \in \mathcal{S}'$. Tada vrijedi*

$$\lim_{j \to \infty} f * \phi_j = f \quad u \ \mathcal{S}'.$$

Također je konvoluiranje distribucije s test funkcijom i neprekidno; preciznije, vrijedi sljedeći rezultat (za dokaz vidjeti teorem 6.33. u [15]).

Teorem 1.3.4. *Neka je $f \in \mathcal{D}'$ i preslikavanje L zadano sa*

$$L\phi := f * \phi, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Tada je L neprekidno linearno preslikavanje sa $\mathcal{D}$ u C^∞.

Ipak, možemo proširiti značenje konvolucije tako da dozvolimo konvoluiranje s funkcijama $L^1(\mathbb{R}^n)$ i rezultat tretiramo kao temperiranu distribuciju. Moramo, međutim, postaviti neke restrikcije na temperirane distribucije koje promatramo; naime, zahtijevati ćemo da naša distribucija bude ograničena. Kažemo da je $T \in \mathcal{S}'$ *ograničena* ako je

$$\phi * T \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{za svaku} \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

Sada smo spremni definirati konvoluciju distribucije s L^1 funkcijom.

[1]Ovdje su korištene standardne oznake $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ te $\tau_y \varphi(x) := \varphi(x - y)$.

Definicija 1.3.5. *Neka je $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ograničena te $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definiramo distribuciju $T * h$ sa*

$$\langle T * h, \phi \rangle = \langle T * \tilde{\phi}, \tilde{h} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (T * \tilde{\phi})(x) \tilde{h}(x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Lako je uvjeriti se da je gornje preslikavanje zaista (temperirana) distribucija i to ograničena. Nadalje, jednakom se lakoćom provjeri da je zadovoljeno $T * (h_1 * h_2) = (T * h_1) * h_2$ za $h_i \in L^1$ i $T \in \mathcal{S}'$.

Konačno, za više detalja o distribucijama općenito, klasična je referenca [15] i to poglavlje 6 u istoj.

Poglavlje 2

Hardyjevi prostori

U ovom poglavlju dajemo definiciju Hardyjevih prostora, a najveći je dio pažnje usmjeren na proučavanje ekvivalentosti odnosa takozvane maksimalne i atomarne definicije tih prostora. Također, dan je i pregled nekih temeljnih svojstava Hardyjevih distribucija koji daju bolji uvid u prirodu Hardyjevih prostora. Brzo ćemo ustanoviti da se prostori H^p zapravo poklapaju sa Lebesgueovim prostorima, L^p, čim je $p > 1$; stoga je i pitanje pripada li temperirana distribucija f nekom H^p, u tom slučaju, tek problem njene norme. Ali, pitamo li se pripada li ta distribucija u H^p, za neko $0 < p \leq 1$, nije dovoljno razmotriti samo njenu "veličinu" već ona mora imati i određena svojstva poništavanja. Vidjeti ćemo da ta činjenica proizlazi iz odabira maksimalnog operatora u definiciji Hardyjevih prostora, a prijeći će u sferu jasnijeg razmatranjem njegovih atoma.

Svi će gore spomenuti koncepti dobiti precizno značenje i objašnjenje na sljedećim stranicama, a glavni izvor za ovaj dio teksta je [18]. U onome što slijedi, osim ako to nije drugačije navedeno, uvijek pretpostavljamo da se nalazimo na prostoru $\mathbb{R}^n$ opskrbljenom standardnom topologijom (Euklidske) norme i kratkoće radi pišemo samo $\mathcal{S}'$ umjesto $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ i slično. Pored toga, u imenovanju elemenata prostora $\mathcal{S}'$ izostavljamo atribut *temperirane* i nazivamo ih jednostavno distribucijama.

2.1 Maksimalna definicija prostora H^p

Prije nego dođemo do centralnog teorema ovog odjeljka i odgovarajuće maksimalne definicije Hardyjevih prostora uvodimo nekoliko tipova maksimalnih funkcija od interesa. Za podrobniju ekspoziciju maksimalnih funkcija vidjeti drugo poglavlje u [18].

Za $\Phi \in \mathcal{S}$ i distribuciju $f \in \mathcal{S}'$ definiramo *maksimalnu funkciju* M_Φ sa

$$M_\Phi f(x) := \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

gdje Φ_t označava dilataciju funkcije Φ danu sa

$$\Phi_t(x) := t^{-n}\Phi(x/t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Uočimo da u gornjoj maksimalnoj funkciji razmatramo usrednjenja distribucije f obzirom na samo jednu funkciju, naime na unaprijed odabrani Φ. Umjesto toga, možemo uzeti u obzir neku kolekciju funkcija iz $\mathcal{S}$. To nas vodi na definiciju takozvanih *velikih maksimalnih funkcija*.
Pretpostavimo, stoga, da je dana *konačna* familija polunormi $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}$ te sa $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ označimo kolekciju funkcija iz $\mathcal{S}$ kontroliranih obzirom na tu familiju polunormi; preciznije, definiramo

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} := \{\Phi \in \mathcal{S} : \|\Phi\|_{\alpha,\beta} \leq 1 \text{ za sve } \|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}\}.$$

Sada možemo staviti

$$\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) := \sup \Phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F} M_\Phi f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Posljednja u nizu varijanti maksimalnih funkcija neophodnih za naša razmatranja je *netangencijalna maksimalna funkcija* koju definiramo na sljedeći način. Neka je $f \in \mathcal{S}'$ *ograničena* [1] distribucija i P_t dilatirana Poissonova jezgra (vidjeti odjeljak 0.3) i $t > 0$. Promatramo Poissonov integral od f i stavimo

$$u(x,t) := (f * P_t)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Konačno, netangencijalna maksimalna funkcija sada je definirana sa

$$u^*(x) := \sup_{|x-y|<t} |u(y,t)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sada dolazimo do prvog od dva velika rezultata u ovom poglavlju, a koji je također i priprema za definiciju prostora H^p.

Teorem 2.1.1. *Neka je f distribucija i $0 < p \leq \infty$. Tada su sljedeća tri uvjeta ekvivalentna.*

(i) Postoji $\Phi \in \mathcal{S}$ sa svojstvom $\int \Phi\, dx \neq 0$ takva da $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. [2]

[1] U smislu definicije 1.1.
[2] Često ćemo u notaciji izostavljati domenu integracije (u ovom slučaju je to $\mathbb{R}^n$).

(ii) Postoji (konačna) kolekcija polunormi $\mathcal{F}$ takva da $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Distribucija f je ograničena i $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sada smo spremni dati definiciju Hardyjevih prostora.

Definicija 2.1.2. *Neka je $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ i $0 < p \leq \infty$. Kažemo da f pripada Hardyjevom prostoru $H^p(\mathbb{R}^n)$ ako je zadovoljen bilo koji od gornja tri uvjeta.*

Da bismo dokazali teorem moramo uvesti još neke maksimalne operatore čija će kontrola biti ključna u dokazu. Prvi od tih operatora je "netangencijalna" verzija M_Φ dana sa

$$M_\Phi^* f(x) = \sup_{|x-y|<t} |(f * \Phi_t)(y)| = \sup_{|y|<t} |(f * \Phi_t)(x-y)|.$$

Nadalje, promatramo "tangencijalnu" verziju tog istog operatora, naime

$$M_N^{**} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, t>0} |(f * \Phi_t)(x-y)| \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-N}. \tag{2.1}$$

Taj operator ovisi o parametru N kojeg ćemo kasnije prikladno odabrati.
Izravno iz definicija tih maksimalnih operatora je jasno da vrijedi sljedeći odnos

$$M_\Phi f \leq M_\Phi^* f \leq M_N^{**} f.$$

Kao što smo najavili, zanima nas i kontrola tih operatora - sadržaj je to sljedećih dviju lema.

Lema 2.1.3. *Ako je $M_\Phi^* f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $N > np$ onda je i $M_N^{**} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Štoviše, vrijedi ocjena*

$$\|M_N^{**} f\|_{L^p} \leq C_{N,p} \|M_\Phi^* f\|_{L^p}$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $F(x,t) = |(f * \Phi_t)(x)|^p$ te — kao u odjeljku 0.3 — promatramo njenu netangencijalnu maksimalnu funkciju na konusu otvora $a \geq 1$, odnosno, uzmemo $F_a^*(x) = \sup_{|y|<at} F(x-y,t)$. Slično, za otvor širine 1 stavimo $F_1^*(x) = F^*(x) = \sup_{|y|<t} F(x-y,t)$. Sada nam nejednakost (4) iz odjeljka 0.3 daje

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_a^*(x)\,dx \leq c_n(1+a)^n \int_{\mathbb{R}^n} F^*(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Imamo

$$\|M_\Phi^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|y|<t} |(f * \Phi_t(x-y)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} F^*(x)\,dx.$$

Primijetimo, nadalje, da za $y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ i parametar $N \geq 0$ vrijedi

$$|(f * \Phi_t)(x - y)|^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} F^*_{2^k}(x). \tag{2.3}$$

Zaista, za $k = 0$, odnosno u slučaju $|y| \in (0, t]$, očigledno vrijedi

$$\left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq 2^{-Np}$$

pa već nulti član u sumi s desne strane dominira lijevu stranu. Slično, za $2^{k-1}t < |y| \leq 2^k t$ dobivamo

$$\left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq 2^{(1-k)Np}$$

pa vidimo da k-ti član desne strane dominira lijevu.

Nadalje, lako se vidi da red s desne strane u (2.3) konvergira za gotovo svaki (u odnosu na Lebesgueovu mjeru) $x \in \mathbb{R}^n$. Naime, pretpostavili smo da je $M^*_\Phi f$ u $L^p(\mathbb{R}^n)$ te kao takva mora biti konačna osim možda na skupu mjere 0. Zato vrijedi ocjena

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} F^*_{2^k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} \sup_{|y|<2^k t} F(x - y, t) \leq M^*_\Phi(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} < \infty.$$

U poziciji smo stoga iskoristiti Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji pa dobivamo

$$|M^{**}_N f(x)|^p = \sup_{y \in \mathbb{R}^n, t>0} |(f * \Phi_t)(x - y)|^p \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^{-Np} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} F^*_{2^k}(x)$$

pa integriranjem i korištenjem opservacije (2.2) slijedi

$$\|M^{**}_N f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} c_n (1 + 2^k)^n \|M^*_\Phi f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Tvrdnja leme, dakle, vrijedi uz

$$C^p_{N,p} = c_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-k)Np} (1 + 2^k)^n$$

što je jamačno konačno čim je $N > n/p$. □

Sljedeća lema nam treba za prelazak s jedne aproksimacije identiteta na drugu.

Lema 2.1.4. *Neka su $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}$ uz $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\, dx = 1$. Tada postoji niz $(\eta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ takav da*

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{(k)} * \Phi_{2^{-k}}. \tag{2.4}$$

Pri tome $\eta^{(k)} \to 0$ brzo, u smislu da za svaku polunormu $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ i $M \geq 0$ imamo

$$\|\eta^{(k)}\|_{\alpha,\beta} = O\left(2^{-kM}\right) \quad \textit{kad } k \to \infty.$$

Dokaz. Uzmimo funkciju $\hat{\phi} \in C^\infty$ sa svojstvom $\hat{\phi}(\xi) = 1$ za $|\xi| \leq 1$ i $\hat{\phi}(\xi) = 0$ za $|\xi| \geq 2$. Takvu funkciju znademo konstruirati, recimo, koristeći poznate teoreme o aproksimaciji identiteta (vidjeti teorem 0.2.4).
Stavimo li $\hat{\psi}_0(\xi) := \hat{\phi}(\xi)$ te $\hat{\psi}_k(\xi) := \hat{\phi}(2^{-k}\xi) - \hat{\phi}(2^{1-k}\xi)$ za $k \geq 1$, imamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}_k(\xi) = 1.$$

Zaista, po konstrukciji funkcije ϕ vrijedi $1 = \lim_{k\to\infty} \hat{\phi}(2^{-k}\xi)$ pa gornji identitet lako slijedi.

Uočimo da vrijedi $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\, dx = 1 = \hat{\Phi}(0)$. Dodatno, pretpostavimo da je $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$ čim je $|\xi| \leq 2$. Očito vrijedi

$$\hat{\Psi}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \cdot \hat{\Phi}(2^{-k}\xi) \tag{2.5}$$

pa možemo staviti

$$\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \frac{\hat{\psi}_k(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \tag{2.6}$$

i time su jednoznačno određene funkcije $\eta^{(k)}$ (vidjeti korolar 1.2.3). Osim toga, iz (2.5) koristeći neprekidnost Fourierove pretvorbe i njena algebarska svojstva (propozicija 0.3.2) dobivamo (2.4).

Pozivajući se na isti teorem kao gore, a jer su funkcije Φ i Ψ u $\mathcal{S}$, imamo $\hat{\Phi}, \hat{\Psi} \in \mathcal{S}$. Nadalje, uočimo da je $\hat{\psi}_k$ nošena u $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$, a lako se vidi i da vrijedi $|\partial_\xi^\alpha \hat{\psi}_k(\xi)| \leq c_\alpha 2^{-k\alpha}$ pa zaključujemo da je i $\hat{\psi}_k \in \mathcal{S}$.
Nadalje, kako Fourierova pretvorba konvoluciju Schwartzovih funkcija prevodi u produkt, možemo pisati $\eta^{(k)} = \phi^{(k)} * \Psi$ pri čemu je $\hat{\varphi}^{(k)}(\xi) = \hat{\psi}_k(\xi)/\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)$. Koristeći maločas

navedenu činjenicu o nosaču funkcije $\hat{\psi}_k$ kao i pretpostavku da je $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$ čim $|\xi| \leq 2$ lako dobivamo $\hat{\phi}^{(k)} \in \mathcal{S}$ i $\phi^{(k)} \in \mathcal{S}$. Budući da je prostor $\mathcal{S}$ zatvoren na produkte funkcija dobivamo i $\eta^{(k)} \in \mathcal{S}$. Nadalje, iz već navedene ocjene $|\partial_\xi^\alpha \hat{\psi}_k(\xi)| \leq c_\alpha 2^{-k\alpha}$ možemo, koristeći defincije polunormi $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, izravnim računom dobiti da vrijedi $\|\hat{\eta}^{(k)}\|_{\alpha,\beta} = O(2^{-kM})$ pri čemu je M proizvoljan. Analogna tvrdnja za $\eta^{(k)}$ tada slijedi iz ograničenosti inverza Fourierove transformacije na $\mathcal{S}$.
Konačno, pretpostavku da je $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$ čim je $|\xi| \leq 2$ možemo uvesti bez smanjenja općenitosti. Naime, jasno je da uvijek možemo naći k_0 dovoljno velik da vrijedi $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq 1/2$ čim je $|\xi| \leq 2 \cdot 2^{-k_0}$ te u tom slučaju stavimo

$$\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = \frac{\hat{\psi}_{k-k_0}(\xi)}{\hat{\Phi}(2^{-k}\xi)} \hat{\Psi}(\xi) \quad \text{za } k \geq k_0$$

i $\hat{\eta}^{(k)}(\xi) = 0$ inače. □

Napomena 2.1.5. *Pretpostavimo da nam je dana (konačna) familija polunormi $\mathcal{F}_0$ i konstanta $M \geq 0$. Argumentirajući kao u gornjem dokazu vidimo da uvijek možemo pronaći konačni skup $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0$ polunormi takav da, čim je $\Psi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$, vrijedi $\|\eta^{(k)}\|_{\alpha,\beta} \leq c2^{-kM}$.*

Sada smo u poziciji dokazati teorem 2.1.1.

Dokaz teorema 2.1.1. $\boxed{(i) \implies (ii)}$ Dokažimo prvo da vrijedi

$$\|\mathcal{M}_\mathcal{F}\|_{L^p} \leq c\|M_\Phi^* f\|_{L^p}. \tag{2.7}$$

Za $\Psi \in \mathcal{S}$, pomoću leme 2.1.4, odnosno (2.4), prelazimo na drugu aproksimaciju identiteta:

$$(M_\Psi f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \Psi_t)(x)| \leq \sup_{t>0} \sum_{k=0}^\infty |f * \Phi_{2^k t} * \eta_t^{(k)}(x)|.$$

Štoviše, koristeći definiciju konvolucije, nejednakost trokuta za integrale te definiciju operatora M_N^{**} (2.1) dobivamo

$$\begin{aligned}(M_\Psi f)(x) &\leq \sup_{t>0} \sum_{k=0}^\infty \int |f * \Phi_{2^k t}(x-y)| \cdot t^{-n} |\eta^{(k)}(y/t)|\, dy \\ &\leq \sup_{t>0} t^{-n} \sum_{k=0}^\infty \int M_N^{**} f(x) \cdot \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k} t}\right)^N \cdot |\eta^{(k)}(y/t)|\, dy. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Uočimo, međutim, da zamjenom varijabli dobivamo ocjenu

$$t^{-n} \int \left(1 + \frac{|y|}{2^{-k} t}\right)^N \cdot |\eta_t^{(k)}(y/t)|\, dy = \int \left(1 + 2^k |y|\right)^N \cdot |\eta^{(k)}(y)|\, dy \leq c2^{-k}$$

čim je $\|\eta^{(k)}\|_{\alpha,\beta} \leq c2^{-k(N+1)}$ za neku familiju polunormi (zadnja je nejednakost gore jasna iz definicije polunormi $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$). Nadalje, prema napomeni 2.1.5 znamo da će to vrijediti za Ψ iz dobro odabrane familije $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Time smo odredili jednu familiju polunormi $\mathcal{F}$ te dobili

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\Psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} M_\Psi f(x) \leq c M_N^{**} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pa, stavimo li $N > n/p$, pomoću leme 2.1.3, slijedi 2.7. Vidimo, stoga, da je dovoljno dokazati

$$\|M_\Phi^* f\|_p \leq c\|M_\Phi f\|_p. \tag{2.9}$$

A posteriori ćemo se uvjeriti da $\|M_\Phi f\|_{L^p} < \infty$ jamči

$$\|M_\Phi^* f\|_{L^p} < \infty.$$

Za gore odabranu familiju $\mathcal{F}$ i $\lambda > 0$ definiramo

$$F = F_\lambda := \{x : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) \leq \lambda M_\Phi^* f(x)\}.$$

Primijetimo da za dovoljno veliki λ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi^* f)^p \, dx \leq 2 \int_F (M_\Phi^* f)^p \, dx. \tag{2.10}$$

Doista, po definiciji skupa F imamo

$$\int_{F^c} (M_\Phi^* f)^p \, dx \leq \lambda^{-p} \int_{F^c} (\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f)^p \, dx \leq c^p \lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi^* f)^p \, dx.$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz (2.7). Uzmemo li $\lambda \geq 2c^p$ dobivamo

$$\int_{F^c} (M_\Phi^* f)^p \, dx \leq 1/2 \int_{\mathbb{R}^n} (M_\Phi^* f)^p \, dx$$

pa (2.10) lako slijedi.
Nejednakost (2.9) dokazujemo tako da prvo za proizvoljan $q > 0$ pokažemo da je

$$M_\Phi^* f(x) \leq c[M(M_\Phi f)^q(x)]^{1/q}, \quad \text{za } x \in F \tag{2.11}$$

gdje je M standardni Hardy-Littlewoodov maksimalni operator. Zaista, iz maksimalnog teorema (za M) [3] i $p > q$ tada dobivamo

$$\begin{aligned}\int_F [M_\Phi^* f(x)]^p \, dx &\leq c \int_F [M(M_\Phi f)^q(x)]^{p/q} \, dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} [M(M_\Phi f)^q(x)]^{p/q} \, dx \\ &\leq \bar{c} \int_{\mathbb{R}^n} M_\Phi^p f(x) \, dx.\end{aligned}$$

[3] vidjeti teorem 0.3.10

Konačno, korištenjem (2.10) sada lako dobivamo (2.9).
Uvedimo oznake:

$$f(x,t) = (f * \Phi_t)(x) \quad \text{te} \quad f*(x) = M_\Phi^* f(x) = \sup_{|x-y|<t} |f(y,t)|.$$

Iz svojstava supremuma vidimo da za svaki x možemo iznaći (y,t) tako da $|x-y| < t$ i $|f(y,t)| \geq f^*(x)/2$. Za $r > 0$ dovoljno malen primjenom teorema srednje vrijednosti za $f(x,t) \in C^\infty$ na kugli oko y radijusa rt imamo

$$|f(x',t) - f(y,t)| \leq rt \sup_{|z-y|<rt} |\nabla_z f(z,t)|, \quad x' \in B(y,rt).$$

Očito vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial z_i} f(z,t) = \frac{1}{t} f * \frac{\partial}{\partial z_i} \Phi_t(z),$$

a, osim toga, nije teško vidjeti da postoji konstanta $c > 0$ takva da je $\|\partial/\partial z_i \Phi_t(x+h)\|_{\alpha,\beta} \leq c$ za $|h| \leq 1+r$, $i = 1,2,\dots,n$ te polunorme $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ iz $\mathcal{F}$. To slijedi iz kompaktnosti skupa funkcija oblika $\partial\Phi/\partial z_i(x+h)$ pri čemu je $|h| \leq 1+r$ te $i = 1,2,\dots,n$. Da bismo se u to uvjerili prvo primijetimo da je, kako je indeksa i konačno mnogo, tvrdnju dovoljno provjeriti za fiksni i i translate odgovrajuće funkcije, a to pak slijedi izravno iz definicije kompaktnosti korištenjem činjenice da h uzimamo iz kugle fiksnog radijusa — dakle, kompaktnog skupa. Stoga i funkcije $\partial/\partial z_i$ ulaze u $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ odabranu gore pa zaključujemo:

$$|f(x',t) - f(y,t)| \leq cr\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) \leq cr\lambda M_\Phi^* f(x), \quad \text{za } x \in F.$$

Drugim riječima, koristeći maločas uvedene oznake možemo pisati $|f(x',t) - f(y,t)| \leq cr\lambda f^*(x)$ pri čemu (kao što smo prethodno komentirali) uzimamo da vrijedi i $|f(y,t)| \geq f^*(x)/2$. Dakle, za r dovoljno malen da je $c\lambda r \leq 1/4$ imamo

$$|f(x',t)| \geq \frac{1}{4} f^*(x) = \frac{1}{4} M_\Phi^* f(x), \quad x' \in B(y,rt),$$

a što se lako dobije korištenjem nejednakosti $|f(x',t) - f(y,t)| \geq |f(y,t)| - |f(x',t)|$.
Konačno, sada sve podižemo na q-tu potenciju te izračunamo integral srednje vrijednosti po $B(x,(1+r)t)$ i koristimo bjelodanu činjenicu da je $\left(\frac{1+r}{r}\right)^n \geq 1$ pa dobijemo

$$|M_\Phi^* f(x)|^q \leq \left(\frac{1+r}{r}\right)^n \frac{4^q}{|B(x,(1+r)t)|} \int_{B(x,(1+r)t)} |f(x',t)|^q \, dx' \leq cM[(M_\Phi f)^q](x)$$

što je upravo (2.11).

Da bi dokaz tvrdnje (i) $\Longrightarrow$ (ii) bio potpun, dužni smo potvrditi da — pod pretpostavkom da je $\|M_\Phi f\|_{L^p} < \infty$ — vrijedi $\|M_\Phi^* f\|_{L^p} < \infty$. U tu svrhu, za parametre $L > 0$ te $0 < \varepsilon \leq 1$ promatramo modifikaciju funkcije M_Φ^*, naime

$$M_\Phi^{\varepsilon,L} f(x) := \sup_{|x-y|<t<\varepsilon^{-1}} |f * \Phi_t(y)| \cdot \frac{t^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|y|)^L}.$$

Kako $f * \Phi_t$ raste najviše polinomijalno brzo (vidjeti propoziciju 1.3.2), odmah možemo uočiti da za fiksno $p > 0$ zacijelo postoji dovoljno veliki L tako da $M_\Phi^{\varepsilon,L} \in L^p$. Nadalje, postupajući analogno dokazu (2.7) dobivamo

$$\| \sup_{\Psi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}} M_\Psi^{\varepsilon,L} f\|_{L^p} \leq c_L \|M_\Phi^{\varepsilon,L} f\|_{L^p} \tag{2.12}$$

pri čemu konstanta c_L ovisi eventualno o L, ali nipošto o ε. Zaista, u dokazu (2.7) ključna je bila nejednakost (2.8); ona će i u ovom slučaju slično glasiti, samo moramo uzeti u obzir da će se u drugom redu, umjesto $(1 + 2^k|y|/t)^N$, pojaviti faktor

$$\frac{t^L \cdot (\varepsilon + 2^{-k}t + \varepsilon|x-y|)^L}{(\varepsilon + t + \varepsilon|x|)^{-L} \cdot (2^{-k}t)^{-L}} \cdot \left(1 + \frac{2^k|y|}{t}\right)^N,$$

a koji je, lako se vidi, omeđen sa

$$c2^{kL} \cdot \left(1 + \frac{|y|}{t}\right)^L \cdot \left(1 + \frac{2^k|y|}{t}\right)^N$$

i postupak nastavljamo na istovjetan način. Ostaje pustiti $\varepsilon \to 0$ pa dobijemo

$$\|M_\Phi^* f\|_{L^p} \leq \overline{c}_L \|M_\Phi f\|_{L^p}$$

što znači da je i $M_\Phi^* f \in L^p$ čim je $M_\Phi f \in L^p$.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (iii)}$ Prvo uočimo da, zbog pretpostavke (ii), za proizvoljnu funkciju $\Phi \in \mathcal{S}$ vrijedi $M_\Phi^* f \in L^p$. Doista, za $\Phi \in \mathcal{S}$, zbog konačnosti familije $\mathcal{F}$, dobro je definirana funkcija

$$\phi := \frac{\Phi}{\max\{\|\Phi\|_{\alpha,\beta} : \|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}\}}.$$

Osim toga je i $\phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ pa pretpostavka (ii) daje $M_\phi f \in L^p$. Sada, po maločas pokazanom, dobivamo tvrdnju za funkciju ϕ; međutim, kako se ona od početne funkcije razlikuje samo za multiplikativnu konstantu, tvrdnja je zadovoljena i za Φ.

Nadalje, jer je $|f * \Phi_t(x)|^p \leq (M^*_\Phi f(y))^p$ i zbog činjenice da za fiksni $t > 0$ i x volumen kugle $|x - y| \leq t$ možemo izraziti u obliku ct^n (za određeni $c > 0$) imamo

$$|f * \Phi_t(x)|^p \leq \min_{|x-y|\leq t} (M^*_\Phi f(y))^p \leq ct^{-n} \int_{|x-y|\leq t} (M^*_\Phi f(y))^p \, dy \leq ct^{-n} \|M^*_\Phi f\|^p_{L^p}.$$

Dakle je $\|f * \Phi\|_\infty = \|f * \Phi_1\|_\infty < \infty$ pa zaključujemo da je f ograničena.
Neka je $\{\Phi^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ograničena familija funkcija iz $\mathcal{S}$ te $P(x) = c_n(1 + |x|^2)^{-(n+1)/2}$ Poissonova jezgra (vidjeti odjeljak 0.3). Sada tvrdimo da je

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \Phi^{(k)}_{2^k}(x). \tag{2.13}$$

Jer je familija koju promatramo ograničena znamo da je $M^*_{\Phi^{(k)}} \leq c\mathcal{M}_\mathcal{F}$ za neku konstantu c neovisnu o k.
Nadalje, za $a > 0$ je

$$\left(M^*_{\Phi^{(k)}_a} f\right)(x) = \sup_{a|x-y|<t} |(f * \Phi_t)(y)|$$

pa, ukoliko je $a \geq 1$, vrijedi i $(M^*_{\Phi^{(k)}_a} f(x) \leq M^*_\Phi f(x)$. Konačno, prisjetimo se definicije u^* i, uz (2.13), dobivamo

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \sup_{|x-y|\leq t} |(f * P_t)(y)| \leq \sup_{|x-y|\leq t} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |(f * \Phi^{(k)}_{2^k t})(y)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{|x-y|\leq t} |(f * \Phi^{(k)}_{2^k t})(y)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (M^*_{\Phi^{(k)}} f)(x) \leq c(\mathcal{M}_\mathcal{F} f)(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty. \end{aligned}$$

To znači da je $(u^*)^p \leq c(\mathcal{M}_\mathcal{F} f)^p$; stoga je i $u^* \in L^p$. Prema tome, ostaje još dokazati (2.13).

To postižemo oponašajući tehniku dokaza leme 2.1.4. Odabiremo, dakle, neku $\phi \in C^\infty_c$ takvu da $\phi(x) = 1$ na $|x| \leq 1/2$ te $\phi(x) = 0$ za $|x| \geq 1$ pa imamo

$$P(x) = \phi(x)P(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi(2^{-k-1}x) - \phi(2^{-k}x)]P(x).$$

Izraz (2.13) je tada zadovoljen uz $\Phi^{(0)}(x) = \phi(x)P(x)$ i

$$\Phi^{(k)}(x) = c_n[\phi(x/2) - \phi(x)](2^{-2k} + |x|^2)^{-(n+1)/2}, \quad k \geq 1.$$

Osim toga, činjenica da je ovako definirana familija $\{\Phi^{(k)}\}$ ograničena se lako dobiva primijetimo li da je $\phi(x/2) - \phi(x)$ nošena u $1/2 \leq |x| \leq 2$.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Naposljetku, pretpostavimo (iii). Uzmimo sada u ∞ brzo opadajuću funkciju η zadanu na $(1, \infty)$ koja osim toga zadovoljava i sljedeće momentne uvjete:

$$\int_1^\infty \eta(s)\, ds = 1 \quad \text{i} \quad \int_1^\infty s^k \eta(s)\, ds = 0, k = 1, 2, \dots. \tag{2.14}$$

Doista, takvu funkciju znademo i eksplicitno zapisati; primjer je

$$\eta(s) := \frac{1}{\pi s} \mathrm{Im}\{\exp[1 - w(s-1)^{1/4}]\}$$

gdje je $w = e^{-i\pi/4}$ (vidjeti točku 3.2.2 u [17]).
Sada za funkciju

$$\Phi(x) := \int_1^\infty \eta(s) P_s(x)\, ds \tag{2.15}$$

želimo dokazati da je takva za koju je (i) zadovoljeno.

Korištenjem binomnog teorema (odnosno, njegovog poopćenja):

$$(1+t^2)^{-(n+1)/2} = \sum_{k<R} a_k t^k + O(t^R), \quad 0 \leq t < \infty$$

pri čemu su a_k odgovarajući binomni koeficijenti, možemo zapisati

$$P_s(x) = \frac{c_n s}{(s^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}} = \sum_{k<R} c_n a_k s |x|^{1-n} \left(\frac{s}{|x|}\right)^k + O(s^{R+1}|x|^{-n-1-R}).$$

Vraćanjem u (2.15) i korištenjem momentnih uvjeta (2.14) vidimo da je Φ brzo opadajuća. Analogno, deriviranjem (po x) pod znakom integrala, sličnim rezoniranjem to isto zaključujemo i za proizvoljnu derivaciju funkcije Φ. Dobili smo $\Phi \in \mathcal{S}$.
Također, kako je $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\, dx = 1$ (odjeljak 0.3) to korištenjem Fubinijevog teorema zamjenom varijabli vidimo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, dx = \int_1^\infty \eta(s)\, ds \cdot \int_{\mathbb{R}^n} P(x)\, dx = \int_1^\infty \eta(s)\, ds = 1.$$

Sličan račun pokazuje i

$$(f * \Phi_t)(x) = \int_1^\infty u(x, st)\eta(s)\, ds$$

pri čemu je $u(x,t)$ definirano kao na početku ovog poglavlja. Ali sada vrijedi

$$M_\Phi f(x) \le \sup_{t>0} |u(x,t)| \int_1^\infty |\eta(s)|\, ds = c \sup_{t>0} |u(x,t)| \le c u^*(x)$$

pa zaključujemo da je $M_\Phi f \in L^p$. Time je dokaz teorema potpun. □

Revidiramo li postupak u dokazu tvrdnje (i) $\Longrightarrow$ (ii) u prethodnom teoremu, naime pozivanje na napomenu 2.1.5, vidimo da smo familiju $\mathcal{F}$ mogli odabrati neovisno o f. Preciznije, za parametar N dovoljno velik ($N > n/p$) stavimo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N := \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : |\alpha|, |\beta| \le N\}$$

pa dobivamo da su veličine

$$\|M_\Phi f\|_{L^p}, \quad \|\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f\|_{L^p} \quad \text{i} \quad \|u^*\|_{L^p} \tag{2.16}$$

usporedive među sobom i bilo koju od njih možemo tretirati kao "normu" na $H^p(\mathbb{R}^n)$. Naravno, radi se doista o normi samo u slučaju $p \ge 1$. Ipak, za $p \le 1$ možemo gledati p-tu potenciju jedne od tih veličina i ona će onda definirati metriku na H^p; time je, dakle, definirana topologija na Hardyjevim prostorima.

Korisno je uočiti i sljedeće činjenice koje navodimo u obliku formalne napomene.

Napomena 2.1.6. *(a) Neka je $f \in H^p$ i $\Phi \in \mathcal{S}$. Tvrdimo da se tada funkcija $f * \Phi \in C^\infty$ nalazi u svakom L^r za $r \ge p$. To je očigledno točno za $r = p$ jer vrijedi $|(f * \Phi)(x)| \le (M_\Phi^* f)(x)$, a (kao što smo imali i na više mjesta u prethodnom dokazu) znamo da $\mathcal{M}_\mathcal{F} f \in L^p$ jamči $M_\Phi^* f \in L^p$. Osim toga, po definiciji maksimalnog operatora M_Φ^*, za svaki y takav da je $|y - x| \le 1$ imamo*

$$|(f * \Phi)(x)| \le (M_\Phi^* f)(y)$$

što, pak, daje

$$|(f * \Phi)(x)|^p \le \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} [(M_\Phi^* f)(y)]^p\, dy \le c\|f\|_{H^p}^p.$$

gdje je B_x jedinična kugla oko x. Zaključujemo da se $f * \Phi$ također nalazi i u L^∞, odnosno $f * \Phi \in L^p \cap L^\infty$ pa smo gotovi po teoremu o interpolaciji normi (vidjeti odjeljak 1 u IV. poglavlju u [12]).

(b) Na isti način na koji smo u prethodnom dokazu pokazali da je svaka distribucija iz H^p ujedno i ograničena možemo pokazati da je konvergencija u H^p normi jača od

one u smislu distribucija. Naime, neka je (f_n) *niz u* H^p *takav da* $f_n \to f$ *u* H^p*. Kako za* $x \in \mathbb{R}^n$ *i* $\Phi \in \mathcal{S}$ *vrijedi* $\Phi = \tau_{-x}\widetilde{\left(\tau_x\widetilde{\Phi}\right)}$*, možemo pisati*

$$\langle f_n - f, \Phi\rangle = [(f_n - f) * (\tau_x\widetilde{\Phi})](-x)$$

pa nastavljamo potpuno analogno. Ovdje smo koristili oznake iz prvog poglavlja.

Uzmimo sada neko $1 < p \le \infty$. Sada ćemo pokazati da prostor H^p možemo poistovjetiti sa L^p. Uzmimo prvo $f \in L^p$. Znamo da je $M_\Phi f(x) \le cMf(x)$ (gdje je M, kao i prije, standardni Hardy-Littlewoodov maksimalni operator); vidjeti točku 2.1. u [18]. Međutim, po maksimalnom teoremu za M (teorem 0.3.10) znamo da je $Mf \in L^p$ pa dobivamo $f \in H^p$. S druge strane, neka je $\Phi \in \mathcal{S}$ takva da je $\int \Phi = 1$ i $M_\Phi f \in L^p$. To pak znači da je $\sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)| < \infty$ za gotovo svaki x jer, budući da je u L^p, za $M_\Phi f$ mora vrijediti da je konačna osim možda na skupu mjere 0. Dobivamo da je niz $(f * \Phi_{1/n})_n$ ograničen u L^p. Kako je, nadalje, L^p dual prostora $L^{p'}$ (gdje je $1/p' + 1/p = 1$) to, po Banach-Alaoglu teoremu (teorem 0.1.5), znamo da je i slabo kompaktan. Stoga možemo pronaći $f_0 \in L^p$ i podniz (kojeg isto označavamo) takav da $f * \Phi_{1/n} \to f_0$ slabo. Međutim, po rezultatu o apsroksimaciji identiteta (propozicija 1.3.3) znamo da $f * \Phi_{1/n} \to f$ u smislu distribucija, a kako se ta dva limesa ne mogu razlikovati, vrijedi $f = f_0$; dakle je $f \in L^p$.

Što je sa rubnim slučajem $p = 1$? Na isti način kao i maločas dobivamo $H^1 \subset L^1$. Međutim, može se pokazati da ne vrijedi jednakost; vidjeti točku 1.2.1 u [18].

S obzirom na prethodnu raspravu, u ostatku ovog poglavlja promatramo H^p samo za eksponente $0 < p \le 1$.

2.2 Atomarna dekompozicija

Ovaj odjeljak predstavlja alternativni (ali ekvivalentan) pogled na elemente Hardyjevih prostora, a ponudit će daljnji uvid u njihovu prirodu. Ideja je "razbiti" prostor H^p na dijelove — jednostavnije elemente koje je lakše promatrati i koji neposredno otkrivaju određena svojstva, a pomoću kojih onda možemo prikazati bilo koji element prostora H^p. Te gradivne blokove nazivamo *atomima*, a kako bismo taj pojam učinili opipljivijim dajemo definiciju H^1 atoma.
Neka je B kugla u $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je funkcija a atom za $H^1(\mathbb{R}^n)$ ako vrijedi:

(i) a je nošena u B,

(ii) $|a| \le |B|^{-1}$ gotovo svuda i

(iii) $\int a = 0$.

Nije se teško uvjeriti (a to ćemo napraviti kasnije) da je $a \in H^1$. U svojstvu (iii) se sada ogleda sljedeća (u uvodu ovog poglavlja već nagoviještena) činjenica: nalazi li se distribucija f u prostoru H^1 nije samo pitanje njene veličine ($M_\Phi f \in L^1$) već mora imati i stanovita svojstva poništavanja koja osiguravaju iščezavanje integrala.

U slučaju $0 < p \leq 1$ definicija atoma je slična, a vrijedi i prethodna opaska u analognoj formulaciji.

Definicija 2.2.1. *Neka je $0 < p \leq 1$. Za funkciju a kažemo da je atom prostora $H^p(\mathbb{R}^n)$ ako*

(i) postoji kugla $B \subseteq \mathbb{R}^n$ takva da je a nošena u B,

(ii) $|a| \leq |B|^{-1/p}$ gotovo svuda i

(iii) $\int x^\alpha a(x)\, dx = 0$ za sve multiindekse α sa svojstvom $|\alpha| \leq n(p^{-1} - 1)$.

Prije no što dođemo do temeljnog rezultata ovog dijela, uvodimo novi maksimalni operator. Naime, za čvrstu $\Phi \in C^\infty$ nošenu u jediničnoj kugli oko 0 te za koju vrijedi $\int \Phi \neq 0$ stavimo

$$\mathcal{M}_0 f(x) := M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |f * \Phi_t(x)|.$$

Također, za H^p normu uzimamo

$$\|f\|_{H^p} := \|\mathcal{M}_0 f\|_{L^p}.$$

Dakako, mogli smo se odlučiti i za neku drugu od prethodno razmatranih veličina iz (2.16). Osim toga, kroz ostatak ovog dijela poglavlja držimo fiksnom neku konačnu familiju polunormi $\mathcal{F}$ i koristimo pokratu $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\mathcal{F}$.
Dodajmo samo još da uvedena notacija služi tek kao podsjetnik da naša razmatranja više nisu ovisna o samoj distribuciji f i familiji $\mathcal{F}$ (vidjeti također i raspravu na kraju prethodnog odjeljka).

Cilj je ovdje dokazati da će se distribucija f nalaziti u H^p ako i samo ako ju možemo prikazati u obliku

$$f = \sum_k \lambda_k a_k$$

gdje su a_k atomi promatranog Hardyjevog prostora, a (λ_k) prikladan niz kompleksnih brojeva. Preciznu tvrdnju iskazat ćemo nešto kasnije, a za njen dokaz preliminarno navodimo jednu varijantu Claderón- Zygmundove dekompozicije.

Propozicija 2.2.2. *Neka je f lokalno integrabilna funkcija takva da je $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ za $0 < p \leq 1$ i $\alpha > 0$. Tada postoji dekompozicija $f = g + b$, $b = \sum b_k$ i familija kocki $\{Q_k^*\}$ (u $\mathbb{R}^n$) tako da*

(i) funkcija g je ograničena i $g(x) \leq c\alpha$ za gotovo svaki x,

(ii) za svaki k je funkcija b_k je nošena u Q_k^*, a vrijedi i

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_0 b_k)^p \, dx \leq c \int_{Q_k^*} (\mathcal{M}f)^p \, dx$$

te $\int b_k = 0$,

(iii) familija $\{Q_k^*\}$ ima svojstvo ograničenog presjeka (drugim riječima, svaka točka iz $\cup Q_k^*$ se nalazi u najviše konačno mnogo kocki Q_k^*) i vrijedi

$$\bigcup_k Q_k^* = \{x : \mathcal{M}f(x) > \alpha\}.$$

Dokaz ove tvrdnje je netrivijalan, a budući da nije neposredno vezan uz materiju Hardyjevih prostora, na ovom ga mjestu izostavljamo. Zainteresirani čitatelj detaljnu demonstraciju može pronaći u [18] (vidjeti točku 2.1. u §2). Bitno je imati na umu da nam Claderón-Zygmundova dekompozicija daje način da funkciju f kao gore rastavimo na dva dijela: jedan proizvoljno malen i jedan kojem znademo kontrolirati veličinu (u smislu H^p norme). Štoviše, iz dokaza je jasno da vrijedi sljedeći korolar (vidjeti korolar 2.1.5 u [18]).

Korolar 2.2.3. *Za bilo koji prirodni broj d elemente dekompozicije iz prethodne propozicije možemo presložiti tako da funkcije b_k zadovoljavaju*

$$\int b_k q \, dx = 0$$

za sve polinome q stupnja $\leq d$.

Vratimo se sada atomima prostora H^p za neko $0 < p \leq 1$. Uočimo odmah da svojstva (i) i (ii) iz definicije 2.2.1 jamče da je $\int |a(x)|^p \, dx \leq 1$. Nadalje, sada koristimo svojstvo (iii) za dokazivanje za nas krucijalne nejednakosti (koja distribuciju promovira u redove Hardyjevih distribucija):

$$\int (\mathcal{M}_0 a(x))^p \, dx \leq c \tag{2.17}$$

gdje je $\mathcal{M}_0$ generirana C^∞ funkcijom Φ nošenom u jediničnoj kugli oko ishodišta i za koju vrijedi $\int \Phi \neq 0$. Drugim riječima, promatramo $\mathcal{M}_0 f(x) = \sup_{t>0} |f * \Phi_t(x)|$. Uzmimo, dalje, atom a prostora H^p nošen u kugli B s centrom $\bar{x}$. Neka je B^* također kugla s centrom $\bar{x}$, ali dvostruko većeg radijusa od B. Gornji integral sada razdvajamo na

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{M}_0 a(x))^p\,dx = \int_{B^*} (\mathcal{M}_0 a(x))^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^*} (\mathcal{M}_0 a(x))^p\,dx.$$

Vrlo jednostavan račun pokazuje da za $x \in B^*$ imamo $\mathcal{M}_0 a(x) \leq c|B|^{-1/p}$. Ostaje razmotriti što se događa za $x \notin B^*$. Uzmimo da je d najmanji prirodni broj takav da $d > n(p^{-1} - 1)$ te sa $q_{x,t}$ označimo Taylorov polinom stupnja d funkcije $y \mapsto \Phi_t(x - y)$ oko $\bar{x}$. Korištenjem momentnih uvjeta (iii) dobivamo

$$\begin{aligned}(a * \Phi_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} a(y)\Phi_t(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} a(y)[\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)]\,dy \\ &= \int_B a(y)[\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)]\,dy.\end{aligned}$$

Prisjetimo se sada uobičajenih ocjena ostatka u Taylorovom razvoju, naime

$$|\Phi_t(x-y) - q_{x,t}(y)| \leq c\frac{|y-\bar{x}|^{d+1}}{t^{n+d+1}}.$$

Međutim je $y \in B$, $x \notin B^*$, a Φ je nošena u $B(0,1)$ pa možemo uzeti $t \geq c|x - \bar{x}|$. S druge strane, označimo li sa r radijus kugle B, vrijedi ocjena $|y - \bar{x}| < r$ pa dobivamo

$$\mathcal{M}_0 a(x) \leq c\left(\frac{r}{|x-\bar{x}|}\right)^{n+d+1} \cdot |B|^{-1/p}. \tag{2.18}$$

Zbog našeg odabira broja d vrijedi $(n+d+1)p > n$ pa dobivamo (2.17). Time smo pokazali da su atomi uistinu i elementi prostora H^p.
Uzmimo sada neku kolekciju $\{a_k\}$ H^p atoma i niz kompleksnih brojeva (λ_k) konačne l^p norme, odnosno, takav da vrijedi $\sum_k |\lambda_k|^p < \infty$. Tvrdimo da tada i red

$$f = \sum_k \lambda_k a_k \tag{2.19}$$

konvergira u smislu distribucija i vrijedi $\|f\|_{H^p} \leq c(\sum_k |\lambda_k|^p)^{1/p}$, to jest, f se nalazi u H^p. Da bismo se u to uvjerili uočimo da, u slučaju da je gornji red konvergentan (u $\mathcal{D}'$) to zbog neprekidnosti konvoluiranja distribucije s test funkcijama (vidi teorem 1.3.4) lako dobivamo

$$\mathcal{M}_0 f = \mathcal{M}_0\left(\sum_k \lambda_k a_k\right) \leq \sum_k |\lambda_k| \mathcal{M}_0 a_k.$$

S druge strane, jer je $p \leq 1$, vrijedi

$$\left(\sum_k |\lambda_k| \mathcal{M}_0 a_k\right)^p \leq \sum_k |\lambda_k|^p (\mathcal{M}_0 a_k)^p.$$

Kombiniranjem prethodnih dviju nejednakosti te integriranjem slijedi

$$\int [\mathcal{M}_0 f(x)]^p \, dx \leq \sum_k |\lambda_k|^p \int [\mathcal{M}_0 a_k(x)]^p \, dx \leq \sum_k |\lambda_k|^p$$

što dokazuje konvergenciju (2.19) u H^p normi. Prisjetimo li se napomene 2.1.6 (ii) zaključujemo da taj red, štoviše, konvergira i u smislu distribucija.

Napomena 2.2.4. *Uočimo da smo prethodnim postupkom dokazali da je potprostor (a lako je provjeriti da on to doista i jest) konačnih linearnih kombinacija atoma H^p gust u H^p — to slijedi zbog konvergencije reda (2.19) u H^p normi. Štoviše, uzmemo li u obzir definiciju H^p atoma 2.2.1, možemo primijetiti i da je tu doista riječ o prostoru ograničenih funkcija s kompaktnim nosačem koje zadovoljavaju momentno svojstvo (iii) iz te definicije.*

Naposljetku dolazimo i do glavnog rezultata u ovom odjeljku, a radi se o stanovitom obratu prethodne konkluzije.

Teorem 2.2.5. *Neka je $p \leq 1$. Tada svaki $f \in H^p$ možemo prikazati kao sumu određenih H^p atoma, kao u (2.19). Štoviše, taj će red konvergirati u H^p normi, a vrijedi i*

$$\sum_k |\lambda_k|^p \leq c\|f\|_{H^p}^p.$$

Prije nego što ponudimo dokaz ovog teorema navodimo jedan rezultat o gustoći u H^p te određene nove pojmove i odnose, a koji se pojavljuju u dokazu propozicije 2.2.2.

Lema 2.2.6. *Neka je $0 < p \leq 1$. Prostor lokalno integrabilnih funkcija je gust u H^p.*

Za lokalno integrabilnu funkciju f želimo dobiti familiju $\{Q_k^*\}$ iz Claderón-Zygmundove dekompozicije. To radimo tako da za odabrani $\alpha > 0$ prvo uvedemo skup $O = \{x : \mathcal{M}f > \alpha\}$[4] i nađemo njegovu Whitneyjevu dekompoziciju $\{Q_k\}$ (vidjeti propoziciju 0.3.11). Za $b > 1$ promatramo "napuhane" kocke bQ_k. Štoviše, uzmemo li b dovoljno malen, zbog svojstava familije $\{Q_k\}$, zaključujemo da možemo postići $\cup Q_k^* = O$ te da familija $\{Q_k^*\}$ ima svojstvo ograničenog presjeka.

[4]Ovdje, kao i u ostatku, uzimamo da $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ za prigodno odabranu konačnu familiju; vidjeti i uvod u ovaj odjeljak.

Sada nastavljamo našu konstrukciju. Neka je $\zeta \in C^\infty$ pozitivna funkcija koja na stranici kocke oko ishodišta brida duljine 1 postiže vrijednost 1, a iščezava izvan koncentrične kocke sa stranicama duljine $a > 1$ (uzimamo da je $b > a$). Nadalje, postavimo $\zeta_k(x) := \zeta([x - x_k]/l_k)$ gdje je x_k centar kocke Q_k, a l_k duljina njene stranice. Uzmemo li sada

$$\eta_k := \zeta_k / (\sum_j \zeta_j)$$

lako provjeravamo da je $\chi_O = \sum_k \eta_k$ te da je svaka funkcija η_k nošena u $\tilde{Q}_k := aQ_k$. Konačno, elemente b_k dobivamo tako da stavimo $b_k = (f - c_k)\eta_k$ i konstantu c_k podesimo tako da b_k zadovoljava momentni uvjet $\int b_k = 0$; to jest, odabiremo $c_k = \int f\eta_k / \int \eta_k$.

S ovim osnovnim elementima Claderón-Zygmundove dekompozicije na umu, spremni smo dokazati lemu 2.2.6.

Dokaz leme 2.2.6. Ideja je za $f \in H^p$ pronaći odgovarajuću dekompoziciju kao u propoziciji 2.2.2: $f = g + b$. Tada bi, korištenjem tvrdnji (ii) i (iii) iz te propozicije, imali

$$\|b\|_{H^p}^p = \|\mathcal{M}_0 b\|_{L^p}^p \le \sum_k \|\mathcal{M}_0 b_k\|_{L^p}^p \le c \int_{\{\mathcal{M}f\} > \alpha} (\mathcal{M}f)^p \, dx$$

što bi davalo $\|b\|_{H^p} \to 0$ kada $\alpha \to 0$ pri čemu je α parametar dekompozicije. Osim toga, tvrdnja (i) bi davala da je g lokalno integrabilna pa bi upravo to bio traženi aproksimirajući niz. Nažalost, problem je u tome što u ovom trenutku nije jasno postoji li zaista takva dekompozicija za proizvoljnu distribuciju iz H^p koja zadovoljava navedena svojstva (i)-(iii).

Pokušat ćemo iznaći sličnu dekompoziciju, ali sa nešto općenitijim svojstvima. Za početak, uočimo da b_k možemo definirati kao i u maločas predstavljenoj konstrukciji: $b_k = (f - c_k)\eta_k$; razlika je što su sada b_k distribucije s kompaktnim nosačem. Svakako je, dakle, smisleno promatrati njen integral (vidjeti napomenu 0.2.11), a slično kao i prije dobivamo $\int b_k = 0$. Nadalje, može se pokazati da za kocke Q_k^* kao gore vrijede nejednakosti

$$\mathcal{M}_0 b_k(x) \le c\mathcal{M}f(x), \quad x \in Q_k^* \tag{2.20}$$

te

$$\mathcal{M}_0 b_k(x) \le c\alpha \frac{l_k^{n+1}}{|x - x_k|^{n+1}}, \quad x \notin Q_k^* \tag{2.21}$$

pri čemu l_k označava duljinu brida kocke Q_k. Te se nejednakosti dobivaju analognim postupkom kao i ocjene (24) i (25) u točki 2.1.3 iz dokaza propozicije 2.1 u [18].
Korištenjem tih dviju nejednakosti direktno dobivamo da vrijedi (ii) kao u propoziciji 2.2.2

što nam je, pak, dovoljno za ostvarivanje konvergencije reda $\sum_k b_k$ u H^p normi pa, posljedično, i u smislu distribucija. Stavimo $b = \sum_k b_k$ pa — nakon svega rečenog — zaključujemo da je distribucija $g = f - b$ dobro definirana.
Preostaje nam još zaključak (i) iz propozicije 2.2.2 zamijeniti s nejednakošću koju znamo dokazati i bez pretpostavke da je f lokalno integrabilna, a koja će istovremeno biti dostatna da dobijemo lokalnu integrabilnost od g. Na ovom mjestu još jednom svjedočimo praktičnoj vrijednosti maksimalnih operatora — pokazat će se da je dobra surogat-ocjena sljedeća:

$$\mathcal{M}_0 g(x) \leq c\mathcal{M}f(x)\chi_{O^c}(x) + c\alpha \sum_k \frac{l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}. \tag{2.22}$$

Zaista, ona odmah daje

$$\int \mathcal{M}_0 g\, dx \leq c \int_{\{\mathcal{M}f \leq \alpha\}} \mathcal{M}f\, dx + c\alpha \sum_k |l_k|^n.$$

S druge strane, vrijedi

$$\alpha \sum_k |l_k|^n = \alpha \sum |Q_k| = \alpha |\{\mathcal{M}f > \alpha\}| = \alpha^{1-p} \int_{\{\mathcal{M}f > \alpha\}} \alpha^p\, dx \leq \alpha^{1-p} \int (\mathcal{M}f)^p\, dx$$

i

$$\int \mathcal{M}f\, dx \leq \alpha^{1-p} \int (\mathcal{M}f)^p\, dx$$

pa iz naše gornje nejednakosti dobivamo $g \in H^1$. Prisjetimo li se napomene s kraja prethodnog odjeljka, znamo da je $g \in L^1$ pa je tvrdnja dokazana.

Dakle, dužni smo još jedino dokazati (2.22). To ćemo postići promatranjem dva slučaja.
Uzmimo prvo da $x \notin O$. Tada očito vrijedi $\mathcal{M}_0 g \leq \mathcal{M}_0 f + \sum \mathcal{M}_0 b_k$. Osim toga je i $|x - x_k| \geq cl_k$ budući da $x \notin O$ i x_k je centar od Q_k^* te l_k duljina njenog brida. Stoga, koristeći (2.21), dobivamo

$$\mathcal{M}_0 b_k(x) \leq \frac{c\alpha l_k^{n+1}}{(l_k + |x - x_k|)^{n+1}}.$$

Kako je očito zadovoljeno i $\mathcal{M}_0 f \leq c\mathcal{M}f$ vidimo da 2.22 vrijedi u slučaju $x \notin O$.
Uzmimo sada da je $x \in O$; tada je jamačno $x \in Q_m^*$ za neko m. Sada ćemo kocke Q_k^* iz particije skupa O promatrati u kontekstu njihove udaljenosti od Q_m^*; promatramo dvije klase kocki: one "bliske" Q_m^*, to jest, one za koje je $Q_m^* \cap Q_k^* \neq \emptyset$ i one "daleke", to jest,

takve za koje je $Q_m^* \cap Q_k^* = \emptyset$. Jasno je da postoji neka konačna i fiksna gornja granica za broj kocaka "bliskih" nekoj Q_m^* — i ta granica ne ovisi o m. Možemo, stoga, pisati $g = (f - \sum_{\text{bliske}} b_k) - \sum_{\text{daleke}} b_k$.
Kao i u prethodnom slučaju, pomoću (2.21) i činjenice da vrijedi $|x - x_k| \geq cl_k$, za "daleke" kocke dobivamo ocjenu

$$\mathcal{M}_0 b_k \leq \frac{c\alpha l_k^{n+1}}{(l_k - |x - x_k|)^{n+1}}$$

pa zaključujemo da je

$$\mathcal{M}_0(\sum_{\text{daleke}} b_k) \leq c\alpha \sum_{\text{daleke}} \frac{l_k^{n+1}}{(l_k - |x - x_k|)^{n+1}}.$$

Ostaje još vidjeti što se događa sa komadom $f - \sum_{\text{bliske}} b_k$. Prema prijašnjoj je konstrukciji $b_k = (f - c_k)\eta_k$ pa je i

$$f - \sum_{\text{bliske}} b_k = f - \sum_{\text{bliske}} f\eta_k - \sum_{\text{bliske}} c_k\eta_k.$$

Prema tome vrijedi

$$\mathcal{M}_0(f - \sum_{\text{bliske}} b_k) \leq \mathcal{M}_0[f(1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k)] + \sum_{\text{bliske}} |c_k|\mathcal{M}_0(\eta_k).$$

Preostaje samo ocijeniti desnu stranu. Može se pokazati da vrijedi

$$|c_k| < c\alpha$$

(vidjeti nejedakost (22) u točki 2.1.2. iz dokaza poopćenja Claderón-Zygmundove dekompozicije u [18]).
Također, kao što spomenuli, sve su sume u gornjem rastavu konačne. Opet, slično kao i prije, budući da je $x \in Q_m^*$ i $l_m \geq c|x - x_m|$, zaključujemo

$$\sum_{\text{bliske}} |c_k|\mathcal{M}_0(\eta_k) \leq \frac{c\alpha l_m^{n+1}}{(l_m + |x - x_m|)^{n+1}}.$$

Konačno, za ocjenu prvog člana s desne strane promatramo $[f(1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k) * \Phi_t](x)$. Samo su dvije mogućnosti: ako je $t \leq c_0 d(Q_m, O^c)$ (d označava udaljenost dva skupa definiranu u standardnom smislu) za neku odabranu, dovoljno malenu, konstantu c_0, onda jamačno vrijedi $[f(1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k) * \Phi_t](x) = 0$. Zaista, po definiciji preslikavanja η_k će $1 - \sum_{\text{bliske}} \eta_k$ iščezavati na Q_m^*, a Φ_t je nošena u kugli oko ishodišta radijusa t, $B(0, t)$ pa tvrdnja slijedi zbog odabira t. S druge strane, imamo li $t > c_0 d(Q_m, O^c)$, možemo pokazati da će vrijediti ocjena

$$\mathcal{M}_0(f\eta_k)(x) \leq c\mathcal{M}f(x)$$

(vidjeti raspis gore već referencirane ocjene 25 iz [18]), a jasno je da vrijedi i $\mathcal{M}_0 f \leq c\mathcal{M}f$ pa lako slijedi ocjena i u ovom slučaju.
Summa summarum, i u slučaju $x \in O$ smo dokazali ocjenu (2.22) pa je dokaz leme dovršen. □

Sada smo spremni prijeći na dokaz glavnog rezultata.

Dokaz teorema 2.2.5. Tvrdnju ćemo prvo dokazati uz dodatnu pretpostavku da je naša distribucija f lokalno integrabilna funkcija. U općenitom slučaju tvrdnja slijedi po gustoći jednostavnom modifikacijom argumenta.

Pretpostavimo, dakle, da je f lokalno integrabilna. Za svaki $j \in \mathbb{Z}$ sada promatramo poopćenu Claderón- Zygmundovu dekompoziciju funkcije f sa α jednakim 2^j. Pri tome označavamo $f = g^j + b^j$ i $b^j = \sum_k b_k^j$, a svaki je b_k^j dan sa $b_k^j = (f - c_k^j)\eta_k^j$ gdje c_k^j biramo po analogiji s prethodnom konstrukcijom. Nadalje, označimo li $O^j = \{x : \mathcal{M}f(x) > 2^j\}$ očito imamo $O^{j+1} \subset O^j$, a dobivamo i da je svaka funkcija b_k^j nošena u Q_k^{j*} uz $\cup_k Q_k^{j*} = O^j$. Konačno, kocke Q_k^{j*} su dobivene "napuhivanjem" kao u konstrukciji koja je prethodila ovom dokazu.
Uočimo sada da zacijelo imamo $g^j \to f$ u H^p normi kada $j \to \infty$. Zaista, sličnim rezoniranjem kao i prije te eksploatacijom tvrdnji (ii) i (iii) iz propozicije 2.2.2 slijedi

$$\|b^j\|_{H^p}^p = \int (\mathcal{M}_0 b^j)^p \, dx \leq \sum_k \int (\mathcal{M}_0 b_k^j)^p \, dx \leq \int_{\cup Q_k^{j*}} (\mathcal{M}f)^p \, dx = \int_{\mathcal{M}f > 2^j} (\mathcal{M}f)^p \, dx \to 0.$$

Kao i maločas, opet zaključujemo da $g^j \to f$ i u smislu distribucija. Osim toga, tvrdnja (i) iz iste propozicije daje $|g^j| \leq c2^j$ pa vrijedi

$$g^j \to 0 \quad \text{uniformno kada } j \to -\infty.$$

Kombiniranjem tih dviju činjenica i jednostavnim argumentom teleskopiranjem dobivamo

$$f = \sum (g^{j+1} - g^j) \tag{2.23}$$

pri čemu konvergenciju promatramo u smislu distribucija.

Nejednakost trokuta daje $|g^{j+1} - g^j| \leq c2^j$. S druge strane je $g^{j+1} - g^j = b^j - b^{j+1}$ pa zaključujemo da je $g^{j+1} - g^j$ nošena u O^j. Dakle, umjesto (2.23) možemo pisati

$$f = \sum_{j,k} (g^{j+1} - g^j)\eta_k^j. \tag{2.24}$$

Sa B_k^j označimo kuglu opisanu Q_k^{j*} i stavimo $a_{j,k} = (g^{j+1} - g^j)\eta_k^j \cdot c^{-1}2{-}j|B_k^j|^{-1/p}$. Očito je $a_{j,k}$ nošena u B_k^j, a vrijedi i $|a_{j,k}| \leq |B_k^j|^{-1/p}$. Željeli bismo, uz $\lambda_{j,k} = c2^j|B_k^j|^{1/p}$, iz (2.24) dobiti tvrdnju. Nažalost, $a_{j,k}$ su tek "zamalo" atomi jer ne zadovoljavaju momentne uvjete. U ostatku ovog dijela dokaza radimo na dostatnom profinjenju gornje dekompozicije kako bismo postigli željena svojstva poništavanja.
Sada oponašamo postupak u dokazu propozicije 2.2.2 pa čitatelja pozivamo da detalje upotpuni revizijom već referenciranog dokaza u [18]. Označimo prvo sa $\mathcal{H}_k^j$ Hilbertov prostor (kompleksnih) funkcija definiranih na Q_k^{j*} uz skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \frac{\int f(x)g(x)\eta_k^j(x)\,dx}{\int \eta_k^j(x)\,dx}. \tag{2.25}$$

Jasno, u $\mathcal{H}_k^j$ držimo da leže točno one funkcije kojima je norma inducirana gornjim skalarnim produktom konačna.
Za prirodan broj d, u $\mathcal{H}_k^j$ sada promatramo konačno-dimenzionalni potprostor polinoma stupnja $\leq d$ kojeg označavamo sa $\mathcal{H}_{k,d}^j$. Neka je P_k^j ortogonalni projektor na taj potprostor; tada je

$$c_k^j = P_k^j(f).$$

Lako je uvjeriti se da je polinom c_k^j takav za koji imamo momentno svojstvo

$$\int (f - c_k^j\eta_k^j)q\,dx = 0 \tag{2.26}$$

za sve polinome q stupnja $\leq d$. (Za ponešto detaljniji pregled ove konstrukcije vidjeti točku 2.4.1 u dokazu propozicije 2.1 u [18]).
Odaberimo sada jedan $j \in \mathbb{Z}$ i držimo ga fiksnim. Radi jednostavnije notacije pišemo samo $P_k^j = P_k$. Nadalje, promatramo polinom $c_{k,l}$ zadan sa

$$c_{k,l} = P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j]. \tag{2.27}$$

Neka je $\{e_m\}$ baza prostora $\mathcal{H}_{k,d}^j$. Može se provjeriti da je tada $P(x,y) = \sum_k e_k(x)\overline{e}_k(y)$ jezgra operatora P_k^j; drugim riječima, vrijedi

$$P_k^j f(x) = \int P(x,y)f(y)\eta_k^j(y)\,dy.$$

Sad je lako zaključiti da je $c_{k,l} \neq 0$ samo ako su indeksi k i l takvi da je zadovoljeno $Q_k^{j*} \cap Q_l^{j+1*} \neq \emptyset$. Odista, u gornjem se integralu pojavljuje član $\eta_k^j(y)\eta_l^{j+1}(y)$ pa je tvrdnja jasna.
Na način sličan onome na koji se dobivaju ocjene (22) i (22′) u spomenutom dokazu propozicije 2.2.2 može se pokazati da vrijedi

$$|c_{k,l}\eta_l^{j+1}| \leq c2^j. \tag{2.28}$$

Uočimo sljedeći račun.

$$g^{j+1} - g^j = b^j - b^{j+1} = \sum_k (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}.$$

Posljednja jednakost slijedi neposredno iz dekompozicije b_k s početka ovog dokaza.
Sad tvrdimo da vrijedi zapis

$$g^{j+1} - g^j = \sum_k A_k^j \tag{2.29}$$

pri čemu je

$$A_k^j = (f - c_k^j)\eta_k^j - \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j + \sum_l c_{k,l}\eta_l^{j+1}. \tag{2.30}$$

Kako bismo se u to uvjerili prisjetimo se prvo da — po konstrukciji — imamo $\sum_k \eta_k^j = 1$. To daje

$$\sum_k \left(\sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j \right) = \left(\sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1} \right) \cdot \sum_k \eta_k^j = \sum_l (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}.$$

Također, uvažimo li tu opservaciju i u (2.27), dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_k c_{k,l} &= \sum_k P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j] = P_l^{j+1}\left[(f - c_l^{j+1}) \sum_k \eta_k^j\right] = P_l^{j+1}[f - c_l^{j+1}] \\ &= P_l^{j+1}(f) - P_l^{j+1}(c_l^{j+1}) = P_l^{j+1}(f) - P_l^{j+1}(f) = 0. \end{aligned}$$

Promotrimo li iznova dekompoziciju (2.23) vidimo da možemo pisati

$$f = \sum_j \sum_k A_k^j.$$

Uočimo sljedeća svojstva A_k^j.
(i) A_k^j je sadržana u kugli koja sadrži Q_k^{j*} i sve Q_l^{j+1*} koje imaju netrivijalan presjek s Q_k^{j*}.

Zaista, prisjetimo se da je η_k^j nošena u $\widetilde{Q}_k^j \subset Q_k^{j*}$ pa vidimo da tvrdnja jamačno vrijedi za prva dva člana u (2.30), a za posljednji član slijedi istim udarcem uvažimo li opasku nakon (2.27). Štoviše, kako je $O^{j+1} \subset O^j$ to — čim je $Q_k^{j*} \cap Q_l^{j+1*} \neq \emptyset$ — pronalazimo konstantu c tako da vrijedi $\operatorname{diam}(Q_k^{j*}) \geq c \cdot \operatorname{diam}(Q_l^{j+1*})$.[5] Imajući to na umu, vidimo da smo B_k^j mogli odabrati tako da vrijedi $|B_k^j| = c|Q_k^j|$.
(ii) $|A_k^j| \leq c2^j$. Da se uvjerimo da je tome zaista tako primijetimo prvo da dio u (2.30) koji sadrži f možemo izraziti kao

$$f\eta_k^j(1 - \sum_l c_l^{j+1}\eta_l^{j+1}) = f\eta_k^j \cdot \chi_{(O^{j+1})^c},$$

(prisjetimo se definicije i svojstava funkcija η_p^r i c_p^r) a po svojstvima Claderón-Zygmundove dekompozicije znademo da tamo imamo $|f| \leq c2^j$. Za ostale članove jednostavno koristimo ocjenu (2.28) kao i

$$4|c_k^j\eta_k^j| \leq c2^j$$

(vidjeti nejednakost (22′) u dokazu propozicije 2.2.2 u [18]).
(iii) A_k^j zadovoljava momentne uvjete iz definicije atoma prostora H^p. Prisjetimo li se korolara 2.2.3 odmah dobivamo da tvrdnja vrijedi za $b_k^j = (f - c_k^j)\eta_k^j$. Nadalje, po definiciji polinoma $c_{k,l}$ imamo

$$\begin{aligned}(f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j - c_{k,l}\eta_l^{j+1} &= (f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j + P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j]\eta_l^{j+1} \\ &= \left\{(f - c_l^{j+1})\eta_k^j - P_l^{j+1}[(f - c_l^{j+1})\eta_k^j]\right\}\eta_l^{j+1}\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je član $(f - c_l^{j+1})\eta_l^{j+1}\eta_k^j - c_{k,l}\eta_l^{j+1}$ okomit (u odnosu na prethodno definirani skalarni produkt) na prostor polinoma stupnja $\leq d$ pa tvrdnja slijedi.
Sada smo skoro gotovi s našom konstrukcijom. Imamo $f = \sum_{j,k} A_{j,k}$ pa stavimo $a_k^j = c^{-1}2^{-j}|B_k^j|^{-1/p}A_k^j$ i $\lambda_{j,k} = c2^j|B_k^j|^{1/p}$. Prema gornjim razmatranjima tada vrijedi $f = \sum_{j,k} \lambda_{j,k}a_k^j$, a također znamo i da su a_k^j atomi. Osim toga, imamo i

$$\sum_{j,k} |\lambda_{j,k}|^p = c\sum_{j,k} 2^{jp}|B_k^j| = c'\sum_{j,k} 2^{jp}|Q_k^j| = c'\sum_j 2^{jp}|\{\mathcal{M}f > 2^j\}| \tag{2.31}$$

$$\leq c'\int_{\{\mathcal{M}f>2^j\}} (\mathcal{M}f)^p\,dx \leq c\int (\mathcal{M}f)^p\,dx \simeq \|f\|_{H^p}^p. \tag{2.32}$$

Druga jednakost u prvom redu slijedi po komentaru u (i) gore, a prva nejednakost se dobije tako da jednostavno uočimo

$$\int_{\{\mathcal{M}f>2^j\}} (\mathcal{M}f)^p\,dx > 2^{jp}|\{\mathcal{M}f > 2^j\}|.$$

[5] Ovdje je $\operatorname{diam}(Q)$ oznaka za duljinu prostorne dijagonale u kocki Q.

Time je, dakle, tvrdnja dokazana za lokalno integrabilne funkcije.

Uzmimo sada proizvoljnu distribuciju $f \in H^p$. Po lemi 2.2.6 pronalazimo niz lokalno integrabilnih funkcija (f_m) takav da je $f_0 = 0$ i $f_m \to f$ u $\|\cdot\|_{H^p}$ kada $m \to \infty$. Štoviše, možemo pretpostaviti i da za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\|f_{m+1} - f_m\|_{H^p}^p \leq 2^{-m-1}\|f\|_{H^p}^p$. U to se uvjerimo evociranjem dokaza propozicije 0.1.6 i poistovjećivanjem odgovarajućeg podniza sa samim nizom. Teleskopiranjem stoga jednostavno zaključujemo da vrijedi

$$f = \sum (f_{m+1} - f_m)$$

pri čemu konvergenciju, naravno, promatramo u H^p normi, a koja jamči i konvergenciju u smislu distribucija. Konačno, kako su sve funkcije $f_{m+1} - f_m$ lokalno integrabilne, možemo uzeti njihovu atomarnu dekompoziciju kao u prethodnom dijelu dokaza čime dobivamo

$$f = \sum_{m,j,k} \lambda_{j,k}^m a_k^{j,m}.$$

Osim toga, vrijedi i

$$\sum_{m,j,k} |\lambda_{j,k}^m|^p \leq c \sum \|f_{m+1} - f_m\|_{H^p}^p \leq c' \|f\|_{H^p}^p$$

pa je time dokaz tvrdnje završen. □

Naposljetku napomenimo da postoje i drugačiji načini da se pristupi iznalaženju sastavnih jedinica Hardyjevih prostora (u našim su razmatranjima tu ulogu imali atomi). Primjerice, uvjet (ii) iz definicije 2.2.1 smo mogli zamijeniti slabijim zahtjevom

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |a|^q \, dx \right)^{1/q} \leq |B|^{-1/p}$$

pri čemu uzimamo $q > 1$ za $p = 1$ te $q = 1$ za $p < 1$. Doista, da bismo pokazali da su tako definirani atomi elementi prostora H^p ključno je bilo osigurati da vrijedi nejednakost (2.17), a nju i u ovom slučaju dobivamo na gotovo posve isti način. Uzmimo da nas zanima slučaj $p = 1$ i $q > 1$. Razlika je jedino u argumentaciji nejednakosti (2.18); naime, po maksimalnom teoremu 0.3.10 za standardni Hardy-Littlewoodov maksimalni operator imamo $\int_B (Ma)^q \, dx \leq c \int_B |a|^q \, dx$ pa (2.18) slijedi primjenom Hölderove nejednakosti.
Po teoremu 2.2.5 sada zaključujemo da ovakve "generalizirane" atome možemo aproksimirati našim uobičajenim atomima. Postoje još neki načini generalizacije pojma atoma i tada govorimo o *molekulama* prostora H^p; za više detalja vidjeti poglavlje 3, točku 5.7. u [18].

Poglavlje 3

Dualnost prostora H^1 i BMO

U prethodnom smo poglavlju vidjeli da je prostor H^1 — u izvjesnom smislu — prirodna zamjena za L^1 (vidjeti, recimo, raspravu na kraju prvog odjeljka u prethodnom poglavlju). Sada naše napore ponovno usmjeravamo na taj Hardyjev prostor; naime, na problem pronalaska njegova duala, a centralni je rezultat ovog poglavlja pokazati da je to prostor funkcija ograničenih srednjih oscilacija [1] (kojeg je uobičajeno označavati sa BMO). Također, budući da je L^∞ dual prostora L^1, očekujemo da će i BMO biti prirodna zamjena za L^∞.

U prvom dijelu ovog poglavlja dajemo pregled definicije i osnovnih svojstava prostora BMO, a drugi dio sadrži iskaz i dokaz već najavljenog teorema o dualnosti.

3.1 Funkcije ograničene srednje oscilacije

Kažemo da je funkcija $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ograničene srednje oscilacije ako postoji konstanta $A > 0$ takva da za svaku kuglu $B \subseteq \mathbb{R}^n$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B|\, dx \leq A \tag{3.1}$$

pri čemu f_B označava srednju vrijednost f na kugli B; drugim riječima $f_B = |B|^{-1} \int_B f\, dx$. Sa BMO označavamo prostor svih funkcija ograničene oscilacije na $\mathbb{R}^n$ opskrbljenog standardnim operacijama zbrajanja i množenja skalarom (po točkama).
Također, sa $\|f\|_{\text{BMO}}$ označimo najmanji A za koji vrijedi (3.1); lako je provjeriti da smo time zadali normu na prostoru BMO.

Navedimo sada i neka jednostavna svojstva prostora BMO.

[1] engl. bounded mean oscillation.

Napomena 3.1.1. *(i) Strogo uzevši, elementi prostora BMO su definirani samo do na aditivnu konstantu budući da su, očigledno, upravo konstante nul-elementi u $\|\cdot\|_{BMO}$.*

(ii) Pretpostavimo li da smo u (3.1) f_B zamijenili s proizvoljnom familijom konstanti $\{c_B\}$ prostor BMO bi ostao isti. Zaista, vrijedi $|c_B - f_B| \leq A$ jer

$$|c_B - f_B| = \left|\frac{1}{|B|}\int_B (c_B - f)\,dx\right| \leq \frac{1}{|B|}\int_B |c_B - f|\,dx \leq A.$$

Ta nam je opservacija dostatna za zaključak:

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|\,dx \leq \frac{1}{|B|}\int_B |c_B - f_B|\,dx + \frac{1}{|B|}\int_B |f - c_B|\,dx \leq 2A.$$

Jednostavna je vježba, korištenjem navedene činjenice, dokazati i da smo u našoj definiciji, umjesto kugli, mogli promatrati i familiju svih kocki u $\mathbb{R}^n$.

(iii) Bjelodana je činjenica da svaka ograničena funkcija pripada prostoru BMO. Obrat, međutim, ne vrijedi, a jednostavan je protuprimjer funkcija $f(x) = \log|x|$. Da bismo se uvjerili da je f doista u BMO, uočimo prvo da je tvrdnju dovoljno dokazati na kuglama radijusa 1. Zaista, prema (ii) je dovoljno dokazati

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\log|x| - c_B|\,dx \tag{3.2}$$

pa, ako B nije radijusa 1 provodimo zamjenu varijabli $x \mapsto \delta x$ (uz prikladno odabrani δ) te iskoristimo činjenicu da je $\log|\delta x| = \log|x| + \log|\delta|$. Time dobivamo

$$\frac{1}{|B|}\int_B |\log|x| - c_B|\,dx = \frac{1}{|\tilde{B}|}\int_{\tilde{B}} |\log|x| - c_{\tilde{B}|}\,dx$$

gdje je $\tilde{B}$ kugla koncentrična sa B, ali radijusa manjeg od 1.
Neka je sada B kugla sa središtem u x_0. Ako je $\|x_0\| \leq 1$ (3.2) vrijedi uz odabir $c_B = 0$, a inače uzimamo $c_B = \log|x_0|$.

3.2 Dualnost

U ovom odjeljku dokazujemo da za svaki neprekidni linearni funkcional l na H^1 postoji prikaz

$$l(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx, \quad g \in H^1 \tag{3.3}$$

pri čemu je f prigodna BMO funkcija.

Međutim, vidjeti ćemo da gornji integral ne mora apsolutno konvergirati za proizvoljnu $f \in$ BMO i $g \in H^1$. Tome ćemo doskočiti tako da prvo uzmemo da g pripada nekom "dobrom" potprostoru od H^1; pokazat ćemo da je potprostor ograničen distribucija g s kompaktnim nosačem i takvih za koje je $\int g\,dx = 0$ dobar odabir. Taj ćemo potprostor označavati sa H^1_a i on se očigledno podudara s prostrom svih konačnih linarnih kombinacija H^1 atoma, a za koji znamo da je gust u H^1 (vidjeti napomenu 2.2.4).
Kako je BMO $\subset L^1_{\text{loc}}$ lako dobivamo da integral u (3.3) apsolutno konvergira. Nadalje, nejednoznačnost iz napomene 3.1.1 (i), ovdje ne uzrokuje probleme upravo zbog pretpostavke $\int g\,dx = 0$. Sada smo spremni iskazati glavni rezultat ovog poglavlja.

Teorem 3.2.1. *(a) Neka je $f \in BMO$. Tada se linearni funkcional l zadan formulom (3.3) na H^1_a može na jedinstven način proširiti do neprekidnog linearnog funkcionala na H^1 i to tako da vrijedi*

$$\|l\| \leq c\|f\|_{BMO}.$$

(b) Obratno, za svaki neprekidni funkcional l na H^1 možemo pronaći $f \in BMO$ takvu da vrijedi (3.3) i

$$\|f\|_{BMO} \leq c'\|l\|.$$

Dokaz. Uzmimo neku $f \in$ BMO. Da bismo dobili tvrdnju (a), dovoljno je pokazati da je funkcional dan u (3.3) neprekidan na H^1_a jer tvrdnja tada slijedi korištenjem teorema 0.1.2. Mi ćemo dokazati da za proizvoljnu $g \in H^1_a$, štoviše, vrijedi ocjena:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg\,dx \right| \leq c\|f\|_{\mathrm{BMO}}\|g\|_{H^1}. \tag{3.4}$$

Ukoliko je f ograničena, gornju ocjenu nije teško dobiti. Zaista, neka je $g = \sum_k \lambda_k a_k$ atomarna dekompozicija od g. Znamo da tada red $\sum_k \lambda_k a_k$ konvergira i u $L^1(\mathbb{R}^n)$ normi pa možemo pisati

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg\,dx = \sum_k \lambda_k \int_{\mathbb{R}^n} f(x)a_k(x)\,dx.$$

Zbog momentnog uvjeta kojeg a_k, kao H^1 atomi, zadovoljavaju, vrijedi

$$\int f a_k\,dx = \int_{B_k} [f(x) - f_{B_k}]a_k(x)\,dx$$

pri čemu je a_k nošena u B_k. Kako je, nadalje, $|a_k| \leq |B_k|^{-1}$, korištenjem dobivenih jednakosti slijedi

$$\left| \int fg\, dx \right| \leq \sum_k \frac{|\lambda_k|}{|B_k|} \int_{B_k} |f(x) - f_{B_k}|\, dx \leq \sum |\lambda_k| \cdot \|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

Po našem teoremu o atomarnoj dekompoziciji — naime, teoremu 2.2.5 — dobivamo da je nejednakost (3.4) dokazana u slučaju da je f ograničena.
Da bismo nejednakost dokazali za općenitu $f \in \mathrm{BMO}$ koristimo aproksimacijski argument. Uzmimo $g \in H^1_a$; bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da f postiže realne vrijednosti (u suprotnom promatramo realni i imaginarni dio te postupamo kao u nastavku). Uočimo sada preslikavanja

$$f^{(k)} = \begin{cases} -k & \text{za } f(x) \leq -k, \\ f(x) & \text{za } -k \leq f(x) \leq k, \\ k & \text{za } k \leq f(x) \end{cases}$$

gdje uzimamo $k \in \mathbb{N}$. Jasno je da su uvedena preslikavanja ograničeni elementi BMO pa prema netom dokazanom vrijedi $|\int f^{(k)} g\, dx| \leq c\|f^{(k)}\|_{\mathrm{BMO}} \|g\|_{H^1}$. Nadalje, nije teško vidjeti da je $\|f^{(k)}\|_{\mathrm{BMO}} \leq c\|f\|_{\mathrm{BMO}}$ pa, štoviše, imamo $|\int f^{(k)} g\, dx| \leq c\|f\|_{\mathrm{BMO}} \|g\|_{H^1}$. Konačno, kako očigledno vrijedi $f^{(k)} \to f$ gotovo svuda to po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi (3.4). Primijetimo još, naposljetku, da ograničenost funkcija $f^{(k)} g$ dobivamo korištenjem činjenice da je $g \in H^1_a$.

Da bismo dokazali obrat, odaberimo prvo neku kuglu $B \subset \mathbb{R}^n$. Neka L^2_B označava prostor svih L^2 funkcija nošenih u B; norma na tom prostoru je $\|g\|_{L^2_B} = \left(\int_B |g|^2\, dx\right)^{1/2}$. Nadalje, sa $L^2_{B,0}$ označimo potprostor od L^2_B sačinjen od onih funkcija za koje vrijedi $\int_B g\, dx = 0$. Uočimo da funkcije s ovakvim opisom možemo prikazati kao višekratnike generaliziranih H^1 atoma kao na kraju prethodnog poglavlja, a sličnim računom kao i u toj opasci također dobivamo $\|g\|_{H^1} \leq c|B|^{1/2} \|g\|_{L^2}$.
Prema gornjemu, znamo da ograničeni linearni funkcional l na H^1 (za kojeg, bez smanjenja općenitosti, pretpostavljamo da je norme ≤ 1) možemo proširiti do linearnog funkcionala na $L^2_{B,0}$ — to slijedi iz Hahn-Banachovog teorema (teorem 0.1.3). Nadalje, po Rieszovom teoremu o reprezentaciji (teorem 0.1.4) za Hilbertov prostor $L^2_{B,0}$ i funkcional l pronalazimo $F^B \in L^2_{B,0}$ sa svojstvom

$$l(g) = \int_B F^B(x) g(x)\, dx, \quad \text{za } g \in L^2_{B,0} \tag{3.5}$$

te

$$\left(\int_B |F^B(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq c|B|^{1/2}. \tag{3.6}$$

Sada nam je cilj pronaći funkciju f koja će se od svake funkcije F^B razlikovati samo do na aditivnu konstantu. Primijetimo prvo da za kugle $B_1 \subset B_2$ jamačno vrijedi da je funkcija $F^{B_1} - F^{B_2}$ je konstantna na B_1. Doista, kako obje funkcije f^{B_1} i f^{B_2} daju isti funkcional na $L^2_{B_1,0}$ jednostavna argumentacija, koristeći odgovarajuće reprezentacije oblika (3.5), daje da je tome tako. Funkciju F^B iz prethodnog postupka možemo zamijeniti sa $f^B = F^B + c_B$ gdje konstantu c_B odabiremo tako da je integral od f^B jednak 0 na jediničnoj kugli oko ishodišta. Međutim, tada dobivamo da je $f^{B_1} = f^{B_2}$ na B_1 čim je $B_1 \subset B_2$ pa na cijelom prostoru $\mathbb{R}^n$ možemo definirati $f(x) = f^B(x)$ kada $x \in B$.
Ostaje još pokazati da je $f \in$ BMO te da vrijedi formula reprezentacije za svaki $g \in H^1$.
Uočimo da je

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - c_B|\,dx \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - c_B|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{|B|}\int_B |F^B(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq c;$$

prva nejednakost slijedi iz Hölderove nejednakosti, a posljednja iz (3.6). Konačno, zbog (3.5) imamo

$$l(g) = \int f(x)g(x)\,dx$$

čim je $g \in L^2_{B,0}$ za neko B pa je, prema tome, ta reprezentacija zadovoljena i za $g \in H^1_a$. Zbog jedinstvenosti proširenja neprekidnog operatora sa gustog potprostora (teorem 0.1.2), tvrdnja slijedi. □

Bibliografija

[1] E. Beckenstein i L. Narici, *Topological vector spaces*, Chapman and Hall, 2010.

[2] G. Chinnaraman, *Integrable distributions and ϕ-Fourier transform*, Novi Sad J. Math. **43** (2013), br. 2, 21–37.

[3] R. Coifman i G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bulletin of AMS **83** (1977), br. 4, 569–645.

[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 96, Springer, 1985.

[5] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Mathematics 38, Academic Press, Inc., 1970.

[6] G. Weiss E. M. Stein, *On the theory of harmonic functions of several variables: I. The theory of H^p-spaces*, Acta Mathematica **103** (1960), br. 1-2, 25–62.

[7] C. Fefferman i E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Mathematica **129** (1972), 137–193.

[8] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations. 2nd edition*, Princeton University Press, 1995.

[9] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.

[10] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 249, Springer-Verlag New York, 2008.

[11] G. H. Hardy, *The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function*, Proceedings of the London Mathematical Society (1915), 269–277.

[12] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover books on advanced mathematics, Dover Publications, 1976.

[13] E. O. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[14] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Mathematische Zeitschrift (1923), br. 18, 87–95.

[15] W. Rudin, *Functional Analysis, 2nd edition*, McGraw-Hill, 1991.

[16] R. Shakarchi i E. M. Stein, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003.

[17] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series, 30, Princeton University Press, 1971.

[18] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscilatory Integrals*, Princeton Mathematical Series, 43, Princeton University Press, 1993.

Sažetak

Hardyjevim se prostorima klasično pristupa u kontekstu kompleksne analize gdje ih se promatra na nekom dijelu kompleksne ravnine. U ovom je tekstu, međutim, predstavljen moderan tretman prostora $H^p(\mathbb{R}^n)$, uz $0 < p \leq \infty$, kao klase onih temperiranih distribucija kojima je prikladno definirani maksimalni operator sadržan u $L^p(\mathbb{R}^n)$ prostoru.

Prvi važni dokazani rezultat tvrdi da maksimalni operator koji korišten u definiciji može biti izabran na nekoliko ekvivalentnih načina. Osim toga, dokazali smo i da za proizvoljni $f \in H^p$ možemo pronaći familiju $\{a_k\}$ jednostavnijih elemenata te kompleksni niz koeficijenata $\{\lambda_k\}$ tako da je $f = \sum_k \lambda_k a_k$ u H^p normi; elemente $\{a_k\}$ nazivamo atomima, a rezultirajuću dekompoziciju atomarnom. Konačno, dan je i detaljniji pregled posebno zanimljivog prostora H^1 te demonstracija činjenice da je njegov dual prostor funkcija ograničene srednje oscilacije (BMO).

Summary

One classically addresses Hardy spaces in the context of complex analysis where they are observed on some section of complex plane. In this text, however, a modern treatment of the $H^p(\mathbb{R}^n)$ space, with $0 < p \leq \infty$, as the class of those tempered distributions whose appropriately defined maximal operator is contained in the $L^p(\mathbb{R}^n)$ space is laid out.

The first major result that is proved claims that the maximal operator used in the definition may be chosen in a couple of equivalent ways. Moreover, we proved that for an arbitrary $f \in H^p$ a family $\{a_k\}$ of simpler elements and a sequence of complex coefficients $\{\lambda_k\}$ can be obtained such that $f = \sum_k \lambda_k a_k$ in the H^p norm; we call the elements $\{a_k\}$ atoms, and the resulting decomposition atomic. Finally, a thorough overview of a particularly interesting space H^1 is given along with the demonstration of the fact that its dual is the space of functions with bounded mean oscillation (BMO).

Životopis

Rođen sam godine 1995. u Virovitici gdje sam završio osnovnu školu i gimnaziju. Nakon toga, 2014. godine, upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu gdje obrazovanje i nastavljam na diplomskom studiju primijenjene matematike kojeg upisujem 2017. godine.