

# Balansirajući brojevi

---

**Plantak, Lucija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:509781>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-05**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Balansirajući brojevi

---

**Plantak, Lucija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:509781>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-20**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Lucija Plantak

**BALANSIRAJUĆI BROJEVI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji, dečku, prijateljima i kolegama bez kojih ovo postignuće ne bi bilo moguće. Ujedno im zahvaljujem i na pruženoj podršci tijekom cijelog studija. Posebna zahvala mentorici izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić što je našla vremena za moja pitanja te svojim savjetima mi pomogla u izradi rada.*

*Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Balansirajući brojevi</b>	<b>3</b>
1.1 Motivacija i definicija . . . . .	3
1.2 Rekurzivna formula . . . . .	7
1.3 Identiteti . . . . .	8
1.4 Veza s kvadratno trokutastim brojevima . . . . .	11
<b>2 Funkcije povezane s balansirajućim brojevima</b>	<b>13</b>
2.1 Funkcije izvodnice . . . . .	13
2.2 Funkcija izvodnica za balansirajuće brojeve . . . . .	15
2.3 Funkcije koje generiraju balansirajuće brojeve . . . . .	17
2.4 Lucas-balansirajući brojevi . . . . .	20
<b>3 Balansirajući brojevi i Pitagorina jednadžba</b>	<b>23</b>
3.1 Pitagorine trojke . . . . .	23
3.2 Specijalna Pitagorina jednadžba . . . . .	24
<b>4 Kobalansirajući brojevi</b>	<b>26</b>
4.1 Definicija . . . . .	26
4.2 Funkcije povezane s kobalansirajućim brojevima . . . . .	28
<b>Bibliografija</b>	<b>34</b>

# Uvod

Geometrijsko predočavanje prirodnih brojeva točkicama ili kvadratićima omogućuje zorno izvođenje raznih algebarskih svojstava i relacija. Posebnim rasporedom i slaganjem točkica u pravilne  $n$ -terokute oblikuju se *figurativni brojevi*. Dije se na kvadratne, trokutaste, peterokutne, itd. Nama su u ovom radu posebno zanimljivi trokutasti brojevi  $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ . Gauss je dokazao da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše 3 trokutasta broja.

Indijski matematičari A. Behera i G.K. Panda su krajem prošlog stoljeća razmatrali sljedeći problem:

*Postoje li dva uzastopna trokutasta broja čiji je zbroj opet trokutasti broj?*

Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi  $n$  i  $r$ ,  $n > 1$ ,  $r \geq 0$  takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r},$$

odnosno takvi da vrijedi

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) + \dots + (n + r). \quad (1)$$

Relacija (1) je *diofantska jednadžba* u nepoznicama  $n$  i  $r$  i njihov problem se svodi na traženje rješenja  $n$  u skupu prirodnih brojeva.

U ovom radu definirat ćemo *balansirajući broj*  $n \in \mathbb{N}$  kao rješenje jednadžbe (1), a njemu pridružen broj  $r \in \mathbb{N}_0$  kao *balanser*.

U prvom poglavlju, uz motivaciju i definiciju, izvest ćemo rekurzivnu formulu za niz balansirajućih brojeva  $B_k$ :

$$B_{k+1} = 6B_k - B_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

te pokazati neka njihova svojstva i različite zanimljive identitete. Također ćemo povezati balansirajuće brojeve s kvadratno trokutastim brojevima.

U drugom poglavlju izvest ćemo funkciju izvodnicu za niz balansirajućih brojeva:

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

te promatrati još neke funkcije koje ih generiraju.

U trećem poglavlju povezat ćemo balansirajuće brojeve s rješenjima Pitagorine jednadžbe

$$x^2 + (x + 1)^2 = y^2.$$

U četvrtom poglavlju, modificirat ćemo relaciju (1) i definirati *kobalansirajući broj*  $n \in \mathbb{N}$  kao rješenje jednadžbe

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r),$$

gdje je  $r \in \mathbb{N}_0$  *kobalanser* pridružen broj  $n$ . Pokazati ćemo da niz kobalansirajućih brojeva zapravo predstavlja niz balansera balansirajućih brojeva. Za niz kobalansirajućih brojeva  $b_k$  vrijedi rekurzivna relacija

$$b_{k+1} = 6b_k - b_{k-1} + 2, \quad k \in \mathbb{N},$$

a funkcija izvodnica glasi

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}.$$

Nizovi balansirajućih i kobalansirajućih brojeva imaju mnoga zanimljiva svojstva te su područje interesa mnogih matematičara današnjice.

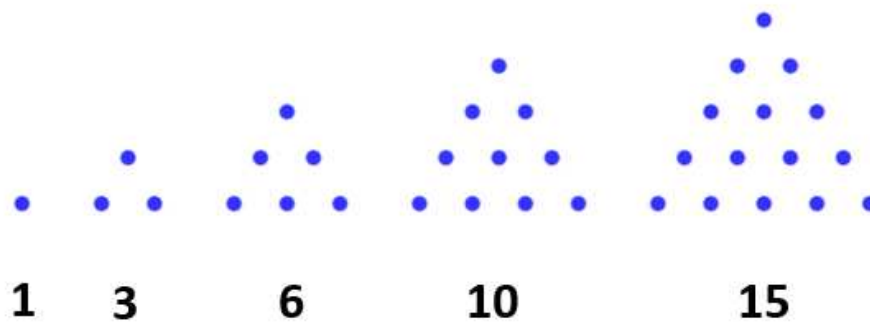


# Poglavlje 1

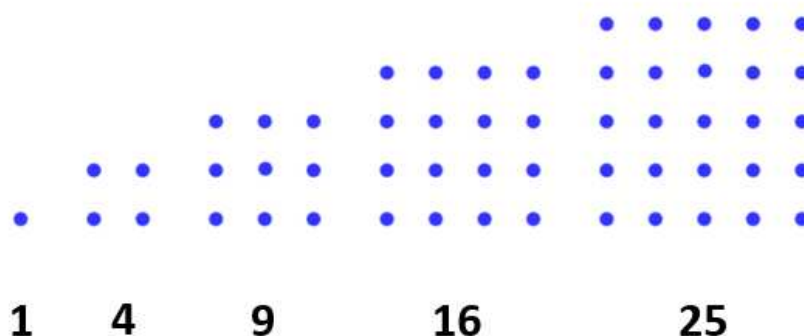
## Balansirajući brojevi

### 1.1 Motivacija i definicija

Brojeve koje možemo reprezentirati različitim geometrijskim likovima nazivaju se *figuralni brojevi*. Dijele se na trokutaste, kvadratne, peterokutne, itd. Njima su se bavili starogrčki matematičari, posebno Pitagorejci. Konkretno ih dobivamo preslagivanjem nekog broja točkica u pravilne  $n$ -terokute. Na slikama ispod generirani su *trokutasti* i *kvadratni brojevi*.



Slika 1.1: Niz trokutastih brojeva 1,3,6,10,15



Slika 1.2: Niz kvadratnih brojeva 1,4,9,16,25

Označimo  $n$ -ti trokutasti broj s  $T_n$ . Sa Slike 1.1 vidimo da je

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n = \frac{1}{2}n(n + 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, iz prethodne relacije vidimo da niz trokutasti brojeva možemo generirati pomoću rekursivne formule

$$T_n = T_{n-1} + n, \quad n \geq 2,$$

pri čemu je  $T_1 = 1$ .

Zanimljivo je da vrijedi da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše 3 trokutasta broja. Tu je tvrdnju dokazao Gauss i predstavlja specijalni slučaj tvrdnje koja kaže da se svaki prirodan broj može prikazati kao zbroj najviše  $n$   $n$ -terokutnih brojeva.<sup>1</sup>

**Teorem 1.1.1.** *Prirodan broj  $m$  je trokutasti broj ako i samo ako je  $8m + 1$  potpuni kvadrat.*

*Dokaz.* Broj  $m$  je trokutasti broj ako i samo ako postoji  $n \in \mathbb{N}$  takav da je

$$m = \frac{n(n + 1)}{2},$$

tj. ako i samo ako postoji pozitivno cjelobrojno rješenje jednadžbe

$$n^2 + n - 2m = 0.$$

<sup>1</sup>Ovu tvrdnju iskazao je Fermat a u potpunosti dokazao Cauchy.

Pozitivno rješenje prethodne jednadžbe je

$$\frac{-1 + \sqrt{8m + 1}}{2}. \quad (1.1)$$

Ako je ono i cjelobrojno, onda je  $\frac{-1 + \sqrt{8m+1}}{2} = k$  za neki  $k \in \mathbb{N}$ , tj.  $8m + 1 = (2k + 1)^2 = \square$ . Obratno, ako je  $8m + 1$  potpuni kvadrat, onda on očito mora biti kvadrat nekog neparvog prirodnog broja, tj.  $8m + 1 = (2k + 1)^2$  pa je izraz (1.1) poprima vrijednost u  $\mathbb{N}$ .  $\square$

Indijski matematičari Behera i Panda su krajem 90-tih godina prošlog stoljeća u [1] razmatrali sljedeći problem:

*Postoje li dva uzastopna trokutasta broja čiji je zbroj opet trokutasti broj?*

Dakle, pitamo se postoje li cijeli brojevi  $n$  i  $r$ ,  $n > 1$ ,  $r \geq 0$  takvi da je

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r}. \quad (1.2)$$

Uočimo da je

$$T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = T_8,$$

te

$$T_{34} + T_{35} = 595 + 630 = 1225 = T_{49},$$

pa su  $(n, r) = (6, 2)$  i  $(n, r) = (35, 14)$  rješenja postavljenog problema. Prirodno je pitati se ima li još parova prirodnih brojeva koji zadovoljavaju postavljeni problem. Pokazat ćemo da ih ima beskonačno mnogo. Relacija (1.2) ekvivalentna je izrazu

$$(1 + 2 + \dots + n - 1) + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) + \dots + (n + r),$$

tj.

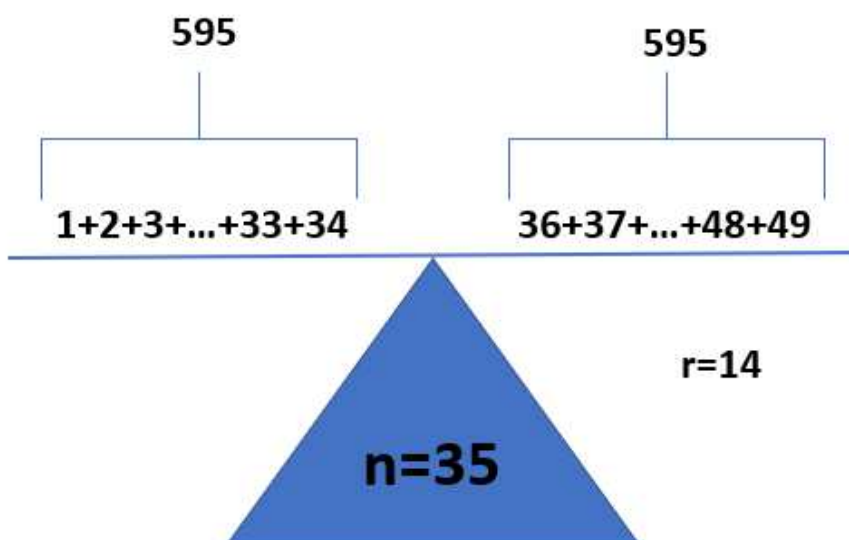
$$1 + 2 + \dots + n - 1 = (n + 1) + (n + 2) \dots + (n + r). \quad (1.3)$$

Na prethodnu relaciju možemo gledati kao na *diofantsku jednadžbu* u nepoznanicama  $n$  i  $r$  a početni problem se svodi na traženje rješenja u skupu prirodnih brojeva jednadžbe (1.3).

**Definicija 1.1.2.** *Neka su  $n \in \mathbb{N}$  i  $r \in \mathbb{N}_0$  brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu (1.3). Tada se  $n$  naziva **balansirajući broj** a  $r$  njemu pridruženi **balanser**. Oznaka za  $k$ -ti balansirajući broj je  $B_k$ .*

Uočimo da je trivijalno rješenje jednadžbe (1.3) uređeni par  $(n, r) = (1, 0)$ . Označavamo ga s  $B_1 = 1$ . Pokazali smo da su 6 i 35 balansirajući brojevi s pripadnim balanserima  $r = 2$  i  $r = 14$ , respektivno. To su sljedeća dva balansirajuća broja, tj.  $B_2 = 6$  i  $B_3 = 35$ .

Na prvi pogled naziv ovog niza - *balansirajući brojevi*, odnosno *balancing numbers* (engl.) zvuči neobično. No, pogledamo li Sliku 1.3 na kojoj smo vizualizirali balansirajući broj  $B_3$ , vidimo “ravnotežu”, tj. “balans” dva zbroja uzastopnih prirodnih brojeva



Slika 1.3: Balansirajući broj  $n = 35$  s pripadnim balanserom  $r = 14$

Jednadžbu (1.3) možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2}n(n-1) = nr + \frac{1}{2}r(r+1), \quad (1.4)$$

odnosno

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}. \quad (1.5)$$

Uočimo da je desna strana u (1.5) upravo jednaka  $n+r$ -tom trokutastom broju pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija balansirajućeg broja.

**Teorem 1.1.3.** *Prirodan broj  $n$  je balansirajući ako i samo ako je  $n^2$  trokutasti broj.*

S druge strane (1.4) možemo shvati i kao kvadratnu jednadžbu u  $r$ :

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 + n = 0. \quad (1.6)$$

Jasno je da je  $n$  balansirajući ako i samo postoji pozitivno cjelobrojno rješenje prethodne jednačbe, tj. ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2} \quad (1.7)$$

prirodan broj. Dalje, analognim zaključivanjem kao u dokazu Teorema 1.1.1 dobivamo još jednu karakterizaciju balansirajućeg broja:

**Teorem 1.1.4.** *Prirodan broj  $n$  je balansirajući ako i samo ako je  $8n^2 + 1$  potpuni kvadrat.*

Prema prethodnoj tvrdnji zaključujemo da su balansirajući brojevi upravo rješenja Pelllove jednačbe

$$m^2 - 8n^2 = 1, \quad (1.8)$$

pa ih stoga postoji beskonačno mnogo. Skup svih rješenja Pelllove jednačbe (1.8) u nepoznanici  $n$  je upravo niz balansirajućih brojeva  $(B_k)$ .

## 1.2 Rekurzivna formula

Poznato je da je skup svih rješenja Pelllove jednačbe (1.8) dan s

$$m_k + n_k \sqrt{8} = (m_1 + n_1 \sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N},$$

gdje je  $(m_1, n_1)$  fundamentalno rješenje, tj. najmanje rješenje od (1.8) u skupu prirodnih brojeva. U ovom slučaju odmah se vidi da  $(m, n) = (3, 1)$  zadovoljava jednačbu (1.8) i to je očito najmanje moguće rješenje u  $\mathbb{N}$ . Stoga je

$$m_k + n_k \sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N}.$$

Kako je

$$m_k - n_k \sqrt{8} = (3 - \sqrt{8})^k, k \in \mathbb{N},$$

oduzimanjem prethodnih relacija i dijeljenjem s  $2\sqrt{8}$  dobivamo

$$n_k = \frac{1}{2\sqrt{8}}((3 + \sqrt{8})^k - (3 - \sqrt{8})^k).$$

Budući da je

$$n_k = B_k,$$

dobivamo eksplicitnu formulu za niz balansirajućih brojeva:

**Teorem 1.2.1.** *Vrijedi*

$$B_k = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( (3 + \sqrt{8})^k - (3 - \sqrt{8})^k \right), \quad (1.9)$$

za  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Relacija (1.9) se ponekad naziva *Binetova formula za balansirajuće brojeve*. Možemo je zapisati i u obliku

$$B_k = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( (1 + \sqrt{2})^{2k} - (\sqrt{2} - 1)^{2k} \right),$$

iz čega vidimo da je

$$B_k \approx \frac{\sqrt{2}}{8} (1 + \sqrt{2})^{2k},$$

za dovoljno velike  $k$ . Prvih nekoliko članovi niza  $(B_n)$  je

$$1, 6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, \dots$$

Za niz rješenja  $(n_k)$  Pellove jednadžbe (1.8) vrijedi sljedeća rekurzija:

$$n_{k+2} = 2m_1 n_{k+1} - n_k, \quad k \geq 0,$$

pri čemu je  $m_1 = 3$ , a početne vrijednosti su  $n_0 = 0$ ,  $n_1 = 1$ . Direktно slijedi sljedeća tvrdnja.

**Teorem 1.2.2.** *Vrijedi*

$$B_{k+2} = 6B_{k+1} - B_k, \quad (1.10)$$

za  $k \in \mathbb{N}_0$ , uz početne uvjete  $B_0 = 0$ ,  $B_1 = 1$ .

### 1.3 Identiteti

Budući da niz balansirajućih brojeva zadovoljava linearnu rekurziju (1.10), mogu se pokazati mnogi zanimljivi identiteti.

**Teorem 1.3.1.** *Za sve prirodne brojeve  $n$  vrijedi*

$$B_n^2 = 1 + B_{n-1}B_{n+1}. \quad (1.11)$$

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

**Baza:** Za  $n = 1$  imamo  $B_1^2 = 1 + B_0B_2$ , tj.  $1 = 1$ , pa tvrdnja vrijedi.

**Pretpostavka:** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki  $n = k$ .

**Korak:** Promatramo vrijedi li tvrdnja za  $n = k + 1$ . Koristeći pretpostavku i Teorem 1.2.2 imamo

$$\begin{aligned} B_{k+1}^2 &= (6B_k - B_{k-1})B_{k+1} \\ &= 6B_k B_{k+1} - B_{k-1} B_{k+1} \\ &= 6B_k B_{k+1} - (B_k^2 - 1) \\ &= B_k(6B_{k+1} - B_k) + 1 \\ &= B_k B_{k+2} + 1, \end{aligned}$$

čime je pokazano da tvrdnja vrijedi za  $n = k + 1$ . □

Uočimo da relacija (1.11) predstavlja nelinearnu rekurziju drugog reda:

$$B_{n+1} = \frac{B_n^2 - 1}{B_{n-1}}, \quad n \geq 2,$$

uz početne uvjete  $B_1 = 1$ ,  $B_2 = 6$ .

**Napomena 1.3.2.** Iz Teorema 1.3.1 možemo uočiti još jedno zanimljivo svojstvo. Naime,  $n$ -ti balansirajući broj je približno jednak geometrijskoj sredini svog neposrednog prethodnika i svog neposrednog sljedbenika,

$$B_n = \sqrt{B_{n+1}B_{n-1} + 1} \approx \sqrt{B_{n+1}B_{n-1}}.$$

Na primjer,  $B_6 = 6930$  a  $\sqrt{B_7 B_5} \approx 6929.99992$ . Rastom indeksa  $n$ , aproksimacija postaje sve bolja. Preciznije, vrijedi

$$B_n = \left\lceil \sqrt{B_{n+1}B_{n-1} + 1} \right\rceil,$$

pri čemu  $\lceil x \rceil$  označava najmanji cijeli broj koji nije manji od  $x$  a naziva se najmanje cijelo od  $x$  ili “strop” (eng. ceiling) od  $x$ .

**Teorem 1.3.3.** Neka su  $m$  i  $n$  prirodni brojevi. Tada vrijedi

$$B_{m+n} = B_m B_{n+1} - B_{m-1} B_n.$$

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

**Baza:** Iz Teorema 1.2.2 slijedi da tvrdnja vrijedi za  $n = 1$ .

**Pretpostavka:** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki  $n \leq k$ .

**Korak:** Promatramo vrijedi li tvrdnja za  $n = k + 1$ . Koristeći pretpostavku i Teorem 1.2.2 imamo

$$\begin{aligned} B_{m+k+1} &= 6B_{m+k} - B_{m+k-1} \\ &= 6(B_m B_{k+1} - B_{m-1} B_k) - (B_m B_k - B_{m-1} B_{k-1}) \\ &= B_m B_{k+2} - B_{m-1} B_{k+1}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za  $n = k + 1$ . □

**Korolar 1.3.4.** Za sve  $n \in \mathbb{N}$  vrijede sljedeći identiteti:

(a)  $B_{n+1} \cdot B_{n-1} = (B_n + 1)(B_n - 1)$ ,

(b)  $B_n = B_k \cdot B_{n-k+1} - B_{k-1} \cdot B_{n-k}$ ,  $k \leq n$ ,

*Dokaz.* (a) Direktno iz (1.11).

(b) Uz  $m + n = k$  iz Teorema 1.3.3 dobivamo  $B_k = B_m B_{k-m+1} - B_{m-1} B_{k-m}$ ,  $m \leq k$ .

□

**Korolar 1.3.5.** Za sve  $n \in \mathbb{N}$  vrijede sljedeći identiteti:

(a)  $B_{2n} = B_n(B_{n+1} - B_{n-1})$ ,

(b)  $B_{2n+1} = B_{n+1}^2 - B_n^2$ .

*Dokaz.* (a) Iz Korolara 1.3.4(b) zamjenom  $n$  s  $2n$  i  $k = n + 1$  dobivamo

$$B_{2n} = B_n \cdot B_{n+1} - B_{n-1} \cdot B_n.$$

(b) Analogno, iz Korolara 1.3.4(b) zamjenom  $n$  s  $2n + 1$  i  $k = n + 1$  dobivamo jednakost.

□

**Korolar 1.3.6.** Ako je  $n$  prirodan broj, tada vrijedi

(a)  $B_1 + B_3 + \dots + B_{2n-1} = B_n^2$ ,

(b)  $B_2 + B_4 + \dots + B_{2n} = B_n B_{n+1}$ ,

(c)  $B_1 + B_2 + \dots + B_{2n} = B_n(B_n + B_{n+1})$ .

*Dokaz.* (a) Zbrajanjem niza jednakosti iz Korolara 1.3.4(b) za  $n = 1, 2, \dots, k$  dobivamo

$$B_3 = \cancel{B_2^2} - B_1^2,$$

$$B_5 = \cancel{B_3^2} - \cancel{B_2^2},$$

$$B_7 = \cancel{B_4^2} - \cancel{B_3^2},$$

⋮

$$B_{2k-1} = \cancel{B_k^2} - \cancel{B_{k-1}^2},$$

$$B_{2k+1} = B_{k+1}^2 - \cancel{B_k^2},$$

-----

$$B_3 + B_5 + \dots + B_{2k+1} = B_{k+1}^2 - B_1^2 = B_{k+1}^2 - B_1,$$

pa slijedi tražena relacija jer je  $B_1 = 1$ .



(b) Na isti na način kao prethodno, samo iz Korolara 1.3.4(a).

(c) Zbrajanjem jednakosti iz (a) i (b).

□

## 1.4 Veza s kvadratno trokutastim brojevima

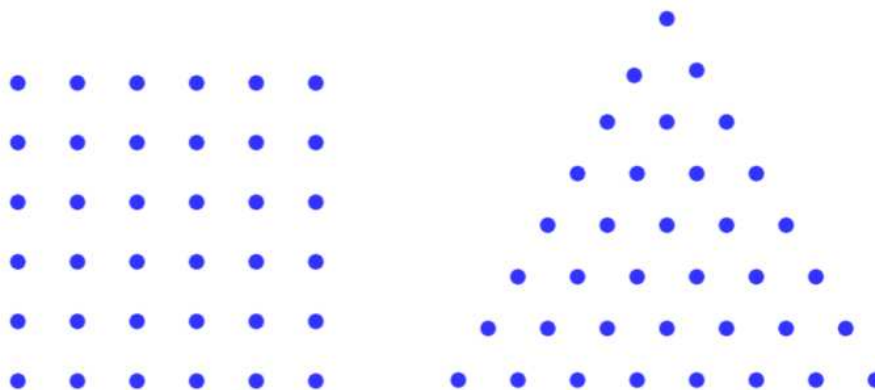
U odsječku 1.1 opisana je veza između balansirajućih brojeva i trokutastih brojeva. Dakle, balansirajući broj  $n$  je prirodan broj koji zadovoljava jednadžbu  $T_n + T_{n+1} = T_{n+r}$  za neki  $r \in \mathbb{N}_0$ . Nadalje,  $n$  je balansirajući broj ako i samo ako je  $n^2$  trokutasti broj (Teorem 1.1.3), odnosno

$$B_n^2 = T_{n+r},$$

gdje je  $r$  pripadni balanser.

**Definicija 1.4.1.** *Kvadratno trokutasti broj je broj koji je istovremeno trokutasti broj i kvadratni broj. Oznaka za  $n$ -ti kvadratno trokutasti broj je  $ST_n$ .*

Očito je  $ST_1 = 1$ . Najmanji netrivialan kvadratno trokutasti broj je  $ST_2 = 36$ .



Slika 1.4: Kvadratno trokutasti broj 36 kao trokut i kvadrat, duljina stranice kvadrata je  $n = 6$ , duljina stranica trokuta je  $n + 2 = 8$

Prema onome što smo pokazali niz kvadrata balansirajućih brojeva ( $B_n^2$ ) upravo predstavlja niz kvadratno trokutastih brojeva. Dakle, kvadrat svakog balansirajućeg broja je kvadratno trokutasti broj i obratno korijen svakog kvadratno trokutastog broja je balansirajući broj.

Koristeći Teorem 1.2.2 i Teorem 1.3.1, možemo naći rekurzivnu relaciju za kvadratno trokutaste brojeve.

**Teorem 1.4.2.** *Niz kvadratno trokutastih brojeva  $(ST_n)$  zadovoljava sljedeću rekurzivnu relaciju*

$$ST_{n+1} = 34ST_n - ST_{n-1} + 2, \quad n \geq 3,$$

uz početne uvjete  $ST_1 = 1, ST_2 = 6$ .

*Dokaz.* Kvadriranjem obje strane rekurzivne relacije (1.10), imamo

$$\begin{aligned} B_{n+1}^2 &= 34B_n^2 - (12B_nB_{n-1} - 2B_n^2 - B_{n-1}^2) \\ &= 34B_n^2 - 2(B_{n+1} + B_{n-1})B_{n-1} + 2B_n^2 + B_{n-1}^2 \\ &= 34B_n^2 + 2(B_n^2 - B_{n+1}B_{n-1}) - B_{n-1}^2 \end{aligned}$$

Kako je, prema Teoremu 1.3.1  $B_{n+1}B_{n-1} = B_n^2 - 1$ , dobivamo

$$B_{n+1}^2 = 34B_n^2 - B_{n-1}^2 + 2,$$

što je upravo

$$ST_{n+1} = 34ST_n - ST_{n-1} + 2$$

jer je  $ST_n = B_n^2$ . □

## Poglavlje 2

# Funkcije povezane s balansirajućim brojevima

U ovom poglavlju bavimo se funkcijom izvodnicom za niz balansirajućih brojeva te funkcijama koje generiraju balansirajuće brojeve.

### 2.1 Funkcije izvodnice

Funkcije izvodnice su koristan alat koji se primjenjuje za rješavanje različitih problema iz područja kombinatorike i vjerojatnosti, te za manipulaciju nizovima (posebno rekurzivnim). Ideja je nizu brojeva pridružiti funkciju. Konkretno, nizu brojeva  $(a_n)_{n \geq 0}$  pridružujemo tzv. *formalni red potencija*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

kojeg nazivamo *funkcija izvodnica*. Pod pojmom *formalni* mislimo da se ne obaziremo na problem konvergencije reda ili možemo razmišljati na način da varijabli  $x$  nije dodijeljena nikakva vrijednost. Također, nad ovim redovima možemo izvoditi određene operacije na čisto formalnoj razini. Naravno, funkcija  $f$  je definirana za sve  $x$  u kojima je red  $\sum_{i=1}^n a_i x^i$  konvergentan.

Dajemo nekoliko primjera funkcija izvodnica poznatih nizova:

$$\begin{aligned} (1, 1, 1 \dots) &\mapsto 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \\ (1, -1, 1, -1 \dots) &\mapsto 1 - x + x^2 - x^3 \dots = \frac{1}{1+x}, \\ (1, 0, 1, 0, \dots) &\mapsto 1 + x^2 + x^4 \dots = \frac{1}{1-x^2}, \\ \left(\frac{1}{n!}\right) &\mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots = e^x, \end{aligned}$$

Funkcija izvodnica za poznati Fibonaccijev niz  $(F_n)$  zadan rekurzijom  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  glasi

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

## Operacije s redovima

Neka su

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

dva formalna reda potencija.

**Zbrajanje redova.** Za njihovu sumu vrijedi

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

**Množenje reda skalarom.** Ako je  $\alpha$  bilo koji skalar,

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n.$$

**Množenje redova.** Dva se formalna reda  $A(x) = \sum a_k x^k$ ,  $B(x) = \sum b_j x^j$  mogu pomnožiti na prirodan način: svaki član prvog reda množi se sa svakim članom drugog reda. Dobi-  
veni se umnošci mogu srediti tako da se zbroje koeficijenti uz istu potenciju  $x^n$ . Za svaki  $n$

broj takvih koeficijenata je konačan, pa je taj zbroj uvijek konačan. Zato je rezultat ponovo formalni red koji ćemo označiti s  $C(x) = \sum c_n x^n$  :

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

Koeficijent uz član  $x^n$  dobit ćemo na ovaj način: ako je iz prve sume odabran član  $a_k x^k$ ,  $k \leq n$ , onda se on treba pomnožiti s članom  $b_{n-k} x^{n-k}$  druge sume. Prema tome, uz potenciju  $x^n$  nalaziti će se zbroj koeficijenata  $a_k b_{n-k}$ , za sve vrijednosti  $k$  od 0 do  $n$ :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0.$$

Formalni izvod ove formule je

$$A(x)B(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j x^{k+j}.$$

U dvostrukoj sumi s desne strane grupirat ćemo zajedno članove s istom potencijom  $k + j$ . Neka je taj zbroj označen s  $n = k + j$ . Zatim ćemo ih poredati prema rastućoj potenciji  $n$ . Tada dobivamo

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k+j=n} a_k b_j \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

## 2.2 Funkcija izvodnica za balansirajuće brojeve

**Teorem 2.2.1.** *Funkcija izvodnica niza balansirajućih brojeva  $(B_n)$  je*

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}.$$

*Dokaz.* Prema definiciji funkcija izvodnica je dana redom potencija

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n. \quad (2.1)$$

Funkciju ćemo izvesti tako što pomnožimo rekurziju (1.10) za  $(B_n)$  s  $x^n$ ,

$$B_{n+1} x^n = 6B_n x^n + B_{n-1} x^n,$$

a zatim sumiramo po svim  $n \in \mathbb{N}$ . Dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1} x^n = 6 \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} x^n,$$

odnosno

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1} x^{n+1} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} B_{n-1} x^{n-1}.$$

Prema (2.1) imamo

$$\frac{1}{x}(g(x) - x) = 6g(x) - xg(x),$$

tj.

$$(1 - 6x + x^2)g(x) = x,$$

iz čega slijedi tvrdnja.  $\square$

Pomoću funkcije izvodnice pronaći ćemo još jednu eksplicitnu formulu za opći član niza balansirajućih brojeva.

**Korolar 2.2.2.** Za  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 6^{n-k}. \quad (2.2)$$

*Dokaz.* Koristimo Taylorov razvoj u red funkcije

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{1 - (6x - x^2)} \\ &= x(1 + (6x - x^2) + (6x - x^2)^2 + (6x - x^2)^3 + \dots) \\ &= x + x^2(6 - x) + x^3(6 - x)^2 + x^4(6 - x)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} (6 - x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \left( 6^k - \binom{k}{1} 6^{k-1} x + \binom{k}{2} 6^{k-2} x^2 - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} 6x^{k-1} + (-1)^k \binom{k}{k} 6^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( 6^k x^{k+1} - \binom{k}{1} 6^{k-1} x^{k+2} + \binom{k}{2} 6^{k-2} x^{k+3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} 6x^{2k} + (-1)^k \binom{k}{k} x^{2k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} 6^{k-i} x^{k+i+1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sada red dobiven u (2.2) uspoređujemo s redom  $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ , odnosno tražimo koeficijente uz iste potencije od  $x$ .

Odredimo najprije koeficijente uz neparne potencije  $x^{2n+1}$ . Trebamo naći parove  $(i, k)$  za koje je  $k + i + 1 = 2n + 1$  i  $0 \leq i \leq k$ . To su sljedeći parovi

$$(i, k) = (0, 2n), (1, 2n - 1), (2, 2n - 2), (3, 2n - 3), \dots, (n, n),$$

pa je

$$B_{2n} = \binom{2n}{0} 6^{2n} + \binom{2n-1}{1} 6^{2n-2} + \binom{2n-2}{2} 6^{2n-4} + \dots + \binom{n}{n} 6^0$$

Sada odredimo koeficijente uz parne potencije  $x^{2n}$ . Parovi  $(i, k)$  za koje je  $k + i + 1 = 2n$  i  $0 \leq i \leq k$  su

$$(i, k) = (0, 2n - 1), (1, 2n - 2), (2, 2n - 3), (3, 2n - 4), \dots, (n - 1, n),$$

te dobivamo

$$B_{2n+1} = \binom{2n-1}{0} 6^{2n-1} + \binom{2n-2}{1} 6^{2n-3} + \binom{2n-3}{2} 6^{2n-5} + \dots + \binom{n}{n-1} 6^1.$$

Posljednje dvije formule daju (2.2). □

## 2.3 Funkcije koje generiraju balansirajuće brojeve

Definiramo funkcije

$$F(x) = 2x \sqrt{8x^2 + 1}, \quad (2.4)$$

$$G(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}, \quad (2.5)$$

$$H(x) = 17x + 6 \sqrt{8x^2 + 1}, \quad (2.6)$$

$$K(n) = 6x \sqrt{8x^2 + 1} + 16x^2 + 1, \quad (2.7)$$

za svaki  $x \in \mathbb{R}$ . Pokazat ćemo da navedene funkcije generiraju balansirajuće brojeve.

**Teorem 2.3.1.** *Ako je  $n$  balansirajući broj, onda su  $F(n)$ ,  $G(n)$ ,  $H(n)$  i  $K(n)$  također balansirajući brojevi.*

*Dokaz.* Pokazali smo da ako je  $n$  balansirajući broj, onda je  $8n^2 + 1$  potpun kvadrat (Teorem 1.1.4). Stoga je

$$\frac{8n^2(8n^2 + 1)}{2} = 4n^2(8n^2 + 1)$$

trokutasti broj koji je također potpun kvadrat, tj. to je kvadratni trokutasti broj. Korijen kvadratnog trokutastog broja je (parni) balansirajući broj  $2n \sqrt{8n^2 + 1} = F(n)$ .

Kako je  $8n^2 + 1$  potpun kvadrat, slijedi da je

$$8(G(n))^2 + 1 = (8n + 3 \sqrt{8n^2 + 1})^2$$

također potpun kvadrat, stoga  $G(n)$  je balansirajući broj (Teorem 1.1.4).

Kako je

$$H(n) = G(G(n)),$$

slijedi da je i  $H(n)$  balansirajući broj.

Slično, zbog

$$K(n) = G(F(n)),$$

slijedi da je  $K(n)$  balansirajući broj. □

**Napomena 2.3.2.** Za svaki balansirajući broj  $n$ ,  $F(n)$  je uvijek paran, a  $K(n)$  je uvijek neparan.  $G(n)$  je paran kada je  $n$  neparan i  $G(n)$  je neparan kada je  $n$  paran, a  $H(n)$  je iste parnosti kao i  $n$ .

Zanima nas postoji li među funkcijama (2.4) - (2.7) neka koja će za dani balansirajući broj  $B_k$  generirati sljedeći član niza  $B_{k+1}$ . Prema prethodnoj napomeni to ne mogu biti funkcije  $F$ ,  $K$  i  $H$  jer su susjedna dva člana balansirajućeg niza različite parnosti. Pokazat ćemo se da opisano svojstvo ima funkcija  $G$ .

**Teorem 2.3.3.** Ako je  $n$  balansirajući broj, onda je  $G(n)$  njegov sljedbenik, tj.  $G(B_k) = B_{k+1}$ .

*Dokaz.* Neka je  $n = B_k$ . Rekurzivna relacija (1.10) daje

$$B_{k+1} = 6B_k - B_{k-1} = 3B_k + (3B_k - B_{k-1}). \quad (2.8)$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} (3B_k - B_{k-1})^2 &= 9B_k + B_{k-1}^2 - 6B_k B_{k-1} \\ &= 9B_k^2 + B_{k-1}^2 - B_{k-1}(B_{k+1} + B_{k-1}) \\ &= 9B_k^2 - (B_k^2 - 1) \\ &= 8B_k^2 + 1. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (2.8) imamo

$$G(B_k) = 3B_k + \sqrt{8B_k^2 + 1} = 3B_k + 3B_k - B_{k-1} = B_k - B_{k-1} = B_{k+1}.$$

□



Funkcija  $G$  je strogo rastuća (na čitavoj domeni  $\mathbb{R}$ ), stoga je ona bijekcija. Lako se može provjeriti da je inverz funkcije  $G$  dan s

$$G^{-1}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Prema Teoremu (2.3.3) slijedi da je  $G^{-1}(B_k) = B_{k-1}$ , odnosno da je  $G^{-1}(n)$  prethodnik balansirajućeg broja  $n$ . Dakle, vrijede sljedeće rekurzivne relacije (prvog reda).

**Korolar 2.3.4.** Za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijede relacije

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1}, \\ B_{n-1} &= 3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}. \end{aligned}$$

Kako je  $H = G \circ G$ , pomoću funkcije  $H$  možemo generirati podniz balansirajućih brojeva s parnim, odnosno neparnim indeksom. Inače, balansirajući brojevi s neparnim indeksom su neparni a s parnim indeksom su parni brojevi.

**Korolar 2.3.5.** Za svaki  $n \in \mathbb{N}_0$  vrijedi

$$B_{n+2} = 17B_n + 6\sqrt{8B_n^2 + 1}.$$

Pokazali smo da su  $F(n)$ ,  $G(n)$  i  $H(n)$  balansirajući za neki balansirajući broj  $n$ . Poopćimo li funkcije  $F$ ,  $G$ , i  $H$  možemo se pitati za koje prirodne brojeve  $p$  i  $q$  je

$$B = pn + q\sqrt{8n^2 + 1}$$

balansirajući broj. To vrijedi ako i samo ako je

$$8B^2 + 1 = (8qn + p\sqrt{8n^2 + 1})^2 + 8q^2 - p^2 + 1$$

potpun kvadrat. Ako je  $8q^2 - p^2 + 1 = 0$ , onda je  $8B^2 + 1 = \square$ . Primijetimo da je  $8q^2 + 1 = p^2$  ako i samo ako je  $q$  balansirajući broj. Zato definiramo funkciju

$$f(x, y) = x\sqrt{8y^2 + 1} + y\sqrt{8x^2 + 1}.$$

**Teorem 2.3.6.** Ako su  $m$  i  $n$  balansirajući brojevi, tada je

$$f(m, n) = m\sqrt{8n^2 + 1} + n\sqrt{8m^2 + 1} \quad (2.9)$$

također balansirajući broj.

**Napomena 2.3.7.** *Veza funkcije  $f(x, y)$  s funkcijama  $F(x)$ ,  $G(x)$ ,  $H(x)$  i  $K(x)$ :*

(a)  $f(x, x) = F(x)$ ,

(b)  $f(x, 1) = G(x)$ ,

(c)  $f(x, 6) = H(x)$ ,

(d)  $f(x, G(x)) = K(x)$ .

Kombinirajući prethodno može se pokazati

**Napomena 2.3.8.** *Ako su  $x$ ,  $y$  i  $z$  balansirajući brojevi, tada je*

$$x\sqrt{8y^2+1} \cdot \sqrt{8z^2+1} + y\sqrt{8x^2+1} \cdot \sqrt{8z^2+1} + z\sqrt{8x^2+1} \cdot \sqrt{8y^2+1} + 8xyz$$

*također balansirajući broj.*

## 2.4 Lucas-balansirajući brojevi

**Definicija 2.4.1.** *Za  $n$ -ti balansirajući broj  $B_n$ , definiramo njemu pripadni  $n$ -ti **Lucas balansirajući broj***

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}.$$

Zanimljivo je da niz Lucas balansirajućih brojeva ( $C_n$ ) zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz balansirajućih brojeva.

**Teorem 2.4.2.** *Vrijedi*

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*uz početne uvjete  $C_0 = 1$ ,  $C_1 = 3$ .*

*Dokaz.* Prema definiciji Lucas balansirajućeg broja i Korolaru 2.3.4 vrijedi

$$\begin{aligned} C_{n+1}^2 &= 8B_{n+1}^2 + 1 = 8\left(3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1}\right)^2 + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_n^2 + 1} + 8B_n\right)^2 = (3C_n + 8B_n)^2. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$C_{n+1} = 3C_n + 8B_n. \tag{2.10}$$

Slično,

$$\begin{aligned} C_{n-1}^2 &= 8B_{n-1}^2 + 1 = 8\left(3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}\right)^2 + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_n^2 + 1} - 8B_n\right)^2 = (3C_n - 8B_n)^2. \end{aligned}$$

Kako je  $3C_n - 8B_n > 0$ , vrijedi

$$C_{n-1} = 3C_n - 8B_n. \quad (2.11)$$

Zbrajanjem (2.10) i (2.11), slijedi

$$C_{n+1} + C_{n-1} = 6C_n. \quad (2.12)$$

□

Prvih nekoliko Lucas-balansirajućih brojeva je

$$1, 3, 17, 99, 577, 3363, 19601, 114243, 665857, \dots$$

**Teorem 2.4.3.** *Vrijedi*

$$C_n = \frac{1}{2} \left( (3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n \right), \quad n \geq 0.$$

*Dokaz.* Tvrdnju ćemo dokazati tako da ćemo riješiti rekurzivnu relaciju (2.12) uz početne uvjete  $C_0 = 1$  i  $C_1 = 3$ .

Uvrštavanjem  $C_n = x^n$  u (2.12) dobivamo karakterističnu jednadžbu

$$x^{n+1} + x^{n-1} = 6x^n$$

tj.

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Izračunajmo korijene:  $3 + 2\sqrt{2}$ ,  $3 - 2\sqrt{2}$ , pa je opće rješenje te rekurzije dano s

$$C_n = \alpha \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n + \beta \cdot (3 - 2\sqrt{2})^n.$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  konstante koje određujemo iz početnih uvjeta, odnosno  $C_0 = 1$ ,  $C_1 = 3$ . Dakle

$$\alpha + \beta = 1,$$

$$\alpha \cdot (3 + 2\sqrt{2}) + \beta \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 3.$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Stoga je

$$C_n = \frac{1}{2} \left( (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n \right).$$

□

**Korolar 2.4.4.** Vrijedi

$$C_n \pm 1 = \frac{1}{2} \left( (\sqrt{2} + 1)^n \pm (\sqrt{2} - 1)^n \right)^2, \quad n \geq 0$$

*Dokaz.* Očito je  $(\sqrt{2} \pm 1)^2 = (3 \pm 2\sqrt{2})$ .

□

**Napomena 2.4.5.** Uočimo da je za neparan  $n$ ,  $n = 2k + 1$ ,  $C_n + 1$  jednako potpunom kvadratu

$$C_{2k+1} + 1 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^k 2 \binom{2k+1}{2i+1} (\sqrt{2})^{2i+1} \right)^2 = 4 \left( \sum_{i=0}^k \binom{2k+1}{2i+1} 2^i \right)^2.$$

Stoga je  $\sqrt{C_{2k+1} + 1}$  paran prirodan broj za svaki  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Slično,

$$C_{2k+1} - 1 = 2 \left( \sum_{i=0}^k \binom{2k+1}{2i+1} 2^i \right)^2$$

pa je  $\sqrt{(C_{2k+1} - 1)/2}$  neparan prirodan broj za svaki  $k \in \mathbb{N}_0$ .

## Poglavlje 3

# Balansirajući brojevi i Pitagorina jednadžba

### 3.1 Pitagorine trojke

**Definicija 3.1.1.** Uređenu trojku prirodnih brojeva  $(x, y, z)$  zovemo **Pitagorina trojka** ako su  $x, y$  katete, a  $z$  hipotenuza nekog pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (3.1)$$

Ako su  $x, y, z$  relativno prosti, onda kažemo da je  $(x, y, z)$  **primitivna Pitagorina trojka**.  
Diofantska jednadžba (3.1) naziva se **Pitagorina jednadžba**.

Uočimo da u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki točno jedan od brojeva  $x, y$  je paran. Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da je  $y$  paran.

**Teorem 3.1.2.** Sve primitivne Pitagorine trojke  $(x, y, z)$  u kojima je  $y$  paran, dane su formulama

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2,$$

gdje su  $m, n$  relativno prosti prirodni brojevi različite parnosti i  $m > n$ .

**Korolar 3.1.3.** Sva rješenja u skupu prirodnih brojeva Pitagorine jednadžbe (3.1) su

$$(x, y, z) = (k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2))$$

gdje su  $k, m, n$  prirodni brojevi i  $m > n$ .

## 3.2 Specijalna Pitagorina jednadžba

U ovom odsječku promatramo Pitagorinu jednadžbu kojoj se katete razlikuju za 1, odnosno jednadžbu

$$x^2 + (x + 1)^2 = y^2. \quad (3.2)$$

Uočimo da *egipatski trokut* (3, 4, 5) zadovoljava prethodnu jednadžbu, odnosno (3, 5) je jedno rješenje od (3.2). Naći ćemo vezu između rješenja jednadžbe (3.2) i balansirajućih brojeva.

Pretpostavimo da je  $(x, y)$  neko rješenje jednadžbe (3.2) u  $\mathbb{N}$ . Tada je

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2,$$

pa množenjem prethodne relacije s 2 dobivamo

$$2y^2 - 1 = (2x + 1)^2.$$

Množenjem s  $y^2$  slijedi

$$\frac{(2y^2 - 1)2y^2}{2} = y^2(2x + 1)^2 = \square.$$

Dakle,  $y^2(2y^2 - 1)$  je kvadratno trokutasti broj. Kako su  $y^2$  i  $2y^2 - 1$  neparni,  $y^2(2y^2 - 1)$  je neparan kvadratno trokutasti broj. U odsječku 1.4 ustanovili smo da je svaki kvadratno trokutasti broj jednak kvadratu nekog balansirajućeg broja. Budući da je  $y^2(2y^2 - 1)$  neparan (jer je  $y$  neparan), slijedi da postoji  $k \in \mathbb{N}_0$  takav da je

$$B_{2k+1}^2 = y^2(2y^2 - 1).$$

Stoga je

$$y^2 = \frac{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}{4},$$

odnosno

$$y = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}}{2}.$$

Iz

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{1 + \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}}{4},$$

dobivamo da je

$$x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1} - 1}{2}} - 1 \right).$$

Možemo pojednostaviti izraze za  $x$  i  $y$  tako da upotrijebimo Lucas-balansirajući broj

$$C_{2k+1} = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}.$$

Prema tome, pokazali smo ako je  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  jednadžbe (3.2), onda postoji  $k \in \mathbb{N}_0$  takav da je

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{C_{2k+1} - 1}{2}} - 1 \right), \\ y &= \frac{1}{2} \sqrt{C_{2k+1} + 1}. \end{aligned}$$

**Teorem 3.2.1.** Sva rješenja jednadžbe (3.2) dana su s

$$(x, y) = \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(C - 1)} - 1}{2}, \frac{\sqrt{1 + C}}{2} \right), \quad (3.3)$$

gdje  $C = \sqrt{8B^2 + 1}$  je Lucasov balansirajući broj koji odgovara neparnom balansirajućem broju  $B$ .

*Dokaz.* Pokazali smo da ako je  $(x, y)$  neko rješenje jednadžbe (3.2), onda postoji  $k \in \mathbb{N}_0$  takav da za  $C = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}$  vrijedi (3.3).

Još se treba uvjeriti da je (3.3) rješenje za  $C = \sqrt{8B_{2k+1}^2 + 1}$  i svaki  $k \in \mathbb{N}_0$ . Očito je

$$2x^2 + 2x + 1 = \frac{C + 1}{4} + 1 = y^2.$$

Prema Napomeni 2.4.5 slijedi da su formulama u (3.3) dobro definirani prirodni brojevi.  $\square$

Prvih nekoliko rješenja Pitagorine jednadžbe (3.2) su

$$(x, y) = (0, 1), (3, 5), (20, 29), (119, 169), (696, 985), \dots$$

Zanimljivo je da su rješenja jednadžbe (3.2) u  $y$  upravo Pellovi brojevi s neparnim indeksom. Pellovi brojevi su  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = 2$  a ostali se dobivaju rekurzijom

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

## Poglavlje 4

# Kobalansirajući brojevi

### 4.1 Definicija

U Poglavlju 1 smo razmotrili da prirodan broj  $n$  je balansirajući broj ako zadovoljava diofantsku jednadžbu

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + r) \quad (4.1)$$

za neki  $r \in \mathbb{N}_0$ , gdje je  $r$  balanser pridružen balansirajućem broju  $n$ . Modificiramo li relaciju (4.1), dolazimo do sljedeće relacije

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r), \quad (4.2)$$

na koju, ponovo, gledamo kao na *diofantsku jednadžbu* u nepoznicama  $n$  i  $r$ .

**Definicija 4.1.1.** *Neka su  $n \in \mathbb{N}$  i  $r \in \mathbb{N}_0$  brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu (4.3). Tada se  $n$  naziva **kobalansirajući broj**, a  $r$  njemu pridružen **kobalanser**. Oznaka za  $k$ -ti kobalansirajući broj je  $b_k$ .*

Prva tri kobalansirajuća broja su  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 14$  i  $b_3 = 84$  s kobalanserima 1, 6 i 35, redom.

Jednadžbu (4.1) možemo zapisati kao

$$n(n + 1) = \frac{(n + r)(n + r + 1)}{2}. \quad (4.3)$$

Uočimo da je desna strana u (4.3) jednaka  $n + r$ -tom trokutastom broju pa stoga vrijedi sljedeća karakterizacija kobalansirajućeg broja.

**Propozicija 4.1.2.** *Prirodan broj  $n$  je kobalansirajući ako i samo ako je  $n(n + 1)$  trokutasti broj.*



Prema prethodnoj propoziciji slijedi da se traženje kobalansirajućih brojeva svodi na traženje trokutastih brojeva koji su jednaki umnošku dvaju uzastopnih prirodnih brojeva. Ako je trokutasti broj  $T$  jednak umnošku  $n(n+1)$ , onda je  $\lfloor \sqrt{T} \rfloor$  kobalansirajući broj, gdje je  $\lfloor x \rfloor$  najveće cijelo broja  $x$ . Zaista, vrijedi  $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$ . Na primjer,  $T = 6$  je trokutasti broj koji je umnožak dva uzastopna broja i stoga je  $\lfloor \sqrt{6} \rfloor = 2$  kobalansirajući broj.

Jednadžbu (4.3) možemo shvatiti i kao kvadratnu jednadžbu u  $r$ :

$$r^2 + (2n+1)r - n^2 - n = 0.$$

Jasno je da je  $n$  kobalansirajući broj ako i samo ako postoji nenegativno cjelobrojno rješenje prethodne jednadžbe, tj. ako i samo ako je

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \quad (4.4)$$

nenegativan broj. Dakle vrijedi sljedeća karakterizacija kobalansirajućeg broja.

**Teorem 4.1.3.** *Prirodan broj  $n$  je kobalansirajući ako i samo ako je  $8n^2 + 8n + 1$  potpuni kvadrat.*

Kako je  $8 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$  potpuni kvadrat, niz kobalansirajućih brojeva ( $b_n$ ) proširujemo s  $b_0 = 0$ . (Prema definiciji, kobalansirajući brojevi su prirodni brojevi.)

Zanimljivo je da niz kobalansirajućih brojeva predstavlja niz balansera balansirajućih brojeva, i obratno niz balansirajućih brojeva predstavlja niz kobalansera kobalansirajućih brojeva. Ako u (4.4) umjesto  $n$  uvrstimo balaser  $r_B$  balansirajućeg broja  $B$  za kojeg prema (1.7) vrijedi

$$r_B = \frac{-2B - 1 + \sqrt{8B^2 + 1}}{2},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} r &= B - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8B^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 24B^2 - 8B \sqrt{1 + 8B^2}} \\ &= B - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8B^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(4B - \sqrt{1 + 8B^2})^2} \\ &= B - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8B^2} + 2B - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8B^2} \\ &= 3B - \sqrt{1 + 8B^2}. \end{aligned}$$

Prema Korolaru 2.3.4 je  $3B - \sqrt{1 + 8B^2}$  balansirajući broj, i to upravo prethodnik od  $B$ .

## 4.2 Funkcije povezane s kobalansirajućim brojevima

Definiramo funkcije:

$$\begin{aligned} F(x) &= 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1, \\ G(x) &= 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8, \\ H(x) &= 8x^2 + 8x + 1 + (2x + 1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1}, \end{aligned}$$

za  $x, y \geq 0$ . Pokazat ćemo da navedene funkcije uvijek generiraju kobalansirajuće brojeve.

Funkcija  $F(x) : [0, \infty) \rightarrow [2, \infty)$ , je strogo rastuća jer

$$F'(x) = 3 + \frac{4(3+1)}{\sqrt{8x^2 + 8x + 1}} > 0.$$

Dakle,  $F$  je bijekcija i njena inverzna funkcija  $F^{-1}$  je dana s

$$F^{-1}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

Također se može provjeriti da je  $x < F(x)$  za sve  $x \geq 0$ .

**Teorem 4.2.1.** *Neka su  $n$  i  $m$  kobalansirajući brojevi, onda su  $F(n)$ ,  $G(n)$ ,  $H(n)$  i  $f(n, m)$  također kobalansirajući brojevi.*

*Dokaz.* Koristimo se karakterizacijom kobalansirajućeg broja iz Teorema 4.1.3,  $n$  je kobalansirajući pa je  $8n^2 + 8n + 1$  jednak potpunom kvadratu i stoga je  $F(n) = k$  prirodan broj. Iz činjenice da je

$$F^{-1}(k) = k - \sqrt{8k^2 + 8k + 1} + 1,$$

prirodan broj dobivamo da je  $8k^2 + 8k + 1$  potpuni kvadrat, što povlači da je  $k = F(n)$  kobalansirajući broj.

Budući da je  $F(F(n)) = G(n)$ , slijedi da je i  $G(n)$  kobalansirajući broj.

Direktnom provjerom može se potvrditi da je  $8H(n)^2 + 8H(n) + 1$  potpun kvadrat. Zaista,

$$8H(n)^2 + 8H(n) + 1 = \left( (8n + 4)\sqrt{8n^2 + 8n + 1} + 16n^2 + 16n + 3 \right)^2.$$

□

U sljedećem teoremu ćemo dokazati da  $F(n)$  nije bilo koji kobalansirajući broj, već sljedeći kobalansirajući broj broju  $n$ .

**Teorem 4.2.2.** *Za svaki kobalansirajući broj  $n$ ,  $F(n)$  njegov sljedbenik, a  $F^{-1}(n)$  njegov prethodnik u nizu kobalansirajućih brojeva.*

*Dokaz.* Već smo pokazali da je  $F(n)$  kobalansirajući broj ako je  $n$  kobalansirajući. Analogno kao u dokazu Teorema 4.2.1 zaključujemo da je i  $F^{-1}(n)$  kobalansirajući.

Dalje dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

**Baza:** Direktnom provjerom za  $b_0 = 0$  i  $b_1 = 2$  vidimo da vrijedi  $F(b_0) = b_1$ .

**Pretpostavka:** Neka je  $k \in \mathbb{N}$ . Pretpostavimo je  $F(b_{k-1}) = b_k$

**Korak:** Trebamo pokazati da je  $F(b_k) = b_{k+1}$ . Pretpostavimo suprotno, tj.  $F(b_k) > b_{k+1}$ . (Drugih “suprotnih” pretpostavki nema jer je  $F(b_k)$  kobalansirajući broj i  $F$  strogo rastuća funkcija). Tada je

$$b_k < b_{k+1} < F(b_k),$$

te budući da je funkcija  $F$  rastuća vrijedi

$$F^{-1}(b_k) < F^{-1}(b_{k+1}) < b_k.$$

Prema pretpostavci indukcije je  $F^{-1}(b_k) = b_{k-1}$  i stoga je

$$b_{k-1} < F^{-1}(b_{k+1}) < b_k.$$

Kako je  $F^{-1}(b_{k+1})$  kobalansirajući broj, prethodna nejednakost nije moguća jer su  $b_{k-1}$  i  $b_k$  dva uzastopna kobalansirajuća broja. Dakle,  $F(b_k) = b_{k+1}$ .

Očito je  $F^{-1}(n)$  prethodnik kobalansirajućeg broja  $n$ . □

## Rekurzivna formula

Prema Teoremu 4.2.2 vrijedi  $F(b_n) = b_{n+1}$ ,  $F^{-1}(b_n) = b_{n-1}$ , za sve  $n \in \mathbb{N}$ , odnosno malo drugačije zapisano pokazali smo da vrijedi sljedeća tvrdnja.

**Korolar 4.2.3.** Za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijede relacije

$$b_{n+1} = 3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1,$$

$$b_{n-1} = 3b_n - \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1.$$

Zbrajanjem prethodnih dviju relacija dolazimo do rekurzivne linearne relacije drugog reda za niz kobalansirajućih brojeva.

**Teorem 4.2.4.** Vrijedi

$$b_{k+1} = 6b_k - b_{k-1} + 2, \tag{4.5}$$

za  $k \in \mathbb{N}$ , uz početne uvjete  $b_0 = 0, b_1 = 2$ .

Prvih nekoliko članova niza kobalansirajućeg niza brojeva je

$$0, 2, 14, 84, 492, 2870, 16730, 97512, \dots$$

Direktna posljedica Teorema 4.2.4 je

**Teorem 4.2.5.** *Svaki kobalansirajući broj je paran.*

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom.

**Baza:** Prva dva kobalansirajuća broja  $b_0 = 0$  i  $b_1 = 2$  su parna.

**Pretpostavka:** Pretpostavimo da je  $b_n$  paran za sve  $n \leq k$ .

**Korak:** Prema relaciji (4.5) lako se vidi da je i  $b_{k+1}$  također paran broj.  $\square$

## Lucas-kobalansirajući brojevi

**Definicija 4.2.6.** *Za svaki  $n$ -ti kobalansirajući broj  $b_n$  definiramo njemu pripadni  $n$ -ti Lucas-kobalansirajući broj*

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

U odsječku 2.4 vidjeli smo da niz Lucas-balansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz balansirajućih brojeva. Prema tome, očekujemo da niz Lucas-kobalansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao i niz kobalansirajućih brojeva. No, to nije istina. Niz Lucas-kobalansirajućih brojeva zadovoljava istu rekurzivnu relaciju kao niz balansirajućih brojeva.

**Teorem 4.2.7.** *Vrijedi*

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}, n \in \mathbb{N},$$

uz početne uvjete  $c_0 = 1, c_1 = 7$ .

*Dokaz.* Prema definiciji Lucas-kobalansirajućeg broja i Korolaru 4.2.3 slijedi

$$\begin{aligned} c_{n+1}^2 &= 8b_n^2 + 8b_n + 1 \\ &= 8\left(3b_n + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 1\right)^2 + 8b_{n+1} + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} + 8b_n + 4\right)^2 \\ &= (3c_n + 8b_n + 4)^2. \end{aligned}$$

Prema tome

$$c_{n+1} = 3c_n + 8b_n + 4. \quad (4.6)$$

Koristeći

$$c_{n-1}^2 = 8b_{n-1}^2 + 8b_{n-1} + 1$$

na sličan način, može se pokazati da vrijedi

$$c_{n-1}3c_n - 8b_n - 4. \quad (4.7)$$

Zbrajanjem (4.6) i (4.7), slijedi

$$c_{n+1} + c_{n-1} = 6c_n.$$

□

Navodimo prvih nekoliko članova Lucas-kobalansirajućeg niza brojeva:

$$1, 7, 41, 239, 1393, 8119, 47321, 275807, \dots$$

### Eksplicitna formula

Izvest ćemo eksplicitnu formulu za kobalansirajući broj  $b_n$  tako da ćemo riješiti rekurziju (4.5). Linearna rekurzija koju zadovoljava niz kobalansirajućih brojeva

$$b_{k+1} - 6b_k + b_{k-1} - 2 = 0 \quad (4.8)$$

nije homogena i zato ju najprije trebamo homogenizirati. Definiramo niz

$$d_n = b_n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

pa supstitucijom u (4.8) dobivamo

$$d_{k+1} - \frac{1}{2} - 6\left(d_k - \frac{1}{2}\right) + d_{k-1} - \frac{1}{2} - 2 = 0,$$

odnosno homogenu linearnu rekurziju

$$d_{k+1} - 6d_k + d_{k-1} = 0. \quad (4.9)$$

Njena karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0. \quad (4.10)$$

Korijeni  $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$  i  $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$  jednadžbe (4.10) su realni i različiti pa prema tome  $n$ -ti član niza  $(d_n)$  zadan rekurzijom (4.9) ima oblik

$$d_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \quad (4.11)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  konstante koje određujemo iz početnih uvjeta, odnosno iz  $d_0 = \frac{1}{2}$ ,  $d_1 = \frac{5}{2}$ . Dakle,

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = \frac{5}{2}. \quad (4.12)$$

Rješenje prethodnog sustava je

$$(\alpha, \beta) = \left( -\frac{\lambda_2 - 5}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \frac{\lambda_1 - 5}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \right),$$

odnosno

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2} + 1), \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2} - 1) \right).$$

Stoga je

$$d_n = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( (\sqrt{2} + 1)(3 + \sqrt{8})^n + (\sqrt{2} - 1)(3 - \sqrt{8})^n \right),$$

ili

$$d_n = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( (\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \right),$$

Ovaj rezultat dokazuje sljedeći teorem.

**Teorem 4.2.8.** *Vrijedi*

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( (\sqrt{2} + 1)^{2n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} \right) + \frac{1}{2}, \quad (4.13)$$

za  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Relacija (4.13) se ponekad naziva *Binetova formula za kobalansirajuće brojeve*.

## Funkcija izvodnica

Neka je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \quad (4.14)$$

**Teorem 4.2.9.** *Funkcija izvodnica niza kobalansirajućih brojeva  $(b_n)$  je*

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}.$$

*Dokaz.* Rekurzija (4.5) može se zapisati kao

$$b_{n+2} - 6b_{n+1} + b_n = 2.$$

Pomnožimo li obje strane rekurzije s  $x^{n+2}$ , dobivamo

$$b_{n+2}x^{n+2} - 6b_{n+1}x^{n+2} + b_nx^{n+2} = 2x^{n+2}.$$

Sumiranjem po  $n \in \mathbb{N}$  slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+2}x^{n+2} - 6 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2},$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+2}x^{n+2} - 6x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Prema (4.14) je

$$(f(x) - 2x^2) - 6xf(x) + x^2f(x) = \frac{2x^3}{1-x}.$$

tj.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

# Bibliografija

- [1] A. Behera and G. K. Panda, *On the square roots of triangular numbers*, *Fib. Quart.*, 37 (1999), 98–105.
- [2] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.
- [3] G. K. Panda, *Sequence balancing and cobalancing numbers*, *Fibonacci Quarterly*, 45 (2007), 265–271.
- [4] G. K. Panda, *Some fascinating properties of balancing numbers*, *Proceedings of the Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and their Applications*, *Cong. Numer.* 194 (2009), 185–189.
- [5] M. Penn, *Balancing Numbers*, video predavanje, <https://www.youtube.com/watch?v=jMfZ9jRshSI>
- [6] P. K. Ray, *Balancing and cobalancing numbers*, dissertation, Department of mathematics, National Institute of Technology Rourkela, India, 2009.
- [7] *Funkcije izvodnice*, [https://www.fer.unizg.hr/\\_download/repository/diskont1-04.pdf](https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/diskont1-04.pdf)



# Sažetak

U ovom radu definiramo *balansirajući* broj  $n \in \mathbb{N}$  kao rješenje diofantske jednačbe

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r),$$

gdje je  $r \in \mathbb{N}_0$  *balanser* pridružen broju  $n$ . Na primjer, 1, 6, 35 i 204 su balansirajući brojevi s balanserima 0, 2, 14 and 84, redom. Zanimljivo je da balansirajući brojevi zadovoljavaju linearnu rekurzivnu relaciju

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazat ćemo neka svojstva balansirajućih brojeva i ustanoviti povezanost s nekim klasičnim diofanstskim jednačbama. Također, definirat ćemo *kobalansirajuće* brojeve malo modificirajući jednačbu za balansirajuće brojeve i promatrat ćemo njihova svojstva.

# Summary

In this thesis we define *balancing* numbers  $n \in \mathbb{N}$  as a solution of the Diophantine equation

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r),$$

calling  $r \in \mathbb{N}_0$  the *balancer* corresponding to  $n$ . For example, 1, 6, 35 and 204 are balancing numbers with balancers 0, 2, 14 and 84, respectively. It is interesting that the balancing numbers satisfy linear recurrence relation

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

We show properties of balancing numbers and establish relation to some classic Diophantine equation. Also, we define the *cobalancing* numbers by slightly modifying equation for balancing numbers and observe their properties.

# Životopis

Rođena sam 16. prosinca 1995. godine u Varaždinu. Završila sam OŠ Podrute, PŠ Završje u Završju Podbelskom, a zatim sam upisala prirodoslovno-matematički smjer Prve gimnazije Varaždin. Nakon srednje škole upisala sam Prorodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu gdje sam završila preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički. Upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički, tijekom kojeg radim kao kreator matematičkog sadržaja u Photomath-u.