Upravljanje portfeljima

Bonassin, Sara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Sara Bonassin

UPRAVLJANJE PORTFELJIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Nela Bosner

Zagreb, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Lena, mama, papà, hvala na beskonačnoj podršci. Grazie.
Mojoj obitelji.
Algebrosima, koji su ovo iskustvo učinili još ljepšim.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Rizik i očekivani povrat portfelja **2**
1.1 Portfelj rizičnih vrijednosnica 2
1.2 Modeliranje povrata i rizika 3
1.3 Očekivani povrat i rizik portfelja vrijednosnica 6
1.4 Efikasna granica 14

2 Iterativne metode **19**
2.1 Pojmovi 21
2.2 Konvergencija standardnih iteracija 21
2.3 Jacobijeva metoda 23
2.4 Gauss-Seidelova metoda 26
2.5 SOR metoda 31

3 Model vrednovanja kapitalne imovine **37**
3.1 Pretpostavke CAPM modela 37
3.2 Pravac tržišta kapitala 38
3.3 Beta faktor 43
3.4 Pravac tržišta vrijednosnica 46

4 Numeričko rješavanje problema najmanjih kvadrata **49**
4.1 Opis linearnog problema najmanjih kvadrata 49
4.2 Numeričke metode za rješavanje problema najmanjih kvadrata 53

Bibliografija **65**

Uvod

Na razvijenim financijskim tržištima, konzervativni oblici štednje su manje zastupljeni te na važnosti dobiva ulaganje u vrijednosnice: dionice, obveznice, opcije i druge financijske izvedenice. Investicija u riskantnu vrijednosnicu uvijek nosi teret mogućeg gubitka, stoga investitori teže širenju investicije na portfelj više vrijednosnica. Cilj svakog investitora je pronaći način kako efikasno rasporediti svoj kapital uz najveći mogući povrat i najmanji mogući rizik.

Moderna teorija portfelja koju je uveo Harry M. Markowitz 50-ih godina 20. stoljeća temelji se na promatranju relativnih prirasta cijena vrijednosnica te definiciji povrata kao njihovog matematičkog očekivanja, a rizika kao njihove varijance. U prvom su poglavlju tako opisane postavke modela. U Modernoj teoriji portfelja naglasak je stavljen na činjenicu da se proces sastavljanja portfelja vrijednosnih papira ne sastoji samo od kupnje velikog broja vrijednosnica, čak i u slučaju da je njihov odnos očekivanog povrata i rizika vrlo povoljan, već je presudan i njihov međuodnos. Model nudi rezultate pomoću kojih je moguće odabrati portfelj vrijednosnica koji od svih mogućih, ima najmanji rizik ili koji uz zadani najmanji prihvatljivi povrat daje najmanje rizičan portfelj od svih mogućih portfelja s tim povratom. Time je opisan efikasan portfelj te pojam efikasne granice i njen izgled.

U prethodnim problemima, za rješavanje istih, potreban matematički alat je rješavanje linearnih sustava s matricom kovarijance. U drugom poglavlju su stoga opisane iterativne metode za rješavanje linearnih sustava: Jacobijeva, Gauss-Seidelova te SOR metoda. Kod ovih metoda, iteriranjem smanjujemo grešku u svakom koraku, a sve s namjerom poboljšanja početne iteracije. Nakon određenog broja iteracija, kojeg ćemo odabrati kako bi zadovoljili kriterij zaustavljanja, dobit ćemo dovoljno dobru aproksimaciju rješenja.

Model vrednovanja kapitalne imovine (engl. *Capital Asset Pricing Model*, CAMP) predstavlja alternativan i efikasniji način određivanja efikasnog portfelja. Opisuje rizik u odnosu na fluktuacije cijelog tržišta te određuje odnos između rizika i ravnoteže očekivanih povrata rizične vrijednosnice. Ne zahtijeva procjenu matrice kovarijance, već daje procjenu očekivanog povrata na portfelj oslanjajući se na linearnu regresiju kao metodu procjene.

U posljednjem poglavlju opisane su numeričke metode za rješavanje linearnog problema najmanjih kvadrata: rješavanje sustava normalnih jednadžbi pomoću faktorizacije Choleskog te QR faktorizacija.

Poglavlje 1

Rizik i očekivani povrat portfelja

1.1 Portfelj rizičnih vrijednosnica

Promatramo financijsko tržište s $n \in \mathbb{N}$ vrijednosnica. *Vrijednosnica* (vrijednosni papir, engl. *security*) je dokument koji glasi na određeni iznos ili koji vrijedi na tržištu prema potražnji. O vrijednosnicama možemo razmišljati kao o dionicama, opcijama, obveznicama, itd. Pretpostavljamo da se tom imovinom može trgovati u dva vremenska trenutka: $t = 0$, kojeg shvaćamo kao sadašnjost i $t = 1$, koje je neko fiksno vrijeme u budućnosti.
Promatramo dakle, jednoperiodni model kretanja cijena imovine.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Ω je prostor elementarnih događaja, gdje su $\omega \in \Omega$ moguća stanja svijeta, scenariji u budućnosti $t = 1$. Pretpostavljamo da je Ω konačan, tj. da se može dogoditi najviše konačno različitih scenarija: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, za neki $N \in \mathbb{N}$. Za σ-algebru događaja $\mathcal{F}$ uzimamo partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$, a za vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathbb{F})$ pretpostavljamo da zadovoljava uvjet $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$, tj. da su svi scenariji mogući.

U trenutku $t = 0$ cijenu (vrijednost) i-te vrijednosnice označit ćemo sa $S_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$, uz pretpostavku da nam je ta cijena poznata i $S_i(0) \geq 0$, za sve i. Cijena i-te vrijednosnice u trenutku $t = 1$ nam je u trenutku $t = 0$ nepoznata zbog slučajnih fluktuacija pa $S_i(1)$ promatramo kao slučajnu varijablu.

Definicija 1.1.1. Portfelj *je vektor $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, gdje x_i predstavlja broj jedinica i-te vrijednosnice koju investitor posjeduje u trenutku $t = 0$.*

Definicija portfelja dozvoljava da je $x_i \leq 0$. Pretpostavka $x_i \leq 0$ za neki $i = 1, 2, \ldots, n$ odgovara kratkoj prodaji vrijednosnice i. *Kratka prodaja* (engl. *short sale*) označava špekulativnu operaciju u kojoj investitor posuđuje vrijednosnice i prodaje ih kako bi ih otkupio prema očekivanom padu njihovih cijena i nakon što ih vrati, zaradio na padu cijena vrijednosnih papira.

Označimo s V(0) iznos koji je početno uložen u portfelj, tj. njegovu vrijednost u trenutku $t = 0$. Vrijedi

$$V(0) = x_1 S_1(0) + \cdots + x_n S_n(0)$$

Portfelj sastavljen od n različitih vrijednosnica može se opisati u terminima njihovih težina

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

gdje x_i predstavlja broj jedinica i-te vrijednosnice u portfelju, $S_i(0)$ je početna cijena vrijednosnice i, a V(0) je vrijednost portfelja u $t = 0$.

Težine zapisujemo u vektoru

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}.$$

Iz (1.1) možemo uočiti da je w_i udio početne vrijednosti portfelja uložen u vrijednosnicu i. Težine nisu nužno nenegativne. Ukoliko je dozvoljena kratka prodaja (engl. *short sell*), vrijedi da je za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i(0) < 0$, a zbog $S_i \geq 0$ slijedi da je $w_i < 0$. Tada je moguće da su neke težine negativne, a druge strogo veće od 1.
U sumi težine daju 1:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i S_i(0)}{V(0)} = \frac{1}{V(0)} \sum_{i=1}^{n} x_i S_i(0) = \frac{V(0)}{V(0)} = 1.$$

Što u matričnom obliku zapisujemo kao

$$1 = \mathbf{u}^\tau \mathbf{w}, \tag{1.2}$$

gdje je $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^\tau$, a $\mathbf{w}$ je vektor stupac težina.

1.2 Modeliranje povrata i rizika

Želimo modelirati ishode pojedinih investicija u vrijednosnice, no umjesto konkretnih novčanih tokova vezanih uz svaku pojedinačnu investiciju, uobičajeno modeliramo povrate na investicije.

Osnovna karakteristika koju želimo modelirati je nesigurnost budućih isplata prilikom investiranja koja proizlazi iz neizvjesnosti realizacije budućih događaja.

U opisanom modelu imamo N mogućih scenarija na tržištu pa moguće ishode ulaganja u vrijednosnicu i, za $i \in \{1, \ldots, n\}$, odnosno povrate, možemo opisati s

$$R_{i,k} = \frac{S_{i,k}(1) - S_i(0)}{S_i(0)}, \; k = 1, \ldots, N. \tag{1.3}$$

$S_{i,k}(1)$ označava cijenu vrijednosnice i u trenutku $t = 1$ za ishod ω_k, a $S_i(0)$ je početna cijena vrijednosnice i. Vjerojatnosti s kojima će se ti povrati ostvariti označene su s p_k, za $k = 1, \dots, N$. Uz uvjet da je $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, zadana je slučajna varijabla R_i koja opisuje moguće povrate na promatranu vrijednosnicu.

Primjerena mjera za rizik mora uzimati u obzir dva aspekta rizika:

1. razliku između određene referentne vrijednosti i stope povrata za svaki od događaja na tržištu

2. vjerojatnosti različitih događaja na tržištu

Promotrimo i-tu vrijednosnicu. Za referentnu vrijednost uzeto je $\mathbb{E}[R_i]$, očekivanje slučajne varijable R_i. Uz gornje oznake je očekivani povrat na investiciju, čije povrate modeliramo slučajnom varijablom R_i, dan s

$$\mathbb{E}[R_i] = \sum_{k=1}^{N} R_{i,k} p_k \tag{1.4}$$

Pod rizikom ćemo smatrati nesigurnost ostvarivanja očekivanog povrata na investiciju. Za mjeru rizika uzeta je varijanca slučajnu varijable, odnosno standardna devijacija. Formula za varijancu je

$$Var(R_i) = \sum_{k=1}^{N} (R_{i,k} - \mathbb{E}[R_i])^2 p_k \tag{1.5}$$

dok standardnu devijaciju računamo formulom

$$\sigma(R_i) = \Big(\sum_{k=1}^{N} (R_{i,k} - \mathbb{E}[R_{i,k}])^2 p_k \Big)^{1/2} = \sqrt{Var(R_i)} \tag{1.6}$$

Razlog zbog kojeg je standardna devijacija preferirana mjera rizika je taj što izražava vrijednosti u istim jedinicama kao i originalne podatke.

U procesu sastavljanja portfelja, presudan je međuodnos povrata na vrijednosnice od kojih je portfelj sastavljen. Za mjeru međuovisnosti uvodimo kovarijancu između povrata na vrijednosnice R_i, $i = 1, \dots, n$, a koji su modelirani slučajnim varijablama. Vrijedi

$$Cov(R_i, R_j) = \sum_{k=1}^{N} (R_{i,k} - \mathbb{E}[R_i])(R_{j,k} - \mathbb{E}[R_j]) p_k, \qquad i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{1.7}$$

Primjer 1.2.1. *Promotrimo tri vrijednosnice A, B i C, prema modelu je tada n=3. U trenutku t=0 cijene vrijednosnica dane su sljedećom tablicom*

Dionica	A	B	C
$S_i(0)$	480	368	454

Tablica 1.1: Cijene vrijednosnica u $t = 0$

Pretpostavimo model u kojem imamo N=3 moguća ishoda u budućnosti. U trenutku $t = 1$ *na tržištu kapitala moguća je recesija, stagnacija ili gospodarski rast, a vjerojatnosti za ta tri događaja su redom 0.45, 0.35 i 0.25. Cijene vrijednosnica u trenutku* $t = 1$ *modeliramo slučajnim varijablama* $S_1(1)$, $S_2(1)$ *i* $S_3(1)$ *i dane su u sljedećoj tablici*

Scenarij	Vjerojatnosti	$S_1(1)$	$S_2(1)$	$S_3(1)$
ω_1	0.45	340	203	534
ω_2	0.35	372	233	635
ω_3	0.25	444	322	1057

Tablica 1.2: Cijene vrijednosnica u $t = 1$

Povrati na vrijednosnice izračunati su prema (1.3)

Scenarij	Vjerojatnost	R_1	R_2	R_3
ω_1	0.45	-0.29167	-0.448369	0.176211
ω_2	0.35	-0.225	-0.366847	0.398678
ω_3	0.25	-0.075	-0.125	1.328193

Tablica 1.3: Povrati na vrijednosnice za svaki od tri moguća scenarija u $t = 1$

Iz prethodnih vrijednosti možemo izračunati očekivane povrate na vrijednosnice i njihove standardne devijacije. Očekivani povrat izračunat je iz (1.4)*, a standardna devijacija iz* (1.6) *i dani su u sljedećoj tablici*

Vrijednosnica	Očekivani povrat	Standardna devijacija
A	-0.22875	0.087726938
B	-0.36141304	0.131855095
C	0.55088106	0.471520470

Tablica 1.4: Očekivani povrati i standardne devijacije za vrijednosnice A, B, C

1.3 Očekivani povrat i rizik portfelja vrijednosnica

Neka se u trenutku $t = 1$ ostvario scenarij ω_k, $k \in \{1, \dots, N\}$. Tada je za svaku pojedinu vrijednosnicu postignuta cijena $S_{i,k}(1)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ i prema (1.3) povrat $R_{i,k}$. U nastavku, radi jednostavnosti, označimo s K_i realizaciju slučajne varijable R_i za ishod ω_k, $K_i = R_{i,k}$, tj. ostvareni povrat na i-tu vrijednosnicu te $S_i(1) = S_{i,k}(1)$.

Definicija 1.3.1. Skup mogućih portfelja *(engl. attainable set) je skup svih portfelja s težinama* $\mathbf{w}$ *koji zadovoljavaju* $1 = \mathbf{u}^\tau \mathbf{w}$. *Portfelji koji su elementi skupa mogućih portfelja nazivaju se* mogući portfelji *(engl. attainable portfolios).*

Propozicija 1.3.2. *Povrat K_V na portfelj koji se sastoji od n vrijednosnica je težinski prosjek ostvarenih povrata na svaku od vrijednosnica od kojih je portfelj sastavljen*

$$K_V = \sum_{i=1}^{n} w_i K_i = \mathbf{w}^\tau \mathbf{K}, \tag{1.8}$$

gdje je $\mathbf{w}$ *vektor težina, a* $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_n \end{bmatrix}^\tau$ *vektor ostvarenih povrata na vrijednosnice* $1, \dots, n$.

Dokaz. Pretpostavimo da se potrfelj sastoji od x_i vrijednosnica tipa i. Tada su početna i konačna vrijednost portfelja dane s

$$V(0) = x_1 S_1(0) + \cdots + x_n S_n(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i(0) S_i(0)$$

$$\begin{aligned} V(1) = x_1 S_1(1) + \cdots + x_n S_n(1) &\overset{(1.3)}{=} x_1 S_1(0)(1 + K_1) + \cdots + x_n S_n(0)(1 + K_n) \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i S_i(0)(1 + K_i) &= \sum_{i=1}^{n} V(0) w_i (1 + K_i) = V(0) \sum_{i=1}^{n} w_i (1 + K_i) \end{aligned}$$

Povrat na portfelj je

$$\begin{aligned} K_V = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} &= \frac{V(0) \sum_{i=1}^{n} w_i (1 + K_i) - V(0)}{V(0)} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{i=1}^{n} w_i K_i - 1 \\ &= w_1 K_1 + \cdots + w_n K_n = \mathbf{w}^\tau \mathbf{K} \end{aligned}$$

gdje jednakost (*) vrijedi zbog $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. □

Ako s μ_i označimo očekivani povrat, a sa σ_i standardnu devijaciju povrata na i-tu vrijednosnicu, $i = 1, \dots, n$, tada $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}^\tau$ označava vektor stupac očekivanih povrata i $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}^\tau$ vektor stupac standardnih devijacija povrata na vrijednosnice od kojih je portfelj sastavljen.

Kovarijance između povrata označit ćemo s $c_{ij} = Cov(K_i, K_j)$. To su elementi $n \times n$ kovarijacijske matrice

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Kovarijacijska matrica C je simetrična i pozitivno semidefinitna. Dijagonalni elementi su varijance povrata, $c_{ii} = Var(K_i)$. U nastavku, pretpostavljamo da C ima inverz C^{-1}.

Propozicija 1.3.3. *Očekivani povrat $\mu_V = E(K_V)$ na portfelj s* n *vrijednosnica i varijanca povrata $\sigma_V = Var(K_V)$ na portfelj s težinama* $\mathbf{w}$ *dani su s*

$$\mu_V = \mathbf{m}^\tau \mathbf{w} \tag{1.9}$$

$$\sigma_V^2 = \mathbf{w}^\tau \mathbf{C} \mathbf{w} \tag{1.10}$$

Dokaz. Zbog linearnosti matematičkog očekivanja vrijedi:

$$\mu_V = \mathbb{E}(K_V) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n w_i K_i\right] = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mathbf{m}^\tau \mathbf{w}$$

Za varijancu povrata portfelja vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sigma_V^2 = \mathrm{Var}(K_V) = Var\left(\sum_{i=1}^n w_i K_i\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i K_i - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n w_i K_i\right]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n w_i (K_i - \mu_i)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^n w_i^2 \mathrm{Var}(K_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \mathbb{E}[(K_i - \mathbb{E}[K_i])(K_j - \mathbb{E}[K_j])] \\
&= \sum_{i=1}^n w_i^2 \mathrm{Var}(K_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j Cov(K_i, K_j) \\
&= \sum_{i=1}^n w_i^2 \mathrm{Var}(K_i) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j c_{ij} \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i c_{ij} w_j = \mathbf{w}^\tau \mathbf{C} \mathbf{w}
\end{aligned}$$

gdje jednakost (*) vrijedi zbog $c_{ij} = c_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$, odnosno simetričnosti matrice **C**. □

Želimo riješiti sljedeća dva problema:

1. Naći portfelj s najmanjom varijancom u skupu mogućih portfelja. Takav portfelj naziva se *portfelj minimalne varijance* (engl. *minimum variance portfolio*).

2. Naći portfelj s najmanjom varijancom među svim portfeljima u skupu mogućih portfelja čiji očekivani povrat je jednak zadanoj vrijednosti μ_V. Familija takvih portfelja, parametrizirana s μ_V naziva se *skup minimalne varijance* (engl. *minimum variance line*)

Propozicija 1.3.4. *Portfelj minimalne varijance u skupu mogućih portfelja ima težine*

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^{\tau}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}} \tag{1.11}$$

uz uvjet da je nazivnik različit od nule.

Dokaz. Tražimo minimum (1.10) uz uvjet (1.2). Za to koristimo metodu Lagrangeovih multiplikatora.
Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$F(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^{\tau}\mathbf{C}\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{u}^{\tau}\mathbf{w} - 1)$$

gdje je λ Lagrangeov multiplikator. Nužan uvjet za uvjetni ekstrem je da su parcijalne derivacije funkcije F po svim varijablama, u točki ekstrema jednake 0.

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{u}^{\tau}\mathbf{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{u}^{\tau}\mathbf{w} = 1$$

Izjednačimo s 0 parcijalne derivacije od F po težinama w_i. Za $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial w_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i c_{ij} w_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} w_i\right) = 2\sum_{i=1}^{n} c_{ki} w_i - \lambda$$

što slijedi iz

$$\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i c_{ij} w_j\right) = 2w_k c_{kk} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} c_{kj} w_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} w_i c_{ik} = 2\sum_{i=1}^{n} c_{ki} w_i$$

gdje posljednja jednakost vrijedi zbog simetričnosti matrice C.
Tada slijedi da je

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{C}\mathbf{w} - \lambda \mathbf{u} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\mathbf{C}\mathbf{w} - \lambda \mathbf{u} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{w} = \frac{\lambda}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}$$

Tako dobivamo sustav koji nam daje nužan uvjet za minimum:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{u}^\tau \mathbf{w} \\ \mathbf{w} &= \frac{\lambda}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} \end{aligned}$$

Supstitucijom **w** u prvu jednadžbu, dobivamo

$$1 = \mathbf{u}^\tau \mathbf{w} = \mathbf{u}^\tau \left(\frac{\lambda}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}\right) = \frac{\lambda}{2}\mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}$$

Rješavanjem posljednje jednadžbe po λ i uvrštavanjem u izraz za **w**, dobivamo da je uvjetni minimum (1.10) dan s

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}}$$

što je i trebalo pokazati. □

Propozicija 1.3.5. *Portfelj s najmanjom varijancom među svim mogućim portfeljima s očekivanjem μ_V ima težine*

$$\mathbf{w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \\ \mu_V & \mathbf{m}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \end{vmatrix} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} + \begin{vmatrix} \mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & 1 \\ \mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} & \mu_V \end{vmatrix} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}}{\begin{vmatrix} \mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & \mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \\ \mathbf{u}^\tau \mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} & \mathbf{m}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}^\tau \end{vmatrix}} \tag{1.12}$$

uz uvjet da je determinanta u nazivniku različita od 0. Težine linearno ovise o μ_V.

Dokaz. Tražimo minimum (1.10) uz ograničenja (1.2) i (1.9). Naime, težine u sumi moraju dati 1 za bilo koji mogući portfelj, a dani očekivani povrat μ_V zadovoljava $\mu_V = \mathbf{m}^\tau \mathbf{w}$. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$G(\mathbf{w}, \lambda, \mu) = \mathbf{w}^\tau \mathbf{C}\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{u}^\tau \mathbf{w} - 1) - \mu(\mathbf{m}^\tau \mathbf{w} - \mu_V)$$

gdje su λ i μ Lagrangeovi multiplikatori.
Parcijalne derivacije od G po svim varijablama izjednačene s 0 daju nužan uvjet za minimum:

$$0 = \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{u}^\tau \mathbf{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{u}^\tau \mathbf{w} = 1$$
$$0 = \frac{\partial G}{\partial \mu} = \mu_V - \mathbf{m}^\tau \mathbf{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{m}^\tau \mathbf{w} = \mu_V$$

Izjednačimo s 0 parcijalne derivacije od G po težinama w_i. Za $k \in \{1, \dots, n\}$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial w_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i c_{ij} w_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} w_i - \mu \sum_{i=1}^{n} m_i w_i \right) = 2 \sum_{i=1}^{n} c_{ki} w_i - \lambda - \mu m_i$$

Odnosno, $2\mathbf{C}\mathbf{w} - \lambda \mathbf{u} - \mu \mathbf{m} = 0$, što povlači

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} + \frac{\mu}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}$$

Uvrštavanjem u ograničenja (1.2) i (1.9) dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$1 = \frac{\lambda}{2}\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} + \frac{\mu}{2}\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}$$

$$\mu_V = \frac{\lambda}{2}\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} + \frac{\mu}{2}\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}$$

koji rješavamo po λ i μ. Sustav linearnih jednadžbi zapisan u matričnom obliku je:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & \mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \\ \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mu_V \end{pmatrix}$$

Matrica sustava je invertibilna po pretpostavci pa je prema Cramerovom pravilu, rješenje sustava jedinstveno i dano s:

$$\mu = \frac{D_1}{D} \qquad i \qquad \lambda = \frac{D_2}{D}$$

gdje je D determinanta matrice sustava, $D = \begin{vmatrix} \mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & \mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \\ \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \end{vmatrix}$, a D_1 i D_2 determinante matrica u kojem su redom prvi i drugi stupac zamijenjeni stupcem na desnoj strani sustava. Vrijedi:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \\ 2\mu_V & \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} \end{vmatrix} * \frac{1}{D} = 2\frac{\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - \mu_V\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - (\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})^2}$$
$$\mu = \begin{vmatrix} \mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & 2 \\ \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} & 2\mu_V \end{vmatrix} * \frac{1}{D} = 2\frac{\mu_V\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - (\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})^2}$$

Uvrštavanjem izraza za λ i μ u izraz za $\mathbf{w}$, dobivamo:

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - \mu_V\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} + (\mu_V\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - (\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})^2} \tag{1.13}$$

odnosno zapisano pomoću determinanti daje formulu u zapisu (1.12).

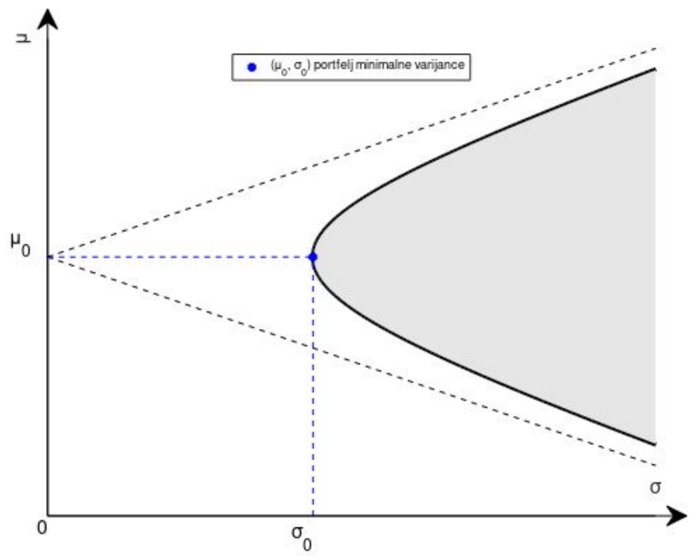
Ako μ_V promatramo kao parametar te izraz za $\mathbf{w}$ zapišemo u obliku

$$\mathbf{w} = \frac{(\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - (\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}}{\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - (\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})^2}\mu_V + \frac{(\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} - (\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}}{\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{m}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m} - (\mathbf{u}^\tau\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m})^2}$$

možemo uočiti oblik $\mathbf{w} = \mathbf{a}\mu_V + \mathbf{b}$, odnosno da težine linearno ovise o μ_V. □

Napomena 1.3.6. *U dokazu propozicije 1.3.5 funkcije koje zadaju uvjete na minimum su* $\mathbf{u}^\tau\mathbf{w} - 1$ *i* $\mathbf{m}^\tau\mathbf{w} - \mu_V$. *Korištenje metode Lagrangeovih multiplikatora je opravdano ako je skup gradijenata tih funkcija u točki minimuma,* $\{(1, \ldots, 1), (m_1, \ldots, m_n)\}$, *linearno nezavisan. U praksi su, prema [10], skupovi rizičnih vrijednosnica (vrijednosnica s pozitivnom varijancom) linearno nezavisni g.s. pa možemo koristiti metodu Lagrangeovih multiplikatora.*
Konačan skup vrijednosnica je linearno nezavisan g.s ako za vektor povrata na vrijednosnice ne postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *koji nisu svi nula i* $c \in \mathbb{R}$ *za koje vrijedi* $\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i m_i = c\Big) = 1$.

Polazeći od izraza $\mathbf{w} = \mathbf{a}\mu + \mathbf{b}$ i uvrštavajući u formulu (1.10), dobivamo da je ovisnost μ i σ^2 oblika parabole s formulom $\sigma^2 = \mathbf{a}^\tau\mathbf{C}\mathbf{a}\mu^2 + 2\mathbf{a}^\tau\mathbf{C}\mathbf{b}\mu + \mathbf{b}^\tau\mathbf{C}\mathbf{b}$. Korjenovanjem dobivamo da je ovisnost μ i σ oblika hiperbole s asimptotama $\mu = -\frac{2\mathbf{a}^\tau\mathbf{C}\mathbf{b}}{\mathbf{a}^\tau\mathbf{C}\mathbf{a}} \pm \sigma\sqrt{\frac{1}{\mathbf{a}^\tau\mathbf{C}\mathbf{a}}}$.



Slika 1.1: Skup minimalne varijance, asimptote i skup mogućih portfelja.

Na slici 1.1 plava točka prikazuje portfelj minimalne varijance. Sivom bojom označen je skup mogućih portfelja. Oblik skupa minimalne varijance naziva se Markowitzev metak (engl. *Markowitz bullet*).

Posljednje dvije propozicije daju nam rješenje dvaju problema koja smo postavili: pronalaženje portfelja minimalne varijance i skupa minimalne varijance.

Primjer 1.3.7. *Promotrimo portfelj koji se sastoji od triju vrijednosnica A, B i C iz primjera 1.2.1.*

Očekivani povrati dani su vektorom $\mathbf{m} = \begin{bmatrix}-0.22875 & -0.36141304 & 0.55088106\end{bmatrix}^\tau$, a standardne devijacije vektorom $\mathbf{s} = \begin{bmatrix}0.087726938 & 0.131855095 & 0.471520470\end{bmatrix}^\tau$. Kovarijacijska matrica izračunata je pomoću (1.7):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}0.0076960156 & 0.0115419497 & 0.0402860270\\ 0.0115419497 & 0.0173857662 & 0.0608922201\\ 0.0402860270 & 0.0608922201 & 0.2223315536\end{bmatrix}.$$

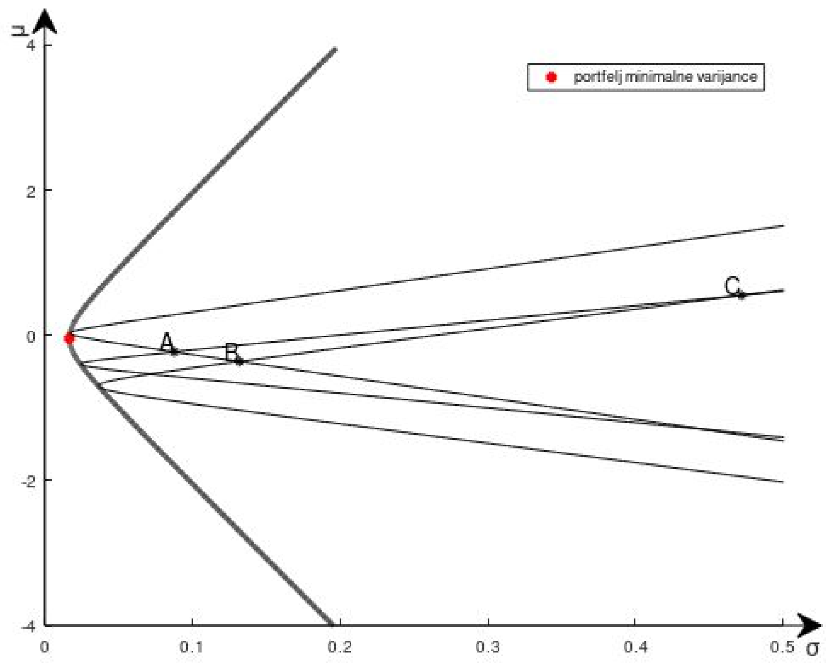
Vektor težina $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}$ je nepoznat. Promotrimo probleme koji su ranije postavljeni.

Težine portfelja minimalne varijance izračunate su formulom (1.11) i iznose

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}2.652576216 & -1.615706730 & -0.036869486\end{bmatrix}^\tau$$

. U ovom slučaju, investitor, koji želi uložiti u portfelj minimalne varijance među mogućim portfeljima sastavljenima od danih triju vrijednosnica, morat će ugovoriti kratku prodaju za vrijednosnice B i C. Ukoliko kratka prodaja nije dozvoljena, portfelj minimalne varijance bit će portfelj s težinama $\mathbf{w}' = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^\tau$.

Za traženje skupa minimalne varijance, uzmimo μ_V iz segmenta $[-4.04315, 3.95685]$ s korakom 0.01 te za svaku od tih vrijednosti izračunajmo težine portfelja s minimalnom varijancom. Segment je odabran tako da bude simetričan oko vrijednosti očekivanog povrata portfelja s minimalnom varijancom, odnosno simetričan oko tjemena parabole. Prema (1.13) za svaku vrijednost μ_V dobivamo pripadni vektor težina, potom za tako dobiveni portfelj možemo izračunati njegovu standardnu devijaciju. Tako je za svaki od portfelja izračunat uređeni par (σ_V, μ_V) i prikazan u σ, μ koordinatnom sustavu.



Slika 1.2: Portfelj minimalne varijance i skup minimalne varijance za vrijednosnice iz primjera 1.2.1.

Na slici 1.2 točke A, B, C predstavljaju portfelje koji se sastoje od samo jedne od triju vrijednosnica. Linije koje prolaze kroz dvije od te tri točke predstavljaju portfelje u kojima su zastupljene samo dvije vrijednosnice. Rub, prikazan debljom linijom predstavlja skup minimalne varijance.

Primjer 1.3.8 ([6]). *Promotrimo moguće portfelje koji se sastoje od triju vrijednosnica A, B i C, za koje su dani vektori*

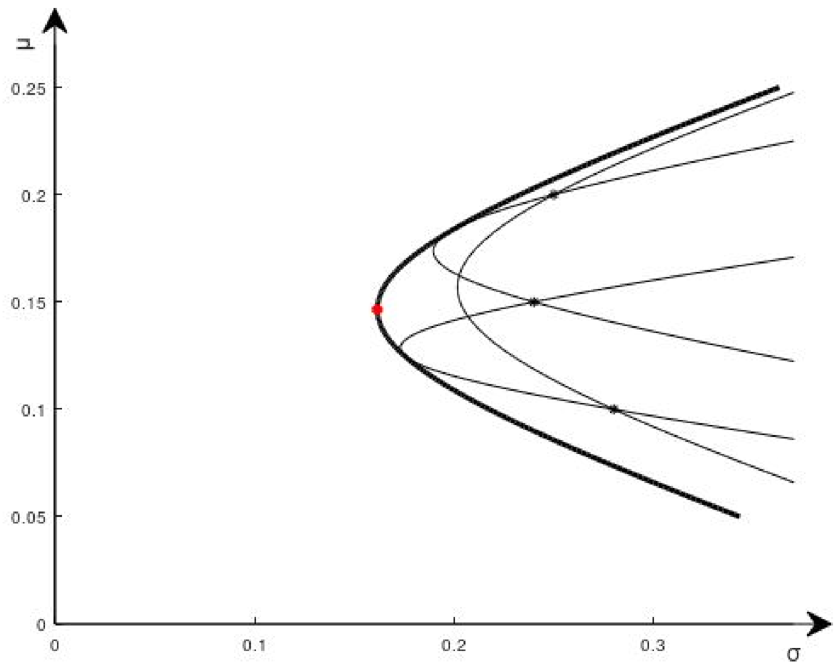
$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.20 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.24 \\ 0.25 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.0784 & -0.0067 & 0.0175 \\ -0.0067 & 0.0576 & 0.0120 \\ 0.0175 & 0.0120 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

Težine portfelja minimalne varijance izračunate su formulom (1.11) i iznose

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.31589 & 0.43904 & 0.24506 \end{bmatrix}^{\tau}$$

Za traženje skupa minimalne varijance, uzmimo μ_V iz segmenta $[0.05, 0.25]$ s korakom 0.001 te za svaku od tih vrijednosti izračunajmo portfelj s minimalnom varijancom. Prema

(1.13) za svaku vrijednost μ_V dobivamo pripadni vektor težina, potom za tako dobiveni portfelj možemo izračunati njegovu standardnu devijaciju. Tako za svaki od portfelja možemo izračunati uređeni par (σ_V, μ_V) i prikazati u σ, μ koordinatnom sustavu.



Slika 1.3: Portfelj minimalne varijance, skup minimalne varijance.

Na slici 1.3 prikazani su portfelj minimalne varijance, skup minimalne varijance te skupovi minimalne varijance za skup mogućih portfelja koji se sastoje od dviju vrijednosnica.

1.4 Efikasna granica

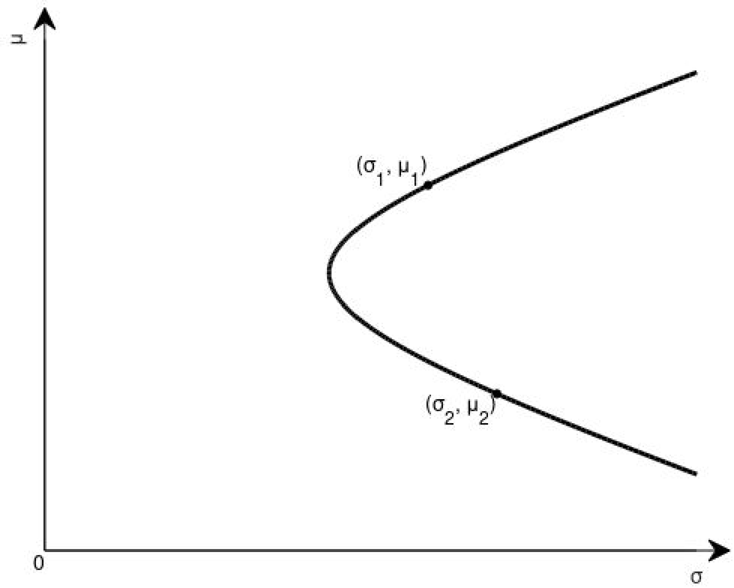
Kod izbora između dviju vrijednosnica, racionalni će investitor, ako je moguće, izabrati onu s većim očekivanim povratom μ_V i manjom standardnom devijacijom σ_V, tj. s manjim rizikom.

Definicija 1.4.1. *Kažemo da vrijednosnica s očekivanim povratom μ_1 i standardnom devijacijom σ_1* dominira *neku drugu vrijednosnicu s očekivanim povratom μ_2 i standardnom devijacijom σ_2 ako je*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \qquad i \qquad \sigma_1 \leq \sigma_2$$

Prethodnu definiciju možemo proširiti i na portfelje, tada ih promatramo kao vrijednosnicu.

Napomena 1.4.2. *Neka su dane dvije vrijednosnice od kojih jedna dominira drugu. Dominirana vrijednosnica mogla bi se smatrati nepotrebnom u odnosu na prvu. Prva daje veći očekivani povrat s manjim rizikom. No, moguće je konstruirati portfelje sastavljene od danih dviju vrijednosnica, ali s manjim rizikom od rizika pojedinačne vrijednosnice. Primjer je dan na slici 1.4 gdje vrijednosnica dana s (σ_1, μ_1) dominira vrijednosnicu danu s (σ_2, μ_2).*



Slika 1.4: Smanjenje rizika koristeći dominiranu vrijednosnicu.

Definicija 1.4.3. *Portfelj je* efikasan *ako ne postoji niti jedan drugi portfelj, različit od njega, koji ga dominira. Skup efikasnih portfelja u skupu mogućih portfelja naziva se* efikasna granica*.*

Svaki racionalni investitor će odabrati efikasni portfelj, preferirajući dominirajući portfelj nad dominiranim. Na efikasnoj granici moguće je odabrati različite efikasne portfelje, a sve na temelju vlastite preferencije investitora. Uz dana dva efikasna portfelja s $\mu_1 \leq \mu_2$ i $\sigma_1 \leq \sigma_2$, oprezni investitor može preferirati onaj s manjim rizikom i manjim očekivanim povratom, dok drugi investitor može odabrati onaj portfelj koji daje veći očekivani povrat, kao kompenzaciju za uvećani rizik.

Preciznije, efikasni portfelj ima najveći mogući povrat među svim mogućim portfeljima koji imaju jednaku standardnu devijaciju (rizik) i ima najmanju standardnu devijaciju (rizik) među svim mogućim portfeljima s jednakim očekivanim povratom.

Propozicija 1.4.4. *Neka su težinama* $\mathbf{w}'$ *i* $\mathbf{w}''$ *dana bilo koja dva portfelja u skupu minimalne varijance. Tada se skup minimalne varijance sastoji od portfelja s težinama* $c\mathbf{w}' + (1 - c)\mathbf{w}''$, $\forall c \in \mathbb{R}$. *Također, svaki portfelj iz skupa minimalne varijance je takvog oblika.*

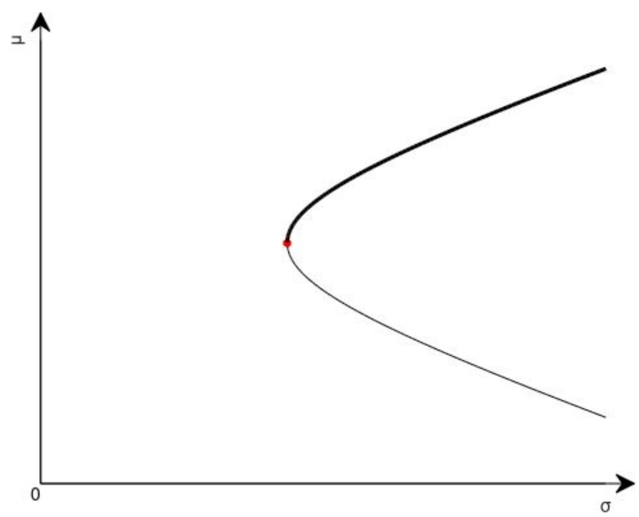
Dokaz. U Propoziciji 1.3.5 je pokazano da se skup minimalne varijance sastoji od portfelja čije su težine dane nekom linearnom funkcijom očekivanog povrata na portfelj μ_V, $\mathbf{w} = \mathbf{a}\mu_V + \mathbf{b}$.
Neka su $\mathbf{w}'$ i $\mathbf{w}''$ težine dvaju različitih portfelja u skupu minimalne varijance. Tada vrijedi

$$\mathbf{w}' = \mathbf{a}\mu_{V'} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{w}'' = \mathbf{a}\mu_{V''} + \mathbf{b}$$

za neke $\mu_{V'} \neq \mu_{V''}$.
Kako brojevi oblika $c\mu_{V'} + (1 - c)\mu_{V''}$ za c $\in \mathbb{R}$ čine sve realne brojeve, slijedi da brojevi oblika $c\mathbf{w}' + (1 - c)\mathbf{w}''$ za c $\in \mathbb{R}$ iscrpljuju cijeli skup minimalne varijance. □

U skupu minimalne varijance možemo uočiti efikasnu granicu. To je prikazano na slici 1.5. Efikasna granica se sastoji od svih portfelja iz skupa minimalne varijance čiji je očekivani povrat veći ili jednak očekivanom povratu portfelja minimalne varijance.



Slika 1.5: Efikasna granica konstruirana s više vrijednosnica.

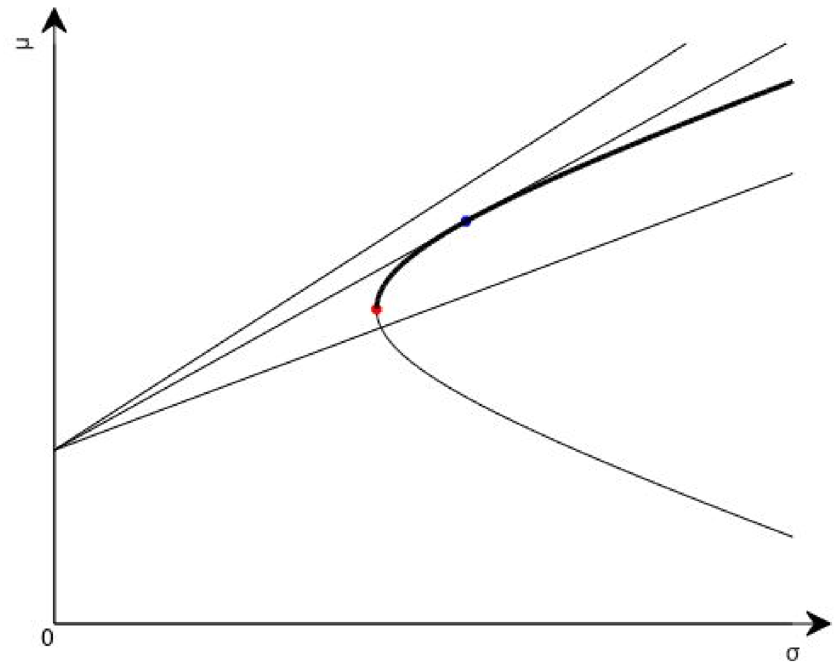
Sljedeća propozicija daje svojstva efikasne granice koja će biti korisna u Modelu vrednovanja kapitalne imovine (engl. *Capital Asset Pricing Model - CAPM*).

Propozicija 1.4.5. *Težine* $\mathbf{w}$ *bilo kojeg portfelja koji pripada efikasnoj granici (osim portfelja minimalne varijance) zadovoljavaju uvjet*

$$\gamma \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{m} - \mu \mathbf{u} \tag{1.14}$$

za neke $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Dokaz. Neka su $\mathbf{w}$ težine portfelja, koji nije portfelj minimalne varijance, a koji pripada efikasnoj granici. Prema (1.9) i (1.10), taj portfelj ima očekivani povrat $\mu_V = \mathbf{m}^\tau \mathbf{w}$ i standardnu devijaciju $\sigma_V = \sqrt{\mathbf{w}^\tau \mathbf{C}\mathbf{w}}$.
Na σ, μ grafu povučemo tangentu na efikasnu granicu u točki koja predstavlja portfelj. Tangenta siječe ordinatu u nekoj točki $(0, \mu)$, a koeficijent smjera tangente je $\dfrac{\mathbf{m}^\tau \mathbf{w} - \mu}{\sqrt{\mathbf{w}^\tau \mathbf{C}\mathbf{w}}}$.
Taj je koeficijent smjera maksimalan među svim pravcima koji prolaze kroz $(0, \mu)$ i koji sijeku skup mogućih portfelja. Ako promotrimo pravac koji prolazi kroz $(0, \mu)$ i $(\mathbf{m}^\tau \mathbf{w}', \sqrt{\mathbf{w}'^\tau \mathbf{C}\mathbf{w}'})$, za neki portfelj s težinama $\mathbf{w}' \neq \mathbf{w}$, vrijedit će da je koeficijent smjera manji od koeficijenta smjera tangente.



Slika 1.6: Tangenta na efikasnu granicu u točki koja predstavlja portfelj i pravci kroz $(0, \mu)$ koji sijeku skup mogućih portfelja.

Kad bi postojao pravac s nagibom većim od nagiba promatrane tangente i koji ima zajedničkih točaka s efikasnom granicom, moralo bi vrijediti da postoji portfelj koji dominira promatrani portfelj na efikasnoj granici. Međutim, po definiciji efikasne granice takav portfelj ne postoji pa ne postoji niti pravac koji ima veći nagib od tangente, odnosno koeficijent smjera tangente je maksimalan među svim pravcima koji prolaze kroz $(0,\mu)$ i koji sijeku skup mogućih portfelja.

Tražimo maksimum po svim težinama $\mathbf{w}$ koje zadovoljavaju uvjet $\mathbf{u}^\tau \mathbf{w} = 1$. Stavimo

$$F(\mathbf{w},\lambda) = \frac{\mathbf{m}^\tau \mathbf{w} - \mu}{\sqrt{\mathbf{w}^\tau \mathbf{C}\mathbf{w}}} - \lambda \mathbf{u}^\tau \mathbf{w},$$

gdje je λ Lagrangeov multiplikator. Nužan uvjet za maksimum je taj da su parcijalne derivacije od F po težinama $\mathbf{w}$ jednake 0. Za $k \in \{1,\dots,n\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial w_k} &= \frac{\partial}{\partial w_k}\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i w_i - \mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i c_{ij} w_j}} - \lambda \sum_{i=1}^n w_i \right) \\ &= \frac{m_k}{\sqrt{\mathbf{w}^\tau \mathbf{C}\mathbf{w}}} + \frac{\mathbf{m}^\tau \mathbf{w} - \mu}{(\mathbf{w}^\tau \mathbf{C}\mathbf{w})^{3/2}} * \frac{-1}{2} * 2 \sum_{i=1}^n c_{ki} w_i - \lambda \end{aligned}$$

Tada slijedi da je

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{m}}{\sigma_V} - \frac{\mu_{\mathrm{V}} - \mu}{\sigma_V^3}\mathbf{C}\mathbf{w} - \lambda \mathbf{u} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{m} - \lambda \sigma_V \mathbf{u} = \frac{\mu_V - \mu}{\sigma_V^2}\mathbf{C}\mathbf{w} \tag{1.15}$$

Množenjem slijeva s $\mathbf{w}^\tau$ i primjenjujući uvjete (1.2), (1.9) i (1.10), dobivamo da je

$$\mathbf{w}^\tau \mathbf{m} - \lambda \sigma_V \mathbf{w}^\tau \mathbf{u} = \frac{\mu_V - \mu}{\sigma_V^2}\mathbf{w}^\tau \mathbf{C}\mathbf{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_V - \lambda \sigma_V = \frac{\mu_V - \mu}{\sigma_V^2}\sigma_V^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \frac{\mu}{\sigma_V}.$$

Uvrštavanjem u (1.15) tako dobiven λ i $\gamma = \frac{\mu_V - \mu}{\sigma_V^2}$ dobivamo $\gamma \mathbf{C}\mathbf{w} = \mathbf{m} - \mu \mathbf{u}$. Tangenta ima pozitivan nagib, stoga je $\mu_V \geq \mu$, tj. $\gamma > 0$. □

Napomena 1.4.6. *Interpretaciju za γ i μ dobivamo iz dokaza propozicije. $\gamma\sigma_V$ je koeficijent smjera tangente na efikasnu granicu u točki koja predstavlja dani portfelj, a μ je odsječak tangente na ordinati na σ, μ grafu.*

Poglavlje 2

Iterativne metode

U primjeru 1.3.7 nailazimo na problem traženja inverza kovarijacijske matrice te višestruku primjenu na vektore **u** i **m**. No, u primjeru se pojavljuju izrazi $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}$ te $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}$. Stoga se problem traženja inverza i primjene na vektore **u** i **m** može svesti na problem rješavanja sustava $\mathbf{C}x = \mathbf{u}$ i $\mathbf{C}x = \mathbf{m}$, za $x \in \mathbb{R}^n$.

Problem s kojim se susrećemo je sljedeći: za regularnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $b \in \mathbb{R}^n$ naći $x \in \mathbb{R}^n$ t.d. je $Ax = b$.

Kovarijacijske matrice su često rijetke (engl. *sparse*), tj. sadrže puno 0. Vrijednosnice u portfelju mogu biti dionice iz različitih sektora koji nisu korelirani, pa su korelacije između povrata vrijednosnica 0, ili su vrlo malo korelirani pa su te vrijednosti blizu 0. Također, sustavi mogu biti preveliki da bi ih se rješavalo direktnim metodama. U takvim slučajevima koriste se iterativne metode.

Cilj je naći dovoljno dobru aproksimaciju rješenja $\tilde{x}$, a željena točnost aproksimacije postiže se zadavanjem odgovarajućeg kriterija zaustavljanja.

Jedan način procjene kvalitete aproksimacije je izraziti rezidual

$$r = b - A\tilde{x} \tag{2.1}$$

pa se aproksimacija $\tilde{x}$ prihvaća ako je, u nekoj normi, $\epsilon \equiv \frac{||r||}{||b||}$ dovoljno mali. Takav zahtjev može se opravdati činjenicom da je

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \equiv b - r, \qquad \frac{||\tilde{b} - b||}{||b||} = \frac{||r||}{||b||} = \epsilon.$$

Algoritmi iterativnih metoda općenito su oblika:

```
x^(0) zadan;
k = 0;
while (nije zadovoljen kriterij zaustavljanja)
    k = k+1;
    x^(k) = f(x^(k-1));
end
x ≈ x^(k)
```

Tražimo dakle, niz vektora $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ takvih da:

- za svaki k je f jednostavna za računanje
- $x^{(k)}$ teži prema $x = A^{-1}b$ i za neki $k \ll n$ je $x^{(k)}$ prihvatljiva aproksimacija za x
- konvergencija je što brža

Jedan od načina za dobivanje iterativnih metoda za rješavanje $Ax = b$ je sljedeći. Rastavimo A u obliku:

$$A = M - N, \tag{2.2}$$

gdje je M regularna matrica koja se lako invertira i $M^{-1}A \approx I$. Tada se polazni linearni sustav transformira u $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$, tj.

$$x = Tx + c$$

$$T = M^{-1}N \qquad c = M^{-1}b$$

Za ovaj problem fiksne točke, iterativnu metodu pokušavamo naći u obliku jednostavnih iteracija

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.3}$$

uz x_0 zadan i matricu iteracije $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Iz $T = M^{-1}N = I - M^{-1}A$, iteracije možemo ekvivalentno zapisati kao

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}r_k, \qquad r_k = b - Ax^{(k)}.$$

Tada, ako je M dobro odabrana i $M^{-1} \approx A^{-1}$ onda je

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}r_k \approx x^{(k)} + A^{-1}r_k = x^{(k)} + x - x^{(k)} = x.$$

2.1 Pojmovi

Definicija 2.1.1. *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tada je sa* $\mathrm{spr(A)} = \rho(\mathrm{A}) = \max\{\, |\lambda| \; : \; \lambda \in \sigma(A)\}$ *definiran* spektralni radijus *matrice A.*

Definicija 2.1.2. *Matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je* regularna *ako postoji matrica* $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takva da vrijedi* $AB = BA = I$.

Definicija 2.1.3. *Preslikavanje* $\nu : \mathbb{C}^{m\times n} \rightarrow \mathbb{R}$ *je* matrična norma *na* $\mathbb{C}^{m\times n}$ *ako:*

1. $\nu(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$
2. $\nu(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
3. $\nu(\alpha A) = |\alpha|\nu(A),\ \alpha \in \mathbb{C},\ A \in \mathbb{C}^{m\times n}$
4. $\nu(A + B) \leq \nu(A) + \nu(B),\ A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Definicija 2.1.4. *Matrična norma na* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *je* konzistentna *ako je* $\nu(AB) \leq \nu(A)\nu(B)$*, za A,B* $\in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Teorem 2.1.5. *Za svaku matricu* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji konzistentna matrična norma* $\nu_{A,\epsilon}$ *na* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *takva da je* $\nu_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon$.

Teorem 2.1.6. *Neka je* $\|\cdot\|$ *proizvoljna norma na* $\mathbb{C}^n$*. Preslikavanje* $\nu : C^{n\times n} \rightarrow \mathbb{R}$ *definirano s* $\nu(A) = max_{\|x\|=1} \|Ax\| = max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$*, za* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *je konzistentna matrična norma na* $\mathbb{C}^{n\times n}$*, konzistentna je s* $\|\cdot\|$ *i zove se* operatorska norma na $\mathbb{C}^{n\times n}$ inducirana vektorskom normom $\|\cdot\|$.

Teorem 2.1.7. *Ako je* $\|\cdot\|$ *bilo koja konzistentna matrična norma i* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *proizvoljna matrica, tada je*

$$\rho(A) \leq \|A\| \tag{2.4}$$

2.2 Konvergencija standardnih iteracija

Teorem 2.2.1. *Neka je* $b \in \mathbb{R}^n$ *i* $A = M - N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *regularna matrica. Ako je M regularna matrica, tada niz iteracija* $\{x^{(k)}, k \geq 0\}$ *definiran s* $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *konvergira prema* $x = A^{-1}b$ *za proizvoljnu početnu iteraciju* $x^{(0)}$ *ako i samo ako za spektralni radijus matrice iteracija vrijedi* $\rho(M^{-1}N) < 1$*. Tvrdnja teorema vrijedi i ako je* $\|M^{-1}N\| < 1$ *za bilo koju konzistentnu matričnu normu* $\|\cdot\|$.

Dokaz. [$\Leftarrow$] Definiramo grešku u svakom koraku iteracije kao $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, za $k = 0, 1, 2, \dots$ Tada za $x = A^{-1}b$ vrijedi

$$Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \qquad \Leftrightarrow \qquad x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

Od (2.3) oduzmemo izraz za x te dobivamo

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x &= M^{-1}Nx^{(k)} - M^{-1}Nx \\ e^{(k+1)} &= M^{-1}Ne^{(k)} = (M^{-1}N)^2 e^{(k-1)} = \cdots = (M^{-1}N)^{(k+1)}e^{(0)}. \end{aligned}$$

Prema teoremu 2.1.5 za matricu $M^{-1}N$ i $0 < \epsilon < 1 - \rho(M^{-1}N)$ postoji konzistentna norma $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je $\|M^{-1}N\| \leq \rho(M^{-1}N) + \epsilon < 1$.

Tada je $\|e^{(k+1)}\| \leq \|M^{-1}N\|^{k+1}\|e^{(0)}\|$ Kada $k \longrightarrow \infty$, zbog $\|M^{-1}N\| < 1$, $\|e^{(k+1)}\| \longrightarrow 0$. Tada slijedi da je $lim_{k\longrightarrow\infty} \|e^{(k)}\| = 0$, odnosno $lim_{k\longrightarrow\infty} \|x^{(k)}\| = x$ pa iteracije konvergiraju prema $x = A^{-1}b$. Prema teoremu 2.1.7 vrijedi da je $\rho(M^{-1}N) \leq \|M^{-1}N\| < 1$ pa prema dokazanom, tvrdnja vrijedi za bilo koju konzistentnu matričnu normu $\|\cdot\|$.

[$\Rightarrow$] Pretpostavimo da niz iteracija konvergira za proizvoljnu početnu iteraciju $x^{(0)}$ i c te da je $\rho(M^{-1}N) \geq 1$. To znači da postoji svojstvena vrijednost λ matrice $T = M^{-1}N$ za koju vrijedi $|\lambda| \geq 1$. Neka je $y \neq 0$ pripadni svojstveni vektor te $x^{(0)}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Tx^{(0)} + c = T\cdot 0 + c = c \\ x^{(2)} &= Tx^{(1)} + c = Tc + c = \lambda c + c \\ x^{(3)} &= Tx^{(2)} + c = (\lambda + 1)Tc + c = (\lambda^2 + \lambda + 1)\, c \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= Tx^{(k-1)} + c = (\lambda^{k-1} + \cdots + \lambda + 1)\, c. \end{aligned}$$

Prema tome za iteraciju u k-tom koraku vrijedi

$$x^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1}\, c, & \lambda \neq 1 \\ kc, & \lambda = 1 \end{cases}$$

što divergira kada k teži ka beskonačnosti. Našli smo niz koji je u kontradikciji s pretpostavkom, iz čega slijedi da mora vrijediti $\rho(T) < 1$. □

Teorem 2.2.2. *Neka je $T = M^{-1}N$ i $\|T\| < 1$, gdje je $\|\cdot\|$ neka od operatorskih normi $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$. Pretpostavimo da tražimo aproksimaciju rješenja takvu da $\|x^{(k)} - x\| < \epsilon$, gdje je $\|\cdot\|$ odgovarajuća vektorska norma koja inducira gornju operatorsku normu. Za kriterij zaustavljanja dovoljno je tražiti da je*

$$\frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \epsilon, \qquad k > \frac{ln(\frac{\epsilon(1-\|T\|}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|})}{ln(\|T\|)}$$

Dokaz. Za $k, p \in \mathbb{N}_0$ promotrimo sljedeći izraz

$$\begin{aligned}
&\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| = \\
&= \|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)} + x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)} + x^{(k+p-2)} - \cdots - x^{(k+1)} + x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\overset{(*)}{\leq} \|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}\| + \|x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)}\| + \cdots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\overset{(**)}{=} \|T^{p-1}(x^{(k+1)} - x^{(k)})\| + \|T^{p-2}(x^{(k+1)} - x^{(k)})\| + \cdots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\overset{(***)}{\leq} (\|T^{p-1}\| + \|T^{p-2}\| + \cdots + 1)\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\leq (\|T^{p-1}\| + \|T^{p-2}\| + \cdots + 1)\|T\|^k\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\
&\leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|
\end{aligned}$$

Nejednakost (*) slijedi iz nejednakosti trokuta, (***) iz konzistentnosti matrične norme, a jednakost (**) iteriranjem $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$.

Pustimo $p \longrightarrow +\infty$. Prema teoremu 2.2.1 je $lim_{p\longrightarrow+\infty}\, x^{(k+p)} = x$ i slijedi $lim_{p\longrightarrow+\infty} \|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| = \|x - x^{(k)}\|$. Prema gornjem raspisu vrijedi da je $\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1-\|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$. Za kriterij zaustavljanja tada je dovoljno tražiti da je

$$\frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| < \epsilon, \qquad \text{odnosno} \qquad k > \frac{ln(\frac{\epsilon(1-\|T\|)}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|})}{ln(\|T\|)}.$$

□

2.3 Jacobijeva metoda

Matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rastavimo kao $A = L + D + R$ tako da su

- L strogi donji trokut od A,
- D dijagonala od A,
- R strogi gornji trokut matrice A

uz pretpostavku da A nema 0 na dijagonali.
Kao u (2.2), definiramo $M_J = D$, $N_J = -(L + R)$. Iterativna metoda je tada oblika $x^{(k+1)} = T_J x^{(k)} + c_J,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ za koju je $T_J = -D^{-1}(L + R)$ i $c_J = D^{-1}b$.

U svakom koraku iteracije, i-ta komponenta $x^{(k+1)}$ je oblika:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Bigg(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Bigg).$$

Naime,

$$x^{(k+1)} = T_J x^{(k)} + c_J = -D^{-1}(L+R)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= -(D^{-1}(L+R)x^{(k)})_i + (D^{-1}b)_i \\
&= -\sum_{j=1}^{n} (D^{-1}(L+R))_{ij} x_j^{(k)} + (D^{-1}b)_i \\
&\overset{(*)}{=} -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} = \frac{1}{a_{ii}}\Bigg(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Bigg)
\end{aligned}$$

gdje je u jednakosti (*) iskorištena činjenica da je za $i = j$, $(L+R)_{ii} = 0$.

Algoritam

```
function [x_rez, koraci, rez] = Jacobijeva(A, b, x_0, tol)
  k=0;
  n = size(A)(1,1);
  x_k=zeros(n,1);
  b_norm = norm(b);
  rez=norm(A*x_0 - b)/b_norm;
  while ( rez > tol )
    k = k+1;
    for i=1:n
      x_k(i) = b(i);
      for j=1:(i-1)
        x_k(i)=x_k(i)-A(i,j)*x_0(j);
      end
      for j=(i+1):n
        x_k(i)=x_k(i)-A(i,j)*x_0(j);
      end
      x_k(i)=x_k(i)/A(i,i);
    end
    x_0 = x_k;
    rez = norm(A*x_k - b)/b_norm;
  end
  x_rez=x_0;
  koraci = k;
end
```

Teorem 2.3.1. *Ako je matrica sustava* $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *strogo dijagonalna dominantna matrica, tj. vrijedi* $\sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|,\quad i = 1, \ldots, n$ *tada Jacobijeva metoda konvergira za svaku početnu iteraciju.*

Dokaz. Za matricu iteracija u Jacobijevoj metodi vrijedi

$$\|T_J\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |(T_J)_{ij}| = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

Zbog činjenice da je matrica sustava A prema pretpostavci strogo dijagonalno dominantna slijedi da je $\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 1,\quad i = 1, \ldots, n$ pa je i $\|T_J\|_\infty < 1$. Prema 2.2.1 slijedi da niz Jacobijevih iteracija $\{x^{(k)}, k \geq 0\}$ definiran s $x^{(k+1)} = T_J x^{(k)} + c_J,\quad k = 0, 1, 2, \ldots$ konvergira prema $x = A^{-1}b$ za proizvoljnu početnu iteraciju $x^{(0)}$. □

Primjer 2.3.2. *Umjesto traženja inverza matrice* **C** *u primjeru 1.3.8, pronađimo* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}$ *i* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}$.

Za matricu sustava C vrijedi da je ona strogo dijagonalno dominantna pa Jacobijeva metoda konvergira za svaku početnu iteraciju. Za početnu iteraciju uzmimo $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\tau$. Kao i u (2.1), iteracije zaustavljamo kada je $\frac{\|r\|}{\|b\|} = \frac{\|b-A\tilde{x}\|}{\|b\|} < \epsilon = 10^{-6}$.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\frac{\Vert\mathbf{C}x-\mathbf{m}\Vert}{\Vert\mathbf{m}\Vert}$
0	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000000000
1	1.275510	2.604167	3.200000	0.269032167764
2	0.783774	2.085867	2.342857	0.074420603119
3	0.930807	2.207240	2.580057	0.020625567459
4	0.888234	2.174926	2.515584	0.005697123805
5	0.899863	2.183406	2.533709	0.001577734701
6	0.896542	2.180982	2.528824	0.000435020298
7	0.897425	2.181614	2.530220	0.000120634830
8	0.897168	2.181426	2.529851	0.000033200573
9	0.897234	2.181472	2.529959	0.000009235571
10	0.897214	2.181458	2.529932	0.000002534681
11	0.897219	2.181461	2.529940	0.000000709596

Tablica 2.1: Numerički rezultati za $\mathbf{C}x = \mathbf{m}$.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\frac{\|\mathbf{C}x-\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$
0	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000000000
1	12.755102	17.361111	16.000000	0.273481027566
2	10.667340	15.511444	9.095238	0.081551094896
3	12.050510	16.707089	10.034948	0.022814629175
4	11.942933	16.672206	9.418096	0.007336573055
5	12.077642	16.788203	9.454915	0.002182332414
6	12.079336	16.796202	9.394925	0.000767683010
7	12.093410	16.808897	9.392915	0.000249927917
8	12.094944	16.810953	9.386537	0.000092939419
9	12.096543	16.812460	9.385713	0.000032397655
10	12.096856	16.812817	9.384976	0.000012235698
11	12.097015	16.813007	9.384819	0.000004420107
12	12.097102	16.813063	9.384728	0.000001668022
13	12.097127	16.813088	9.384703	0.000000612614

Tablica 2.2: Numerički rezultati za $\mathbf{C}x = \mathbf{u}$.

2.4 Gauss-Seidelova metoda

Matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rastavimo kao $A = L + D + R$ tako da su

- L strogi donji trokut od A,
- D dijagonala od A,
- R strogi gornji trokut matrice A

uz pretpostavku da A nema 0 na dijagonali.
Kao u (2.2), definiramo $M_{GS} = D + L$, $N_{GS} = -R$. Iterativna metoda je tada oblika $x^{(k+1)} = T_{GS}x^{(k)} + c_{GS}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ za koju je $T_{GS} = -(D + L)^{-1}R$ i $c_{GS} = (D + L)^{-1}b$.

U svakom koraku iteracije, $x^{(k+1)}$ na i-toj komponenti je oblika:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right).$$

Ako komponente $x^{(k+1)}$ u svakoj iteraciji računamo redom od 1 do n, za računanje $x_i^{(k+1)}$ možemo koristiti već izračunate vrijednosti $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$. Vrijedi

$$x^{(k+1)} = -(D + L)^{-1}Rx^{(k)} + (D + L)^{-1}b \Leftrightarrow (D + L)x^{(k+1)} = -Rx^{(k)} + b$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Algoritam

```
function[x_rez, koraci, rez] = GaussSeidel(A, b, x_0, tol)

  k=0;
  n = size(A)(1,1);
  b_norm = norm(b);
  rez=norm(A*x_0 - b)/b_norm;
  while ( rez > tol )
    k = k+1;
    for i=1:n
      x_0(i) = b(i);
      for j=1:(i-1)
        x_0(i) = x_0(i)-A(i,j)*x_0(j);
      end
      for j=(i+1):n
        x_0(i) = x_0(i)-A(i,j)*x_0(j);
      end
      x_0(i) = x_0(i)/A(i,i);
    end
    rez = norm(A*x_0 - b)/b_norm;
  end
  x_rez=x_0;
  koraci = k;
end
```

Teorem 2.4.1. *Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strogo dijagonalno dominantna matrica, tada Gauss-Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju.*

Dokaz. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice iteracija T_{GS} i $y \neq 0$ pripadni svojstveni vektor. Vrijedi:

$$-(D+L)^{-1}Ry = \lambda y \qquad \Leftrightarrow \qquad Ry = -\lambda(D+L)y.$$

Odnosno, promatrano po komponentama,

$$\lambda a_{ii} y_i = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j - \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Prema nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned} |\lambda||a_{ii}||y_i| &\leq \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}||y_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}||y_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \right) \max_{j=1,\ldots,n} |y_j|, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Neka je $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ takav da $|y_{j_0}| = max_{j=1,\ldots,n} |y_j| > 0$. U gornjoj nejednakosti, za $i = j_0$, tada imamo

$$|\lambda||a_{j_0 j_0}| \leq \sum_{j=j_0+1}^{n} |a_{j_0 j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{j_0-1} |a_{j_0 j}|.$$

Ako pretpostavimo da je $|\lambda| \geq 1$, tada iz prethodnog imamo

$$|a_{j_0 j_0}| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=j_0+1}^{n} |a_{j_0 j}| + \sum_{j=1}^{j_0-1} |a_{j_0 j}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} |a_{j_0 j}|$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom o strogoj dijagonalnoj dominantnosti matrice sustava A. Dakle, za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice iteracija T_{GS} vrijedi $|\lambda| < 1$ što povlači da je i $\rho(T_{GS}) < 1$. Prema teoremu 2.2.1 zaključujemo da Gauss-Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju. □

Teorem 2.4.2. *Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica, tada Gauss-Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju.*

Dokaz. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice iteracija T_{GS} i $y \neq 0$ pripadni svojstveni vektor. Vrijedi:

$$-(D+L)^{-1}Ry = \lambda y \qquad \Leftrightarrow \qquad Ry = -\lambda(D+L)y.$$

Ako u posljednju jednakost dodamo $-\lambda Ry$ s lijeve i s desne strane, dobivamo

$$(1-\lambda)Ry = -\lambda(D+L+R)y = -\lambda Ay. \tag{2.5}$$

S druge strane, iz prve jednadžbe slijedi

$$Ay = (D+L)y + Ry = (1-\lambda)(D+L)y. \tag{2.6}$$

Ako (2.5) pomnožimo skalarno s λy, a (2.6) s y imamo $|\lambda|^2\langle Ay, y\rangle = -(1-\lambda)\langle Ry, \lambda y\rangle$ i $\langle Ay, y\rangle = (1-\lambda)(\langle Dy, y\rangle + \langle Ly, y\rangle)$. Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobivamo

$$(1-|\lambda|^2)\langle Ay, y\rangle = (1-\lambda)(\langle Dy, y\rangle + \langle Ly, y\rangle + \langle Ry, \lambda y\rangle). \tag{2.7}$$

Zbog simetričnosti matrice vrijedi da je $R^\tau = L$, a zbog pozitivne definitnosti $D > 0$. Također je $\lambda Ly = -\lambda Dy - Ry$. Vrijedi da je

$$\langle Ry, \lambda y\rangle = \langle y, \lambda Ly\rangle = -\langle y, \lambda Dy\rangle - \langle y, Ry\rangle = -\langle Dy, \lambda y\rangle - \langle Ly, y\rangle.$$

Uz posljednju jednakost, izraz (2.7) poprima oblik:

$$(1-|\lambda|^2)\langle Ay, y\rangle = (1-\lambda)(\langle Dy, y\rangle + \langle Ly, y\rangle - \langle Dy, \lambda y\rangle - \langle Ly, y\rangle) = (1-\lambda)(1-\bar{\lambda})\langle Dy, y\rangle.$$

Vrijedi $\langle Ay, y\rangle > 0$ i $\lambda \neq 1$. Kada bi bilo $\lambda = 1$, iz (2.5) bi slijedilo da je $Ay = 0$ što je u kontradikciji sa svojstvom pozitivne definitnosti matrice A. Iz prethodne jednakosti tada slijedi

$$1-|\lambda|^2 = \frac{\langle Dy, y\rangle}{\langle Ay, y\rangle}|1-\lambda|^2 > 0.$$

Iz toga vidimo da za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice sustava T_{GS} vrijedi $|\lambda| < 1$ pa je posebno i $\rho(T_{GS}) < 1$. Sada prema teoremu 2.2.1 slijedi da Gauss-Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju. □

Primjer 2.4.3. *Za matricu* $\mathbf{C}$ *iz primjera 1.3.8, pomoću Gauss-Seidelove metode odredimo* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}$ *i* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}$.

Za matricu sustava C vrijedi da je simetrična i pozitivno definitna pa Gauss-Seidelova metoda konvergira za svaku početnu iteraciju.
Za početnu iteraciju uzmimo $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Kao i u (2.1), iteracije zaustavljamo kada je $\frac{||r||}{||b||} = \frac{||b-A\tilde{x}||}{||b||} < \epsilon = 10^{-6}$.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\frac{\|\|\mathbf{C}x-\mathbf{m}\|\|}{\|\|\mathbf{m}\|\|}$
0	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000000000
1	1.275510	2.752533	2.314371	0.131722337133
2	0.994139	2.237644	2.492014	0.025612021358
3	0.910484	2.190904	2.524411	0.003573325245
4	0.899259	2.182849	2.529101	0.000546773160
5	0.897523	2.181670	2.529813	0.000082014745
6	0.897264	2.181492	2.529920	0.000012356339
7	0.897224	2.181465	2.529936	0.000001859805
8	0.897219	2.181461	2.529938	0.000000279987

Tablica 2.3: Numerički rezultati za $\mathbf{C}x = \mathbf{m}$.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\frac{\|\|\mathbf{C}x-\mathbf{u}\|\|}{\|\|\mathbf{u}\|\|}$
0	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000000000
1	12.755102	18.844777	8.810374	0.063132875877
2	12.398960	16.967857	9.270463	0.012328178653
3	12.135861	16.841401	9.368410	0.001627047667
4	12.103192	16.817196	9.382205	0.000251853724
5	12.098044	16.813723	9.384313	0.000037679778
6	12.097276	16.813194	9.384629	0.000005680056
7	12.097161	16.813115	9.384677	0.000000854822

Tablica 2.4: Numerički rezultati za $\mathbf{C}x = \mathbf{u}$.

Uspoređujući rezultate dobivene Jacobijevom i Gauss-Seidel metodom, možemo uočiti da je za postizanje iste točnosti $\frac{||r||}{||b||} < 10^{-6}$, Gauss-Seidelova metoda trebala manje iteracija za rješavanje oba sustava. Za sustav $\mathbf{C}x = \mathbf{m}$ 8 naprema 11 koraka Jacobijeve metode, odnosno 7 koraka za sustav $\mathbf{C}x = \mathbf{u}$ naprema 13 koliko ih je bilo potrebno u Jacobijevoj metodi.

2.5 SOR metoda

Ova iterativna metoda jedna je od mogućih za ubrzanje konvergencije Gauss-Seidelove metode. Ubrzanje se sastoji u optimalnom odabiru neke linearne kombinacije prethodne iteracije i standardne Gauss-Seidelove iteracije. Takva linearna kombinacija kod SOR metode se dobiva tako da se kod Gauss-Seidelove metode uvodi parametar relaksacije ω koji nastoji smanjiti spektralni radijus matrice iteracije i ubrzati konvergenciju.

U svakom koraku iteracije $x^{(k+1)}$ na i-toj komponenti uvodimo modifikaciju:

$$\begin{aligned} z_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\ x_i^{(k+1)} &= \omega z_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Tako definirana metoda, s optimalno odabranim ω naziva se SOR metoda.

Matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rastavimo kao $A = L + D + R$ tako da su

- L strogi donji trokut od A,
- D dijagonala od A,
- R strogi gornji trokut matrice A

uz pretpostavku da A nema 0 na dijagonali.
Tada (2.8) možemo svesti na oblik:

$$\begin{aligned} z^{(k+1)} &= D^{-1}(b - Lx^{(k+1)} - Rx^{(k)}) \\ x^{(k+1)} &= \omega z^{(k+1)} + (1-\omega)x^{(k)}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $z^{(k+1)}$ u izraz za $x^{(k+1)}$ i sređivanjem dobivamo:

$$x^{(k+1)} = (1 + \omega D^{-1}L)^{-1}\omega D^{-1}b + (1 + \omega D^{-1}L)^{-1}((1 - \omega - \omega D^{-1}R)x^{(k)}$$

$$\begin{aligned} M^{-1}b = c &= (1 + \omega D^{-1}L)^{-1}\omega D^{-1}b \\ M &= \frac{1}{\omega}D(1 + \omega D^{-1}L) \Leftrightarrow M = \frac{1}{\omega}D + L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{-1}N = T &= (1 + \omega D^{-1}L)^{-1}((1 - \omega - \omega D^{-1}R) \\ (1 + \omega D^{-1}L)^{-1}\omega D^{-1}N &= (1 + \omega D^{-1}L)^{-1}((1 - \omega - \omega D^{-1}R) \\ \omega D^{-1}N = 1 - \omega - \omega D^{-1}R \Leftrightarrow N &= \frac{1}{\omega}D(1 - \omega - \omega D^{-1}R) \Leftrightarrow N = \frac{1-\omega}{\omega}D - R. \end{aligned}$$

Tada, prema (2.2), vrijedi $M_{SOR} = \frac{1}{\omega}D + L$, $N_{SOR} = \frac{1-\omega}{\omega}D - R$. Iterativna metoda je tada oblika $x^{(k+1)} = T_{SOR}x^{(k)} + c_{SOR},\ k = 0, 1, 2, \ldots$ za koju je $T_{SOR} = (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega R)$ i $c_{SOR} = \omega(D + \omega L)^{-1}b$.

Prema (2.8), u svakom koraku iteracije, i-ta komponenta $x^{(k+1)}$ je oblika:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right).$$

Algoritam

```
function[x_rez, koraci, rez, opt_omega]= SOR(A, b, x_0, tol)

    k=0;
    n = size(A)(1,1);
    b_norm = norm(b);
    rez=norm(A*x_0 - b)/b_norm;

    [omega]=optimalni_omega(A)

    while ( rez > tol )
        k = k+1;
        for i=1:n
            x_0(i) = (1-omega)*x_0(i);
            pom=b(i);
            for j=1:(i-1)
                pom = pom-A(i,j)*x_0(j);
            end
            for j=(i+1):n
                pom = pom-A(i,j)*x_0(j);
            end
                x_0(i)=x_0(i)+pom*omega/A(i,i);
        end
        rez = norm(A*x_0 - b)/b_norm;
    end
    x_rez=x_0;
    koraci = k;
    opt_omega=omega;
end
```

Optimalni ω odabran je tako da minimizira spektralni radijus matrice iteracija T.

```
function [opt_omega] = optimalni_omega(A)
    D = diag(diag(A));
    L = tril(A, -1);
    R = triu(A, 1);

    omega = [0:0.01:2];
    for i=1:201
        T = ((D+omega(i)*L))\((1-omega(i))*D - omega(i)*R);
        ro(i) = max(abs(eig(T))); %spektralni radijus
    end
    [c, i] = min(ro);
    opt_omega = omega(i);
    opt_ro = c;

    figure()
    plot(omega, ro, 'b-', omega(i), ro(i), 'r*')
    xlabel('\omega');
    ylabel('\rho');
end
```

Teorem 2.5.1. *Ako je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična i pozitivno definitna matrica, tada SOR metoda konvergira za $\omega \in \langle 0, 2\rangle$ i za svaku početnu iteraciju.*

Dokaz. Neka je λ proizvoljna svojstvena vrijednost matrice iteracija SOR metode T_{SOR} i neka je y pripadni svojstveni vektor, za kojeg po definiciji vrijedi $T_{SOR}y = \lambda y$, odnosno

$$((1-\omega)D - \omega R)y = \lambda(D + \omega L)y. \tag{2.9}$$

Za lijevu stranu jednakosti vrijedi

$$2[(1-\omega)D - \omega R] = (2-\omega)D - \omega A - \omega(R - L),$$

a za desnu

$$2(D + \omega L) = (2-\omega)D + \omega A - \omega(R - L).$$

Sada jednadžbu (2.9) možemo zapisati u obliku

$$(2-\omega)Dy - \omega Ay - \omega(R-L)y = \lambda(2-\omega)Dy + \lambda\omega Ay - \lambda\omega(R-L)y.$$

Zbog simetričnosti matrice A vrijedi da je $L = R^\tau$. Skalarno množeći posljednju jednakost s y imamo

$$\begin{aligned}(2-\omega)\langle Dy, y\rangle - \omega\langle Ay, y\rangle - \omega\langle (R - R^\tau)y, y\rangle = \\ = \lambda[(2-\omega)\langle Dy, y\rangle + \omega\langle Ay, y\rangle - \omega\langle (R - R^\tau)y, y\rangle].\end{aligned} \tag{2.10}$$

Zbog pozitivne definitnosti matrice A vrijedi da je $\langle Ay, y\rangle > 0$ i $\langle Dy, y\rangle > 0$. $R-R^\tau$ je realna antisimetrična matrica za koju vrijedi da je $\langle (R-R^\tau)y, y\rangle = ri, r \in \mathbb{R}$, čisto imaginarni broj ili nula. Tada iz (2.10) slijedi

$$\lambda = \frac{(2-\omega)\langle Dy, y\rangle - \omega\langle Ay, y\rangle - \omega ri}{(2-\omega)\langle Dy, y\rangle + \omega\langle Ay, y\rangle - \omega ri}.$$

U izrazu za λ, imaginarni dijelovi brojnika i nazivnika su jednaki pa vrijedi da je $|\lambda| < 1$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned}
&|(2-\omega)\langle Dy, y\rangle - \omega\langle Ay, y\rangle| < |(2-\omega)\langle Dy, y\rangle + \omega\langle Ay, y\rangle| \\
\Leftrightarrow\quad & ((2-\omega)\langle Dy, y\rangle - \omega\langle Ay, y\rangle)^2 < ((2-\omega)\langle Dy, y\rangle + \omega\langle Ay, y\rangle)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\omega(2-\omega)\langle Dy, y\rangle\langle Ay, y\rangle > 0.
\end{aligned}$$

Zbog $\langle Ay, y\rangle > 0$ i $\langle Dy, y\rangle > 0$ to je ekvivalentno s $\omega(2-\omega) > 0$, tj. $\omega \in \langle 0, 2\rangle$.
Slijedi da je $|\lambda| < 1$ ako i samo ako je $\omega \in \langle 0, 2\rangle$. Posebno će, za takav odabir ω, vrijediti i $\rho(T_{SOR}) < 1$ pa prema teoremu 2.2.1 SOR metoda konvergira za svaku početnu iteraciju. □

Teorem 2.5.2. *Za $\omega \leq 0$ i $\omega \geq 2$ SOR metoda ne konvergira.*

Dokaz. Matrica iteracija SOR metode je oblika $T_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega R)$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\det(T_{SOR}) &= (\det(D + \omega L))^{-1}\det((1-\omega)D + \omega R) \\
&= (\det(D))^{-1}(1-\omega)^n\det(D) = (1-\omega)^n
\end{aligned}$$

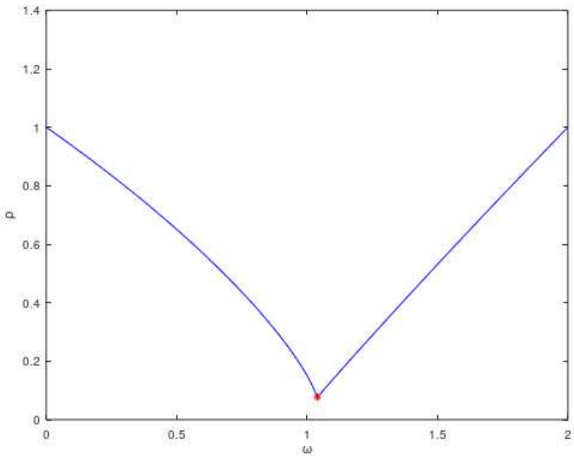
gdje druga jednakost vrijedi zbog toga što su $D + \omega L$ i $(1-\omega)D - \omega R$ donjetrokutasta, odnosno gornjetrokutasta matrica. Iz

$$(\rho(T_{SOR}))^n \geq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |\det(T_{SOR})| = |1-\omega|^n,$$

gdje λ_i označavaju svojstvene vrijednosti matrice iteracija SOR metode T_{SOR}, zaključujemo da je $\rho(T_{SOR}) \geq |1-\omega|$.
Prema teoremu 2.2.1 znamo da SOR metoda konvergira ako i samo ako je $\rho(T_{SOR}) < 1$ pa ako vrijedi $|1-\omega| \geq 1$, SOR metoda neće konvergirati. Uvjet $|1-\omega| \geq 1$ je ispunjen za $\omega \leq 0$ i $\omega \geq 2$ čime je teorem dokazan. □

Traženje optimalnog ω^* se u jednostavnijim slučajevima svodi na aproksimaciju, odnosno na odabiru više vrijednosti i promatranju promjene u brzini konvergencije te koja od tih vrijednosti daje najbolje rezultate. S dobrim odabirom ω^* povećanje brzine konvergencije je značajno. Parametar relaksacije ω se odabire tako da smanjuje spektralni radijus matrice iteracije T.

Za matricu C iz primjera 1.3.8 možemo promotriti kako se ponaša brzina konvergencije za različite vrijednosti parametra ω.



Slika 2.1: Spektralni radijus matrice iteracija SOR metode u ovisnosti o ω.

Optimalna vrijednost parametra relaksacije $\omega^* = 1.04$, a rješenje sustava i točnost rješenja dani su u sljedećoj tablici.

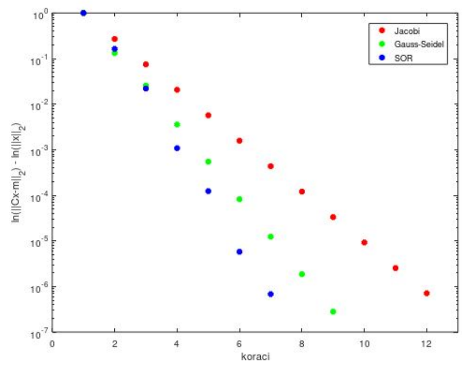
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\frac{\|\mathbf{C}x-\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{m}\|}$
0	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000000000
1	1.326531	2.868807	2.368871	0.163177342440
2	0.978525	2.198700	2.509262	0.021950038011
3	0.900297	2.185623	2.529038	0.001081441956
4	0.897673	2.181544	2.529825	0.000123511209
5	0.897233	2.181483	2.529934	0.000005766562
6	0.897220	2.181460	2.529938	0.000000679780

Tablica 2.5: Numerički rezultati za $\mathbf{C}x = \mathbf{m}$.

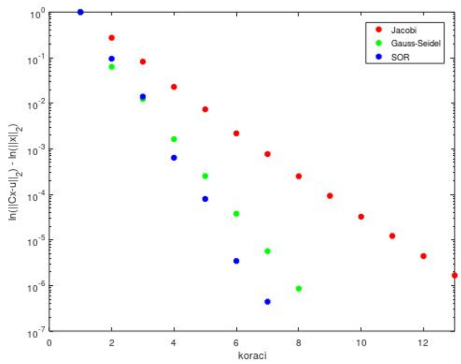
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\frac{\lVert \mathbf{C}x-\mathbf{u}\rVert}{\lVert \mathbf{u}\rVert}$
0	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000000000
1	13.265306	19.660289	8.851376	0.094649110657
2	12.427268	16.854700	9.301578	0.013964298104
3	12.106925	16.830627	9.381661	0.000636934072
4	12.099009	16.813281	9.384226	0.000079441267
5	12.097188	16.813199	9.384670	0.000003446106
6	12.097150	16.813102	9.384683	0.000000441126

Tablica 2.6: Numerički rezultati za $\mathbf{C}x = \mathbf{u}$.

Za $\omega = 1$, SOR metoda je zapravo Gauss-Seidelova metoda, no vidimo da čak i malo bolje odabrana vrijednost za ω, kao što je u ovom slučaju $\omega^* = 1.04$, daje bolje rezultate u smislu brže konvergencije.



Slika 2.2: Usporedba reziduala za sustav $\mathbf{C}x = \mathbf{m}$.



Slika 2.3: Usporedba reziduala za sustav $\mathbf{C}x = \mathbf{u}$.

Primjer 2.5.3. *Promotrimo kako se ponašaju vrijednosti za težine portfelja minimalne varijance ako umjesto računanja inverza matrice C u formulama* (1.11) *i* (1.12)*, iskoristimo vrijednosti dobivene za izraze* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}$ *i* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}$.

w	w_J	w_{GJ}	w_{SOR}
$\begin{bmatrix}0.31589407\\0.43904252\\0.24506341\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.31589380\\0.43904226\\0.24506394\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.31589439\\0.43904259\\0.24506303\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.31589427\\0.43904244\\0.24506329\end{bmatrix}$

Tablica 2.7: Usporedba rezultata za vektor težina $\mathbf{w}$ portfelja minimalne varijance.

Poglavlje 3

Model vrednovanja kapitalne imovine

Model vrednovanja kapitalne imovine (CAPM, engl. *Capital Asset Pricing Model*) ekstenzija je osnovne Markowitzeve teorije portfelja, koja je opisana u prvom poglavlju. U toj se teoriji promatra investitor koji ulaže u rizične vrijednosnice, dok se CAPM modelom modelira utjecaj svih investitora na tržištu, promatranih u cjelini, na cijene vrijednosnica [12].

Model vrednovanja kapitalne imovine temelji se na ideji da ne utječu svi rizici na cijenu imovine. Rizik, koji se može smanjiti diversificiranjem, nije rizik ako investitor, koji mu se izlaže ulaganjem u određenu vrijednosnicu, u portfelju posjeduje i druga ulaganja [11].

Proširivanjem teorije portfelja na cijelo tržište, broj vrijednosnica kojima se trguje naglo raste. Za tržište s $n = 1000$ protrgovanih vrijednosnica, kovarijacijska matrica $\mathbf{C}$ imat će $n^2 = 1000000$ elemenata. Tada precizne procjene matrice $\mathbf{C}$ i računanja efikasne granice mogu stvarati probleme u praksi. Model vrednovanja kapitalne imovine daje rješenje koje je efikasno za računanje i ne uključuje procjenu za $\mathbf{C}$.

3.1 Pretpostavke CAPM modela

1. Investitori su neskloni riziku i vrednuju investicijske portfelje samo u terminima pripadnih očekivanih vrijednosti i standardnih devijacija mjerenih na istom vremenu držanja.

2. Tržišta kapitala su savršena u smislu da je sva imovina savršeno djeljiva, ne postoje transakcijski troškovi, restrikcije na kratku prodaju ili porezi. Sve informacije su besplatne i svima dostupne, odnosno svi sudionici na tržištu su savršeno informirani te mogu posuđivati i davati na posudbu imovinu po bezrizičnoj kamatnoj stopi.

3. Svi investitori imaju pristup istim investicijskim mogućnostima.

4. Svaki investitor koristi iste vrijednosti za očekivane povrate, standardne devijacije i korelacije za sve vrijednosnice.

Iako ovakve pretpostavke predstavljaju pojednostavljen i idealan svijet, one su nužne za osnovni CAPM model. Svaki će investitor, koristeći dostupne informacije o vrijednosnicama, izračunati istu efikasnu granicu i na temelju toga donijeti svoje odluke. Ipak, investitori se mogu razlikovati po svojem stavu prema riziku, odabirući tako različite portfelje na efikasnoj granici.

U nastavku ćemo pretpostaviti da uz n rizičnih vrijednosnica postoji i bezrizična vrijednosnica. Za bezrizičnu vrijednosnicu vrijedi da je rizik jednak 0, tj. $\sigma_F = 0$, a povrat na tu vrijednosnicu označit ćemo s r_F.

3.2 Pravac tržišta kapitala

Uzmimo u obzir portfelj koji se sastoji od jedne bezrizične vrijednosnice i određene rizične vrijednosnice (kao rizičnu vrijednosnicu možemo promatrati i portfelj vrijednosnica) s očekivanim povratom μ_1 i standardnom devijacijom $\sigma_1 > 0$

Propozicija 3.2.1. *Standardna devijacija σ_V portfelja koji se sastoji od jedne rizične vrijednosnice s očekivanim povratom μ_1 i standardnom devijacijom $\sigma_1 > 0$ te jedne bezrizične vrijednosnice s očekivanim povratom r_F i standardnom devijacijom koja je jednaka 0, ovisi o težini w_1 rizične vrijednosnice:*

$$\sigma_V = |w_1|\sigma_1. \tag{3.1}$$

Dokaz. Neka su $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_F = 0$. Tada se (1.10) svodi na $\sigma_V^2 = w_1 c_{11} w_1 = w_1^2 \sigma_1^2$. Korjenovanjem dobivamo da je $\sigma_V = |w_1|\sigma_1$. □

Kao i u raspravi nakon propozicije 1.3.5 možemo izvesti oblik skupa minimalne varijance za portfelj koji sadrži jednu bezrizičnu i jednu rizičnu vrijednosnicu. Skup minimalne varijance degenerira iz hiperbole u dva polupravca koji se sijeku na osi ordinata (pri $\sigma = 0$), upravo u točki koja odgovara očekivanom povratu bezrizične vrijednosnice, što je prikazano na slici 3.1. Naime, kao i u dokazu propozicije 1.3.5 korištenjem metode Lagrangeovih multiplikatora imamo:

$$\begin{aligned} G(w_1, w_2, \lambda, \eta) &= w_1^2 \sigma_1^2 - \lambda(w_1 + w_2 - 1) - \eta(\mu_1 w_1 + \mu_0 w_2 - \mu_V) \\ 0 &= 2w_1 \sigma_1^2 - \lambda - \eta\mu_1 \\ 0 &= -\lambda - \eta\mu_0. \end{aligned}$$

Oznake su μ_1 za očekivani povrat na rizičnu vrijednosnicu te $\mu_0 = r_F$ za očekivani povrat na bezrizičnu vrijednosnicu te portfelj mora zadovoljavati (1.2) i (1.9).

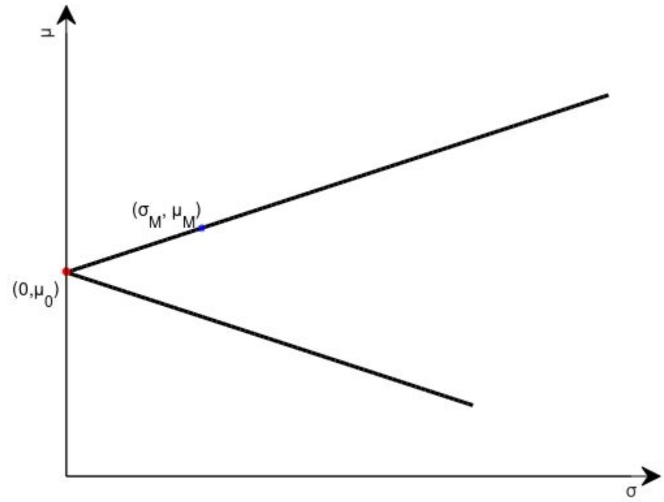
Za težine vrijedi $w_1 = \dfrac{\lambda + \eta\mu_1}{2\sigma_1^2}$ te uvrštavanjem u uvjet $\mu_1 w_1 + \mu_0 w_2 = \mu_V$ dobivamo izraze za λ, η:

$$\eta = 2\sigma_1^2 \frac{\mu_V - \mu_0}{(\mu_1 - \mu_0)^2}, \qquad \lambda = 2\sigma_1^2 \mu_0 \frac{\mu_0 - \mu_V}{(\mu_1 - \mu_0)^2}.$$

Konačno, uvrštavanjem u izraz za težine dobivamo da su

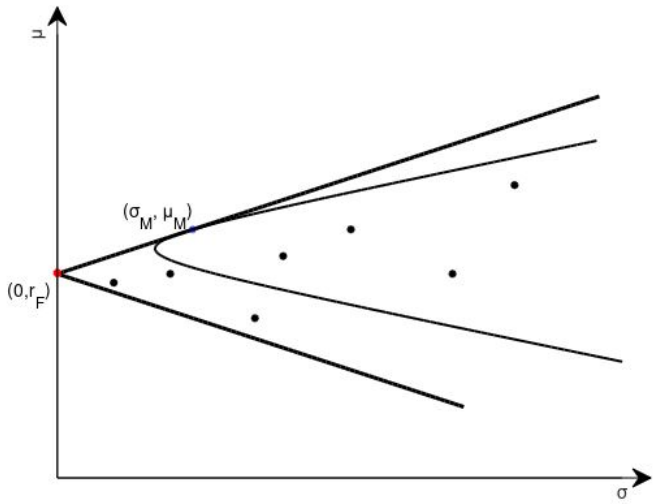
$$w_1 = \frac{\mu_V - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0}, \qquad w_2 = \frac{\mu_1 - \mu_V}{\mu_1 - \mu_0}$$

odnosno $\sigma_V = \left|\dfrac{\mu_V - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0}\sigma_1\right|$.



Slika 3.1: Skup minimalne varijance i efikasna granica portfelja s jednom rizičnom i jednom bezrizičnom vrijednosnicom.

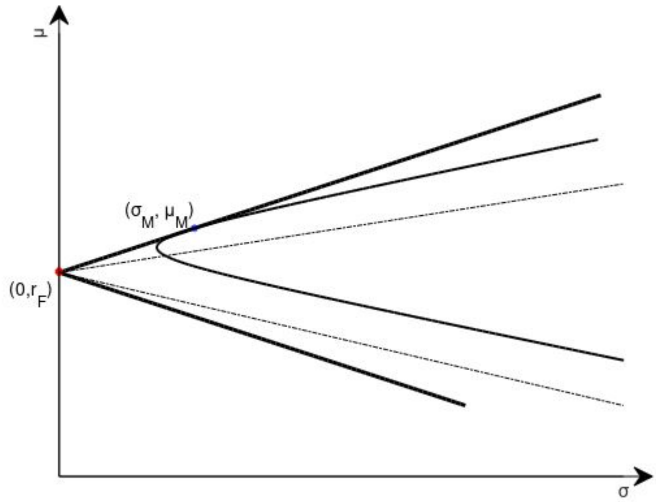
Uzmimo u obzir portfelj koji se sastoji od bezrizične vrijednosnice i specifične rizične vrijednosnice s očekivanim povratom μ_1 i standardnom devijacijom $\sigma_1 > 0$ iz proizvoljnog skupa mogućih portfelja koji se sastoje samo od rizičnih vrijednosnica. Umjesto jedne vrijednosnice, možemo promatrati i portfelj sastavljen od rizičnih vrijednosnica sa očekivanim povratom μ_1 te standardnom devijacijom σ_1. U nastavku ćemo promatrati upravo takav slučaj kada je odabrana rizična vrijednosnica portfelj vrijednosnica. Pokazali smo da je skup minimalne varijance takvog portfelja oblika kao na slici 3.1. Koristeći te dvije vrijednosnice možemo konstruirati bilo koji portfelj koji se nalazi između dva polupravca na slici 3.2.



Slika 3.2: Efikasna granica portfelja koji sadrže bezrizičnu vrijednosnicu.

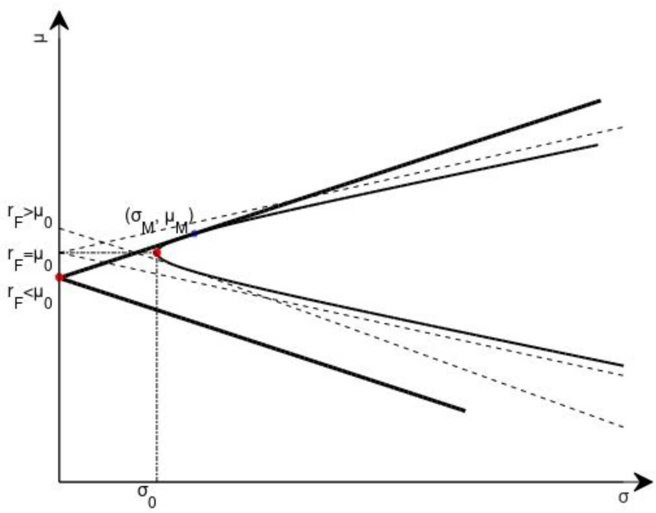
Efikasna granica tako novodobivenog skupa portfelja je gornji polupravac. Prema pretpostavkama CAPM modela svaki će racionalni investitor odabrati portfelj na tom polupravcu kojeg nazivamo *pravac tržišta kapitala* (engl. *capital market line*).

Pravac tržišta kapitala je tangenta na skup minimalne varijance skupa mogućih portfelja sastavljenih od rizičnih vrijednosnica. Naime, kada bi pravac sjekao skup minimalne varijance u jednoj ili dvije točke, odnosno imao manji nagib, portfelji na pravcu desno od točke sjecišta bi bili neefikasni. Postojao bi portfelj iz skupa mogućih portfelja koji ga dominira. Neefikasnost portfelja na pravcu tržišta kapitala je u kontradikciji s činjenicom da su ti portfelji na efikasnoj granici. Kada bi pravac bio nagnut tako da nema točaka dodira sa skupom minimalne varijance skupa rizičnih portfelja, efikasne kombinacije portfelja rizične i bezrizičnih vrijednosnica ne bi bile moguće. Na slici 3.3 prikazani su slučajevi u kojima pravac tržišta kapitala nije tangenta na skup minimalne varijance.



Slika 3.3: Grafički dokaz: pravac tržišta kapitala je tangenta na skup minimalne varijance.

Ovaj argument je također moguće izvesti samo u slučaju kada za očekivani povrat bezrizične vrijednosnice r_F i očekivani povrat portfelja minimalne varijance μ_0, vrijedi $r_F < \mu_0$. Ako bi bilo $r_F = \mu_0$, polupravci bi bili upravo asimptote na skup minimalne varijance skupa rizičnih portfelja. Kada bi bilo $r_F > \mu_0$, tada bi točka dodira bila na dijelu skupa minimalne varijance koji nije efikasna granica što je u kontradikciji s činjenicom da su na tom polupravcu efikasni porfelji.



Slika 3.4: Grafički dokaz: $r_F < \mu_0$.

Točka dirališta s koordinatama (μ_M, σ_M) ima posebnu ulogu. Svaki portfelj na pravcu tržišta kapitala može se konstruirati od jedne bezrizične vrijednosnice i portfelja sa standardnom devijacijom σ_M i očekivanim povratom μ_M. Budući da će svi investitori odabrati portfelj na pravcu tržišta kapitala te koristiti jednake informacije prilikom analiza, svi će držati portfelj s istim relativnim omjerima rizičnih vrijednosnica. U ravnoteži, bar jedan investitor će držati neku vrijednosnicu, inače bi njena cijena pala, a slijedno i očekivani povrat porastao toliko da privuče investitora na kupnju. To znači da portfelj u točki M mora sadržavati sve rizične vrijednosnice s težinama jednakima njihovom relativnom udjelu u cijelom tržištu. Kad bi neka vrijednosnica bila zastupljena s manjom težinom, ponuda bi nadmašila potražnju te bi cijena padala sve dok se težina, kojom je vrijednosnica zastupljena u svakom od portfelja, ne izjednači s relativnim udjelom te vrijednosnice na tržištu kapitala. Zbog tog svog svojstva portfelj u točki M naziva se *tržišni portfelj* (engl. *market portfolio*).

Portfelj u točki $(0,r_F)$ sadrži samo bezrizičnu vrijednosnicu. Stoga se na segmentu između te točke i točke M nalaze efikasni portfelji od kojih je svaki linearna kombinacija bezrizične vrijednosnice i tržišnog portfelja. Portfelji na istom polupravcu, koji se nalaze desno od točke M, su portfelji koje nazivamo *portfelji s polugom* (engl. *leveraged portfolios*). Oni su mogući samo ako je težina bezrizične vrijednosnice u ukupnom portfelju negativna, što znači da je investitor u vrijednosnice posudio novac po bezrizičnoj stopi kako bi mogao uložiti više u rizične vrijednosnice.

Pravac tržišta kapitala koji povezuje bezrizičnu vrijednosnicu i tržišni portfelj zadovoljava jednadžbu:

$$\mu = r_F + \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M}\sigma. \tag{3.2}$$

Za portfelj na pravcu tržišta kapitala s rizikom σ, koeficijent $\frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M}\sigma$ naziva se *premija rizika* (engl. *risk premium*). Označava dodatan povrat na osigurani bezrizični povrat r_F kao kompenzaciju za izlaganje riziku.

Primjer 3.2.2. *Primijenimo propoziciju 1.4.5 da bi izračunali tržišni portfelj za tržište koje se sastoji od triju vrijednosnica iz primjera 1.3.7 i bezrizične vrijednosnice s povratom* $r_F = 5\%$.

Težine $\mathbf{w}$ tržišnog portfelja, koji pripada efikasnoj granici, zadovoljava uvjet (1.14), koji povlači

$$\gamma \mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{m} - \mu \mathbf{u}).$$

Iz dokaza propozicije 1.4.5 znamo da je $\mu = r_F$ zato što pravac tržišta kapitala, tangenta na efikasnu granicu u točki koja predstavlja tržišni portfelj, siječe os μ u točki $(0, r_F)$. Uvrštavanjem u formulu dobivamo $\gamma \mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{m} - r_F \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 765.12630 \\ -1323.17240 \\ 226.00430 \end{bmatrix}$. S obzirom da

w mora zadovoljavati (1.2) slijedi

$$\gamma = \gamma \mathbf{u}^\tau \mathbf{w} = \mathbf{u}^\tau \begin{bmatrix} 765.12630 \\ -1323.17240 \\ 226.00430 \end{bmatrix} = -332.04180 \qquad \mathbf{i} \qquad w = \begin{bmatrix} -2.30430715 \\ 3.98495730 \\ -0.68065015 \end{bmatrix}.$$

Primjer 3.2.3. *Primijenimo propoziciju 1.4.5 da bi izračunali tržišni portfelj za tržište koje se sastoji od triju vrijednosnica iz primjera 1.3.8 i bezrizične vrijednosnice s povratom* $r_F = 5\%$.

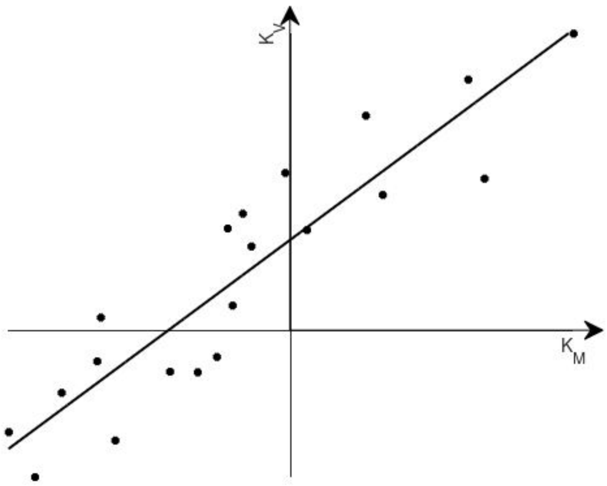
Kao i u prethodnom primjeru, iz propozicije 1.4.5 slijedi $\gamma \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.29236 \\ 1.34080 \\ 2.06070 \end{bmatrix}$. S obzirom da **w** mora zadovoljavati (1.2) slijedi

$$\gamma = \gamma \mathbf{u}^\tau \mathbf{w} = \mathbf{u}^\tau \begin{bmatrix} 0.29236 \\ 1.34080 \\ 2.06070 \end{bmatrix} = 3.6939 \qquad \mathbf{i} \qquad w = \begin{bmatrix} 0.079147 \\ 0.362981 \\ 0.557871 \end{bmatrix}.$$

3.3 Beta faktor

U slučaju u kojem promatramo cijelo tržište, sve dostupne vrijednosnice, zanima nas kako se ponaša povrat K_V na dani portfelj ili pojedinačnu vrijednosnicu u slučaju promjena koje utječu na cijelo tržište. Sharpe 1963. [13] je pretpostavio kako povrati na pojedine portfelje reflektiraju promjene na tržištu, opisane povratom na tržišni portfelj. Ta je veza linearna, a povrat na odabrani portfelj K_V osim o povratu na tržišni portfelj K_M, ovisi i o promjenama na tržištu koje utječu specifično na portfelj α_V. Osjetljivost povrata portfelja na promjene na tržištu označena je s β_V. Što je veći β_V, odnosno veća osjetljivost na tržišni rizik, to je veći traženi povrat na portfelj K_V.

Prikažimo na grafu vrijednosti K_V (os ordinata) za svako tržište, u odnosu na povrat na tržišni portfelj K_M (os apscisa):



Slika 3.5: Regresijski pravac

Izračunajmo regresijski pravac čija jednadžba glasi:

$$y = \beta_V x + \alpha_V.$$

Za bilo koji dani β i α, vrijednosti slučajne varijable $\alpha + \beta K_M$ mogu se promatrati kao predviđanja za očekivani povrat danog portfelja. Razlika

$$\epsilon = K_V - (\alpha + \beta K_M) \tag{3.3}$$

između stvarne vrijednosti povrata K_V i predviđene vrijednosti $\alpha + \beta K_M$ naziva se *rezidualna slučajna varijabla* (engl. *residual random variable*).

Uvjet koji određuje regresijski pravac je da

$$\mathbb{E}[\epsilon^2] = \mathbb{E}[K_V^2] - 2\beta\mathbb{E}[K_V K_M] + \beta^2\mathbb{E}[K_M^2] + \alpha^2 - 2\alpha\mathbb{E}[K_V] + 2\alpha\beta\mathbb{E}[K_M]$$

kao funkcija po β i α postiže minimum u $\beta = \beta_V$ i $\alpha = \alpha_V$. Nužan uvjet za minimum je da parcijalne derivacije po β i α budu 0 za $\beta = \beta_V$ i $\alpha = \alpha_V$. To bi značilo da mora vrijediti:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathbb{E}[\epsilon^2]\bigg|_{\alpha=\alpha_V,\beta=\beta_V} = 2\alpha - 2\mathbb{E}[K_V] + 2\beta\mathbb{E}[K_M]\bigg|_{\alpha=\alpha_V,\beta=\beta_V}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial\beta}\mathbb{E}[\epsilon^2]\bigg|_{\alpha=\alpha_V,\beta=\beta_V} = -2\mathbb{E}[K_V K_M] + 2\beta\mathbb{E}[K_M^2] + 2\alpha\mathbb{E}[K_M]\bigg|_{\alpha=\alpha_V,\beta=\beta_V}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \alpha_V + \beta_V \mathbb{E}[K_M] &= \mathbb{E}[K_V] \\ \alpha_V \mathbb{E}[K_M] + \beta_V \mathbb{E}[K_M^2] &= \mathbb{E}[K_V K_M]. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s $\mathbb{E}[K_M]$ i oduzimanjem od druge, dobivamo da je

$$\beta_V(\mathbb{E}[K_M]^2 - \mathbb{E}[K_M^2]) = \mathbb{E}[K_V K_M] - \mathbb{E}[K_V]\mathbb{E}[K_M] \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta_V = \frac{Cov(K_V, K_M)}{\sigma_M^2}.$$

Iz prve jednadžbe izrazimo

$$\alpha_V = \mu_V - \beta_V \mu_M.$$

U praksi najčešće ne znamo vrijednosti $\sigma_M^2, \mathrm{Cov}(K_V, K_M), \mu_V, \mu_M$ pa za procjenu regresijskog pravca koristimo numeričke metode pomoću kojih procjenjujemo α_V i β_V, a koje su opisane u idućem poglavlju.

Definicija 3.3.1. *Koeficijent*

$$\beta_V = \frac{Cov(K_V, K_M)}{\sigma_M^2} \tag{3.4}$$

naziva se beta faktor *portfelja ili vrijednosnice.*

Beta faktor označava očekivane promjene u povratu na određeni portfelj ili vrijednosnicu uslijed promjena na tržištu. Iz $\mu_V = \beta_V \mu_M + \alpha_V$ uočavamo da ako je beta faktor pozitivan, povrat na vrijednosnicu raste kako raste povrat na tržišni portfelj, a ako je beta faktor negativan, povrat na vrijednosnicu raste ako pada povrat na tržišni portfelj.

Beta faktor ima još jednu interpretaciju. Rizik vrijednosnice ili portfelja $\sigma_V^2 = \mathrm{Var}(K_V)$, možemo zapisati u obliku:

$$\sigma_V^2 = Var(\epsilon_V) + \beta_V^2 \sigma_M^2. \tag{3.5}$$

Naime, uvrštavanjem reziduala (3.3) u izraz za σ_V^2 imamo:

$$\begin{aligned} Var(\epsilon_V) + \beta_V^2 \sigma_M^2 &= Var(K_V - (\alpha_V + \beta_V K_M)) + \beta_V^2 \sigma_M^2 \\ &= Var(K_V) + Var(\alpha_V + \beta_V K_M) - 2Cov(K_V, \alpha_V + \beta_V K_M) + \beta_V^2 \sigma_M^2 \\ &= \sigma_V^2 + \beta_V^2 Var(K_M) - 2\beta_V Cov(K_V, K_M) + \beta_V^2 \sigma_M^2 \\ &\overset{(3.4)}{=} \sigma_V^2 + 2\beta_V^2 \sigma_M^2 - 2\beta_V^2 \sigma_M^2 \\ &= \sigma_V^2. \end{aligned}$$

Prvi član $Var(\epsilon_V)$ u (3.5) naziva se *nesistemski rizik* (specifični rizik, nesistemska varijanca, engl. *diversifiable risk*). Za tržišni portfelj, taj je rizik nula jer je iz definicije 3.3.1

$\beta_M = 1$ pa uvrštavanjem vrijednosti za tržišni portfelj u jednadžbu (3.5), dobivamo upravo Var(ϵ_M)=0. Dakle, nesistemski rizik se može diversificirati ulaganjem u tržišni portfelj.

Drugi član $\beta_V^2 \sigma_M^2$ u (3.5) naziva se *sistemski rizik* (nespecifični rizik, sistemska varijanca, engl. *undiversifiable risk*). To je jedini rizik koji je prisutan za tržišni portfelj. Na beta faktor β_V gledamo kao standardiziranu mjeru sistemskog rizika za vrijednosnicu.

U CAPM modelu, sistemski rizik, mjeren s β_V, će biti povezan s očekivanim povratom μ_V i posljedično s cijenom pojedine vrijednosnice i portfelja. Što je veći sistemski rizik, veći je povrat kojeg investitori očekuju kao premiju za izlaganje riziku. Nesistemski rizik nema dodatnih premija jer ne utječe na μ_V. Razlog tomu je da se nesistemski rizik može eliminirati proširivanjem investicije na portfelj s puno vrijednosnica i posebice, ulaganjem u tržišni portfelj.

3.4 Pravac tržišta vrijednosnica

Teorem 3.4.1. *Očekivani povrat μ_V na portfelj (ili pojedinačnu vrijednosnicu) je linearna funkcija beta faktora portfelja β_V*

$$\mu_V = r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V \tag{3.6}$$

Dokaz. Promotrimo proizvoljan portfelj s težinama $\mathbf{w}_V$ i označimo s $\mathbf{w}_M$ težine tržišnog portfelja. Tržišni portfelj pripada efikasnoj granici skupa mogućih portfelja rizičnih vrijednosnica pa zadovoljava uvjet iz propozicije 1.4.5

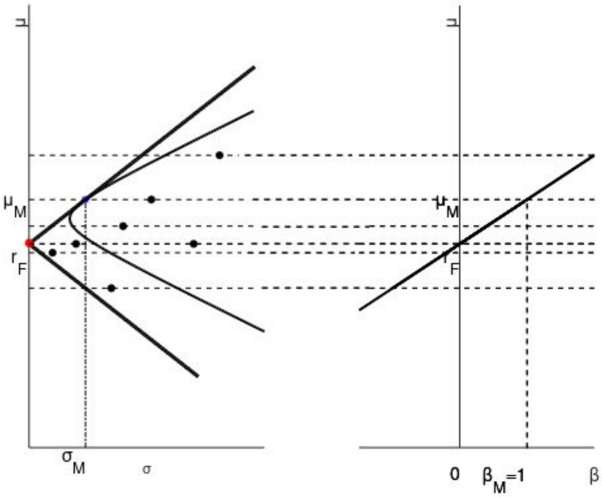
$$\gamma \mathbf{C}\mathbf{w}_M = \mathbf{m} - \mu \mathbf{u},$$

za neke $\gamma > 0$ i $\mu \in \mathbb{R}$. Beta faktor portfelja s težinama $\mathbf{w}_M$ možemo prikazati u obliku:

$$\beta_V = \frac{Cov(K_V, K_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\mathbf{w}_V^\tau \mathbf{C}\mathbf{w}_M}{\mathbf{w}_M^\tau \mathbf{C}\mathbf{w}_M} = \frac{\mathbf{w}_V^\tau \gamma(\mathbf{m} - \mu\mathbf{u})}{\mathbf{w}_M^\tau \gamma(\mathbf{m} - \mu\mathbf{u})} = \frac{\mu_V - \mu}{\mu_M - \mu}$$

gdje posljednja jednakost vrijedi zbog (1.2) i (1.9). Prema napomeni 1.4.6 μ je ordinata sjecišta tangente na efikasnu granicu, što je upravo $\mu = r_F$ za tržišni portfelj. Time smo pokazali da je $\mu_V = r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$. □

Ako grafički prikažemo očekivani povrat μ u odnosu na beta faktor β portfelja, dobit ćemo pravac na β, μ grafu kojeg nazivamo *pravac tržišta vrijednosnica* (engl. *security market line*). Na slici 3.6 prikazani su lijevo graf sa slike 3.2 i desno pravac tržišta vrijednosnica. Različiti portfelji i vrijednosnice prikazani su točkama.



Slika 3.6: Pravac tržišta kapitala i pravac tržišta vrijednosnica

Slično kao u (3.2) za pravac tržišta kapitala, član $(\mu_M - r_F)\beta_V$ u jednadžbi (3.6) je *premija rizika*, koj predstavlja nadoknadu za izlaganje sistemskom riziku. Za razliku od (3.2), koja se odnosi samo na portfelje na pravcu tržišta kapitala, jednadžba (3.6) se odnosi na sve portfelje i pojedinačne vrijednosnice.

Model vrednovanja kapitalne imovine opisuje ravnotežu na tržištu jer svi investitori drže portfelj rizičnih vrijednosnica u kojemu su vrijednosnice zastupljene s istim težinama s kojima su sadržane u tržišnom portfelju. Svako moguće trgovanje, dovest će do preraspodjele sredstava između bezrizične vrijednosnice i tržišnog portfelja. Posljedica tomu će biti ravnoteža između ponude i potražnje svih vrijednosnica. Takva se ravnoteža održava sve dok procjene za očekivani povrat i beta faktor zadovoljavaju (3.6).

Kada se pojavi neka nova informacija o tržištu, dolazi do promjene u procjenama za očekivane povrate i beta faktore. Takve nove vrijednosti ne moraju nužno zadovoljavati (3.6). Pretpostavimo slučaj u kojem je

$$\mu_V \; > \; r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$$

za neku određenu vrijednosnicu. U tom slučaju investitori žele ojačati svoju relativnu poziciju u toj vrijednosnici, koja nudi veći očekivani povrat (lijeva strana jednadžbe) od naknade koju investitori očekuju za izlaganje sistemskom riziku (desna strana jednadžbe). Potražnja za tom vrijednosnicom će nadmašiti ponudu, a posljedično će rast cijena vrijednosnice dovesti do pada očekivanog povrata.

Ako bi bilo suprotno,

$$\mu_V \; < \; r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$$

investitori žele prodati vrijednosnicu. U tom će slučaju ponuda nadmašiti potražnju te će cijena vrijednosnice padati, a time će očekivani povrat rasti.

U prvom slučaju cijene rastu, a u drugom padaju, posljedično se promjene događaju i u očekivanom povratu na tu vrijednosnicu, sve dok se ponovno ne postigne ravnoteža.

Investitor koji ulaže u portfelj ili vrijednosnicu V prema prethodne dvije nejednakosti može saznati je li neka vrijednosnica podcijenjena ili precijenjena i time odlučiti treba li je prodati ili kupiti.

Poglavlje 4

Numeričko rješavanje problema najmanjih kvadrata

U prethodnom smo se poglavlju susreli s pravcem koji opisuje odnos povrata K_V na danu vrijednosnicu i povrata na tržišni portfelj K_M. Taj pravac daje mogućnost procjene povrata na proizvoljnu vrijednosnicu ili portfelj K_V u nekoj novoj tržišnoj situaciji, ako znamo kako se ponašao povrat K_V u odnosu na povrat na tržišni portfelj K_M za razne situacije na tržištu. Pretpostavimo da je dan niz povijesnih opažanja $(K_{V,t}, K_{M,t})_{t=1}^{n}$ povrata vrijednosnice V i povrata tržišnog portfelja u n vremenskih trenutaka. Želimo naći model oblika

$$K_{V,t} = \alpha + \beta K_{M,t} + \epsilon_t. \tag{4.1}$$

α i β su nepoznanice, a ϵ_t slučajni šum.

4.1 Opis linearnog problema najmanjih kvadrata

Pretpostavimo da su dani sljedeći podaci:

- promatrana zavisna varijabla Y koja predstavlja reakciju modela na ulaz
- n nezavisnih poznatih varijabli X_j na temelju kojih se predviđa ishod.

Za sve varijable u modelu, poznato je m različitih mjerenja, $m > n$. Za $i = 1, \ldots, m$:

- Y_i označava vrijednost varijable Y u i-tom mjerenju
- $X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}$ označavaju vrijednosti varijabli $X_1, \ldots, X_n$ u i-tom mjerenju.

Model višestruke linearne regresije koja povezuje Y i $X_1, \ldots, X_n$ i pomoću koje možemo procijeniti ne samo odnos zavisne i nezavisnih varijabli, već i predvidjeti buduće vrijednosti od Y je oblika:

$$Y_i = \beta_1 X_{i,1} + \cdots + \beta_n X_{i,n} + \epsilon_i$$

gdje su $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nepoznati koeficijenti koje želimo odrediti te ϵ_i bijeli šum.

Definicija 4.1.1. *Niz* $(\epsilon_i)_{i=1}^m$ *je* bijeli šum *ako vrijedi:*

- $\mathbb{E}[\epsilon_i] = 0, \ \forall i = 1, \ldots, m$
- $\mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j] = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, m$ *takve da je* $i \neq j$
- $Var[\epsilon_i] = \sigma_\epsilon^2, \ \forall i = 1, \ldots, m$

Definiramo:

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{m,1} & \cdots & X_{m,n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}.$$

Kao rješenje problema najmanjih kvadrata tražimo vrijednosti $\tilde{\mathbf{b}}$ koje minimiziraju sumu kvadrata, odnosno za koje je $||\epsilon||$ minimalna:

$$S(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m \left(Y_i - \sum_{j=1}^n \beta_j X_{i,j} \right)^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b})^\tau (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}).$$

Tada je rezultat metode najmanjih kvadrata vektor nepoznatih koeficijenata $\tilde{\mathbf{b}}$ sa svojstvom $S(\tilde{\mathbf{b}}) = min\ S(\mathbf{b})$. Označimo $A = \mathbb{X}, x = \mathbf{b}, b = \mathbf{y}$ kako bi oznake bile u skladu sa standardnim oznakama numeričke linearne algebre.

Matrična formulacija

Za $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ i $b \in \mathbb{R}^m$ rješavamo problem $\min_x ||Ax - b||_2$, odnosno određujemo x takav da minimizira normu reziduala $r = Ax - b$, $\min_x ||r||_2$.

Teorem 4.1.2. *Skup svih rješenja problema najmanjih kvadrata označimo s*

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||Ax - b|| = \min_{x'} ||Ax' - b||_2 \right\}.$$

Tada je $x \in \mathcal{S} \Leftrightarrow$ *vrijedi relacija ortogonalnosti* $A^\tau(b - Ax) = 0$.

Dokaz. [$\Leftarrow$] Pretpostavimo da $\tilde{x}$ zadovoljava relaciju ortogonalnosti

$$A^\tau \tilde{r} = 0,\ \tilde{r} = b - A\tilde{x}.$$

Tada za bilo koji $x \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$r = b - Ax = \tilde{r} + A\tilde{x} - Ax = \tilde{r} - A(x - \tilde{x}).$$

Ako označimo $e = x - \tilde{x}$ onda je

$$\|r\|_2^2 = r^\tau r = (\tilde{r} - Ae)^\tau(\tilde{r} - Ae) = \tilde{r}^\tau \tilde{r} + (Ae)^\tau(Ae) = \|\tilde{r}\|_2^2 + \|Ae\|_2^2.$$

Iz $A^\tau r = 0$ slijedi da je $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$, $(Ay)^\tau r = 0$, odnosno $r \perp \mathrm{Im}(A)$. Tada vrijedi da je skalarni produkt r i $Ae \in \mathrm{Im}(A)$ jednak nula te vrijedi gornja jednakost. Kako je $\|Ae\|_2 \geq 0$ vidimo da se minimalna vrijednost za $\|b - Ax\|_2 = \|r\|_2$ postiže upravo za $\tilde{r}$, odnosno kad $\tilde{x}$ minimizira $\|r\|_2$. Time je pokazano da je $\tilde{x} \in \mathcal{S}$.

[$\Rightarrow$] Pretpostavimo da je $\tilde{x} \in \mathcal{S}$ i pretpostavimo suprotno, da $\tilde{x}$ ne zadovoljava relaciju ortogonalnosti, već vrijedi

$$A^\tau \tilde{r} = z \neq 0$$

i uzmimo $x = \tilde{x} + \epsilon z$. Tada je $r = \tilde{r} - \epsilon A z$ i za dovoljno mali ϵ vrijedi

$$\|r\|_2^2 = r^\tau r = \tilde{r}^\tau \tilde{r} - 2\epsilon z^\tau z + \epsilon^2 (Az)^\tau (Az) < \tilde{r}^\tau \tilde{r}.$$

Iz $\|r\|_2^2 < \|\tilde{r}\|_2^2$ sada zaključujemo da $\tilde{x}$ nije rješenje u smislu najmanjih kvadrata, što znači da $\tilde{x} \notin \mathcal{S}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. $\square$

Ako je $\mathrm{rang}(A) < n$, rješenje ovog problema nije jedinstveno te se minimum postiže na cijelom afinom potprostoru, $\mathcal{S} = x + \mathrm{Ker}(A)$.

Vrijedi da je $\mathrm{Ker}(A) \neq 0$ pa $\exists\, z \in \mathrm{Ker}(A)$, $z \neq 0$ takav da $Az = 0$. Iz toga slijedi da $\|A(x + z) - b\|_2 = \|Ax + Az - b\|_2 = \|Ax - b\|_2$, tj. dodavanjem bilo kojeg vektora z iz nul-potprostora vektoru x, dobivamo rješenje koje minimizira rezidual.

Ako je $x \perp \mathrm{Ker}(A) \ni z$, onda je $\|x + z\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|z\|_2^2 \geq \|x\|_2^2$ te je x jedinstveno rješenje problema najmanjih kvadrata koje ima minimalnu 2-normu.

Relaciju ortogonalnosti možemo zapisati u obliku $A^\tau Ax = A^\tau b$ te rješenje problema najmanjih kvadrata tražiti rješavanjem tog sustava, kojeg nazivamo *sustav normalnih jednadžbi*. Matrica $A^\tau A$ je simetrična i pozitivno semidefinitna, a sustav normalnih jednadžbi je uvijek konzistentan, jer je

$$A^\tau b \in \mathrm{Im}(A^\tau) = \mathrm{Im}(A^\tau A).$$

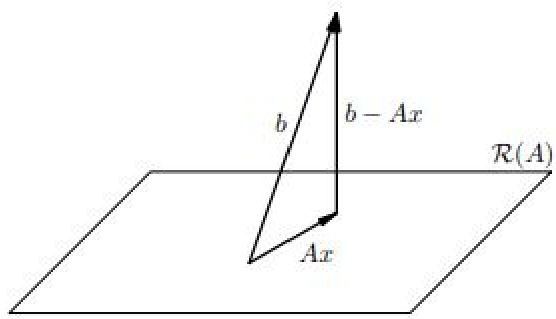
Štoviše, ako je $\text{rang}(A) = n$, matrica $A^\tau A$ je pozitivno definitna te je rješenje sustava normalnih jednadžbi jedinstveno. U tom slučaju rješenje i pripadni rezidual zadovoljavaju:

$$x = (A^\tau A)^{-1} A^\tau b \qquad \text{i} \qquad r = b - A(A^\tau A)^{-1} A^\tau b.$$

Posljednja tvrdnja slijedi iz sljedeće propozicije čiji je dokaz u [7].

Propozicija 4.1.3. *Matrica $A^\tau A$ je pozitivno definitna ako i samo ako je rang$(A) = n$.*

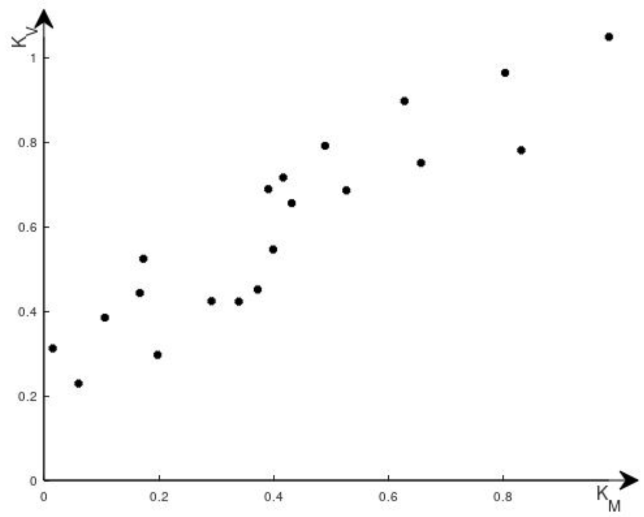
Za rješenje x vrijedi da je Ax ortogonalna projekcija vektora b na $\text{Im}(A)$. Prema prethodnom teoremu vrijedi $A^\tau r = 0$ pa je $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$, $(Ay)^\tau r = 0$, odnosno $r \perp \text{Im}(A)$. Ax je dobiven iz b oduzimanjem komponente r koja je okomita na $\text{Im}(A)$ pa je Ax ortogonalna projekcija vektora b na $\text{Im}(A)$.



Slika 4.1: Ax je ortogonalna projekcija vektora b na $\text{Im}(A)$. Preuzeto iz [7].

Primjer 4.1.4. *([3]) Dan je niz povijesnih opažanja $(K_{V,t}, K_{M,t})_{t=1}^n$, n=20. Tražimo model oblika (4.1). U matričnom obliku problem se svodi na $\min_x \|Ax - b\|_2$ gdje su:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & K_{M,1} \\ 1 & K_{M,2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & K_{M,n} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} K_{V,1} \\ K_{V,2} \\ \cdots \\ K_{V,n} \end{bmatrix}$$



Slika 4.2: Povrati na portfelje vrijednosnica i tržišni portfelj

4.2 Numeričke metode za rješavanje problema najmanjih kvadrata

Definicija 4.2.1. *Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kažemo da je* ortogonalna *ako vrijedi $AA^\tau = A^\tau A = I$*

Definicija 4.2.2. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna matrica.* Uvjetovanost matrice *A u normi 2 je veličina*

$$\kappa_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 \tag{4.2}$$

4.2.1 Rješavanje sustava normalnih jednadžbi

Promotrimo sustav normalnih jednadžbi

$$A^\tau Ax = A^\tau b.$$

Ako je matrica $A^\tau A$ pozitivno definitna, odnosno $\text{rang}(A) = n$ i uvjetovanost matrice sustava je mala, možemo koristiti ovu metodu za rješavanje problema najmanjih kvadrata.

Definicija 4.2.3. Faktorizacija Choleskog *(*trokutasta faktorizacija*) je faktorizacija simetrične pozitivno definitne matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ u obliku*

$$A = R^\tau R \tag{4.3}$$

gdje je $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gornjetrokutasta matrica.

Ako A particioniramo tako da je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a^\tau \\ a & \tilde{A} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$

onda je zbog pozitivne definitnosti $a_{11} > 0$ i prvi korak eliminacija je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{a_{11}} & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a^\tau \\ a & \tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a^\tau \\ 0 & \tilde{A} - \frac{aa^\tau}{a_{11}} \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Primijetimo da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{a_{11}} & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a^\tau \\ a & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a^\tau}{a_{11}} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A} - \frac{aa^\tau}{a_{11}} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

pri čemu je dobivena matrica također pozitivno definitna. Radi jednostavnosti oznaka, jednadžbe (4.4) i (4.5) zapišimo redom u obliku $R_1^\tau A = U_1$ i $R_1^\tau A R_1 = D_1$. U_1 je blok gornjetrokutasta, D_1 blok dijagonalna matrica, a R_1 gornjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali. Matrica $\tilde{A} - \frac{aa^\tau}{a_{11}}$ je također pozitivno definitna, njen prvi dijagonalni element strogo veći od 0 te se eliminacije mogu nastaviti. Nastavljajući eliminacije u (4.4) dobivamo da se matrica A, prema (4.5), može zapisati u rastavu $A = \tilde{R}^{-\tau} D \tilde{R}^{-1}$, gdje je $\tilde{R}$ produkt gornjetrokutastih matrica s jedinicama na dijagonali pa je i $\tilde{R}$ takve strukture. Matrica D ima strogo pozitivne elemente pa postoji dijagonalna matrica Δ, $\Delta_{ii} = \sqrt{D_{ii}}$ takva da je $D = \Delta\Delta$. Rastav matrice A sada je oblika $A = (\tilde{R}^{-\tau}\Delta)(\Delta\tilde{R}^{-1}) = (\Delta\tilde{R}^{-1})^\tau(\Delta\tilde{R}^{-1})$. Uz oznaku $R = (\Delta\tilde{R}^{-1})$, R je gornjetrokutasta matrica s pozitivnim dijagonalnim elementima Δ_{ii}, a rastav postaje $A = R^\tau R$ što dokazuje egzistenciju faktorizacije Choleskog.

Raspisivanjem relacije

$$A = R^\tau R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{1,n-1} & \cdots & & r_{n-1,n-1} & 0 \\ r_{1n} & \cdots & & r_{n-1,n} & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1,n-1} & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2,n-1} & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & 0 & r_{nn} \end{bmatrix}$$

po komponentama za $i \leq j$ imamo:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} r_{kj} r_{ki}.$$

iz čega slijedi algoritam za računanje matrice R. Za $i = 1, \ldots, n$

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}$$

$$\text{za } j = i+1, \ldots, n \qquad r_{ij} = \Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}\Big)\Big/ r_{ii}$$

Za linearni sustav jednadžbi $Ax = b$ čija je matrica sustava $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $A = R^\tau R$, rješenje sustava

$$x = A^{-1} b = (R^{-1} R^{-\tau}) b$$

možemo dobiti tako da prvo nađemo rješenje y sustava $R^\tau y = b$, a zatim riješimo sustav $Rx = y$. Matrica R je gornjetrokutasta pa rješenje y dobijemo supstitucijom unaprijed, a x supstitucijom unatrag. Takvo rješavanje možemo zapisati u sljedećem algoritmu.

Algoritam

```
function [x_rez] = Choleski(A, b)
  n = size(A)(1,1);
  y = zeros(n,1);
  x = zeros(n,1);
  R = zeros(n,n);
  for j=1:n
    for i=1:(j-1)
      sum=0;
      for k=1:(i-1)
        sum = sum + R(k,i)*R(k,j);
      end
      R(i,j) = (A(i,j)-sum)/R(i,i);
    end
    sum=0;
    for k=1:(j-1)
      sum = sum + R(k,j)*R(k,j);
    end
    R(j,j)=sqrt(A(j,j) - sum);
  end
  y(1) = b(1)/R(1,1);
  for i=2:n
    sum=0;
```

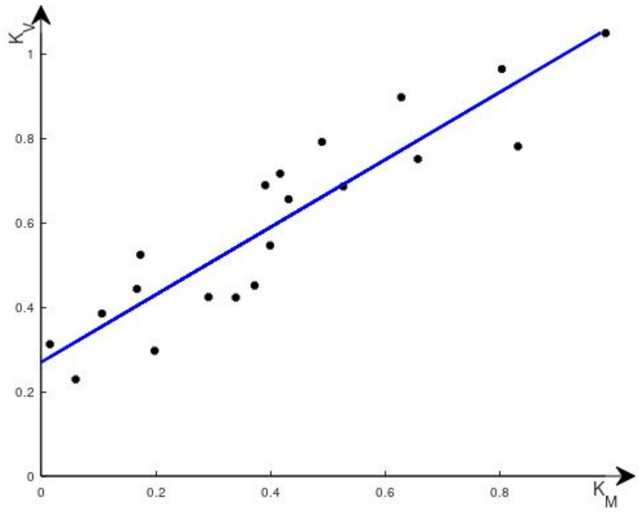
```
        for j=1:(i-1)
            sum = sum + R(j,i)*y(j);
        end
        y(i)=(b(i)-sum)/R(i,i);
    end
    x(n) = y(n)/R(n,n);
    for i=(n-1):(-1):1
        sum=0;
        for j=(i+1):n
            sum = sum + R(i,j)*x(j);
        end
        x(i) = (y(i)-sum)/R(i,i);
    end
    x_rez=x;
end
```

Za rješavanje problema najmanjih kvadrata možemo primijeniti gornji algoritam na sustav normalnih jednadžbi.

Primjer 4.2.4. *Promotrimo problem najmanjih kvadrata iz primjera 4.1.4 i riješimo sustav normalnih jednadžbi pomoću faktorizacije Choleskog.*

Rješenje x glasi

$$x = \begin{bmatrix} 0.26945 \\ 0.79994 \end{bmatrix}.$$



Slika 4.3: Pravac $K_V = 0.26945 + 0.79994K_M$ dobiven rješavanjem problema pomoću sustava normalnih jednadžbi.

4.2.2 QR faktorizacija

Teorem 4.2.5. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$. Tada postoji ortogonalna matrica $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takva da je*

$$Q^\tau A = R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

gdje je $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, a $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gornjetrokutasta matrica s nenegativnim elementima.

Napomena 4.2.6. Reducirana QR faktorizacija *matrice A je rastav oblika*

$$A = Q_1R_1$$

gdje su $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortonormirana matrica, a $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gornjetrokutasta matrica s nenegativnim elementima. Takav rastav dobijemo ako u izrazu (4.6) *iskoristimo rastav $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$, za $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $Q_2 \in \mathbb{R}^{m\times(m-n)}$*

Pri rješavanju problema najmanjih kvadrata možemo se naći u dvije situacije: kada je $\operatorname{rang}(A) < n$ te kada je $\operatorname{rang}(A) = n$.

U slučaju kada je matrica A punog stupčanog ranga, odnosno, prema propoziciji 4.1.3, ako je $A^\tau A$ pozitivno definitna, rješenje problema je jednako rješenju sustava normalnih jednadžbi $x = (A^\tau A)^{-1}A^\tau b$.

Napravimo reduciranu QR faktorizaciju matrice A: $A = QR = Q_1R_1$, gdje su prema napomeni 4.2.6 Q_1 ortonormirana i R_1 gornjetrokutasta, regularna matrica. Dobivamo

$$\begin{aligned} x &= (A^\tau A)^{-1}A^\tau b = (R_1^\tau Q_1^\tau Q_1 R_1)^{-1} R_1^\tau Q_1^\tau b \\ &\overset{(*)}{=} (R_1^\tau R_1)^{-1} R_1^\tau Q_1^\tau b = R_1^{-1} R_1^{-\tau} R_1^\tau Q_1^\tau b = R_1^{-1} Q_1^\tau b \end{aligned}$$

gdje jednakost (*) slijedi zbog ortogonalnosti matrice Q_1, $Q_1^\tau Q_1 = I$. Da bi odredili rješenje x sustava $x = R_1^{-1}Q_1^\tau b$, rješavamo trokutasti linearni sustav $R_1 x = Q_1^\tau b$.

Ako matrica A nema puni stupčani rang, odnosno vrijedi $\mathrm{rang}(A) = r < n$ koristi se QR faktorizacija sa stupčanim pivotiranjem oblika:

$$AP = QR = Q\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdje R_{11} regularna reda r, R_{12} matrica reda $r \times (n - r)$ i P matrica permutacija reda $n \times n$.

Za rješenje problema najmanjih kvadrata promatramo

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|_2^2 &= \| Q^\tau b - (Q^\tau AP)(P^\tau x) \|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11}y + R_{12}z \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} (c - R_{12}z) - R_{11}y \\ d \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \| (c - R_{12}z) - R_{11}y \|_2^2 + \| d \|_2^2 \end{aligned}$$

gdje su

$$P^\tau x = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \scriptstyle r \\ \scriptstyle n-r \end{array} \qquad Q^\tau b = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \scriptstyle r \\ \scriptstyle m-r \end{array} .$$

Prva jednakost vrijedi zbog unitarne invarijantnosti matrične norme i ortogonalnosti matrice P. S obzirom da d ne ovisi o x, traženje minimuma norme reziduala se svodi na traženje minimalne norme $\| (c - R_{12}z) - R_{11}y \|_2^2$. Ta je norma minimalna za $y = R_{11}^{-1}(c - R_{12}z)$. Zaključujemo da rješenje x koji minimizira normu reziduala mora zadovoljavati $x = P\begin{bmatrix} R_{11}^{-1}(c - R_{12}z) \\ z \end{bmatrix}$.

Za $z = 0$ dobivamo osnovno rješenje $x = P\begin{bmatrix} R_{11}^{-1}c \\ 0 \end{bmatrix}$. Takvo rješenje ne mora imati minimalnu normu u skupu svih rješenja. Do rješenja s minimalnom normom možemo doći pomoću *potpune ortogonalne dekompozicije*.

U jednakosti $AP = QR$, napravimo QR faktorizaciju matrice $\begin{bmatrix} R_{11}^\tau \\ R_{12}^\tau \end{bmatrix}$. Izračunamo ortogonalnu matricu $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takvu da je:

$$Z \begin{bmatrix} R_{11}^\tau \\ R_{12}^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^\tau \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} R_{11}^\tau & R_{12}^\tau \end{bmatrix} Z^\tau = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \end{bmatrix}$$

gdje je $L_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donjetrokutasta matrica.

Tada slijedi, uz $S = PZ^\tau$

$$Q^\tau AS = L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vrijedi $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(S(1 : n, r + 1 : n))$.

Ponovno promotrimo normu reziduala:

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|_2^2 &= \| Q^\tau b - (Q^\tau AS)(S^\tau x) \|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{11} w \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} L_{11} w - c \\ d \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \| L_{11} w - c \|_2^2 + \| d \|_2^2 \end{aligned}$$

gdje su

$$S^\tau x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \scriptstyle r \\ \scriptstyle n-r \end{array} \qquad Q^\tau b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \begin{array}{l} \scriptstyle r \\ \scriptstyle m-r \end{array} .$$

Da bi norma reziduala bila minimalna, s obzirom da d ne ovisi o x, mora vrijediti $w = L_{11}^{-1} c$, a ako uz to želimo da rješenje x bude minimalne norme, mora vrijediti $v = 0$. Tada imamo

$$x = S \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = S_1 w$$

gdje su $S_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, prvih r stupaca i $S_1 \in \mathbb{R}^{n\times n-r-1}$. Vrijedi $x \in \mathrm{Im}(S_1) \perp \mathrm{Im}(S_2) = \mathrm{Ker}(A)$. Pokazali smo u raspravi nakon teorema 4.1.2 da je $x \perp \mathrm{Ker}(A)$ jedinstveno rješenje problema najmanjih kvadrata s minimalnom normom. Konačno rješenje tada glasi

$$x = S \begin{bmatrix} L_{11}^{-1} Q(:, 1 : r)^\tau b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Među češćim metodama za računanje QR faktorizacije matrice A su metode kod kojih se ortogonalna matrica Q dobije uzastopnim množenjem elementarnih ortgonalnih matrica. Jedna od tih metoda je i QR faktorizacija pomoću Householderovih reflektora.

Definicija 4.2.7. *Za zadani jedinični vektor $u \in \mathbb{R}^n$, matrica $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definirana s*

$$H = H(u) := I - 2uu^\tau, \ \|u\|_2 = 1 \tag{4.7}$$

zove se Householderov reflektor.

Napomena 4.2.8. *Matrica H je simetrična i ortogonalna. Zaista, vrijedi:*

$$\begin{aligned} H^\tau &= (I - 2uu^\tau)^\tau = I - 2(uu^\tau)^\tau = I - 2uu^\tau = H \\ HH^\tau = H^\tau H = H^2 &= (I - 2uu^\tau)(I - 2uu^\tau) \\ &= I - 4uu^\tau + 4(uu^\tau)(uu^\tau) \\ &= I - 4uu^\tau + 4u(u^\tau u)u^\tau) \\ &= I - 4uu^\tau + 4u\|u\|_2^2 u^\tau = I. \end{aligned}$$

H gradimo tako da vrijedi $Hx = \alpha e_1$, za neku konstantu $\alpha \in \mathbb{R}$ i $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^\tau$. H je ortogonalna pa vrijedi $\|Hx\| = \|x\|$, a uz $\|\alpha e_1\| = |\alpha|$ slijedi da je $|\alpha| = \|x\|$, odnosno $\alpha = \pm\|x\|$.

Zapišimo jednadžbu $Hx = \alpha e_1$ preko (4.7) i izrazimo u.

$$\begin{aligned} \pm\|x\|e_1 &= Hx = (I - 2uu^\tau)x = x - 2u(u^\tau x) \\ u &= \frac{1}{2u^\tau x}(x \mp \|x\|e_1) \end{aligned}$$

Ako je $u^\tau x = 0$, onda je $Hx = x = \pm\|x\|e_1$.

Izraz za $2u^\tau x$ nam nije poznat pa možemo staviti $u = \alpha(x \mp \|x\|e_1)$. Izraz za α dobijemo normiranjem vektora u: $\alpha = \dfrac{1}{\|x \mp \|x\|e_1\|}$. Za oba izbora predznaka $\mp\|x\|e_1$ vrijedi $Hx = \alpha e_1$, tako radi stabilnosti metode i kako bi se izbjeglo kraćenje na prvoj komponenti od $\tilde{u} = x \mp \|x\|e_1$, stavljamo $\tilde{u} = x + \text{sign}(x_1)\|x\|e_1$. Na taj način dobili smo vektor u:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 + \text{sign}(x_1)\|x\| \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Da bi dobili jedinični vektor koji zadovoljava (4.7), normiramo dobiveni vektor u i takvog označimo s $v = \frac{u}{\|u\|}$. Tada pripadni Householderov reflektor poprima izraz

$$H = H(v) = I - 2vv^\tau = I - 2\frac{uu^\tau}{u^\tau u}.$$

Da bi napravili QR faktorizaciju matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, Householderove reflektore primjenjujemo slijeva na stupce matrice kako bi poništili elemente ispod dijagonale i tako dobili gornjetrokutastu matricu R. Kako u svakom koraku ne bi pokvarili početne retke matrice i elemente gornjeg trokuta, primjenjujemo reflektore manjih dimenzija te ih nadopunjujemo jediničnim elementima na dijagonali kako bi dimenzije bile konzistentne.

U prvom koraku primjenjujemo Householderov reflektor H_1 takav da je $H_1 a_1^{(1)} = \alpha_1 e_1$. Indeks u eksponentu označava korak algoritma, dok a_i, za $i = 1, \dots, n$, i-ti stupac matrice A. Matrica koju tako dobijemo je oblika:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & & & & \\ \vdots & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \cdots & a_n^{(2)} \\ 0 & & & & \end{bmatrix}.$$

Ako je $a_1^{(1)} = 0$, stavimo $H_1 = I$. U sljedećem koraku, za podmatricu dimenzija $\mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$, postoji Householderov reflektor takav da je $\tilde{H}_2 a_2^{(2)} = \alpha_2 e_1$. Množenjem matrice A s $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_2 \end{bmatrix}$ dobivamo novu matricu:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & a_3^{(3)} & \cdots & a_n^{(3)} \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

U k-tom koraku matricu A množimo slijeva s matricom $H_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{H}_k \end{bmatrix}$.

Na kraju dobivamo

$$H_n H_{n-1} \cdots H_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \alpha_n \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} = R,$$

odnosno $A = QR$, gdje je $Q = H_1 \cdots H_n$. Dodatan zahtjev na matricu R je pozitivnost elemenata na dijagonali. Takav zahtjev postižemo množenjem matrice R slijeva s $H_{n+1} = \text{diag}(\text{sign}(\alpha_1), \text{sign}(\alpha_2), \cdots, \text{sign}(\alpha_n), 1, \cdots, 1)$.

Napomena 4.2.9. *I kod QR faktorizacije možemo pivotirati, tako da se stupac najveće norme (uzimajući u obzir elemente ispod dijagonale $a_k^{(k)}, \cdots, a_n^{(k)}$) dovede kao prvi sljedeći stupac kojeg poništavamo (pivotno mjesto). Tada imamo;*

$$H_n(\cdots H_2((H_1(AI_{1,j_1}))I_{2,j_2})\cdots I_{n,j_n} = R,\ Q^\tau AP = R.$$

Na ovaj način možemo odmah izračunati i rang matrice R i to tako što u trenutku kada dođemo do pivotnog stupca koji ima nulu na dijagonali stajemo; $(m-r)\times(n-r)$ blok matrica je nul-matrica, a rang je r. Matrice Q i P su regularne pa vrijedi da je rang(A) = rang(AP) = rang(QR) = rang(R).

Algoritam

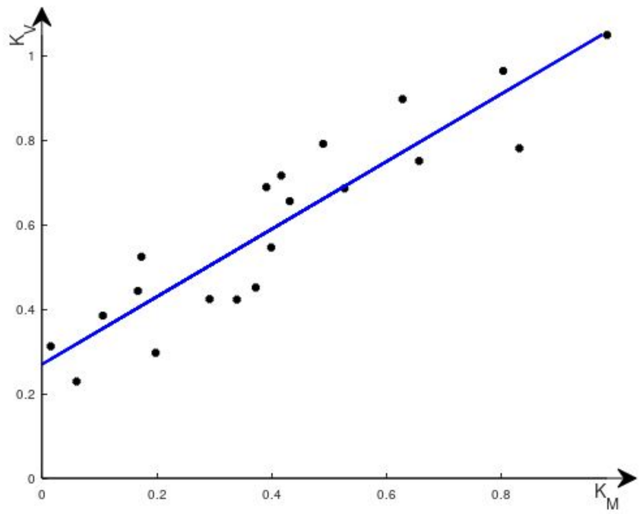
```
function [Q, R, P]=qr_householder(A)

  [m n]=size(A);
  Q = eye(m);
  R = A;
  P = eye(n);
  u = ones(m, 1);
  R = A;
  r = min(m,n);

  for j=1:n
    I = eye(n);
    [ret] = max_norm(R(j:m,j:n));
    if ret == -1
      r = j-1;
      break
    end
    p=ret+j-1;
    pom=I(:,j);
    I(:,j) = I(:,p);
    I(:,p) = pom;
    P = P*I;
    pom=R(:,j);
```

```
    R(:,j) = R(:,p);
    R(:,p) = pom;
    [u] = house_gen(R(j:m,j));
    if norm(u) > 1e-9
      u = u/norm(u);
      for k=j:n
        R(j:m,k) = R(j:m,k) - 2*u*(u'*R(j:m,k));
      end
      for k=1:m
        Q(k,j:m) = Q(k,j:m) - 2*(Q(k,j:m)*u)*u';
      end
    end
  end

  H = eye(m);
  for i=1:r
    H(i,i) = sign(R(i,i));
  end
  Q=Q*H;
  R=H*R;
end

function [p] = max_norm(A)
  [m n] = size(A);
  for i=1:n
    norme(i) = norm(A(:,i),2);
  end
  [norma p] = max(norme);
  if norma < 1e-9
    p = -1;
  end
end

function [u] = house_gen(x)
  u = x;
  u(1) = x(1) + sign(x(1))*norm(x);
end
```

Primjer 4.2.10. *Promotrimo problem najmanjih kvadrata iz primjera 4.1.4 i pronađimo rješenje pomoću QR faktorizacije matrice A.*

Rješenje x glasi

$$x = \begin{bmatrix} 0.269450 \\ 0.799935 \end{bmatrix}$$



Slika 4.4: Pravac $K_V = 0.269450 + 0.799935 K_M$ dobiven rješavanjem problema pomoću QR faktorizacije.

Prema [8] i [9] rješavanje problema najmanjih kvadrata pomoću QR faktorizacije zahtijeva više operacija nego korištenje faktorizacije Choleskog i rješavanje sustava normalnih jednadžbi.

Uključujući računanje matrice $A^\tau A$ za sustav normalnih jednadžbi, faktorizaciju matrice sustava te množenja u algoritmu, rješavanje sustava normalnih jednadžbi zahtijeva $\frac{1}{2}mn^2 + \frac{n^3}{6}$ operacija.

Rješavanje problema najmanjih kvadrata pomoću QR faktorizacije zahtijeva $mn^2 + \frac{n^3}{3}$ operacija. Uvjetovanost rješavanja problema najmanjih kvadrata je u tom slučaju jednaka uvjetovanosti matrice A, dok je kod rješavanja sustava normalnih jednadžbi uvjetovanost jednaka $\kappa_2(A)^2$. QR metoda je preferirana. Osim djelovanja direktno na matricu A, ova metoda koristi ortogonalne transformacije radi kojih je efekt grešaka zaokruživanja manji nego li je kod korištenja faktorizacije Choleskog.

Bibliografija

[1] Z. Aljinović, B. Marasović i B. Šego, *Financijsko modeliranje*, Zgombić & Partneri, Zagreb, 2008.

[2] K.E. Atkinson i A. Anthony Barnes, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, USA, 1978.

[3] N. Bosner, *Numeričke metode financijske matematike. Predavanja*, 2019, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nmfm.html`.

[4] ______, *Iterativne metode za rješavanje linearnih sustava*, Prirodoslovnomatematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[5] D. Brborović, *Upravljanje financijskom imovinom*, skripta, 2018.

[6] M. Capiński i T. Zastawniak, *Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering*, Springer, 2011.

[7] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer i S. Singer, *Numerička analiza. Predavanja i vježbe*, Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odsjek, Zagreb, 2003.

[8] G. H. Golub i C. F. Van Loan, *Matrix Computations (3rd Ed.)*, Johns Hopkins University Press, USA, 1996.

[9] C. L. Lawson i R.J. Hanson, *Solving least squares problems*, Philadelphia: SIAM, 1995.

[10] Z. Lukić, *Izbor optimalnih dioničkih portfelja na srednjoeuropskim tržištima kapitala*, 2003, `https://ssrn.com/abstract=3000041`.

[11] A. F. Perold, *The Capital Asset Pricing Model*, Journal of Economic Perspectives **18** (2004), br. 3, 3–24.

[12] D. Sabolić, *Uvod u mikroekonomiku. Odabrane teme*, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2013.

[13] W. Sharpe, *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, Management Science **9** (1963), br. 2, 277–293, https://EconPapers.repec.org/RePEc:inm:ormnsc:v:9:y:1963:i:2:p:277-293.

[14] S. Singer, *Numerička matematika. 8. predavanje*, 2020, https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/NM_1920/08.pdf.

[15] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje. Predavanja*, 2008, https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/fm07-predavanja.html.

[16] H. Yip, *Spreadsheet Applications to securities valuation and investment theories*, John Wiley and Sons Australia Ltd, 2005.

Sažetak

Upravljanje portfeljima je organizacija financijske imovine ulagača radi smanjenja rizika i maksimiziranja povrata. U ovom radu uvodimo mjeru za ishode pojedinih investicija u vrijednosnice te mjeru za nesigurnost ostvarivanja povrata pomoću matematičkog očekivanja i varijance slučajnih varijabli koje modeliraju povrate. Moderna teorija portfelja nudi rezultate kojima računamo portfelj minimalne varijance te efikasne portfelje, preferirane na tržištima kapitala, jer za odabrani očekivani povrat, imaju najmanji mogući rizik. Da bi izbjegli direktno rješavanje sustava linearnih jednadžbi s kovarijacijskom matricom, koristimo iterativne metode. Ukratko su opisane Jacobijeva, Gauss-Seidelova te SOR metoda. Predstavljeni su najbitniji teoremi konvergencije tih metoda te algoritmi implementirani u programskom jeziku MATLAB. Model vrednovanja kapitalne imovine promatra cijelo tržište te promjene u povratu na portfelj uslijed fluktuacija na tržištu. Takvo kretanje je opisano pomoću beta faktora portfelja. Predstavlja sistemski rizik kojeg nije moguće diversificirati dok se nesistemski rizici mogu ukloniti i to ulaganjem u tržišni portfelj. Odnos između povrata na dani portfelj i povrata na tržišni portfelj opisan je linearnom vezom koja se u praksi procjenjuje linearnom regresijom. Opisane su metode za rješavanje linearnog problema najmanjih kvadrata uz pripadne algoritme: rješavanje sustava normalnih jednadžbi te QR faktorizacija kao preferirana metoda koja djeluje na matricu sustava i koja je numerički stabilnija.

Summary

Portfolio management is the managing of an individual's financial assets in terms of minimum risk and maximum return. In this thesis we introduce a measure for the outcomes of single investments in securities and a measure for the uncertainty of returns by defining them in the terms of expectation and variance of random variables that describe returns. Modern portfolio theory allows us to calculate a minimum variance portfolio and efficient portfolios, favored on capital markets for minimizing the risk for a given expected return. To avoid any direct solving of systems of linear equations with a covariance matrix, we use iterative methods of which are described the Jacobi, Gauss-Seidel and SOR method. The main convergence theorems are presented along with the algorithms implemented in MATLAB. The Capital Asset Pricing Model takes in consideration the whole market and the variations in the return on a portfolio due to market fluctuations. These variations are described with the beta factor of a portfolio. This value represents the undiversifiable risk, while the diversifiable risk can be eliminated by investing in the market portfolio. The relation between the return on a portfolio and the return on the market portfolio is linear and it is estimated with linear regression. We describe the methods for solving the linear least squares problem and their algorithms: solving the system of normal equations and the QR factorisation preferred for working directly on the system matrix and its numerical stability.

Životopis

Rođena sam 14. rujna 1996. godine u Puli. Svoje školovanje započinjem u OŠ-SE ”Giuseppina Martinuzzi” te nastavljam u TSŠ-SMSI ”Dante Alighieri”, smjer opća gimnazija. Tijekom školovanja sudjelovala sam u nacionalnim te međunarodnim natjecanjima u raznim područjima znanja. 2015. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Titulu sveučilišne prvostupnice matematike stječem 2018. godine kada upisujem diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu. Za vrijeme studiranja sudjelovala sam u manifestacijama Dan i noć PMF-a te Smotri sveučilišta u Zagrebu.