SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Matko Brandić Lipiński

ELEMENTARNI ASPEKTI DIFERENCIJALNE TOPOLOGIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv.prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, veljača, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Obitelji, Majstorima, prijateljima i Mentoru — Hvala!

Sadržaj

Uvod

Diferencijalna topologija – grana matematike kojoj se ovim radom nastojimo približiti relativno je nova grana matematike [3]. Ideja rada je najprije navesti potrebne alate kako bismo kasnije tim alatima došli do puno jačih tvrdnji. Počet ćemo sa tvrdnjama iz topologije i diferencijalnog računa, za koje smo se okoristili knjigama [1] i [4]. Zatim ćemo uvesti homeomorfizam i difeomorfizam te na važnom primjeru pokazati razliku između ta dva pojma, za što smo se koristili tvrdnjama iz [2], [3] i [6]. Na kraju ćemo spomenuti nekoliko osnovnih rezultata vezanih uz mnogostrukosti.

Poglavlje 1

Topologija i diferencijalni račun

1.1 Metrički prostori

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup. Funkciju* $\mathrm{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *sa sljedećim svojstvima:*

(i) $\mathrm{d}(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$,

(ii) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$,

(iii) $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x) \, \forall x, y \in X$,

(iv) $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$, $\forall x, y, z \in X$

nazivamo ***metrika*** *na X, a (X,*d*) nazivamo* ***metrički prostor****.*

Primjer 1.1.2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Nije teško pokazati da je funkcija $\mathrm{d}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}\big((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

metrika na $\mathbb{R}^n$. Za d kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}^n$.
Općenitije, neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka je X bilo koji neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Funkcija $\mathrm{p}\colon X \times X \to \mathbb{R}$, definirana sa

$$\mathrm{p}(x,y) = \mathrm{d}(x,y), \ \forall x, y \in X$$

je metrika na X. Za p kažemo da je *euklidska metrika* na X. Uočimo da je $\mathrm{p} = \mathrm{d}\big|_{X \times X}$.
Dodatno, ako je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$, onda za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$, to jest

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Primjer 1.1.3. Neka je X neprazan skup. Neka je $\mathrm{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana kao:

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 1, \; x \neq y \\ 0, \; x = y. \end{cases}$$

Tada je d metrika na X. Tako definiranu metriku nazivamo **diskretna metrika** na X.

Napomena 1.1.4. U nastavku rada, ukoliko nije drugačije istaknuto, na podskupovima od $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ promatramo euklidsku metriku.

Definicija 1.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_n$ niz u X te $a \in X$. Kažemo da niz $(x_n)_n$* ***teži prema*** *a u metričkom prostoru (X, d) i pišemo $x_n \to a$ ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\;\; \mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon.$$

U tom slučaju kažemo da je a ***limes niza*** *$(x_n)_n$.*

Definicija 1.1.6. Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_n$ niz u X te $a \in X$. Kažemo da je a **gomilište niza** $(x_n)_n$ u (X, d) ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})\,(\exists n \geq N)\,\text{td. } \mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon.$$

Napomena 1.1.7. Uočimo: ako je *a limes niza $(x_n)_n$*, onda je *a gomilište niza $(x_n)_n$*. Naime, pretpostavimo da je $x_n \to a$. Neka je $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Tada $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_0$ vrijedi $\mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon$.
Definirajmo sada $n = max\{n_0, N\}$. Tada je $n \geq N$ i $\mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon$. Dakle, a je gomilište niza (x_n).

Propozicija 1.1.8. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $(x_n)_n$ niz u X te neka su $a, b \in X$ takvi da vrijedi $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Neka je

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}(a,b)}{2}.$$

Tada postoji $n_a \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_a$ je $d(x_n, a) < \varepsilon$. Također, postoji $n_b \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_b$ je $\mathrm{d}(x_n, b) < \varepsilon$. Neka je $n = \max\{n_a, n_b\}$. Sada imamo

$$\mathrm{d}(a,b) \leq \mathrm{d}(a, x_n) + \mathrm{d}(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon = \mathrm{d}(a,b)$$

što je kontradikcija. Dakle, $a = b$. Q.E.D.

Definicija 1.1.9. *Za funkciju* $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *kažemo da je* ***strogo rastuća*** *ako vrijedi* $p(n) < p(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lako se vidi: ako je $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća te ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da je $i < j$ onda je i $p(i) < p(j)$.
Nadalje, vrijedi sljedeće: ako je $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća, onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq p(n)$.
Pokažimo tu tvrdnju indukcijom.
Ako je $n \leq p(n)$ za neki $n \in \mathbb{N}$ onda je $n+1 \leq p(n)+1$, a iz $p(n) < p(n+1)$ slijedi $p(n)+1 \leq p(n+1)$. Dakle, $n+1 \leq p(n+1)$.

Definicija 1.1.10. *Neka je* X *skup te neka su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *nizovi u* X. *Kažemo da je* $(y_n)_n$ ***podniz*** *od* $(x_n)_n$ *ako postoji strogo rastuća funkcija* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takva da je* $y_n = x_{p(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.1.11. Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u $\mathbb{R}$ definirani sa $x_n = (-1)^n$ i $y_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(n) = 2n$ je strogo rastuća i vrijedi $y_n = x_{p(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, $(y_n)_n$ je podniz niza $(x_n)_n$.

Propozicija 1.1.12. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *nizovi u* X *te neka je* $a \in X$. *Pretpostavimo da je* $(y_n)_n$ *podniz od* $(x_n)_n$ *te da* $y_n \to a$. *Tada je* a *gomilište od* $(x_n)_n$.

Dokaz. Neka je $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija takva da je $y_n = x_{p(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka su $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Zbog činjenice da vrijedi $y_n \to a$ znamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_0$ vrijedi $d(x_{p(n)}, a) < \varepsilon$.
Neka je $n = max\{n_0, N\}$. Imamo $d(x_{p(n)}, a) < \varepsilon$ i $p(n) \geq n \geq N$. Označimo sa $k := p(n)$. Imamo: $d(x_k, a) < \varepsilon$ i $k \geq N$.

Q.E.D.

Lema 1.1.13. *Dani su* (X, d) *metrički prostor,* $(x_n)_n$ *niz u* X *i* $a \in X$ *takvi da je* $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Tada* $x_n \to a$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Neka je $n \geq n_0$. Tada je

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

pa je

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Slijedi $\mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon$. Dakle $\mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Q.E.D.

Propozicija 1.1.14. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $(x_n)_n$ niz u X te neka je a gomilište niza $(x_n)_n$ u (X, d). Tada postoji podniz $(y_n)_n$ od $(x_n)_n$ takav da $y_n \to a$.*

Dokaz. Definiramo funkciju $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktivno na sljedeći način: budući da je a gomilište od $(x_n)_n$, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, a) < 1$. Stavimo $p(1) = k$. Dakle,

$$\mathrm{d}(x_{p(1)}, a) < 1. \tag{1.1}$$

Pretpostavimo da smo definirali $p(n)$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Prema definiciji gomilišta, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$m \geq p(n) + 1 \quad \text{i} \quad \mathrm{d}(x_m, a) < \frac{1}{n+1}.$$

Stavimo $p(n+1) = m$. Dakle $p(n+1) \geq p(n) + 1$, to jest $p(n+1) > p(n)$ i

$$\mathrm{d}(x_{p(n+1)}, a) < \frac{1}{n+1} \tag{1.2}$$

Na taj način smo definirali $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Prema konstrukciji vrijedi $p(n) < p(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dakle p je strogo rastuća. Iz (1.1) i (1.2) slijedi da je

$$\mathrm{d}(x_{p(n)}, a) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz leme 1.1.13 sada slijedi $x_{p(n)} \to a$.

Q.E.D.

Definicija 1.1.15. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $(x_n)_n$ niz u X. Kažemo da je $(x_n)_n$* ***konvergentan niz*** *u (X, d) ako postoji $a \in X$ takav da $x_n \to a$.*

Definicija 1.1.16. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***kompaktan*** *ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X postoji $a \in X$ takav da je a gomilište niza $(x_n)_n$ u (X, d).*

Sada kada smo definirali kompaktan metrički prostor, uočimo kako je nužan smjer sljedeće tvrdnje direktna posljedica propozicije 1.1.14, a dovoljan smjer je direktna posljedica propozicije 1.1.12.

Korolar 1.1.17. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijedi: (X, d) je kompaktan ako i samo ako svaki niz u X ima podniz koji je konvergentan u (X, d).*

Definicija 1.1.18. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za $x_0 \in X$ i $r > 0$ definiramo*

$$K_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

Umjesto $K_d(x_0, r)$ obično pišemo samo $K(x_0, r)$. Za $K(x_0, r)$ kažemo da je ***otvorena kugla*** *u (X, d) oko x_0 radijusa r.*

Definicija 1.1.19. *Neka je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$. Kažemo da je U* ***otvoren skup*** *u (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.*

Propozicija 1.1.20. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r)$. Definirajmo $r' = r - \mathrm{d}(x, x_0)$. Uočimo da je $r' > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x, r') \subseteq K(x_0, r). \tag{1.3}$$

Neka je $y \in K(x, r')$. Imamo $\mathrm{d}(y, x) < r'$ pa je

$$\mathrm{d}(y, x_0) \leq \mathrm{d}(y, x) + \mathrm{d}(x, x_0) < r' + \mathrm{d}(x, x_0) = \big(r - \mathrm{d}(x, x_0)\big) + \mathrm{d}(x, x_0) = r$$

iz čega slijedi da je $y \in K(x_0, r)$. Dakle, (1.3) vrijedi. Prema tome, $K(x_0, r)$ je otvoren skup u (X, d).

Q.E.D.

Definicija 1.1.21. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ te neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $x \in U$. Tada za U kažemo da je* ***otvorena okolina*** *od x u (X, d).*

Propozicija 1.1.22. *Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_n$ niz u X te $a \in X$ takav da je $x_n \to a$. Pretpostavimo da je U otvoren skup u (X, d) takav da je $a \in U$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Dokaz. Budući da je U otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $K(a, r) \subseteq U$. Zbog $x_n \to a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geq n_0$ vrijedi $\mathrm{d}(x_n, a) < r$ što povlači da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $x_n \in K(a, r)$, dakle $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$.

Q.E.D.

Definicija 1.1.23. *Neka je (X, d) metrički prostor te $F \subseteq X$. Kažemo da je skup F* ***zatvoren skup*** *u (X, d) ako je skup $X \setminus F$ otvoren.*

Napomena 1.1.24. Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $x_0 \in X$. Tada je $\{x_0\}$ zatvoren skup u (X, d).
Zaista, neka je $x \in X \setminus \{x_0\}$. Tada vrijedi da je $x \neq x_0$ pa je $\mathrm{d}(x, x_0) > 0$. Definirajmo $r := \mathrm{d}(x, x_0)$. Očito $x_0 \notin K(x, r)$ pa vrijedi da je $K(x, r) \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Kako je $x \in X \setminus \{x_0\}$ bio proizvoljan, slijedi da je $X \setminus \{x_0\}$ otvoren skup u (X, d). Dakle, $\{x_0\}$ je zatvoren skup u (X, d).

Propozicija 1.1.25. Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_n$ niz u X te $a \in X$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je F zatvoren skup u (X, d) takav da je $x_n \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $a \in F$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \in X \setminus F$. Iz propozicije 1.1.22 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in X \setminus F$, $\forall n \geq n_0$, što je očito nemoguće. Dakle, $a \in F$.

Q.E.D.

Propozicija 1.1.26. *Neka je (X, d) metrički prostor, $(x_n)_n$ niz u X te $a \in X$ takav da $x_n \to a$. Pretpostavimo da je $(y_n)_n$ podniz od $(x_n)_n$. Tada $y_n \to a$.*

Dokaz. Budući da je $(y_n)_n$ podniz od $(x_n)_n$, imamo $y_n = x_{p(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, gdje je $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\mathrm{d}(x_n, a) < \varepsilon$. Neka je $n \geq n_0$. Znamo da je $p(n) \geq n$. Stoga je $p(n) \geq n_0$ pa je $\mathrm{d}(x_{p(n)}, a) < \varepsilon$. Dakle, $\mathrm{d}(y_n, a) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Dakle, $y_n \to a$.

Q.E.D.

Definicija 1.1.27. *Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$. Kažemo da je K **kompaktan skup** u (X, d) ako za svaki niz $(x_n)_n$ u K postoji $a \in K$ takav da je a gomilište od $(x_n)_n$ u (X, d).*

Definicija 1.1.28. *Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$. Kažemo da je S **omeđen skup** u (X, d) ako postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$.*

Propozicija 1.1.29. *Neka je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Tada je K zatvoren i omeđen u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da K nije zatvoren. Tada skup $X \setminus K$ nije otvoren, dakle postoji $x_0 \in X \setminus K$ takav da za svaki $r > 0$ vrijedi

$$K(x_0, r) \nsubseteq X \setminus K.$$

To znači da za svaki $r > 0$ vrijedi

$$K(x_0, r) \cap K \neq \emptyset.$$

Posebno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$K\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset.$$

Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K$ takav da je

$$x_n \in K\left(x_0, \frac{1}{n}\right).$$

Vidimo, da $x_n \to x_0$. Budući da je K kompaktan, postoji $a \in K$ takav da je a gomilište od $(x_n)_n$. Propozicija 1.1.14 nam sada kaže da postoji podniz $(y_n)_n$ od $(x_n)_n$ takav da $y_n \to a$. Također, propozicija 1.1.26 povlači $y_n \to x_0$. Posljednje dvije tvrdnje pokazuju da je $a = x_0$, što je kontradikcija s činjenicom da je $x_0 \in X \setminus K$. Dakle, K je zatvoren.

Pretpostavimo sada da K nije omeđen. Odaberimo bilo koji $x_0 \in X$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $K \nsubseteq K(x_0, n)$ pa postoji $x_n \in K$ takav da

$$x_n \notin K(x_0, n). \tag{1.4}$$

Imamo niz $(x_n)_n$ u K pa budući da je K kompaktan, postoji $a \in K$ takav da je a gomilište od $(x_n)_n$ u (X, d). Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ takav da je $N > d(x_0, a)$. Tada je $a \in K(x_0, N)$. Budući da je $K(x_0, N)$ otvoren skup u (X, d), postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$K(a, \varepsilon) \subseteq K(x_0, N). \tag{1.5}$$

Iz činjenice da je a gomilište od $(x_n)_n$ znamo da postoji $n \geq N$ takav da je

$$x_n \in K(a, \varepsilon).$$

Sada iz (1.5) slijedi da je $x_n \in K(x_0, N)$. Zbog $n \geq N$, vrijedi

$$K(x_0, N) \subseteq K(x_0, n).$$

Iz toga, imamo

$$x_n \in K(x_0, n),$$

a to je u kontradikciji s (1.4). Dakle, K je omeđen.

Q.E.D.

1.2 Neprekidnost

Definicija 1.2.1. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori,* $f\colon X \to Y$ *funkcija te* $x_0 \in X$*. Kažemo da je* f ***neprekidna u točki*** x_0 *(s obzirom na metrike* d *i* d'*) ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in X)\ \big(\mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}'\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon\big).$$

Za funkciju f *kažemo da je* ***neprekidna*** *(s obzirom na metrike* d *i* d'*) ako je* f *neprekidna u* x*,* $\forall x \in X$*.*

Primjer 1.2.2. Neka je d diskretna metrika na $\mathbb{R}$. Neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$ $\big(\mathrm{d}'(x, y) = |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\big)$. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Tvrdimo da je f neprekidna s obzirom na metrike d i d'.

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo

$$\delta = \frac{1}{2}.$$

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\mathrm{d}(x, x_0) < \delta$. Tada je $x = x_0$ pa je $f(x) = f(x_0)$, dakle $\mathrm{d}'(x, x_0) = 0 < \varepsilon$. Dakle, f je neprekidna u x_0 s obzirom na d i d'. Zbog toga što je x_0 proizvoljan, slijedi da je f neprekidna s obzirom na d i d'.

No, f **nije** neprekidna s obzirom na d' i d. Naime, neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0 s obzirom na metrike d' i d. Neka je $\varepsilon = 1$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}'(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}'(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}\big(f(x), f(x_0)\big) < 1. \tag{1.6}$$

Neka je

$$x = x_0 + \frac{\delta}{2}.$$

Tada je

$$d'(x, x_0) = |x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

pa iz (1.6) slijedi $\mathrm{d}(x, x_0) < 1$, to jest $x = x_0$. To je u kontradikciji s time kako smo odabrali x. Dakle, f nije neprekidna u x_0 s obzirom na metrike d' i d. Posebno, f nije neprekidna s obzirom na d' i d.

Propozicija 1.2.3. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori,* $x_0 \in X$ *te funkcija* $f\colon X \to Y$ *neprekidna u* x_0*. Neka je* $(x_n)_n$ *niz u* X *takav da* $x_n \to x_0$*. Tada vrijedi* $f(x_n) \to f(x_0)$*.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u x_0, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$

$$\mathrm{d}(x, x_0) < \delta$$

povlači

$$\mathrm{d}'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

Zbog toga što $x_n \to x_0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\mathrm{d}(x_n, x_0) < \delta$. Slijedi da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $\mathrm{d}'\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$. Dakle, $f(x_n) \to f(x_0)$.

Q.E.D.

Budući da na razne načine definiramo neprekidnost funkcije, podsjetimo na definiciju neprekidne funkcije (u točki) u „klasičnom smislu", koju ćemo u daljnjem tekstu razlikovanja radi nazivati *neprekidnost u klasičnom smislu*.

Definicija 1.2.4. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *neki otvoren skup te neka je* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$*. Kažemo da je funkcija* f ***neprekidna u točki*** $c \in \Omega$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in \Omega$*,*

$$\mathrm{d}_m(x, c) < \delta$$

povlači

$$\mathrm{d}_n(f(x), f(c)) < \varepsilon,$$

gdje su d_m *i* d_n *euklidske metrike na* $\mathbb{R}^m$ *i* $\mathbb{R}^n$*.*

Za funkciju f *kažemo da je* ***neprekidna*** *ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.*

Napomena 1.2.5. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ te neka je $f\colon X \to Y$ funkcija. Neka je $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna u x_0 u klasičnom smislu ako i samo ako je f neprekidna u x_0 s obzirom na d i d', gdje je d euklidska metrika na X te d' euklidska metrika na Y. Nadalje, f je neprekidna u klasičnom smislu ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na d i d'.

Lema 1.2.6. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori te neka je* $f\colon X \to Y$ *funkcija takva da je*

$$\mathrm{d}'\big(f(x), f(y)\big) \leq \mathrm{d}(x, y), \quad \forall x, y \in X. \tag{1.7}$$

Tada je f *neprekidna s obzirom na metrike* d *i* d'*.*

Dokaz. Neka su $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$. Definirajmo $\delta = \varepsilon$. Tada za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\mathrm{d}(x, x_0) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

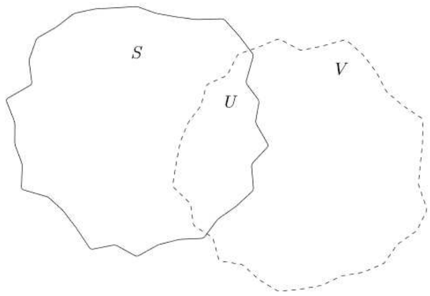
Naime, ako je $\mathrm{d}(x, y) < \delta$, onda iz (1.7) slijedi

$$\mathrm{d}'\big(f(x), f(x_0)\big) \leq \mathrm{d}(x, x_0) < \delta = \varepsilon.$$

Dakle, $\mathrm{d}'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$. Prema tome, f je neprekidna.

Q.E.D.

Napomena 1.2.7. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ te neka je $U \subseteq S$. Tada vrijedi: U je otvoren u S ako i samo ako postoji otvoren skup V u $\mathbb{R}^n$ takav da je $U = V \cap S$.



Propozicija 1.2.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f\colon S \to \mathbb{R}^m$. Neka je $x_0 \in S$.*

1. *Neka je $T \subseteq S$ takav da je $x_0 \in T$. Pretpostavimo da je f neprekidna u x_0. Tada je $f\big|_T\colon T \to \mathbb{R}^m$ neprekidna u x_0.*

2. *Neka je T otvoren skup u S takav da je $x_0 \in T$. Također, pretpostavimo da je $f\big|_T\colon T \to \mathbb{R}^m$ neprekidna u x_0. Tada je f neprekidna u x_0.*

Dokaz.

1. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$. Stoga očito za svaki $x \in T$ vrijedi

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \Big\|f\big|_T(x) - f\big|_T(x_0)\Big\| < \epsilon.$$

2. Budući da je T otvoren u S, postoji $r > 0$ takav da je
$$\big\{x \in S : \|x - x_0\| < r\big\} \subseteq T. \tag{1.8}$$
Dakle, $K_{\mathrm{d}}(x_0, r) \subseteq T$, gdje je d euklidska metrika na S.
Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in T$ vrijedi
$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \Big\| f\big|_T(x) - f\big|_T(x_0)\Big\| < \varepsilon. \tag{1.9}$$
Dakle, za svaki $x \in T$ vrijedi
$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \Big\| f(x) - f(x_0)\Big\| < \varepsilon. \tag{1.10}$$
Neka je $x \in S$ takav da je $\|x - x_0\| < \min\{\delta, r\}$. Dakle, $\|x - x_0\| < r$ pa iz (1.8) slijedi da je $x \in T$. Nadalje, imamo $\|x - x_0\| < \delta$. Iz zadnja dva zaključka dolazimo do konačnog, koristeći (1.9):
$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$
Ono što smo dobili jest da za svaki $x \in S$ vrijedi
$$\|x - x_0\| < \min\{\delta, r\} \Rightarrow \big\|f(x) - f(x_0)\big\| < \varepsilon.$$
Zaključujemo da je f neprekidna u x_0.

Q.E.D.

Propozicija 1.2.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ te $p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana kao*
$$p(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$
Tada je p neprekidna funkcija.

Dokaz. Neka je d metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka je d′ metrika $\mathbb{R}$. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned} x &= (x_1, \ldots, x_n), \\ y &= (y_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$
Imamo
$$\begin{aligned} \mathrm{d}'(p(x), p(y)) &= \mathrm{d}'(x_i, y_i) \\ &= |x_i - y_i| \\ &= \sqrt{(x_i - y_i)^2} \\ &\le \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \mathrm{d}(x, y). \end{aligned}$$
Dakle, $\mathrm{d}'(p(x), p(y)) \le \mathrm{d}(x, y)$ pa iz leme 1.2.6 slijedi da je p neprekidna.

Q.E.D.

Propozicija 1.2.10. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori i neka je* $f\colon X \to Y$ *funkcija. Tada je* f *neprekidna s obzirom na* d *i* d' *ako i samo ako za svaki otvoren skup* V *u* (Y, d') *vrijedi da je praslika od* V*, u oznaci* $f^{-1}(V)$*, otvoren skup u* (X, d)*.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je V otvoren skup u (Y, d') . Dokažimo da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d) .
Neka je $x_0 \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x_0) \in V$, pa budući da je V otvoren u (Y, d'), postoji $r > 0$ takav da je

$$K_{\mathrm{d}'}\big(f(x_0), r\big) \subseteq V. \tag{1.11}$$

Funkcija f je neprekidna u x_0 pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$x \in K_{\mathrm{d}}(x_0, \varepsilon) \Rightarrow f(x) \in K_{\mathrm{d}'}\big(f(x_0), r\big).$$

Iz (1.11) slijedi da za svaki $x \in X$ vrijedi

$$x \in K_{\mathrm{d}}(x_0, \varepsilon) \Rightarrow f(x) \in V.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq f^{-1}(V)$. Prema tome, $f^{-1}(V)$ je otvoren skup.
$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da za svaki otvoren skup V u (Y, d') vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, d). Dokažimo da je f neprekidna.
Neka je $x_0 \in X$ te $\varepsilon > 0$. Definirajmo

$$V = K_{\mathrm{d}'}\big(f(x_0), \varepsilon\big).$$

Tada je V otvoren skup u (Y, d'). Po pretpostavci, slijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, d). Očito je $f(x_0) \in V$, pa je $x_0 \in f^{-1}(V)$. Stoga postoji $r > 0$ takav da je

$$K_{\mathrm{d}}(x_0, r) \subseteq f^{-1}(V).$$

Slijedi da za svaki $x \in X$ vrijede sljedeće implikacije:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x, x_0) < r &\Rightarrow x \in K_{\mathrm{d}}(x_0, r) \\
&\Rightarrow x \in f^{-1}(V) \\
&\Rightarrow f(x) \in V \\
&\Rightarrow f(x) \in K_{\mathrm{d}'}\big(f(x_0), r\big) \Rightarrow \mathrm{d}'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathrm{d}(x, x_0) < r \Rightarrow \mathrm{d}'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$. Zaključujemo da je f neprekidna.

Q.E.D.

1.3 Diferencijalni račun

Definicija 1.3.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren skup, a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ funkcija. Kažemo da je f* ***diferencijabilna u točki*** *$p_0 \in \Omega$ ako postoji linearni operator $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ takav da postoji*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p_0+h) - f(p_0) - A(h)}{\|h\|} \tag{1.12}$$

i da je jednak 0. Kažemo da je f ***diferencijabilna na*** *Ω ako je diferencijabilna u svakoj točki $p_0 \in \Omega$. Ukoliko je preslikavanje $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ diferencijabilno u točki $p_0 \in \Omega$, onda je linearni operator A iz (1.12) jednoznačno određen, taj operator nazivamo* ***diferencijal preslikavanja*** *f u točki p_0 te označavamo s $Df(p_0)$.*

Definicija 1.3.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ funkcija i $i \in \{1,\dots,n\}$.* ***Parcijalna derivacija*** *po $i-$toj varijabli funkcije f u točki P_0 označava se s $\partial_i f(P_0)$ i definira kao*

$$\partial_i f(P_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(P_0 + he_i) - f(P_0)}{h}.$$

Dakle,

$$\partial_i f(P_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{h},$$

pri čemu je $P_0 = (x_1,\dots,x_n)$.

Definicija 1.3.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, neka je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ funkcija te neka je $i \in \{1,\dots,n\}$. Ako za svaki $P_0 \in \Omega$ postoji parcijalna derivacija po $i-$toj varijabli u P_0 onda imamo funkciju koja djeluje na sljedeći način*

$$P_0 \longmapsto \partial_i f(P_0).$$

Tu funkciju označavamo sa $\partial_i f$, $\partial_i f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ i zovemo je ***parcijalna derivacija od f reda 1****.*

Ako je $j \in \{1,\dots,m\}$ te $\partial_i f$ ima parcijalnu derivaciju po $j-$toj varijabli u P_0, za svaki $P_0 \in \Omega$, onda imamo funkciju $\partial_j\big(\partial_j f\big)\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ za koju kažemo da je ***parcijalna derivacija od f reda 2****.*

Induktivno definiramo ***parcijalnu derivaciju reda*** *r, za bilo koji $r \in \mathbb{N}$.*

Definicija 1.3.4. *Neka je $r \in \mathbb{N}$ te neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Kažemo da je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$* ***$\mathcal{C}^r$ − funkcija*** *ako postoje sve parcijalne derivacije od f reda $\leq r$ i sve te parcijalne derivacije su neprekidne na Ω.*

Napomena 1.3.5. Kao što je bio slučaj s definicijom 1.2.4, pojmove definirane u definiciji 1.3.1 i 1.3.4 ćemo nazivati diferencijabilnost (u točki) u klasičnom smislu i $\mathcal{C}^r$ − funkcija u klasičnom smislu.

Napomena 1.3.6. *(Lokalno svojstvo diferencijabilnosti)*

1. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ te neka su $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ dvije funkcije takve da postoji otvoren skup $U \subseteq \Omega$ oko točke p_0 takav da je $f\Big|_U = g\Big|_U$. Ako je f diferencijabilna u p_0 u klasičnom smislu, onda je i g diferencijabilna u p_0 u klasičnom smislu i $Dg(p_0) = Df(p_0)$.

2. Ako je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{N}$ te $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ funkcija takva da za svaki $x \in \Omega$ postoji otvorena okolina U od x u Ω takva da je

$$f\Big|_U\colon U \to \mathbb{R}^n$$

klase $\mathcal{C}^r$, onda je f klase $\mathcal{C}^r$.

Definicija 1.3.7. *Neka su $m, n, r \in \mathbb{N}$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ te $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Za f kažemo da je* ***klase $\mathcal{C}^r$ u smislu lokalnog proširenja*** *ako za svaki $x \in X$ postoji otvorena okolina Ω od x u $\mathbb{R}^n$ i funkcija $\hat{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ klase $\mathcal{C}^r$ u klasičnom smislu takva da je*

$$\hat{f}\Big|_{\Omega\cap X} = f\Big|_{\Omega\cap X}. \tag{1.13}$$

Zbog ove definicije, pitanje koje nam se prirodno nameće jest: ako je X otvoren u $\mathbb{R}^n$, podudara li se novo definirani pojam klase $\mathcal{C}^r$ sa starim pojmom?

Pretpostavimo da je X otvoren u $\mathbb{R}^n$ te pretpostavimo da je f klase $\mathcal{C}^r$ u smislu lokalnog proširenja.
Neka je $x \in X$. Tada postoji otvoren $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, takav da je $x \in \Omega$ i $\hat{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ klase $\mathcal{C}^r$ takav da vrijedi (1.13). Označimo

$$\Omega' = \Omega \cap X.$$

Imamo: Ω' je otvoren skup, $x \in \Omega'$, $\Omega' \subseteq X$ i $\Omega' \subseteq \Omega$. Dakle $\hat{f}\big|_{\Omega'} : \Omega' \to \mathbb{R}^m$. Jednakost (1.13) povlači da je

$$f\big|_{\Omega'}\colon \Omega' \to \mathbb{R}^m$$

klase $\mathcal{C}^r$. Sada iz napomene 1.3.6, dio 2 dobivamo da je f klase $\mathcal{C}^r$.

Obratno, pretpostavimo da je f klase $\mathcal{C}^r$ u klasičnom smislu.
Neka je $\Omega = X$ te neka je $\hat{f} = f$ gdje su $\hat{f}$ i Ω kao iz definicije 1.3.7. Po istoj definiciji, vidimo da sada (trivijalno) vrijedi da je f klase $\mathcal{C}^r$ u smislu lokalnog proširenja.

Dakle, kada je domena funkcije f otvoren skup, pojam klase $\mathcal{C}^r$ u smislu lokalnog proširenja i pojam klase $\mathcal{C}^r$ u klasičnom smislu se podudaraju.

Primjer 1.3.8. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je f klase $\mathcal{C}^1$ u smislu lokalnog proširenja. Je li f derivabilna?
Neka je $x_0 \in [a, b]$.
Tada postoji otvorena okolina Ω od x_0 u $\mathbb{R}$ i funkcija $\hat{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ klase $\mathcal{C}^1$ takva da je

$$\hat{f}\big|_{\Omega\cap[a,b]} = f\big|_{\Omega\cap[a,b]}. \tag{1.14}$$

1. slučaj: $x_0 \in (a, b)$.
Zbog toga što je $x_0 \in \Omega$ (a Ω je otvoren skup u $\mathbb{R}$), postoji $r > 0$ takav da je $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \Omega$. Možemo pretpostaviti da je

$$K := (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \Omega \cap (a, b).$$

Iz (1.14) slijedi da je

$$\hat{f}\big|_K = f\big|_K.$$

Dakle, $f\big|_K$ je klase $\mathcal{C}^1$.

2. slučaj: $x_0 = a$.
Kao i u prethodnom slučaju, postoji $r > 0$ takav da je

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \Omega.$$

Možemo pretpostaviti da je $[x_0, x_0 + r) \subseteq [a, b]$. Funkcija $\hat{f}\big|_{(x_0-r,x_0+r)}$ je klase $\mathcal{C}^1$, iz čega slijedi da je $\hat{f}\big|_{(x_0-r,x_0+r)}$ derivabilna u a. Dakle, $f\big|_{[x_0,x_0+r)}$ je derivabilna u a.

3. slučaj: $x_0 = b$.
Analogno *2. slučaju*, možemo zaključiti da je za $x_0 = b$, $f\big|_{(x_0-r,x_0]}$ je derivabilna i u b.

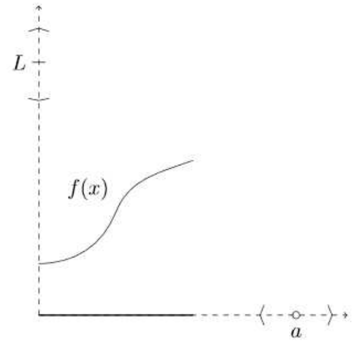
Definicija 1.3.9. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon S \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je L **limes funkcije** f u točki a ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq a$ vrijedi*

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Definicija 1.3.10. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$. Kažemo da je a **gomilište skupa** S ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$, $x \neq a$ takav da vrijedi*

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Primjer 1.3.11. Neka je $S = [0, 1]$, $f\colon S \to \mathbb{R}$, $a = 2$ i $L \in \mathbb{R}$. Tada je L limes funkcije f u a. Na slici 1.1 imamo i grafički prikaz (trivijalnosti) slučaja kojeg promatramo.



Slika 1.1: Skica primjera

Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo

$$\delta = \frac{1}{2}.$$

Tada ne postoji $x \in S$ takav da je

$$x \in (a - \delta, a + \delta) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Sada vidimo da smo trivijalno ispunili uvjete definicije limesa.

Propozicija 1.3.12. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, a gomilište od S, $f\colon S \to \mathbb{R}$ i $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je L_1 limes od f u a te da je L_2 limes od f u a. Tada je $L_1 = L_2$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $L_1 \neq L_2$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \cap (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon) = \emptyset$$

Tada postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq a$ vrijedi

$$x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \Rightarrow f(x) \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon).$$

Također, postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq a$ vrijedi

$$x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \Rightarrow f(x) \in (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon).$$

Budući da je a gomilište od S, postoji $x \in S$, $x \neq a$, takav da je $|x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Iz toga dobivamo da vrijedi sljedeće: $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$ i $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2)$, što nas dovodi do sljedećeg zaključka:

$$f(x) \in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \cap (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon) = \emptyset,$$

što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom.

Q.E.D.

Definicija 1.3.13. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon S \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in S$ *takav da je* x_0 *gomilište od* S. *Pretpostavimo da je* $L \in \mathbb{R}$ *limes funkcije* $F\colon S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tada za L *kažemo da je* ***derivacija funkcije*** f *u* x_0.

Uočimo, iz propozicije 1.3.12 slijedi da je derivacija funkcije f u x_0, ako postoji, jedinstvena. Naime, iz činjenice da je x_0 gomilište od S slijedi da je x_0 gomilište od $S \setminus \{x_0\}$.
Derivaciju od f u točki x_0 označavamo sa $f'(x_0)$.

Definicija 1.3.14. *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}$ *i* $f\colon S \to \mathbb{R}$. *Za* f *kažemo da je* ***derivabilna u smislu gomilišta*** *ako je* f *derivabilna u* x_0 *za svaki* $x_0 \in S$. *U tom slučaju imamo funkciju* $f'\colon S \to \mathbb{R}$.

Za $f\colon S \to \mathbb{R}$ *kažemo da je* ***klase*** $\mathcal{C}^1$ ***u smislu gomilišta*** *ako je* f *derivabilna i* $f'\colon S \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija.*

Napomena 1.3.15. *Neka su* $S \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon S \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, x_0 *je gomilište od* S.

1. *Neka je* $T \subseteq S$. *Neka su* $L, a \in \mathbb{R}$ *takvi da je* L *limes od* f *u* a. *Tada je* L *limes od* $f\big|_T$ *u* a.

2. *Neka je* $T \subseteq S$, *takav da je* $x_0 \in T$ *i* x_0 *gomilište od* T. *Pretpostavimo da je* f *derivabilna u smislu gomilišta u* x_0. *Tada je* $f\big|_T$ *derivabilna u smislu gomilišta u* x_0.

3. *Neka je* $r > 0$ *takav da je* $f\big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap S}\colon (x_0 - r, x_0 + r) \cap S \to \mathbb{R}$ *derivabilna u smislu gomilišta u* x_0. *Tada je* f *derivabilna u smislu gomilišta u* x_0 *i* $f'(x_0) = (f\big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap S})'(x_0)$.

Dokaz.

1. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq a$:

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\,. \tag{1.15}$$

Zbog $T \subseteq S$, očito za svaki $x \in T$, $x \neq a$ vrijedi (1.15). Dakle, L je limes od $f\big|_T$ u a.

2. Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ te neka je f derivabilna u smislu gomilišta u x_0. Tada postoji $D \in \mathbb{R}$ takav da je D limes funkcije $F\colon S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
u točki x_0.
Budući da vrijedi $T \setminus \{x_0\} \subseteq S \setminus \{x_0\}$, tada je funkcija $G\colon T \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,
$$G(x) \;=\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
restrikcija funkcije F. Prema točki 1 imamo da je D limes od G u x_0. Dakle, D je derivacija u smislu gomilišta od $f\big|_T$ u x_0.

3. Označimo sa
$$D = \Big(f\big|_{(x_0-r,x_0+r)} \cap S\Big)'(x_0).$$
Tada je D limes funkcije $H\colon \big((x_0 - r, x_0 + r) \cap S\big) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,
$$H(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
To znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki
$$x \in \big((x_0 - r, x_0 + r) \cap S\big) \setminus \{x_0\}$$
vrijedi
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| D - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon. \tag{1.16}$$
Želimo dokazati da je D limes funkcije $P : S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,
$$P(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Drugačije rečeno, želimo dobiti da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta' > 0$ takva da za svaki $x \in S \setminus \{x_0\}$ vrijedi
$$|x - x_0| < \delta' \Rightarrow \left| D - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon. \tag{1.17}$$
Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi (1.17) za svaki
$$x \in \big((x_0 - r, x_0 + r) \;\cap\; S\big) \setminus \; \{x_0\}.$$

Definirajmo

$$\delta' = min\{\delta, r\}.$$

Očito je $\delta' > 0$. Uzmimo $x \in S \setminus \{x_0\}$. Pretpostavimo da je $|x - x_0| < \delta'$. Dakle, $|x - x_0| < \delta$ i $|x - x_0| < r$. Drugačije zapisano, $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ što znači da je

$$x \in \big((x_0 - r, x_0 + r) \cap S\big) \setminus \{x_0\}.$$

Vidimo da možemo koristiti i (1.17). Znamo da je $|x - x_0| < \delta$ pa je

$$\left| D - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon.$$

Dakle, D je derivacija u smislu gomilišta od f u x_0.

Q.E.D.

Definirali smo što znači da je funkcija klase $\mathcal{C}^1$ u smislu lokalnog proširenja te što znači da je funkcija klase $\mathcal{C}^1$ u smislu gomilišta. Možemo se pitati koja je veza ovih pojmova. Pogledajmo primjer koji bi nam mogao dati malo jasniju poveznicu ovih pojmova:

Primjer 1.3.16. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Bilo koja funkcija $f\colon \{x_0\} \to \mathbb{R}$ je klase $\mathcal{C}^\infty$ u smislu lokalnog proširenja.
Naime, odaberimo neki $r > 0$ te definirajmo $\hat{f}\colon (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = f(x_0).$$

Očito je $(x_0 - r, x_0 + r)$ otvorena okolina od x_0 u $\mathbb{R}$, $\hat{f}$ je klase $\mathcal{C}^\infty$ i

$$\hat{f}\Big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap\{x_0\}} = f\Big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap\{x_0\}}$$

Dakle, f je klase $\mathcal{C}^\infty$ u smislu lokalnog proširenja.
No, f nije klase $\mathcal{C}^1$ u smislu gomilišta. Naime, f nije derivabilna u x_0 jer x_0 nije gomilište od $\{x_0\}$.

Definicija 1.3.17. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ te $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Kažemo da je f* ***diferencijabilna u točki*** *x_0* ***u smislu lokalnog proširenja*** *ako postoji otvorena okolina Ω od x_0 u $\mathbb{R}^n$ i funkcija $\hat{f}\big|_{\Omega\cap X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ takva da je diferencijabilna u x_0 i $\hat{f}\big|_{\Omega\cap X} = f\big|_{\Omega\cap X}$.*

Napomena 1.3.18. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ funkcija klase $\mathcal{C}^1$ u smislu lokalnog proširenja. Neka je $x_0 \in X$. Tada je f diferencijabilna u x_0 u smislu lokalnog proširenja. Naime, postoji otvorena okolina Ω od x_0 u $\mathbb{R}^n$ i funkcija $\hat{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ klase $\mathcal{C}^1$ takva da je

$$\hat{f}\big|_{\Omega\cap X} = f\big|_{\Omega\cap X}.$$

Očito je $\hat{f}$ diferencijabilna u x_0.

Propozicija 1.3.19. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ i $f\colon S \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u x_0 u smislu lokalnog proširenja. Pretpostavimo da je x_0 gomilište od S. Tada je f derivabilna u x_0 u smislu gomilišta.*

Dokaz. Postoje otvorena okolina Ω od x_0 u $\mathbb{R}$ i funkcija $\hat{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takva da je $\hat{f}$ derivabilna u x_0 i

$$\hat{f}\big|_{\Omega\cap S} = f\big|_{\Omega\cap S}.$$

Budući da je Ω otvorena okolina i $x_0 \in \Omega$, po definiciji postoji $r > 0$ takav da je $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \Omega$. Očito, je

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap S \subseteq \Omega \cap S$$

pa time dobivamo

$$\hat{f}\big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap S} = f\big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap S}. \tag{1.18}$$

Također, vrijedi da je x_0 gomilište od $(x_0 - r, x_0 + r)\cap S$. Naime, ako je $\varepsilon > 0$, postoji $x \in S$, $x \neq x_0$, takav da je $|x - x_0| < \min\{\varepsilon, r\}$. Dakle,

$$|x - x_0| < \varepsilon$$
$$|x - x_0| < r,$$

a iz druge nejednakosti dobivamo da je $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Dakle,

$$x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap S,\ x \neq x_0 \text{ i } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Vidimo da je x_0 gomilište od $(x_0 - r, x_0 + r) \cap S$. Znamo da je $\hat{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna u x_0, dakle $\hat{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ je derivabilna u x_0 u smislu gomilišta. Iz napomene 1.3.15, točke 2 sada dobivamo da je funkcija

$$\hat{f}\big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap S}$$

derivabilna u x_0 u smislu gomilišta, zbog (1.18) je očito i

$$f\big|_{(x_0-r,x_0+r)\cap S}$$

derivabilna u x_0 u smislu gomilišta, a iz napomene 1.3.15, točka 3 slijedi konačno da je $f\colon S \to \mathbb{R}$ je derivabilna u x_0 u smislu gomilišta.

Q.E.D.

Lema 1.3.20. *Neka je x_0 gomilište skupa S te $F\colon S \to \mathbb{R}$ funkcija koja u točki x_0 ima limes L. Neka je $r > 0$. Tada postoji funkcija $G\colon (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ takva da je*

$$G(x) = F(x), \quad \forall x \in \big((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}\big) \cap S$$

i vrijedi da je L limes od G u x_0.

Dokaz. Definiramo funkciju $G\colon (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$G(x) = \begin{cases} F(x), & x \in S \\ L, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Znamo da postoji $\delta > 0$ takav da $\forall x \in S$, $x \neq x_0$ vrijedi:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \big|F(x) - L\big| < \varepsilon.$$

Stoga, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$, $x \neq x_0$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \big|G(x) - L\big| < \varepsilon.$$

Q.E.D.

Propozicija 1.3.21. *Neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u x_0 u smislu gomilišta. Tada je f derivabilna u x_0 u smislu lokalnog proširenja.*

Dokaz. Budući da je funkcija f derivabilna u x_0 u smislu gomilišta, znamo da funkcija $F\colon S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definirana kao

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ima limes u x_0. Neka je $r > 0$ proizvoljan. Prema lemi 1.3.20 postoji funkcija $G\colon (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$G(x) = F(x), \quad \forall x \in ((x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}) \cap S$$

i vrijedi da G ima limes u x_0. Definiramo $\hat{f}\colon (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} (x - x_0)G(x) + f(x_0), & x \neq x_0 \\ f(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

te tvrdimo da je $\hat{f}$ tražena funkcija.
Neka je $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap S$.
Ako je $x = x_0$, onda je $\hat{f}(x) = f(x)$. Ako je $x \neq x_0$, onda je

$$\hat{f}(x) = (x - x_0)G(x) + f(x_0) = (x - x_0)F(x) + f(x_0) = \big(f(x) - f(x_0)\big) + f(x_0) = f(x).$$

Dakle, $\hat{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap S$.
Preostaje nam dokazati da je da je $\hat{f}$ derivabilna u x_0. Promotrimo funkciju $\hat{F}\colon (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definiranu kao

$$\hat{F}(x) = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{x - x_0}.$$

Za svaki $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ vrijedi

$$\hat{F}(x) = \frac{(x - x_0)G(x) + \hat{f}(x_0) - \hat{f}(x_0)}{x - x_0} = G(x).$$

Dakle, $\hat{F} = G$ pa slijedi da $\hat{F}$ ima limes u x_0, iz čega dobivamo da je $\hat{f}$ derivabilna u x_0. Dakle, f derivabilna u x_0 u smislu lokalnog proširenja.

Q.E.D.

Napomena 1.3.22. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon S \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da a nije gomilište od S. Tada je L limes od f u a. Budući da a nije gomilište od S, postoji $r > 0$ takav da je $(a - r, a + r) \cap (S \setminus \{a\}) = \emptyset$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $x \in S$, $x \neq a$, (trivijalno) vrijedi

$$x \in (a - r, a + r) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Propozicija 1.3.23. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, $f\colon S \to \mathbb{R}$. Neka je $F\colon S \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definirana kao*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tada je f derivabilna u x_0 u smislu lokalnog proširenja ako i samo ako F ima limes u x_0.

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ *1. slučaj:* x_0 je gomilište od S.
Propozicija 1.3.21 sada implicira da je f derivabilna u x_0 u smislu gomilišta. Stoga F ima limes u x_0.
2. slučaj: x_0 nije gomilište od S.
Točka x_0 nije gomilište ni od $S \setminus \{x_0\}$ pa iz propozicije 1.3.21 slijedi da F ima limes u x_0.
$\boxed{\Leftarrow}$ *1. slučaj:* x_0 je gomilište od S.
Funkcija f je derivabilna u x_0 u smislu gomilišta, pa po propoziciji 1.3.21 dobivamo da je f derivabilna u x_0 u smislu lokalnog proširenja.
2. slučaj: x_0 nije gomilište od S.
Postoji $r > 0$ takav da je $(x_0 - r, x_0 + r) \cap (S \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ pa je

$$(x_0 - r, x_0 + r) \cap S = \{x_0\}.$$

Definirajmo sada funkciju $\hat{f}\colon\ (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ kao

$$\hat{f}(x) = f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)\,.$$

Tada je $(x_0 - r, x_0 + r)$ otvoren skup i $\hat{f}$ je derivabilna u x_0, a vrijedi

$$\hat{f}\big|_{(x_0 - r, x_0 + r)\cap S} = f\big|_{(x_0 - r, x_0 + r)\cap S}.$$

Dakle, f je derivabilna u x_0 u smislu lokalnog proširenja.

Q.E.D.

Propozicija 1.3.24. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Pretpostavimo da je $x_0 \in X$ te da je f diferencijabilna u smislu lokalnog proširenja u x_0. Tada je f neprekidna u x_0.*

Dokaz. Znamo da postoje otvorena okolina Ω od x_0 u $\mathbb{R}^n$ i funkcija $\hat{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ takva da je $\hat{f}$ diferencijabilna u x_0 i

$$\hat{f}\big|_{\Omega\cap S} = f\big|_{\Omega\cap S}.$$

Iz matematičke analize znamo da je tada funkcija $\hat{f}$ neprekidna u x_0, a iz propozicije 1.2.8 slijedi da je

$$\hat{f}\big|_{\Omega\cap S}\colon \Omega \cap S \to \mathbb{R}^m \tag{1.19}$$

neprekidna u x_0. Dakle, funkcija (1.19) je neprekidna u x_0. Prema napomeni 1.2.7 skup $\Omega \cap S$ je otvoren u S. Konačno, po propoziciji 1.2.8 dolazimo do zaključka da je f neprekidna u x_0.

Q.E.D.

Poglavlje 2

Diferencijalna topologija

2.1 Homeomorfizam i difeomorfizam

Primjerom 1.2.2 smo pokazali sljedeće:
Ako su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f\colon X \to Y$ bijekcija neprekidna s obzirom na d i d' onda $f^{-1}\colon Y \to X$ ne mora biti neprekidna s obzirom na d' i d. Sljedeća definicija govori o slučaju kada je inverz neprekidne funkcije također neprekidan.

Definicija 2.1.1. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f\colon X \to Y$ bijekcija. Neka je dodatno f neprekidna s obzirom na d i d' i f^{-1} neprekidna s obzirom na d' i d. Tada za f kažemo da je **homeomorfizam** metričkih prostora (X, d) i (Y, d').*

Teorem 2.1.2. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f\colon X \to Y$ neprekidna bijekcija. Ukoliko je (X, d) kompaktan prostor, tada je f homeomorfizam.*

Dokaz. Treba dokazati da je $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidna funkcija. Neka je $y_0 \in Y$. Tvrdimo da je f^{-1} neprekidna u y_0. Pretpostavimo suprotno.
Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $y \in Y$ takav da je

$$\mathrm{d}'(y, y_0) < \delta \quad i \quad \mathrm{d}\left(f^{-1}(y), f^{-1}(y_0)\right) \geq \varepsilon. \tag{2.1}$$

Vidimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji y_n takav da je

$$\mathrm{d}'(y_n, y_0) < \frac{1}{n} \quad i \quad \mathrm{d}\big(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y_0)\big) \geq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Iz leme 1.1.13 slijedi da za niz $(y_n)_n$ iz Y vrijedi

$$y_n \to y_0. \tag{2.3}$$

Neka je $(x_n)_n$ niz u X definiran kao

$$x_n = f^{-1}(y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Budući da je (X, d) kompaktan, postoji konvergentan podniz od $(x_n)_n$. Dakle, postoje strogo rastuća funkcija $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $a \in X$ takvi da

$$x_{p(n)} \to a. \tag{2.4}$$

Iz propozicije 1.2.3 sada slijedi

$$f(x_{p(n)}) \to f(a). \tag{2.5}$$

Dakle, vrijedi

$$f(x_{p(n)}) = y_{p(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Stoga je $\big(f(x_{p(n)})\big)_n$ podniz od $(y_n)_n$ pa iz propozicije 1.1.26 i (2.3) slijedi

$$f(x_{p(n)}) \to y_0.$$

Iz propozicije 1.1.8 i (2.5) slijedi $f(a) = y_0$. Stoga je

$$a = f^{-1}(y_0) \tag{2.6}$$

Prema (2.2), za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f^{-1}(y_n) \in X \setminus K(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Posebno,

$$f^{-1}(y_{p(n)}) \in X \setminus K(f^{-1}(y_0), \varepsilon),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

odnosno

$$x_{p(n)} \in X \setminus K(f^{-1}(y_0), \varepsilon), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Iz propozicije 1.1.20 slijedi da je $X \setminus K\big(f^{-1}(y_0), \varepsilon\big)$ zatvoren skup u (X, d) pa iz (2.4), (2.7) i propozicije 1.1.25 slijedi da je $a \in X \setminus K(f^{-1}(y_0), \varepsilon)$. Ovo je u kontradikciji sa (2.6).

Zaključak: f^{-1} je neprekidna u y_0. Kako je y_0 bio proizvoljan, slijedi da je f^{-1} neprekidna. Dakle, f je homeomorfizam.

Q.E.D.

Definicija 2.1.3. *Za metričke prostore (X, d) i (Y, d') kažemo da su **homeomorfni** ako postoji homeomorfizam prostora (X, d) i (Y, d').*

Napomena 2.1.4. Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te neka je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam. Tada je $f(U)$ otvoren skup u (Y, d') za svaki otvoren skup U u (X, d). To slijedi iz činjenice da je $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidna funkcija te da je $f(U)$ praslika skupa U pri funkciji f^{-1}.

Definicija 2.1.5. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$ te $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Za funkciju $f\colon X \to Y$ kažemo da je **klase** $\mathcal{C}^r$ ako je f klase $\mathcal{C}^r$ kao funkcija $X \to \mathbb{R}^m$.*
*Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ te $f\colon X \to Y$. Kažemo da je f $\mathcal{C}^r-$**difeomorfizam** ako je f bijekcija, klase $\mathcal{C}^r$ i $f^{-1}\colon Y \to X$ klase $\mathcal{C}^r$.*

Definicija 2.1.6. *Za $n \in \mathbb{N}$, **jedinična sfera** u $\mathbb{R}^{n+1}$ definirana je kao*

$$S^n = \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\Big\},$$

to jest

$$S^n = \Big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\Big\},$$

gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definicija 2.1.7. *Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ te neka je $r \geq 1$. Kažemo da su X i Y $\mathcal{C}^r-$**difeomorfni** ako postoji difeomorfizam $f\colon X \to Y$ klase $\mathcal{C}^r$.*
Ako je $r = 1$, kažemo da su X i Y difeomorfni.

Napomena 2.1.8. Neka su S i T neki skupovi te neka su $f\colon S \to T$ i $g\colon T \to S$ funkcije. Ako vrijedi da je

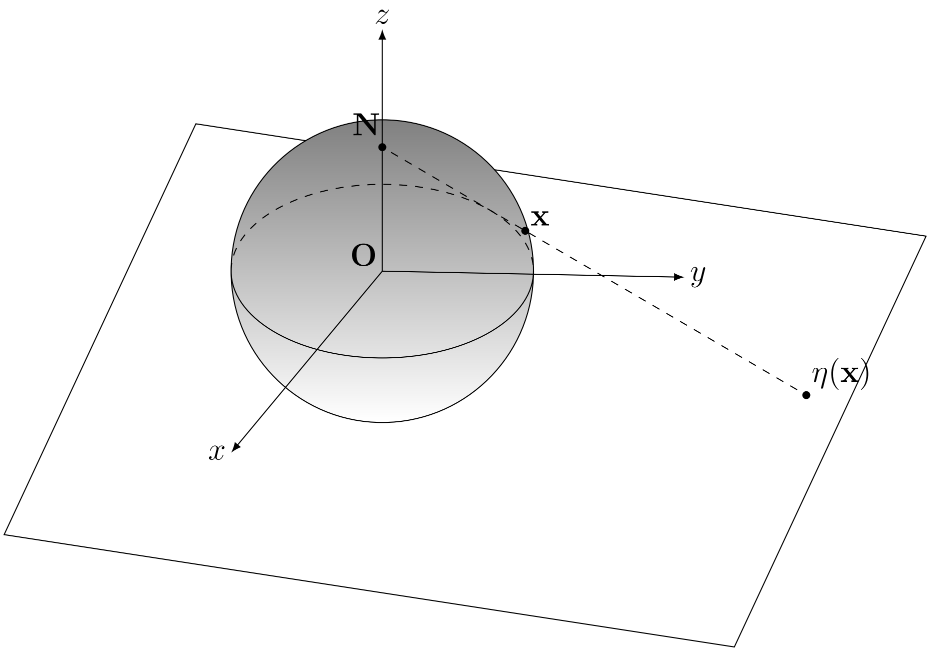
$$g \circ f = \mathrm{id}_S \quad i \quad f \circ g = \mathrm{id}_T,$$

tada je f bijekcija i vrijedi $g = f^{-1}$.
Naime, budući je id_S injekcija, onda je f injekcija kao prva funkcija koja djeluje u danoj kompoziciji. Također, budući da je id_T surjekcija, onda je f surjekcija, kao druga funkcija koja djeluje u danoj kompoziciji. Dobili smo da je f injekcija i surjekcija, dakle f je bijekcija. Također, vidimo kako djeluje funkcija g pa očito vrijedi i $g = f^{-1}$.

Primjer 2.1.9. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Označimo $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Pokažimo da je $S^{n-1} \setminus \{N\}$ difeomorfna s $\mathbb{R}^{n-1}$. Definirajmo funkciju $\eta\colon S^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ sa

$$\eta(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 - x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n}\right).$$

Na crtežu 2.1 vidimo kako djeluje funkcija η ako je $n = 3$.
Neka je $U = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \neq 1\big\}$, te neka je $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_n$.



Slika 2.1: Grafički prikaz djelovanja funkcije η (preuzeto s [5])

Skup U zapravo je $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, a skup $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ je otvoren jer, u metričkom prostoru, svaki jednočlan skup je zatvoren pa po propoziciji 1.2.10 slijedi da je i skup U otvoren u $\mathbb{R}^n$. Očito je $S^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq U$. Definirajmo $\hat{\eta}\colon U \to \mathbb{R}^{n-1}$ sa

$$\hat{\eta}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 - x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right).$$

Po koordinatama, imamo racionalnu funkciju, koja je klase $\mathcal{C}^\infty$, iz čega znamo da je onda i $\hat{\eta}$ klase $\mathcal{C}^\infty$, a očito je

$$\hat{\eta}\Big|_{S^{n-1} \setminus \{N\}} = \eta.$$

Iz ovoga zaključujemo da je i η klase $\mathcal{C}^\infty$.

Definirajmo sada funkciju $\sigma\colon \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1} \setminus \{N\}$ na sljedeći način:
za $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ neka je

$$\sigma(y) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_{n-1}}{1 + \|y\|^2}, \frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2} \right). \tag{2.8}$$

Provjerimo je li σ dobro definirana funkcija. Za početak, vrijedi:

$$\left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2y_{n-1}}{1+\|y\|^2}\right)^2+\left(\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right)^2=$$
$$=\frac{4\|y\|^2}{\left(1+\|y\|^2\right)^2}+\frac{\|y\|^4-2\|y\|^2+1}{\left(1+\|y\|^2\right)^2}=1$$

iz čega slijedi da je

$$\left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\ldots,\frac{2y_{n-1}}{1+\|y\|^2},\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right)\in S^{n-1}.$$

Također, očito je

$$\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\neq 1$$

pa je

$$\left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\ldots,\frac{2y_{n-1}}{1+\|y\|^2},\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right)\neq N.$$

Dakle, σ je dobro definirana.
Za sve $y_1,\ldots,y_{n-1}\in\mathbb{R}$, $y=(y_1,\ldots,y_{n-1})$ vrijedi

$$\sigma\left(y\right)=\left(\frac{2y_1}{1+y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2},\ldots,\frac{2y_1}{1+y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2},\frac{y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2-1}{1+y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2}\right).$$

Očito je onda zapravo $\sigma\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^n$. Iz ovoga je jasno da je σ klase $\mathcal{C}^\infty$.
Tvrdimo da je

$$\sigma\circ\eta=\mathrm{id}_{S^{n-1}\setminus\{N\}} \tag{2.9}$$

i

$$\eta\circ\sigma=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,. \tag{2.10}$$

Dokažimo (2.9).
Neka je $(x_1,\ldots,x_n)\in S^{n-1}\setminus\{N\}$. Tada je

$$x_1^2+\ldots+x_n^2=1$$

pa je

$$x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2=1-x_n^2. \tag{2.11}$$

Koristeći (2.11) dobivamo

$$
\begin{aligned}
\big(\sigma \circ \eta\big)\,(x_1, \ldots, x_n) &= \sigma\left(\eta\left(\frac{x_1}{1-x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n}\right)\right)\\
&= \left(\frac{2\frac{x_1}{1-x_n}}{1+\frac{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}{(1-x_n)^2}}, \ldots, \frac{2\frac{x_{n-1}}{1-x_n}}{1+\frac{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}{(1-x_n)^2}}, \frac{\frac{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2}{(1-x_n)^2}-1}{1+\frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2}}\right)\\
&= \left(\frac{2\frac{x_1}{1-x_n}}{1+\frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2}}, \ldots, \frac{2\frac{x_{n-1}}{1-x_n}}{1+\frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2}}, \frac{\frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2}-1}{1+\frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2}}\right) = (*)
\end{aligned}
$$

te vrijedi sljedeće

$$
\frac{1-x_n^2}{(1-x_n)^2} = \frac{1+x_n}{1-x_n}. \tag{2.12}
$$

Sada, koristeći (2.12) dobivamo da je

$$
(*) = (x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{id}_{S^{n-1}\setminus\{N\}}(x_1, \ldots, x_n).
$$

Dakle, $\big(\sigma \circ \eta\big)(x) = x$, $\forall x \in S^{n-1} \setminus \{N\}$. Prema tome, vrijedi (2.9).

Dokažimo sada (2.10).
Neka je $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Imamo

$$
\begin{aligned}
(\eta \circ \sigma)\,(y) = \eta\,(\sigma\,(y)) &= \eta\left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \ldots, \frac{2y_{n-1}}{1+\|y\|^2}, \frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}\right)\\
&= \left(\frac{\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}}{1-\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}}, \ldots, \frac{\frac{2y_{n-1}}{1+\|y\|^2}}{1-\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}}\right) = (y_1, \ldots, y_{n-1}) = y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}(y).
\end{aligned}
$$

Dakle, $(\eta \circ \sigma)\,(y) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Prema tome, vrijedi (2.10).

Iz napomene 2.1.8 te upravo dokazanih jednakosti (2.9) i (2.10) slijedi da je η bijekcija i $\eta^{-1} = \sigma$. Dakle, η je klase $\mathcal{C}^\infty$ i η^{-1} je klase $\mathcal{C}^\infty$. Po definiciji 2.1.5 vidimo da je η $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfizam.

Napomena 2.1.10. Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ te neka je $f\colon X \to Y$ funkcija klase $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Tada je f neprekidna.
Naime, to direktno slijedi iz napomene 1.3.18 propozicije 1.3.24

Napomena 2.1.11. Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^m$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ te neka je $f\colon X \to Y$ difeomorfizam klase $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Tada je f homeomorfizam.
Vidimo da tvrdnja direktno slijedi iz napomene 2.1.10.

Uočimo kako iz napomene 2.1.11 dobivamo da su X i Y homeomorfni ako su difeomorfni.

Primjer 2.1.12. Neka je $p \in \mathbb{R}^2$, $p = (x, y)$, $x > 0$. Rotacijom točke p oko $y-$osi dobivamo

$$R_p = \left\{(s, y, t) : \sqrt{s^2 + t^2} = x\right\}.$$

Neka je sada $A \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Rotirajmo skup A oko $y-$osi. Dobivamo skup $T \subseteq \mathbb{R}^3$ koji definiramo kao

$$T = \bigcup_{p \in A} R_p.$$

Tvrdimo da je T $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfan s $A \times S^1$, pri čemu $A \times S^1$ promatramo kao podskup od $\mathbb{R}^4$ na način da $\big((x, y), (s, t)\big)$ identificiramo s (x, y, s, t).
Uočimo da ako je $p \in \mathbb{R}^2$, $p = (x, y)$, $x > 0$ onda je

$$R_p = \big\{(xs, y, st) : s^2 + t^2 = 1\big\}.$$

Naime, ako je $z \in R_p$, onda je $z = (s_1, y, t_1)$ gdje su $s_1, t_1 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $s_1^2 + t_1^2 = 1$. Ako definiramo

$$s = \frac{s_1}{x} \quad i \quad t = \frac{t_1}{x}$$

onda je

$$s_1 = xs \quad i \quad t_1 = xt$$

pa je $z = (xs, y, xt)$, a vrijedi

$$s^2 + t^2 = \left(\frac{s_1}{x}\right)^2 + \left(\frac{t_1}{x}\right)^2 = \frac{s_1^2 + t_1^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Obratno, ako su $s, t \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $s^2 + t^2 = 1$, onda je očito $(xs, y, xt) \in R_p$.
Stoga je

$$T = \big\{(xs, y, xt) : (x, y) \in A, (s, t) \in S^1\big\}. \tag{2.13}$$

Definirajmo sada $f \colon A \times S^1 \to T$

$$f(x, y, s, t) = (xs, y, xt). \tag{2.14}$$

Očito je f klase C^∞. Nadalje, iz definicije skupa T vidimo da je f surjekcija.
Neka je funkcija $g \colon T \to A \times S^1$ definirana s

$$g(a, b, c) = \left(\sqrt{a^2 + c^2}, b, \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right). \tag{2.15}$$

Po definiciji skupa T vidimo da u nazivniku ne možemo imati 0 jer

$$a^2 + c^2 > 0, \quad \forall (a, b, c) \in T$$

Nadalje, neka je $(a, b, c) \in T$. Imamo

$$a = xs, \quad b = y, \quad c = xt$$

za $(x, y) \in A$ i $(s, t) \in S$.
Vrijedi

$$\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{(xs)^2 + (xt)^2} = \sqrt{x^2(s^2 + t^2)} = x. \tag{2.16}$$

Stoga je $\left(\sqrt{a^2 + c^2}, b\right) = (x, y)$, dakle $\left(\sqrt{a^2 + c^2}, b\right) \in A$ iz čega zaključujemo da je g dobro definirana funkcija.
Neka je $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$F(a, b, c) = a^2 + c^2.$$

Definiramo skup

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : F(a, b, c) > 0 \right\} \\ &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : F(a, b, c) \in (0, +\infty) \right\} \\ &= F^{-1}(\, (0, +\infty) \,) \end{aligned}$$

Očito je $(0, +\infty)$ otvoren u $\mathbb{R}$. Tada, po propoziciji 1.2.10 imamo da je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^3$.
Neka je sada $\hat{g} \colon \Omega \to \mathbb{R}^4$ funkcija definirana s

$$\hat{g}(a, b, c) = \left(\sqrt{a^2 + c^2}, b, \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right).$$

Očito vrijedi da je $\hat{g}$ klase $\mathcal{C}^\infty$, a za svaki $(a, b, c) \in T$ vrijedi

$$g(a, b, c) = \hat{g}(a, b, c).$$

Stoga, g je klase $\mathcal{C}^\infty$.
Tvrdimo da vrijedi

$$g \circ f = \mathrm{id}_{A \times S^1} \tag{2.17}$$

i

$$f \circ g = \mathrm{id}_T\,. \tag{2.18}$$

Dokažimo da vrijedi (2.17).
Neka je $(x, y, s, t) \in A \times S^1$. Budući da su s i t takvi da je

$$s^2 + t^2 = 1$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\big(g \circ f\big)(x, y, s, t) &= g\big(f\,(x, y, s, t)\big) = g(xs, y, xt)\\ &= \left(\sqrt{(xs)^2 + (xt)^2}, y, \frac{xs}{\sqrt{(xs)^2 + (xt)^2}}, \frac{xt}{\sqrt{(xs)^2 + (xt)^2}}\right)\\ &= \left(\sqrt{x^2(s^2 + t^2)}, y, \frac{xs}{\sqrt{x^2(s^2 + t^2)}}, \frac{xt}{\sqrt{x^2(s^2 + t^2)}}\right) = (x, y, s, t).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\big(g \circ f\big)(x, y, s, t) = (x, y, s, t), \quad \forall (x, y, s, t) \in A \times S^1.$$

Prema tome, vrijedi (2.17).

Dokažimo sada (2.18).
Neka je $(x, y, z) \in T$, gdje je T definiran kao u (2.13). Vrijedi

$$\begin{aligned}\big(f \circ g\big)(x, y, z) &= f\big(g\,(x, y, z)\big)\\ &= f\left(\sqrt{x^2 + z^2}, y, \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right)\\ &= \left(\sqrt{x^2 + z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, y, \sqrt{x^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\right) = (x, y, z).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\big(f \circ g\big)(x, y, z) = (x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in T.$$

Prema tome, vrijedi (2.18).
Iz napomene 2.1.8 te upravo dokazanih jednakosti (2.17) i (2.18) slijedi da je f bijekcija i $f^{-1} = g$. Dakle, f je klase $\mathcal{C}^\infty$ i f^{-1} je klase $\mathcal{C}^\infty$. Po definiciji 2.1.5 vidimo da je f $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfizam.

2.2 Homeomorfni prostori koji nisu difeomorfni

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su U i V skupovi u (X, d) takvi da vrijedi:*

(i) $U, V \neq \emptyset$

(ii) $U \cap V = \emptyset$

(iii) $U \cup V = X$.

Tada za uređeni par (U, V) *kažemo da je* ***separacija*** *od* (X, d).

Definicija 2.2.2. *Za metrički prostor* (X, d) *kažemo da je* ***povezan*** *ako ne postoji separacija od* (X, d).

Definicija 2.2.3. *Ako je* (X, d) *metrički prostor te* $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, *onda za* A *kažemo da je* ***povezan skup*** *u* (X, d) *ako je* (A, p) *povezan metrički prostor, gdje je*

$$\mathrm{p} = \mathrm{d}\big|_{A \times A}.$$

Propozicija 2.2.4. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori te neka je* $f\colon X \to Y$ *neprekidna surjekcija. Pretpostavimo da je* (X, d) *povezan metrički prostor. Tada je i* (Y, d') *povezan metrički prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da (Y, d') nije povezan.
Tada postoji separacija (U, V) od (Y, d'). Budući da je f neprekidna funkcija, po propoziciji 1.2.10 znamo da su $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ otvoreni skupovi u (X, d). Također, budući da je $U \neq \emptyset$, postoji $y \in U$, a budući da je f surjekcija, postoji $x \in X$ takav da je

$$f(x) = y.$$

Činjenica da je $f(x) \in U$ povlači da je $x \in f^{-1}(U)$. Dakle,

$$f^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Analogno dobivamo i da je

$$f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Kada bi $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ bio neprazan, to jest kada bi postojao

$$x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V),$$

iz te činjenice bi slijedilo da je $f(x) \in U$ i $f(x) \in V$, što je nemoguće jer su U i V disjunktni. Dakle,

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset.$$

Neka je sada $x \in X$. Tada je $f(x) \in Y$ pa zbog $Y = U \cup V$ vrijedi da je

$$f(x) \in U \quad ili \quad f(x) \in V,$$

pa i

$$x \in f^{-1}(U) \quad ili \quad x \in f^{-1}(V).$$

Zaključujemo da je $\left(f^{-1}(U), f^{-1}(V)\right)$ separacija od (X, d), što je u kontradikciji s činjenicom da je (X, d) povezan.
Dakle, (Y, d') je povezan metrički prostor. Q.E.D.

Sljedeću propoziciju navodimo bez dokaza. Dokaz se može naći u [4].

Propozicija 2.2.5. *Neka je* d *euklidska metrika na* $[0,1]$. *Tada je* $\left([0,1], \mathrm{d}\right)$ *povezan metrički prostor.*

Korolar 2.2.6. *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *te neka je* d' *euklidska metrika na* $[a,b]$. *Metrički prostor* $\left([a,b], \mathrm{d}'\right)$ *je povezan.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $f\colon [0,1] \to [a,b]$ sa

$$f(x) = a + x\,(b-a).$$

Funkcija f je očito neprekidna s obzirom na metrike d i d', gdje je d euklidska metrika na $[0,1]$.
Za $c \in [a,b]$ definiramo

$$x = \frac{c-a}{b-a}.$$

Tada je $x \in [0,1]$ i $f(x) = c$. Prema tome, f je surjekcija. Po propozicijama 2.2.4 i 2.2.5 dobivamo da je $\left([a,b], \mathrm{d}'\right)$ povezan skup.
Q.E.D.

Kao i u slučaju propozicije 2.2.5, sljedeću propoziciju navodimo bez dokaza, a za dokaz pogledati [4].

Propozicija 2.2.7. *Neka je* d *euklidska metrika na* $[0,1]$. *Tada je* $\left([0,1], \mathrm{d}\right)$ *kompaktan metrički prostor.*

Propozicija 2.2.8. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori te neka je* $f\colon X \to Y$ *neprekidna surjekcija. Pretpostavimo da je* (X, d) *kompaktan metrički prostor. Tada je i* (Y, d') *kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Neka je $(y_n)_n$ niz u Y. Budući da je f surjekcija, za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo $x_n \in X$ takav da je

$$f(x_n) = y_n.$$

Na taj smo način dobili niz $(x_n)_n \subseteq X$ pa budući da je (X, d) kompaktan, po korolaru 1.1.17, $(x_n)_n$ ima podniz koji je konvergentan u (X, d). To znači da postoji strogo rastuća funkcija $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $a \in X$ takav da vrijedi

$$x_{p(n)} \to a.$$

Iz propozicije 1.2.3 sada slijedi

$$f\left(x_{p(n)}\right) \to f(a).$$

Prema tome, $y_{p(n)} \to f(a)$, a $\left(y_{p(n)}\right)_n$ je očito podniz niza $(y_n)_n$. Dakle, $(y_n)_n$ ima podniz koji je konvergentan u (Y, d'). Po korolaru 1.1.17 slijedi da je (Y, d') kompaktan.

Q.E.D.

Korolar 2.2.9. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je d' euklidska metrika na $[a, b]$. Metrički prostor $\left([a, b], \mathrm{d}'\right)$ je kompaktan.*

Dokaz. Neka je d euklidska metrika na $[0, 1]$. U dokazu korolara 2.2.6 vidjeli smo da postoji surjekcija $f\colon [0, 1] \to [a, b]$ koja je neprekidna s obzirom na metrike d i d'. Slično kao i u tom korolaru, pozivanjem na propozicije 2.2.7 i 2.2.8 slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Primjer 2.2.10. Neka je

$$L = \left(\{0\} \times [0, 1]\right) \cup \left([0, 1] \times \{0\}\right) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Tvrdimo da su $[-1, 1]$ i L homeomorfni.
Definirajmo funkciju $f\colon [-1, 1] \to L$ na sljedeći način

$$f(x) = \begin{cases} (0, -x), & x \in [-1, 0] \\ (x, 0), & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Kako bismo pokazali da je funkcija f homeomorfizam moramo pokazati da je neprekidna bijekcija.
Iz činjenice da je skup $[0, 1]$ kompaktan vidimo da je f injektivna i surjektivna. Dakle, f je bijekcija.
Preostaje nam pokazati da je f neprekidna. Pretpostavimo prvo da je $x_0 \in [-1, 0)$. Neka je $\varepsilon > 0$ te neka je

$$\delta = \min\{\varepsilon, -x_0\},$$

očito je $\delta > 0$. Pretpostavimo da je $x \in [-1, 1]$ takav da vrijedi $|x - x_0| < \delta$. Budući da je $\delta \leq -x_0$, imamo

$$|x - x_0| < -x_0$$

pa je $x \in (2x_0, 0)$. Dakle, $x < 0$. Imamo:

$$\mathrm{d}\left(f(x), f(x_0)\right) = \mathrm{d}\left((0, -x), (0, -x_0)\right) = \sqrt{0^2 + (x - x_0)^2} = |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon,$$

pri čemu je d euklidska metrika na L. Dakle,

$$\mathrm{d}\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad t.d.\ |x - x_0| < \delta.$$

Zaključujemo kako je f neprekidna u x_0.
Za $x_0 \in (0, 1]$ analogno zaključujemo da je f neprekidna u x_0.
Pretpostavimo da je $x_0 = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$ te neka je $\delta = \varepsilon$. Neka je $x \in [-1, 1]$ takav da je $|x| < \delta$, to jest $|x| < \varepsilon$. Ako je $x \in [-1, 0)$ onda je

$$\mathrm{d}\left(f(x), f(x_0)\right) = \left((0, -x), (0, 0)\right) = |x| < \varepsilon,$$

a ako je $x \in (0, 1]$ onda je

$$\mathrm{d}\left(f(x), f(x_0)\right) = \left((x, 0), (0, 0)\right) = |x| < \varepsilon.$$

Prema tome,

$$\mathrm{d}\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad t.d.\ |x - x_0| < \delta.$$

Dakle, f je neprekidna u x_0, za svaki $x_0 \in [-1, 1]$.
Funkcija f je neprekidna bijekcija.
Prema korolaru 2.2.9, $[-1, 1]$ je kompaktan pa iz teorema 2.1.2 slijedi da je f homeomorfizam. Dakle, $[-1, 1]$ i L su homeomorfni.

Napomena 2.2.11. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ te neka je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam. Neka su $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ takvi da je $A \neq \emptyset$ te $f(A) = B$. Tada je funkcija $g\colon A \to B$, definirana kao

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in A$$

homeomorfizam.
Naime, očito je i g bijekcija, a iz propozicije 1.2.8 slijedi da je g neprekidna. Nadalje, za svaki $y \in B$ imamo

$$g^{-1}(y) = f^{-1}(y)$$

pa propozicija 1.2.8 povlači da je g^{-1} neprekidna.

Definicija 2.2.12. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***putevima povezan*** *ako za sve $a, b \in X$ postoji neprekidna funkcija $f\colon [0, 1] \to X$ koja je neprekidna s obzirom na euklidsku metriku na $[0, 1]$ i* d *takva da je*

$$f(0) = a \quad i \quad f(1) = b.$$

Propozicija 2.2.13. *Neka je* (X, d) *putevima povezan metrički prostor. Tada je* (X, d) *povezan metrički prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da (X, d) nije povezan metrički prostor.
Tada postoji separacija (U, V) od (X, d). Odaberimo $a \in U$ i $b \in V$ (što možemo napraviti jer su U i V neprazni skupovi). Budući da je (X, d) putevima povezan, postoji neprekidna funkcija $f\colon [0,1] \to X$ takva da je

$$f(0) = a \quad i \quad f(1) = b. \tag{2.19}$$

Tvrdimo da je $(f^{-1}(U), f^{-1}(V))$ separacija od $[0,1]$.
Budući da vrijedi (2.19), očito vrijedi

$$0 \in f^{-1}(U) \quad i \quad 1 \in f^{-1}(V)$$

pa su $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ neprazni skupovi. Sada, analogno dokazu propozicije 2.2.4 vidimo da su $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ otvoreni skupovi takvi da vrijedi

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset \quad i \quad f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = [0,1].$$

Dakle, $\left(f^{-1}(U), f^{-1}(V)\right)$ je separacija od $[0,1]$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $\left([0,1], \mathrm{d}\right)$ povezan, što znamo iz propozicije 2.2.5. Prema tome, (X, d) je povezan metrički prostor.

Q.E.D.

Primjer 2.2.14. Za $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ neka je d_S euklidska metrika na S. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada je metrički prostor $\left((a,b), \mathrm{d}_{(a,b)}\right)$ putevima povezan. Naime, neka su $x, y \in (a,b)$. Definiramo funkciju $f\colon [0,1] \to (a,b)$ sa

$$f(t) = (1-t)x + ty, \quad \forall t \in [0,1].$$

Uočimo da je f dobro definirana funkcija jer iz

$$\begin{gathered} a < x \\ a < y \end{gathered}$$

slijedi

$$\begin{gathered} (1-t)a \leq (1-t)x \\ ta \leq ty, \end{gathered} \tag{2.20}$$

pri čemu je barem jedna od nejednakosti u (2.20) stroga, pa dobijemo

$$a < (1-t)x + ty.$$

Analogno dobijemo i
$$(1-t)x + ty < b.$$
Očito je f neprekidna funkcija, a vrijedi
$$f(0) = x \quad i \quad f(1) = y.$$
Prema tome, $\big((a,b), \mathrm{d}_{(a,b)}\big)$ je putevima povezan metrički prostor.
Vidimo da su $\big([a,b), \mathrm{d}_{[a,b)}\big)$, $\big((a,b], \mathrm{d}_{(a,b]}\big)$ i $\big([a,b], \mathrm{d}_{[a,b]}\big)$ također putevima povezani metrički prostori.

Primjer 2.2.15. Neka je ponovno
$$L = \big(\{0\} \times [0,1]\big) \cup \big([0,1] \times \{0\}\big) \subseteq \mathbb{R}^2.$$
Neka je $p \in L$ takav da $p \neq (0,1)$ i $p \neq (1,0)$. Tada $L \setminus \{p\}$ nije povezan.
1. slučaj: $p = (x_0, 0)$
Neka je $f \colon L \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = x.$$
Iz propozicije 1.2.9, znamo da je f neprekidna funkcija, a po propoziciji 1.2.10 vrijedi da su skupovi
$$f^{-1}\big((-\infty, x_0)\big) \quad i \quad f^{-1}\big((x_0, \infty)\big)$$
otvoreni u $L \setminus \{p\}$.
Neprazni su jer je $(0,0) \in f^{-1}\big((-\infty, x_0)\big)$ i $(1,0) \in f^{-1}\big((x_0, \infty)\big)$, a disjunktni su te u uniji daju $L \setminus \{p\}$. Konačno,
$$\Big(f^{-1}\big((-\infty, x_0)\big), f^{-1}\big((x_0, \infty)\big)\Big)$$
je separacija od $L \setminus \{p\}$. Dakle, $L \setminus \{p\}$ nije povezan.
2. slučaj: $p = (0, x_0)$
Neka je $f \colon L \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = y.$$
Sada dokazivanje da $L \setminus \{p\}$ nije povezan ide na analogan način kao i u *1. slučaju.*
3. slučaj: $p = (0,0)$
Za ovakav p, vrijedi
$$L = \big(\{0\} \times (0,1]\big) \cup \big((0,1] \times \{0\}\big).$$
Skupovi $\{0\} \times (0,1]$ i $(0,1] \times \{0\}$ su očito neprazni, disjunktni i u uniji daju $L \setminus \{p\}$. Dovoljno je dokazati da su otvoreni u $L \setminus \{p\}$. Definirajmo funkciju $f \colon L \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = x$$

Ponovno koristeći propoziciju 1.2.9 za $i = 1$, f je neprekidna i vrijedi

$$(0,1] \times \{0\} = f^{-1}\big((0,\infty)\big),$$

stoga je $(0,1] \times \{0\}$ otvoren skup u $L \setminus \{p\}$. Analogno je $\{0\} \times (0,1]$ otvoren u $L \setminus \{p\}$. Dakle, $\big((0,1] \times \{0\}, \{0\}\,(0,1]\big)$ je separacija od $L \setminus \{p\}$.
Konačno, $L \setminus \{p\}$ nije povezan.

Propozicija 2.2.16. *Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ te neka su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to \mathbb{R}^k$ funkcije klase $\mathcal{C}^r$. Tada je $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^k$ klase $\mathcal{C}^r$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$. Imamo $f(x_0) \in Y$ pa budući da je g klase $\mathcal{C}^r$, postoje otvorena okolina Ω od $f(x_0)$ u $\mathbb{R}^m$ i funkcija $\hat{g}\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ klase $\mathcal{C}^r$ u klasičnom smislu takva da je

$$\hat{g}\Big|_{\Omega \cap Y} = g\Big|_{\Omega \cap Y}.$$

Nadalje, budući da je f klase $\mathcal{C}^r$, postoje otvorena okolina Ω' od x_0 u $\mathbb{R}^n$ i funkcija $\hat{f}\colon \Omega' \to \mathbb{R}^m$ klase $\mathcal{C}^r$ u klasičnom smislu takva da je

$$\hat{f}\Big|_{\Omega' \cap X} = f\Big|_{\Omega' \cap X}. \tag{2.21}$$

Budući da je $\hat{f}$ neprekidna funkcija, prema propoziciji 1.2.10 skup $\left(\hat{f}\right)^{-1}(\Omega)$ je otvoren skup u Ω' pa time i u $\mathbb{R}^n$. Definirajmo skup

$$\Omega'' = \left(\hat{f}\right)^{-1}(\Omega)$$

te neka je $F\colon \Omega'' \to \mathbb{R}^m$, takva da je

$$F = \hat{f}\Big|_{\Omega''}.$$

Imamo da je $x_0 \in \Omega' \cap X$ pa iz jednakosti (2.21) slijedi da je

$$\hat{f}(x_0) = f(x_0) \in \Omega,$$

dakle $\hat{f}(x_0) \in \Omega$ pa je $x_0 \in \Omega''$. Dakle, Ω'' je otvorena okolina od x_0 u $\mathbb{R}^n$. Funkcija F je klase $\mathcal{C}^r$ (kao restrikcija od $\hat{f}$) te vrijedi

$$F\Big|_{\Omega'' \cap X} = \hat{f}\Big|_{\Omega'' \cap X}.$$

Naime, ako je $x \in \Omega'' \cap X$, onda vrijedi

$$F(x) = \hat{f}(x) = \hat{f}\Big|_{\Omega' \cap X}(x) = f\Big|_{\Omega' \cap X}(x) = f(x)$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti koristili jednadžbu (2.21). Dakle,

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega'' \cap X.$$

Nadalje, imamo

$$F(\Omega'') = \hat{f}(\Omega'') = \hat{f}\left(\left(\hat{f}\right)^{-1}\Omega\right) \subseteq \Omega.$$

Stoga možemo promotriti kompoziciju $\hat{g} \circ F \colon \Omega'' \to \mathbb{R}^k$. Funkcija $\hat{g} \circ F$ je klase $\mathcal{C}^r$ jer su $\hat{g}$ i F klase $\mathcal{C}^r$ u klasičnom smislu. Tvrdimo da je

$$(\hat{g} \circ F)\Big|_{\Omega'' \cap X} = (g \circ f)\Big|_{\Omega'' \cap X}. \tag{2.22}$$

Neka je $x \in \Omega'' \cap X$. Imamo

$$\big(\hat{g} \circ F\big)(x) = \hat{g}(F(x)) = \hat{g}(f(x)) = g(f(x)).$$

Prema tome, vrijedi

$$\big(\hat{g} \circ F\big)(x) = \big(g \circ f\big)(x), \quad \forall x \in \Omega'' \cap X.$$

Stoga, jednakost (2.22) vrijedi. Dakle, $g \circ f \colon X \to \mathbb{R}^k$ je klase $\mathcal{C}^r$.

Q.E.D.

Napomena 2.2.17. Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ i $Z \subseteq \mathbb{R}^k$ te neka su $f \colon X \to Y$ i $g \colon Y \to Z$ $\mathcal{C}^r-$difeomorfizmi. Tada je $g \circ f \colon X \to Z$ $\mathcal{C}^r-$difeomorfizam.

Propozicija 2.2.18. *Neka je $f \colon S \to \mathbb{R}$ funkcija te neka su $a, L \in \mathbb{R}$ takvi da je L limes od f u a. Pretpostavimo da je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $x_n \in S \setminus \{a\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da $x_n \to a$. Tada vrijedi $f(x_n) \to L$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$, $x \neq a$ vrijedi:

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon). \tag{2.23}$$

Budući da $x_n \to a$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$x_n \in (a - \delta, a + \delta).$$

Neka je $n \geq n_0$. Imamo $x_n \in S$, $x_n \neq a$ i $x_n \in (a - \delta, a + \delta)$ pa iz jednakosti (2.23) slijedi

$$f(x_n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Dakle,

$$f(x_n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon), \quad \forall n \geq n_0,$$

čime je trvrdnja propozicije dokazana.

Q.E.D.

Lema 2.2.19. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ te neka je $p \in (a, b)$.*

1. *Postoji niz $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, $x_n \in (a, p)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da $x_n \to p$.*
2. *Postoji niz $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, $y_n \in (p, b)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da $y_n \to p$.*

Dokaz.

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo
$$a < p \quad i \quad p - \frac{1}{n} < p.$$
Dakle,
$$\max\left\{a, p - \frac{1}{n}\right\} < p$$
pa odaberimo $x_n \in \mathbb{R}$ takav da je
$$\max\left\{a, p - \frac{1}{n}\right\} < x_n < p.$$
Na taj smo način definirali niz $x_n \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$a < x_n < p \tag{2.24}$$
i
$$p - \frac{1}{n} < x_n < p. \tag{2.25}$$
Iz jednakosti (2.24) slijedi da je $x_n \in (a, p)$, a iz jednakosti (2.25) slijedi da je
$$|x_n - p| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
pa lema 1.1.13 povlači da $x_n \to p$.
2. Dokazuje se analogno kao i tvrdnja 1.

Q.E.D.

Napomena 2.2.20. Neka su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ i $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ i $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}^k$ funkcije klase $\mathcal{C}^1$ i neka je $f(\Omega) \subseteq \Gamma$. Funkcija $g \circ f\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ je njihova kompozicija te vrijedi
$$\mathrm{D}\big(g \circ f\big)(p) = \mathrm{D}(g)(f(p)) \circ \mathrm{D}(f)(p), \quad \forall p \in \Omega.$$

Napomena 2.2.21. Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup, $n \in \mathbb{N}$ te neka je $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ funkcija klase $\mathcal{C}^1$. Neka su $f_1, \ldots, f_n$ komponentne funkcije od f. Neka je $p \in U$. Tada su funkcije $f_1, \ldots, f_n$ derivabilne u točki p te za linearni operator $\mathrm{D}(f)(p)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\big(\mathrm{D}(f)(p)\big)(t) = \big(f_1'(p) \cdot t, \ldots, f_n'(p) \cdot t\big)$$

Primjer 2.2.22. Neka je ponovno

$$L = \big(\{0\} \times [0,1]\big) \cup \big([0,1] \times \{0\}\big) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Već smo pokazali u primjeru 2.2.10 da su L i $[-1,1]$ homeomorfni. Tvrdimo da $[-1,1]$ i L nisu difeomorfni.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji difeomorfizam $f\colon [-1,1] \to L$.
Najprije, tvrdimo

$$f(-1) = (0,1) \quad \textit{ili} \quad f(-1) = (1,0).$$

U suprotnom, prema primjeru 2.2.15 $L \setminus \{f(-1)\}$ nije povezan. No očito je

$$f\big((-1,1]\big) = L \setminus \{f(-1)\}$$

pa iz napomene 2.2.11 slijedi da su $(-1,1]$ i $L \setminus \{f(-1)\}$ homeomorfni. Sada, iz primjera 2.2.14 i propozicije 2.2.13 slijedi da je $(-1,1]$ povezan. Iz dobivenog, činjenice da su L i $(-1,1]$ homeomorfni te propozicije 2.2.4 slijedi da je $L \setminus \{f(-1)\}$ povezan, što je kontradikcija. Analogno vidimo da je

$$f(1) = (1,0) \quad \textit{ili} \quad f(1) = (0,1).$$

Dakle,

$$\begin{gathered} f(-1) = (0,1) \quad i \quad f(1) = (1,0) \\ \textit{ili} \\ f(-1) = (1,0) \quad i \quad f(1) = (0,1). \end{gathered}$$

Sada, možemo pretpostaviti da je $f(-1) = (0,1)$. Inače uzmemo kompoziciju funkcije f i funkcije $\varphi\colon [-1,1] \to [-1,1]$ definirane kao

$$\varphi(x) = -x;$$

očito je φ difeomorfizam pa je $f \circ \varphi\colon [-1,1] \to L$ difeomorfizam takav da je

$$\big(f \circ \varphi\big)(-1) = f(1) = (0,1).$$

Budući da je f bijekcija, postoji $p \in (-1, 1)$ takav da vrijedi

$$f(p) = (0, 0).$$

Označimo skupove

$$\begin{aligned} A &= \{0\} \times [0, 1] \\ B &= [0, 1] \times \{0\}. \end{aligned}$$

Tvrdimo da vrijedi

$$\begin{aligned} A &= f\big([-1, p]\big) \\ B &= f\big([p, 1]\big). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Pokažimo prvo da vrijedi $A \subseteq f\left([-1, p]\right)$. Analogno se pokazuje $B \subseteq f\left([p, 1]\right)$. Pretpostavimo da vrijedi

$$A \nsubseteq f\left([-1, p]\right).$$

Tada postoji $a \in A$ takav da $a \notin f\left([-1, p]\right)$. Dakle,

$$a = (0, x), \quad \text{za neki } x \in (0, 1).$$

Promotrimo funkciju $g \colon [-1, p] \to L \setminus \{a\}$ definiranu kao

$$g(t) = f(t).$$

Očito je g neprekidna funkcija. Neka su

$$\begin{aligned} U &= \{0\} \times (x, 1] \\ V &= L \setminus \big(U \cup \{a\}\big). \end{aligned}$$

Kao u primjeru 2.2.15, vidimo da su U i V otvoreni skupovi u $L \setminus \{a\}$. Nadalje,

$$\begin{aligned} &L \setminus \{a\} = U \cup V, \\ &U \cap V = \emptyset, \\ &g(-1) = (0, 1) \in U, \\ &g(p) = (0, 0) \in V. \end{aligned}$$

Stoga su $g^{-1}(U)$ i $g^{-1}(V)$ otvoreni skupovi u $[-1, p]$ takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) \cup g^{-1}(V) &= [-1, p], \\ g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) &= \emptyset, \\ -1 &\in g^{-1}(U), \\ p &\in g^{-1}(V). \end{aligned}$$

Dakle, $(g^{-1}(U), g^{-1}(V))$ je separacija od $[-1, p]$, no to je u kontradikciji s činjenicom da je $[-1, p]$ povezan, prema korolaru 2.2.6. To znači da je pretpostavka bila kriva, odnosno da vrijedi $A \subseteq f([-1, p])$.

Pokažimo sada da je $A \supseteq f([-1, p])$. Analogno se pokazuje $B \supseteq f([p, 1])$.

Neka je $t \in [-1, p]$. Želimo dokazati da je $f(t) \in A$.
To je očito ako je $t = -1$ ili $t = p$. Uzmimo

$$t \in (-1, p). \tag{2.27}$$

Pretpostavimo suprotno, odnosno

$$f(t) \notin A.$$

Tada je $f(t) \in B$ pa iz činjenice da je $B \subseteq f([p, 1])$ slijedi da je $f(t) \in f([p, 1])$. To povlači da vrijedi

$$f(t) = f(s), \quad \text{za neki } \ s \in [p, 1].$$

Budući da je f injekcija, to znači da je $t = s$. Što znači da je $t \geq p$, što je u kontradikciji s (2.27). Dakle,

$$f(t) \in A.$$

Po proizvoljnosti t konačno slijedi $A \supseteq f([-1, p])$.
Dokazali smo da vrijedi (2.26).

Znamo da je $f^{-1} \colon L \to [-1, 1]$ klase $\mathcal{C}^1$ pa postoje otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takav da je

$$(0, 0) \in \Omega$$

i funkcija $g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ klase $\mathcal{C}^1$ takva da vrijedi

$$g\Big|_{\Omega \cap L} = f^{-1}\Big|_{\Omega \cap L}. \tag{2.28}$$

S druge strane, budući da je f klase $\mathcal{C}^1$, postoje otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $p \in U$ i funkcija $\hat{f} \colon U \to \mathbb{R}^2$ klase $\mathcal{C}^1$ takva da je

$$\hat{f}\Big|_{U \cap [-1,1]} = f\Big|_{U \cap [-1,1]}. \tag{2.29}$$

Definirajmo

$$U' = \left(\hat{f}\right)^{-1}(\Omega) \cap (-1, 1).$$

Očito je $U' \subseteq U$ te $p \in U'$, a budući da je F neprekidna, zbog propozicije 1.2.10 znamo da je

$$\left(\hat{f}\right)^{-1}(\Omega)$$

otvoren skup u U pa time i u $\mathbb{R}$. Iz toga je očito da je U' otvoren skup u $\mathbb{R}$.
Neka je

$$h := \hat{f}\Big|_{U'\cap[-1,1]}.$$

Očito je h klase $\mathcal{C}^1$, a iz jednadžbe (2.29) slijedi da je

$$h\Big|_{U'\cap[-1,1]} = f\Big|_{U'\cap[-1,1]}. \tag{2.30}$$

Naime, ako je $x \in U' \cap [-1,1]$, onda je $x \in U \cap [-1,1]$ pa imamo

$$h(x) = \hat{f}(x) = f(x).$$

Dakle,

$$h(x) = f(x), \quad \forall x \in U' \cap [-1,1].$$

Iz definicije skupa U' jasno je da je $U' \subseteq (-1,1)$ te da je $U' \subseteq (\hat{f})^{-1}(\Omega)$, što povlači da je $\hat{f}(U') \subseteq \Omega$. Dakle, $h(U') \subseteq \Omega$.
Po propoziciji 2.2.16, funkcija $g \circ h \colon U' \to \mathbb{R}$ je klase $\mathcal{C}^1$, a za svaki $x \in U'$ koristeći jednadžbe (2.30) i (2.28) dobivamo:

$$\big(g \circ h\big)(x) = g\big(h(x)\big) = g\big(f(x)\big) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x,$$

jer je $f(x) \in \Omega \cap L$. Dakle,

$$\big(g \circ h\big)(x) = x, \quad \forall x \in U'.$$

Prema tome, $g \circ h = \mathrm{id}_{U'}$.
Sada, prema napomeni 2.2.21 imamo da vrijedi

$$\mathrm{D}(g)\big(h(p)\big) \circ \mathrm{D}(h)(p) = \mathrm{D}\big(g \circ h\big)(p) = \mathrm{D}(\mathrm{id}_{U'})(p) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.$$

Iz toga zaključujemo kako $\mathrm{D}(h)(p) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nije nul-operator.
Neka su h_1 i h_2 komponentne funkcije od h. Iz napomene 2.2.21 zaključujemo da vrijedi

$$h_1'(p) \neq 0 \quad \text{ili} \quad h_2'(p) \neq 0. \tag{2.31}$$

Budući da je U' otvoren skup u $\mathbb{R}$ te da je $p \in U'$, postoji $r > 0$ takav da je $(p-r, p+r) \subseteq U'$. Prema lemi 2.2.19, postoji niz $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$,

$$x_n \in (p-r, p), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad t.d.\ x_n \to p.$$

Po definiciji 1.3.13, znamo da je $h_1'(p)$ limes funkcije F u točki p, gdje je

$$F \colon U' \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$$

funkcija definirana sa

$$F(x) = \frac{h_1(x) - h_1(p)}{x - p}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in U' \setminus \{p\}$, a znamo da $x_n \to p$. Iz propozicije 2.2.18 sada slijedi

$$F(x_n) \to h_1'(p). \tag{2.32}$$

Nadalje, za svaki $x \in U'$ vrijedi

$$h(x) = f(x).$$

Stoga je

$$h(p) = f(p) = (0, 0).$$

Dakle,

$$h_1(p) = 0.$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo $x_n \in (p - r, p)$ pa je $x_n < p$ iz čega slijedi

$$h(x_n) = f(x_n) \in A.$$

Dakle, $h_1(x_n) = 0$. Po definiciji funkcije F dobivamo

$$F(x_n) = \frac{h_1(x_n) - h_1(p)}{x_n - p} = \frac{0}{x_n - p} = 0.$$

Prema tome,

$$F(x_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pa $F(x_n) \to 0$, no znamo da vrijedi (2.32). Zbog propozicije 1.3.12 slijedi $h_1'(p) = 0$. Analogno dobivamo $h_2'(p) = 0$.

Dobiveno je u kontradikciji sa (2.31).
Zaključak: $[-1, 1]$ i L nisu difeomorfni.

2.3 Mnogostrukost

Definicija 2.3.1. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}$ te neka je $r \in \mathbb{N}_0$. Neka je $X \neq \emptyset$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Kažemo da je X $k-$**mnogostrukost** u $\mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^r$ ako za svaki $x \in X$ postoje otvorena okolina U od x u X, otvoren skup V u $\mathbb{R}^k$ i $\mathcal{C}^r-$difeomorfizam $\varphi\colon U \to V$. Za φ kažemo da je $k-$**karta** u x za X klase $\mathcal{C}^r$.*

Napomena 2.3.2.

(i) U definiciji 2.3.1 pod $\mathcal{C}^0-$difeomorfizmom podrazumijevamo homeomorfizam; pod funkcijom klase $\mathcal{C}^0$ podrazumijevamo neprekidnu funkciju.

(ii) Ako je X $k-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^1$, onda za X jednostavno kažemo da je mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$.

Napomena 2.3.3. Neka je X $k-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^r$. Tada za svaki $x \in X$ postoji $k-$karta $\varphi\colon U \to V$ u x u X klase $\mathcal{C}^r$ takva da je

$$\varphi(x) = 0.$$

To se lako vidi: neka je $\varphi'\colon U \to V'$ neka karta, onda uzmemo translaciju $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, definiranu kao

$$f(a) = a - \varphi'(x),$$

te definiramo $\varphi\colon U \to f(V')$ sa

$$\varphi(y) = f\big(\varphi'(y)\big).$$

Definicija 2.3.4. *Za kartu iz napomene 2.3.3 kažemo da je* ***lokalni koordinatni sustav*** *u x za X. Tada za $\varphi^{-1}\colon V \to U$ kažemo da je* ***lokalna parametrizacija*** *u x za X.*

Propozicija 2.3.5. *Neka je U neprazan i otvoren podskup od $\mathbb{R}^k$. Tada je U $k-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^k$ klase $\mathcal{C}^\infty$.*

Dokaz. Neka je $x \in U$. Tada je U otvorena okolina od x u U, a funkcija $\mathrm{id}_U\colon U \to U$ je $\mathcal{C}^\infty-$ difeomorfizam. Time je tvrdnja propozicije pokazana.

Q.E.D.

Propozicija 2.3.6. *Neka su $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, gdje su $n, m \in \mathbb{N}$, neka su X i Y $\mathcal{C}^r-$difeomorfni, gdje je $r \geq 0$. Pretpostavimo da je X $k-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^r$. Tada je Y $k-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^m$ klase $\mathcal{C}^r$.*

Dokaz. Neka je $f\colon X \to Y$ $\mathcal{C}^r-$difeomorfizam. Neka je $y \in Y$. Budući da je f bijekcija, tada postoji $x \in X$ takav da je

$$f(x) = y.$$

Budući da je X $k-$mnogostrukost klase $\mathcal{C}^r$, postoje otvorena okolina U od x u X, otvoren skup V u $\mathbb{R}^k$ i $\mathcal{C}^r-$difeomorfizam

$$\varphi\colon U \to V.$$

Iz napomene 2.1.4 slijedi da je $f(U)$ otvoren skup u Y, dakle $f(U)$ je otvorena okolina od y u Y. Funkcija
$$f^{-1}\Big|_{f(U)} : f(U) \to U$$
je $\mathcal{C}^r-$difeomorfizam, kao restrikcija $\mathcal{C}^r-$difeomorfizma, pa je

$$\varphi \circ f^{-1}\Big|_{f(U)} : f(U) \to V$$

$\mathcal{C}^r-$difeomorfizam.

Q.E.D.

Primjer 2.3.7. Neka je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$, dimenzije $k \geq 1$. Tada je V $k-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^\infty$.
Odaberimo bazu $a_1, \ldots, a_n$ za $\mathbb{R}^n$ takvu da je $a_1, \ldots, a_k$ baza za V. Neka je
$\mathrm{A} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearni operator definiran sa

$$\begin{gathered} \mathrm{A}(e_1) = a_1 \\ \vdots \\ \mathrm{A}(e_n) = a_n, \end{gathered}$$

pri čemu je $e_1, \ldots, e_n$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Očito je A izomorfizam.
Općenito, ako je $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearan operator, onda je f funkcija klase $\mathcal{C}^\infty$ te je $\mathrm{D}(f)(p) = f$, za svaki $p \in \mathbb{R}^n$. Stoga je A $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfizam.
Neka je
$$S = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = x_n = 0\big\}.$$
Vidimo da je $\mathrm{A}(S) = V$, stoga A inducira $\mathcal{C}^\infty$ difeomorfizam između S i V. S druge strane, funkcija $g \colon \mathbb{R}^k \to S$, definirana kao

$$g(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

je očito $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfizam pa zaključujemo da su V i $\mathbb{R}^k$ $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfni. Koristeći propoziciju 2.3.5 dobivamo da je $\mathbb{R}^k$ $k-$mnogostrukost klase $\mathcal{C}^\infty$, a iz toga slijedi da je V $k-$mnogostrukost klase $\mathcal{C}^\infty$.

Primjer 2.3.8. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω je otvoren skup i neka je $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija klase $\mathcal{C}^r$, gdje je $r \geq 0$. Neka je

$$\Gamma = \big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \Omega\big\}.$$

Tada je Γ $n-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^{n+1}$ klase $\mathcal{C}^r$.

Neka je $g\colon \Omega \to \Gamma$ funkcija definirana kao

$$g(x) = \big(x, f(x)\big).$$

Tada je g $\mathcal{C}^r-$difeomorfizam. Iz propozicije 2.3.5 slijedi da je Γ $n-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^{n+1}$ klase $\mathcal{C}^r$.

Primjer 2.3.9. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Tvrdimo da je S^{n-1} $(n-1)-$mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$ klase $\mathcal{C}^\infty$. Iz primjera 2.1.9 znamo da postoji $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfizam

$$\eta\colon S^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1},$$

gdje je $N = (0, \ldots, 0, 1)$. Dakle, svaka točka od S^{n-1} različita od N ima otvorenu okolinu u S^{n-1} koja je $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfna sa $\mathbb{R}^{n-1}$.
Neka je $P = (0, \ldots, 0, -1)$. Funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirana kao

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

je $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfizam koji inducira $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfizam

$$h\colon S^{n-1} \setminus \{N\} \to S^{n-1} \setminus \{P\}.$$

Iz toga možemo vidjeti da su $S^{n-1} \setminus \{P\}$ i $\mathbb{R}^{n-1}$ $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfni, a $S^{n-1} \setminus \{P\}$ je otvorena okolina od N u S^{n-1}. Dakle, N ima otvorenu okolinu u S^{n-1} koja je $\mathcal{C}^\infty-$difeomorfna sa $\mathbb{R}^{n-1}$.

Bibliografija

[1] C. O. Christenson, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[2] V. Guillemin, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.

[3] A. R. Shastri, *Elements of Differential Topology*, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2011.

[4] W. A. Sutherland, *Introduction to Metric and Topological Spaces, Second Edition*, Oxford University Press, 2009.

[5] Tomasz M. Trzeciak, *Stereographic and cylindrical map projections*, `http://www.latex-community.org/viewtopic.php?f=4&t=2111`, posjećena 12.2020.

[6] Š. Ungar, *Matematička Analiza 3*, PMF-MO, 2002.

Sažetak

Kako bismo čitatelju dovoljno dobro približili diferencijalnu topologiju, najprije navodimo neke elementarne (i manje elementarne) pojmove i rezultate metričkih prostora, topologije i diferencijalnog računa kako bismo čitatelja istovremeno upoznali sa simbolikom koja će se koristiti kroz rad, te spomenuli i/ili podsjetili na svojstva koja će nam u kasnijim koracima biti od koristi.

U drugom dijelu upoznajemo čitatelja s homeomorfizmom i difeomorfizmom te na bitnom primjeru pokazujemo glavnu razliku između ta dva pojma. Za kraj, spomenut ćemo neke osnovne rezultate vezane uz mnogostrukosti.

Summary

In order to familiarize the reader with differential topology, we will first state some elementary (and less elementary) terminology and results from metric spaces, topology and calculus in order to simultaneously introduce the symbolism which will be used throughout the thesis and to mention and/or remind of the properties which will be needed in later steps.

In the second part, we will introduce homeomorphism and diffeomorphism, and we will show the main difference between these two terms in a very important example. Finally, we will mention some basic results concerning manifolds.

Životopis

Matko Brandić Lipiński, rođen je 16. kolovoza 1994., u Zagrebu. Ljeta djetinjstva provodio je u Puli, a u Zagrebu je pohađao Osnovnu školu grofa Janka Draškovića te Gimnaziju Tituša Brezovačkog. Ljubav prema matematici probudila mu je profesorica Andrea Igaly te nakon završene gimnazije, na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu upisao je Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički, 2013. godine. Po završetku Preddiplomskog studija, 2017. godine upisuje Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika na istom fakultetu. Ljetni semestar 2018. godine, zahvaljujući Erasmus+ programu, proveo je studirajući na Uniwersytet Wrocławski u Wrocławu, Poljska. Za vrijeme studiranja, upoznao je Moniku Lipińsku, s kojom je 13. lipnja 2020. odlučno razmijenio prstenje i prezimena. Posljednji semestar upisuje u rujnu 2020. te seli s Monikom u Newcastle upon Tyne odakle video–vezom brani diplomski rad.