# Metode za računanje konačnih suma

**Dabić Mandić, Irena**

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Irena Dabić Mandić

# METODE ZA RAČUNANJE KONAČNIH SUMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv.prof.dr.sc. Ilja Gogić

Zagreb, veljača, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

# Uvod

Zbrajanje je jedna od osnovnih računskih operacija s kojom se susrećemo već u vrtiću, a prisutna je kroz cijelo školovanje pa i svakodnevni život. Metode određivanja sume aritmetičkog i geometrijskog niza poznate su i srednjoškolcima, no postoje i kompliciranije sume koje se ne mogu lako izračunati na očit način. U ovom ćemo se radu posvetiti upravo takvim sumama i dati pregled raznih metoda koje nam mogu poslužiti u njihovom rješavanju. Posebno ističemo rekurzivne probleme (Hanojski tornjevi, *quicksort* algoritam) i primjenu funkcija izvodnica.

# Poglavlje 1

# Suma aritmetičkog i geometrijskog niza

Za konačne sume vrijede ista svojstva kao i za zbroj dvaju brojeva:

- distributivnost množenja prema zbrajanju:

$$\sum_{k\in S} c \cdot a(k) = c \sum_{k\in S} a(k)$$

- asocijativnost:

$$\sum_{k\in S}(a(k) + b(k)) = \sum_{k\in S} a(k) + \sum_{k\in S} b(k)$$

- komutativnost:

$$\sum_{k\in S} a(k) = \sum_{k\in S} a(p(k)),$$

gdje je $S$ konačan skup, $a, b : S \to \mathbb{R}$ funkcije, $c \in \mathbb{R}$, te $p : S \to S$ bijekcija.
Promotrit ćemo dva jednostavna primjera suma nizova koji se uče u srednjim školama - sumu aritmetičkog i sumu geometrijskog niza.

## 1.1 Suma aritmetičkog niza

**Definicija 1.1.1.** *Funkcija* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *definirana formulom*

$$a(n) = dn + c, \quad d, c \in \mathbb{R}$$

*zove se* ***aritmetički niz*** *ili* ***aritmetički slijed***.

Uobičajeno je pisati $a_n$ umjesto $a(n)$, a taj broj nazivamo **opći** ili $n$-**ti član** niza.[5] Razlika svaka dva susjedna člana je stalan broj $d$ koji se zove **razlika** niza:

$$a_{n+1} - a_n = d(n+1) + c - (dn + c) = d.$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) je aritmetička sredina susjednih mu članova (odatle i naziv):

$$a_{n-1} + a_{n+1} = d(n-1) + c + d(n+1) + c = 2(dn + c) = 2a_n.$$

Aritmetički je niz zadan svojim prvim članom ($a_1$) i razlikom ($d$). Naime, iz $a_1 = d + c$ slijedi $c = a_1 - d$ pa i

$$a_n = dn + c = dn + a_1 - d = a_1 + (n-1)d.$$

Ako su $m, n$ prirodni brojevi, $m < n$, onda je

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (m-1)d + (n-m)d = a_m + (n-m)d.$$

Jedan od jednostavnijih primjera je niz prvih $n$ prirodnih brojeva.

**Primjer 1.1.2.** *Za prirodan broj $n$ izračunajte zbroj*

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$$

Možemo napisati

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \quad + 2 \quad + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n \\ S_n &= n + n - 1 + n - 2 + ... \quad + 3 \quad + 2 \ + 1 \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih dviju jednakosti slijedi

$$2S_n = (n+1) + (n-1+2) + (n-2+3) + ... + (3+n-2) + (2+n-1) + (1+n).$$

Svaki je pribrojnik jednak $n+1$, a imamo $n$ takvih pribrojnika pa je $2S_n = n(n+1)$. Zato je

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

U općemo slučaju, računamo $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Upotrijebit ćemo sličan postupak tako da ispod ove sume opet zapišemo istu sumu ali s obrnutim poretkom članova (što možemo zbrog komutativnosti zbrajanja):

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Zbrajanjem te dvije jednakosti s lijeve strane dobivamo $2S_n$ a s desne zbroj članova $a_1 + a_n$, $a_2 + a_{n-1}$, ..., $a_k + a_{n-k+1}$. Jer je $a_k = a_1 + (k-1)d$, a $a_{n-k+1} = a_n - (k-1)d$, zbroj svakog para je $a_1 + a_n$, a takvih parova imamo $n$. Slijedi:

$$2S_n = n\,(a_1 + a_n) \quad / : 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Ako želimo $S_n$ izraziti samo u terminima $a_1$ i $d$, jer je $a_n = a_1 + (n-1)d$, dobivamo

$$S_n = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)d)\,.$$

**Primjer 1.1.3.** *Skup prirodnih brojeva podijeljen je u disjunktne podskupove ovako:*

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10\} \cup ...$$

*Izračunajmo zbroj brojeva u n-tom podskupu.[5, 1.23.]*

*Rješenje.* Uočimo da u $n$-tom podskupu ima $n$ elemenata, pa je prvi član u $n$-tom podskupu jednak

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

a posljednji član u $n$-tom podskupu je jednak

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zbroj brojeva u $n$-tom podskupu je tada jednak

$$S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1 + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$$

jer se radi o aritmetičkom nizu s razlikom $d = 1$.

**Primjer 1.1.4.** *Skup prirodnih brojeva podijeljen je u disjunktne podskupove ovako:*

$$\mathbb{N} = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \cup \ldots$$

*Izračunajmo zbroj brojeva u n-tom podskupu.[5, 1.24.]*

*Rješenje.* Budući da u $n$-tom podskupu ima $2n$ elemenata, slično kao i u prošlom primjeru zaključujemo da je prvi član u njemu

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1) + 1 = n(n-1) + 1,$$

a posljednji član je jednak

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Dakle, zbroj brojeva u $n$-tom podskupu je jednak

$$S_n = \frac{2n}{2}\,[n(n-1) + 1 + n(n+1)] = n(2n^2 + 1).$$

**Primjer 1.1.5.** *Skup prirodnih brojeva podijeljen je u disjunktne podskupove ovako:*

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7, 8, 9\} \cup \ldots$$

*Izračunajmo broj elemenata u n-tom podskupu.[5, 1.25.]*

*Rješenje.* Budući da je posljednji element u $n$-tom podskupu $n^2$, prvi elementom u $n$-tom podskupu je $(n-1)^2 + 1$. Zbog činjenice da u svakom $n$-tom podskupu imamo $2n - 1$ elemenata, traženi zbroj je

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(2n-1)\left[(n-1)^2 + 1 + n^2\right] \\ &= \frac{1}{2}(2n-1)(2n^2 - 2n + 2) \\ &= (2n-1)(n^2 - n + 1). \end{aligned}$$

Množenjem dobivamo

$$S_n = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1.$$

Uočavamo da ako rastavimo $2n^3$ kao $n^3 + n^3$, izraz možemo zapisati u lijepom obliku

$$S_n = n^3 + (n-1)^3.$$

**Primjer 1.1.6.** *Izračunajmo zbroj kvadrata početnih n prirodnih brojeva. [5, 1.14.]*

Uvedimo oznaku

$$S_n^k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Želimo izračunati $S_n^2$. Pođimo od jednakosti

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

i ispišimo je za vrijednosti $k = 0, 1, 2, ..., n$:

$$\begin{array}{ll}
k = 0 & 1^3 = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 \\
k = 1 & 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
k = 2 & 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
... & ............ \\
k = n - 1 & n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
k = n & (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1
\end{array}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + ... + n) + n + 1 = 3S_n^2 + 3S_n + n + 1.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
3S_n^2 &= (n+1)^3 - 3S_n^1 - (n+1) = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

Konačno, djeljenjem s 3 dobivamo

$$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Primjer 1.1.7.** *Skup prirodnih brojeva podijeljen je u disjunktne podskupove ovako:*

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \cup \dots$$

*Izračunajmo broj elemenata u n-tom podskupu.[5, 1.26.]*

*Rješenje.* Budući da u $n$-tom podskupu ima $n^2$ elemenata, prvi član u njemu je

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + 1 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 1,$$

a posljednji član je jednak

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Dakle, zbroj brojeva u $n$-tom podskupu je jednak

$$S_n = \frac{n^2}{2}\left[\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 1 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right],$$

što nakon izlučivanja zajedničkog faktora i sređivanja postaje

$$S_n = \frac{1}{6}n^2(2n^3 + n + 3).$$

**Primjer 1.1.8.** *605 kugli jednakog promjera podijeljeno je na dva dijela tako da je od jednog dijela napravljena piramida kojoj je baza kvadrat, a od drugog piramida kojoj je baza jednakostraničan trokut. Ako obje piramide imaju jednak broj redova kugli, izračunajte broj kugli u svakoj od njih.[5, 1.27.]*

*Rješenje.* Neka je $n$ broj redova piramide. Promatrajući četverostranu piramidu, ako je na vrhu piramide (prvi red) 1 kuglica, tada u drugom redu imamo 4 kuglice, trećem redu 9 kuglica itd. Dakle, u $n$-tom redu ima $n^2$ kuglica. Ako sa $S_1$ označimo broj kuglica te piramide, tada je

$$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

U trostranoj piramidi je na vrhu piramide 1 kuglica, u drugom redu su 3 kuglice, zatim 6, itd. U $n$-tom redu, dakle, ima $\frac{n(n+1)}{2}$ kuglica. Ako sa $S_2$ označimo broj kuglica te piramide, imamo

$$S_2 = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kako je $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3, \ldots, \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, imamo

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) \\
&= n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \cdots + [n-(n-1)] \cdot n \\
&= n + 2n + 3n + \cdots + n^2 - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n] \\
&= n(1+2+3+\cdots+n) - [1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \cdots + (n-1)^2 + (n-1)] \\
&= \frac{1}{2}n^2(n+1) - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2] - [1+2+3+\cdots+(n-1)] \\
&= \frac{1}{2}n^2(n+1) - [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2] + n^2 - [1+2+3+\cdots+(n-1)] \\
&= \frac{1}{2}n^2(n+1) - S_1 + n^2 - \frac{1}{2}n(n-1).
\end{aligned}$$

Budući da znamo da je ukupno bilo 605 kugli, slijedi $S_1 + S_2 = 605$, odnosno

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}n^2(n+1) + n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) &= 605 \\
n^2(n+1) + 2n^2 - n(n-1) &= 1210 \\
n^3 + 2n^2 + n &= 1210 \\
n(n+1)^2 &= 1210.
\end{aligned}$$

Budući da znamo da je $11^2 = 121$, imamo $10 \cdot 11^2 = 1210$ pa je stoga jedno rješenje $n = 10$. Prebacimo sve na lijevu stranu i raspišimo:

$$n^3 + 2n^2 + n - 1210 = 0.$$

Jer je $n = 10$ jedno rješenje, polinom s lijeve strane je djeljiv s $n - 10$ pa ga možemo rastaviti kao $(n - 10)g(n)$. Konkretno dobivamo $g(n) = n^2 + 12n + 121$, odnosno:

$$n^3 + 2n^2 + n - 1210 = (n - 10)\left(n^2 + 12n + 121\right) = 0.$$

S obzirom da je $n^2 + 12n + 121 \geq 1 + 12 + 121 > 0$ za sve prirodne brojeve $n$, u drugoj zagradi nećemo dobiti nulu. Dakle, $n = 10$ je jedino rješenje u skupu prirodnih brojeva.

Odredimo sad broj kuglica u svakoj piramidi:

$$S_1 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385.$$

Dakle, u četverostranoj piramidi ima 385 kuglica, dok je u trostranoj 220 kuglica.

**Primjer 1.1.9.** *Za zadani aritmetički niz $(a_n)$, izrazite zbroj*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{a_k + a_{k+2}}$$

*uz pomoć $a_1$, $n$ i $d$, gdje je $d$ razlika niza. [5, 1.33.]*

*Rješenje.* Budući da se svaki član aritmetičkog niza (osim prvoga) može zapisati kao aritmetička sredina njemu susjednih članova, slijedi

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{2a_{k+1}}.$$

Množenjem s 2 dobivamo

$$2S = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+1} a_{k+2}}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+2}.$$

Korištenjem svojstava aritmetičkog niza slijedi

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)d] \cdot [a_1 + (k+1)d] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [a_1 + kd - d] \cdot [a_1 + kd + d] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [(a_1 + kd)^2 - d^2] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [a_1^2 + 2a_1 kd + k^2 d^2 - d^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2S &= (a_1^2 - d^2)\sum_{k=1}^{n} 1 + 2a_1 d \sum_{k=1}^{n} k + d^2 \sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= (a_1^2 - d^2)\cdot n + 2a_1 d \cdot \frac{n(n+1)}{2} + d^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$S = \frac{n}{2}[(n-1)(2n+5)d^2 + 6a_1(nd + d + a_1)].$$

## 1.2 Suma geometrijskog niza

**Definicija 1.2.1.** *Funkcija* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *definirana formulom*

$$a_n = r \cdot q^n,$$

*gdje su* $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*,* $q \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *zove se* ***geometrijski niz*** *ili* ***geometrijski slijed****. [5]*

Kvocijent susjednih članova je konstantan broj $q$ koji se zove **kvocijent niza**. To slijedi iz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{rq^{n+1}}{rq^n} = q.$$

Apsolutna vrijednost svakog člana niza (osim prvog) jednaka je geometrijskoj sredini susjednih mu članova (odatle i naziv):

$$\sqrt{|a_{n+1}| \cdot |a_{n-1}|} = \sqrt{|rq^{n+1}| \cdot |rq^{n-1}|} = \sqrt{|r^2| \cdot |q|^{2n}} = |rq^n| = |a_n|.$$

Geomterijski je niz određen svojim prvim članom ($a_1$) i kvocijentom ($q$), što slijedi iz:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n} = ... = q.$$

Općenito je

$$a_n = rq^n = rq \cdot q^{n-1} = a_1 q^{n-1}.$$

Ako su $m, n$ prirodni brojevi, $m < n$, tada je

$$a_n = rq^n = rq^{m+n-m} = rq^m \cdot q^{n-m} = a_m q^{n-m}.$$

Ako je u geometrijskom nizu $a_1 = 1$, zbroj prvih $n$ članova možemo izračunati ovako:

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} \quad / \cdot q$$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + q^n \quad / + 1$$

$$
\begin{aligned}
1 + qS_n &= (1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}) + q^n \\
1 + qS_n &= S_n + q^n \\
qS_n - S_n &= q^n - 1 \\
(q-1)S_n &= q^n - 1 \quad / : (q-1) \\
S_n &= \frac{q^n - 1}{q - 1}.
\end{aligned}
$$

U općenitom geometrijskom nizu suma je $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1}$ pa ako izlučimo $a_1$ dobivamo:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q^n - 1}.$$

Gornja formula vrijedi ako je $q \neq 1$. U slučaju da je $q = 1$, zapravo imamo konstantni niz (odnosno aritmetički sa $d = 0$) pa je suma prvih $n$ članova jednaka $S_n = na_1$.

**Primjer 1.2.2.** *Izračunajte zbroj [5, 2.6.]:*

$$S = \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}.$$

*Rješenje.*

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2n - \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= 2n - \frac{\frac{1-2^n}{2^n}}{\frac{1-2}{2}} = 2n - 2\frac{2^n - 1}{2^n} = 2n - 2(1 - 2^{-n}) \\
&= 2(n-1) + 2^{1-n}.
\end{aligned}
$$

**Primjer 1.2.3.** *Za $x \neq \pm 1$ izračunajte zbroj [5, 2.7.]:*

$$S = x^0 x^1 + (x^0 + x^1)x^2 + (x^0 + x^1 + x^2)x^3 + ... + (x^0 + x^1 + x^2 + ... + x^{n-1})x^n.$$

*Rješenje.*

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{x - 1}{x - 1}x + \frac{x^2 - 1}{x - 1}x^2 + \frac{x^3 - 1}{x - 1}x^3 + \cdots + \frac{x^n - 1}{x - 1}x^n \\
&= \frac{1}{x - 1}\left[(x-1)x + (x^2 - 1)x^2 + (x^3 - 1)x^3 + ... + (x^n - 1)x^n\right] \\
&= \frac{1}{x - 1}\left[(x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{2n}) - (x + x^2 + x^3 + ... + x^n)\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{x-1}\left(x^2\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} - x\frac{x^n-1}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}\frac{x^2(x^{2n}-1) - x(x^n-1)(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{x(x^n-1)\left[x(x^n+1)-(x+1)\right]}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x(x^n-1)(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2(x+1)}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Primjer 1.2.4.** *Za $x \neq 1$ izračunajte zbroj [5, 2.10.]:*

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1}.$$

*1. način:*

$$\begin{aligned} S = 1 &+ x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &+ x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &\phantom{+ x} + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{n-2} + x^{n-1} \\ &\vdots \\ &x^{n-2} + x^{n-1} \\ &+ x^{n-1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} S &= \frac{x^n-1}{x-1} + x\frac{x^{n-1}-1}{x-1} + x^2\frac{x^{n-2}-1}{x-1} + x^3\frac{x^{n-3}-1}{x-1} + \cdots + x^{n-2}\frac{x^2-1}{x-1} + x^{n-1}\frac{x-1}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1}\left[nx^n - (1 + x + x^2 + ... + x^{n-2} + x^{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{x-1}\left(nx^n - \frac{x^n-1}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{(x-1)^2}(nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1) \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

*2. način:* Promotrimo funkciju

$$F(x) = x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

i njenu derivaciju

$$F'(x) = 1 + 2x + ... + nx^{n-1}.$$

Primijetimo da je $S = F'(x)$. Slijedi

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)' \\ &= \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - x^{n-1} + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

*3. način:*

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}, \\ -x \cdot S &= -x - 2x^2 - 3x^3 - ... - (n-2)x^{n-2} - (n-1)x^{n-1} - nx^n, \\ S - x \cdot S &= 1 + x + x^2 + ... + x^{n-2} + x^{n-1} - nx^n, \\ S(1-x) &= \frac{x^n - 1}{x-1} - \frac{nx^n(x-1)}{x-1} = \frac{x^n - 1 - nx^{n+1} + nx^n}{x-1}, \\ S(x-1) &= \frac{nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1}{x-1} \\ S &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

**Primjer 1.2.5.** *Za $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ izračunajte zbroj [5, 2.11.]:*

$$S = 1 \cdot x^{n-1} + 2 \cdot x^{n-2} + 3 \cdot x^{n-3} + ... + n \cdot 1.$$

*Rješenje.*

$$\begin{aligned} S &= x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + ... + n \cdot 1 \\ &= x^{n-1}\left(1 + 2x^{-1} + 3x^{-2} + ... + nx^{-(n-1)}\right) \\ &= x^{n-1}\left[1 + 2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\right]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Prema prethodnom zadatku vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} ky^{k-1} = \frac{ny^{n+1} - (n+1)y^n + 1}{(y-1)^2}.$$

Imamo:

$$S = x^{n-1} \frac{n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} - (n+1)\frac{1}{x^n} + 1}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} = x^{n+1} \frac{n \cdot \frac{1}{x^{n+1}} - (n+1)\frac{1}{x^n} + 1}{(1-x)^2},$$

i konačno

$$S = \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

# Poglavlje 2

# Rekurzivni problemi

Kao daljnju inspiraciju za traženje metoda računanja konačnih suma promotrit ćemo par poznatih rekurzivnih problema: Hanojske tornjeve i problem dijeljenja ravnine pravcima.

## 2.1 Hanojski tornjevi

Hanojski tornjevi su zagonetka koju je osmislio matematičar Édouard Lucas 1883. godine u djelu „Récréations mathematiques". Navodno je problem inspiriran hindu legendom koja glasi otprilike ovako:

„U hramu Benares ispod kupole koja označava centar svijeta, tri dijamantne igle, svaka lakat visoka i široka kao tijelo pčele, stoje na postolju od bakra. Pri stvaranju svijeta Bog je stavio 64 diska od čistog zlata na jednu iglu, najveći disk na dno i ostale po veličini poredao na njega, sve do najmanjeg diska na vrhu. Svećenicima u hramu je dao zadatak da neprestano pomiču diskove, sve dok ih ne poslože na drugu iglu u originalnom poretku. Pravila za pomicanje diskova su jednostavna: pomiče se jedan po jedan disk i nikad se ne stavlja veći disk na manji. Prema legendi, kada svećenici završe prebacivanje diskova po zadanim uvjetima, hram, i sve na Zemlji će se pretvoriti u prašinu, i sa udarom groma svemir će prestati postojati."[4]

Matematički gledano, zagonetka se sastoji od 3 tornja; na jednom se nalazi $n$ diskova, poredanih po veličini - na dnu je najveći, na vrhu najmanji. Cilj je prebaciti sve diskove na neki od preostalih tornjeva, tako da oni zadrže originalni poredak, koristeći 2 jednostavna pravila:

P1. Prebacuje se jedan po jedan disk.

P2. Ne smije se staviti veći disk na manji.

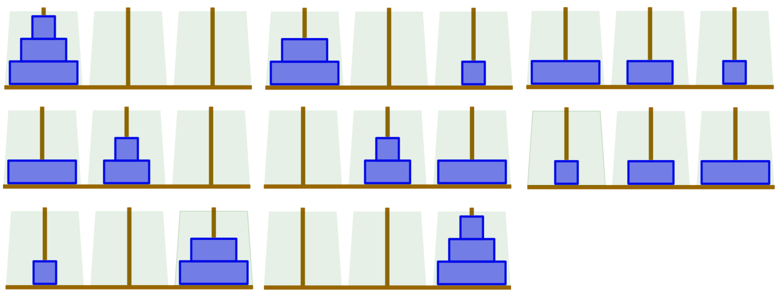
Postavlja se pitanje: koliki je najmanji broj prijenosa potrebnih za izvršenje zadatka, ovisno o broju diskova? [1]

Označimo tornjeve s $A$, $B$ i $C$. Diskovi su na tornju $A$ i treba ih prebaciti na toranj $C$. Pri tome koristimo pomoćni toranj $B$. Sam poredak tornjeva je nebitan, jer ih možemo označiti i nekim drugim redom. Uz oznaku $T_n$ za najmanji broj koraka da prebacimo $n$ diskova s tornja $A$ na toranj $C$, probajmo rješiti problem za prvih par diskova:

Ako je $n = 0$, $T_0 = 0$.

Ako je $n = 1$, potreban je jedan korak, $T_1 = 1$.

Ako je $n = 2$, u prvom ćemo koraku prebaciti najmanji disk s tornja $A$ na pomoćni toranj $B$, a potom veći disk s tornja $A$ na toranj $C$. U trećem koraku ćemo prebaciti najmanji disk s tornja $B$ na toranj $C$. Dakle, $T_2 = 3$.



Slika 2.1: Optimalni postupak rješavanja hanojskih tornjeva s 3 diska ima 7 poteza. Prva slika je početno stanje.

Direktnom provjerom dobivamo sljedeće:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 |

Mogli bi uočiti da su $T_n$ za jedan manji od potencija broja 2. Konkretno, vidimo da je $T_n = 2^n - 1$. Naravno, ovime nismo tu tvrdnju dokazali, već samo naslutili; za dokaz je potrebna matematička indukcija.[4]

Direktno rješavajući konkretne slučajeve, mogli smo naslutiti i neke pravilnosti u poretku poteza za optimalan broj poteza:

1. Zadnji disk će se pomaknuti samo jednom, i to sa $A$ na $C$; da bi to bilo moguće, svi ostali diskovi moraju biti poslagani na toranj $B$:

   Ova tvrdnja je očita: taj jedan potez je nužan za rješavanje problema, a moguć je samo ako na najvećem disku nema manjih diskova (inače je ispod diskova i ne možemo ga maknuti), te ako na $C$ nema diskova (jer bi ti diskovi bili manji, a po

P2 ne možemo staviti veći disk na manji). Nakon što je taj potez napravljen, nema nikakve potrebe dalje micati najveći disk.

2. Nakon što smo pomaknuli najmanji disk, u sljedećem ga potezu nećemo micati:

   Bez smanjenja općenitosti, neka smo pomaknuli najmanji disk sa $A$ na $B$ ($A \rightarrow B$). U sljedećem potezu bi mogli pomaknuti taj disk na 2 načina: sa $B$ na $A$ ($B \rightarrow A$), ili sa $B$ na $C$ ($B \rightarrow C$). No ako ga pomaknemo sa $B$ na $A$, vraćamo se na prethodnu poziciju ($A \rightarrow B \rightarrow A$). Ako ga pomaknemo sa $B$ na $C$, tada smo iskoristili 2 poteza za pomak sa $A$ na $C$, a to smo mogli u jednom potezu ($A \rightarrow B \rightarrow C$). Dakle, ako pomaknemo najmanji disk u potezu nakon što smo ga već pomaknuli, nećemo rješiti problem u najmanjem broju poteza. Drugim riječima, ako želimo najmanji broj poteza, najmanji disk ne smijemo micati dvaput za redom.

3. Nakon što smo pomaknuli neki disk osim najmanjeg, u sljedećem potezu moramo pomaknuti najmanji disk:

   Bez smanjenja općenitosti, neka smo neki disk (koji nije najmanji) pomaknuli sa $A$ na $B$ ($A \rightarrow B$). Taj disk je sada na vrhu tornja $B$. Na vrhu tornja $C$ je najmanji disk (ne može biti na vrhu $A$ jer bi to značilo da je u potezu prije bio ispod diska koji nije najmanji). Disk na vrhu tornja $A$ je bio ispod diska koji je sad na vrhu $B$, pa je veći od njega. Dakle, od diskova na vrhovima tornjeva, na $A$ je najveći, a na $C$ najmanji. Zbog P2, ne možemo micati disk s vrha tornja $A$, a disk s vrha tornja $B$ možemo pomaknuti samo na $A$ ($B \rightarrow A$), no time bi se vratili ne prethodnu poziciju, što nije optimalno ($A \rightarrow B \rightarrow A$). Stoga za rješenje u najmanjem broju poteza sada moramo pomaknuti najmanji disk.

4. Najmanji disk se mora pomaknuti u svakom neparnom potezu:

   Očito najmanji disk moramo pomaknuti u prvom potezu, jer su svi ostali ispod njega i ne možemo ih micati. Po 2., u sljedećem ga potezu onda nećemo micati, nego ćemo pomaknuti neki drugi disk. Po 3., onda u potezu nakon toga moramo opet pomaknuti najmanji disk. Tvrdnja sada očito slijedi.

5. Ako imamo neparan broj diskova, u prvom potezu moramo najmanji disk pomaknuti na $C$. Ako je broj diskova paran, moramo najmanji disk pomaknuti na pomoćni toranj $B$.

   Po 1., zadnji disk će završiti na $C$, a za to svi ostali diskovi moraju biti na $B$. Da bi svi diskovi osim zadnjeg završili na $B$, tamo treba završiti predzadnji disk jer ostali idu na njega. Za to je prvo potrebno sve diskove osim zadnjeg i predzadnjeg pomaknuti na $C$ kako bi oslobodili predzadnji disk za pomak sa $A$ na $B$. Dakle, predpredzadnji disk mora biti na $C$. Induktivno zaključujemo da će zadnji disk, i svaki drugi od njega po veličini, morati ići na toranj $C$ prvi put kada se miču. Predzadnji, i svaki drugi od njega moraju ići na $B$ prvi put kada se miču. Ako je broj diskova neparan, to znači da će i najmanji disk morati ići na $C$ prvi put kada se miče (tj. na prvom potezu). Ako je broj diskova paran, prvi potez će biti da najmanji disk ide na toranj $B$.

Iz pokušaja rješavanja problema s konkretnim brojem diskova i iz ove analize bi već sada trebalo biti očito da je problem Hanojskih tornjeva zapravo rekurzivan. Po 1., zadnji disk će se pomaknuti samo jednom, $A \to C$, a za to prvo treba prvih $n-1$ diskova pomaknuti $A \to B$. Onda pomičemo zadnji disk, pa nakon toga mičemo ostalih $n-1$ diskova $B \to C$. No pomak $n-1$ diskova s jednog tornja na drugi je upravo ovaj isti problem, samo s manjim brojem diskova. Rekurzijom se tako možemo spustiti do $n = 1$.

Pokušajmo sada pronaći rekurzivnu formulu za $T_n$:

1. Najprije prebacimo sve diskove osim najvećeg na pomoćni toranj $B$, koristeći pritom toranj $C$. Za to nam je potrebno $T_{n-1}$ koraka u najboljem slučaju.

2. Zatim najveći disk prebacujemo s tornja $A$ na krajnju poziciju na toranj $C$. Za to nam je potreban 1 korak.

3. Nakon toga, sve preostale diskove prebacujemo sa pomoćnog tornja $B$ na toranj $C$. Pri tome se služimo diskom $A$. Za to nam je potrebno ponovno $T_{n-1}$ koraka u najboljem slučaju.

Time dobivamo rekurziju

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad n \geq 2.$$

Dokažimo sada metodom matematičke indukcije našu slutnju:

**Teorem 2.1.1.** *Za rješavanje problema Hanojskih tornjeva s $n$ diskova potrebno je najmanje $T_n = 2^n - 1$ poteza.*

*Dokaz.* Baza: $n = 1$. Očito je $T_1 = 1$. S druge strane, po formuli za $n = 1$ dobivamo $T_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Dakle, baza vrijedi.

Pretpostavimo da je $T_n = 2^n - 1$, za neki prirodni broj $n$. Želimo dobiti $T_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

Prema rekurzivnoj formuli je $T_n = 2T_{n-1} + 1$. Primjenjujući ovo na $T_{n+1}$, i koristeći pretpostavku indukcije dobivamo

$$T_{n+1} = 2T_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

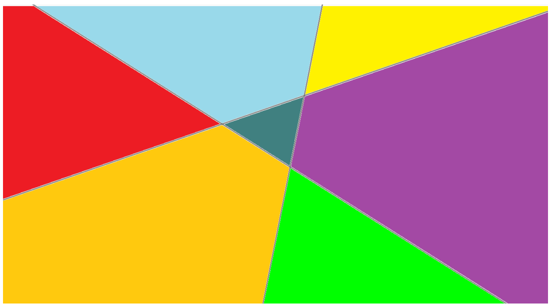
Jer je baza indukcije istinita, a iz prepostavke indukcije slijedi korak indukcije, po principu matematičke indukcije slijedi da je $T_n = 2^n - 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Osim indukcijom, mogli smo tvrdnju dokazati i uzastopnom primjenom rekurzivne formule na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 2T_{n-1} + 1 = 2(2T_{n-2} + 1) + 1 = 2^2T_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2T_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3T_{n-3} + 4 + 2 + 1 = ... \\
&= 2^{n-2}T_2 + 2^{n-3} + 2^{n-4} + ... + 4 + 2 + 1 = 2^{n-2}(2T_1 + 1) + 2^{n-3} + 2^{n-4} + ... + 4 + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1}T_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + ... + 4 + 2 + 1 = 2^{n-1} \cdot 1 + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k \\
&\overset{geom.niz}{=} 2^{n-1} + 1 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2 \cdot 2^{n-1} + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}
$$

## 2.2 Pravci u ravnini

Razmotrimo problem podjele ravnine pravcima. Recimo da imamo $n$ pravaca takvih da nema paralelnih i nijedna tri se ne sijeku u istoj točki. Pitamo se na koliko područja $R_n$ ti pravci dijele ravninu.[3] Primijetimo da u početku imamo 1 područje i pogledajmo prvih par slučajeva. Za $n = 1$ imamo jedan pravac i on dijeli ravninu na 2 područja. Dodavanjem drugog pravca dijelimo oba područja na dva dijela pa imamo 4 područja. Sada novi (treći) pravac prolazi kroz tri postojeća područja i svakom dodaje još jedno. Ovdje koristimo i pretpostavku da se najviše dva pravca sijeku u jednoj točki i da nijedan par pravaca nije paralelan.



Slika 2.2: 3 pravca dijele ravninu na 7 dijelova. Dodavanjem svakog novog pravca, broj područja na koje pravci dijele ravninu se povećava za ukupan broj pravaca.

Iz slučaja s tri pravca vidimo da se ne radi o tome da pravac dijeli sva prijašnja područja na dva dijela, što bi udvostručilo broj područja, nego dodaje po jedno područje za svako područje kroz koje prolazi. Lako je vidjeti da je broj područja kroz koje novi pravac prolazi za jedan veći od broja već postojećih pravaca, odnosno jednak novog broju pravaca $n$. Ako provjerimo i slučaj s četiri pravca, tada dobivamo 11 područja. Dakle za sada imamo sljedeće:

$$R_1 = 2$$

$$R_2 = 4$$

$$R_3 = 7$$

$$R_4 = 11$$

$$R_n = R_{n-1} + n.$$

Raspisivanjem rekurzije za $R_n$ dobivamo:

$$R_n = R_{n-1} + n = R_{n-2} + (n-1) + n = R_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = ...$$

$$R_n = ... = R_2 + 3 + 4 + ... + n = R_1 + 2 + 3 + ... + n = 2 + 2 + 3 + 4 + ... + n$$

Općenito je

$$R_n = 1 + (1 + 2 + 3 + ... + n).$$

Koristeći formulu za sumu prvih $n$ prirodnih brojeva, dobivamo da je

$$R_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

## 2.3 Metoda repertoara

Metoda repertoara se oslanja na vezu između suma i rekurzija. Naime, vrijedi da je $S_0 = a_0$ i $S_n = S_{n-1} + a_n$. Prevođenjem sume u jezik rekurzija možemo do rezultata doći služeći se metodama za rješavanje rekurzija.[7]

Kada imamo neku rekurziju oblika

$$x_n = f(n) + g(x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0)$$

gdje je $f(n)$ linearna kombinacija nekih jednostavnijih $f_k(n)$, tj.

$$f(n) = c_1 f_1(n) + ... + c_n f_k(n),$$

prvo gledamo općenitiji slučaj tako da zamijenimo $f(n)$ sa $a_n$,

$$Z_n = a_n + g(Z_{n-1}, Z_{n-2}, ..., Z_0)$$

i riješimo jednostavnije rekurzije

$$x_n^{(l)} = f_l(n) + g(x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0), \quad 1 \leq l \leq k,$$

gdje je $f(n)$ zamijenjena jednom od $f_l(n)$ koje ju čine. Te jednostavnije rekurzije rješavamo pogađanjem. Rješenja $x_n^{(l)}$ čine repertoar za rješavanje $x_n$. Rješenje početne rekurzije je odgovarajuća linearna kombinacija

$$x_n = c_1 x_n^{(1)} + ... + c_k x_n^{(k)} + c_0.$$

Na kraju još određujemo $c_0$ iz zadanih početnih uvjeta.[2]

**Primjer 2.3.1.** *Riješimo rekurziju:*
$R_0 = \alpha,$
$R_n = R_{n-1} + (\beta + n\gamma + n^2\delta).$

*Rješenje.* Pretpostavimo da je traženo rješenje oblika

$$R_n = A(n) \cdot \alpha + B(n) \cdot \beta + C(n) \cdot \gamma + D(n) \cdot \delta.$$

Ovime smo zadali ovisnost o $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
Provjerimo slučajeve kada je $R_n$ potencija broja $n$:

- $R_n = 1$ : Tada je $R_0 = \alpha = 1$. Iz $R_n = R_{n-1} + (\beta + n\gamma + n^2\delta)$ slijedi $1 = 1 + (\beta + n\gamma + n^2\delta)$, tj. $(\beta + n\gamma + n^2\delta) = 0$. Jer mora vrijediti za sve $n$, mora biti $\beta = \gamma = \delta = 0$. Uvrštavajući u prepostavljeni oblik rješenja, slijedi $R_n = 1 = A(n)$.

- $R_n = n$: Tada je $R_0 = \alpha = 0$. Iz rekurzije dobivamo $n = n - 1 + (\beta + n\gamma + n^2\delta)$, tj. $(\beta + n\gamma + n^2\delta) = 1$. Slijedi $\beta = 1, \gamma = \delta = 0$. Iz prepostavljenog oblika rješenja imamo $R_n = n = B(n)$.

- $R_n = n^2$: Tada je $R_0 = 0$, a iz rekurzije $n^2 = (n-1)^2 + (\beta + n\gamma + n^2\delta)$. Slijedi $n^2 = n^2 - 2n + 1 + (\beta + n\gamma + n^2\delta)$, odnosno $(\beta + n\gamma + n^2\delta) = -1 + 2n$. Mora biti $\beta = -1, \gamma = 2, \delta = 0$. Iz pretpostavljenog rješenja imamo $R_n = n^2 = -B(n) + 2C(n)$. Sada možemo uvrstiti već poznati $B(n)$ da dobijemo $C(n)$:
  $C(n) = \dfrac{n^2 + B(n)}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}.$

- $R_n = n^3$: Tada je $R_0 = 0$, a iz rekurzije $n^3 = (n-1)^3 + (\beta + n\gamma + n^2\delta)$. Slijedi $n^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + (\beta + n\gamma + n^2\delta)$, odnosno $(\beta + n\gamma + n^2\delta) = 1 - 3n + 3n^2$. Iz toga je $\beta = 1, \gamma = -3, \delta = 3$. Iz pretpostavljenog rješenja imamo $R_n = n^3 = B(n) - 3C(n) + 3D(n)$. Sada možemo izraziti $D(n)$ kao
  $D(n) = \dfrac{1}{3}n^3 - \dfrac{1}{3}B(n) + C(n) = \dfrac{1}{3}n^3 - \dfrac{1}{3}n + \dfrac{1}{2}(n^2 + n)$

$$D(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Lako je provjeriti da su $A, B, C, D$ zaista rješenja.
Zašto bi nam ovo moglo biti korisno za računanje suma? Primjetimo što dobivamo ako u rekurziju uvrstimo za sve koeficijente 0, osim za jednog. Ako ostavimo $\gamma = 1$, rekurzija glasi $R_n = R_{n-1} + n$, uz početni uvjet $R_0 = 0$, a to je upravo rekurzija koja daje sumu prvih $n$ prirodnih brojeva. U tom slučaju je rješenje

$$R_n = C(n) = \frac{n^2 + n}{2}.$$

S druge strane, ako ostavimo $\delta = 1$, a ostale ostavimo kao 0, rekurzija je $R_n = R_{n-1} + n^2$, uz $R_0 = 0$, a to je očito rekurzija koja daje zbroj kvadrata prvih $n$ prirodnih brojeva. Tada je rješenje

$$R_n = D(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Dakle rješavanjem rekurzija možemo izgraditi repertoar korisnih jednakosti koje nam mogu poslužiti za rješavanje konačnih suma koje se mogu izraziti rekurzijama.

## 2.4 Funkcije izvodnice

Proučavajući neke veličine u raznim prirodnim pojavama, čovjek je uočio da se neka pojavljivanja povećavaju ili smanjuju po određenom principu. Ta pojavljivanja možemo kontrolirati preko matematičkog pojma niza brojeva. Nizovi su često zadani preko rekurzivnih relacija. Da bismo odredili neki konkretni član niza, potrebno je izraziti eksplicitnu formu za opći član niza. Ponekad do toga dolazimo ispisivanjem prvih nekoliko članova niza, nakon čega naslutimo kako bi mogao izgledati opći član. Pored spomenutog, korisno je znati i neke druge načine za određivanje eksplicitnih formula za opće članove niza.

U ovom poglavlju bavimo se tzv. funkcijama izvodnicama, preko kojih se u mnogo situacija dolazi do traženog rješenja. Stoga dajemo sljedeću definiciju [9].

**Definicija 2.4.1.** *Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva. Formalni red potencija*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*zove se* ***obična funkcija izvodnica*** *niza $(a_n)_{n\geq 0}$.*

Za funkcije izvodnice vrijede sljedeća svojstva [9]:

- Pravilo jednakosti: $A(x) = B(x), \forall x \iff a_n = b_n \forall \geq 0$
- Pravilo zbroja: $A(x) + B(x) = (A + B)(x)$, tj.

$$(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) + (\sum_{n\geq 0} b_n x^n) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

- Pravilo množenja: $A(x) \cdot B(x) = C(x)$, tj.

$$(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) \cdot (\sum_{n\geq 0} b_n x^n) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n,$$

gdje je $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, ..., $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, ...

**Primjer 2.4.2.** *Odredimo funkciju izvodnica za niz $a_n = n$. [9, str.179, pr.1.b]*

Krenimo od poznatog geometrijskog reda:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1 - x}.$$

Formalno deriviramo i dobijemo

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1} + ... = \frac{1}{(1 - x)^2}.$$

Množenjem ove jednakosti s $x$ dobivamo

$$x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n + ... = \sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1 - x)^2},$$

što je tražena funkcija izvodnica.

**Primjer 2.4.3.** *Odredimo funkciju izvodnica za niz $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$. [9, str.179, pr.1.f]*

Krenimo od poznatog geometrijskog reda:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1 - x}.$$

Formalno integriramo i dobijemo

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{n+1}}{n + 1} + ... = -\ln(1 - x)$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n = \ln \frac{1}{1 - x},$$

što je tražena funkcija izvodnica.

## Postupak pretvaranja rekurzivne formule u eksplicitnu formulu

(1) Definiranje funkcije izvodnice $G(x)$ niza $(a_n)_{n\geq 0}$.

(2) Transformiranje rekurzivne formule u jednadžbu s $G(x)$. To može biti napravljeno množenjem rekurzivne formule s $x^n$, $x^{n+1}$, ili, ponekad, s $x^{n+k}$ te sumiranjem po svim nenegativnim $n$.

(3) Određivanje eksplicitne formule za $G(x)$.

(4) Određivanje eksplicitne formule za $a_n$. Kako je $a_n$ koeficijent uz potenciju $x^n$ po definiciji od $G(x)$, pronalaženje koeficijenata uz potenciju $x^n$ s druge strane jednakosti nam daje traženo rješenje.[8]

## Funkcija izvodnica za Fibbonacijeve brojeve

Fibbonacijev niz definira se na rekurzivan način formulom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

uz početne vrijednosti $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$.

Kao i za svaki niz, funkcija izvodnica za Fibbonacijeve brojeve definirana je kao formalni red potencija čiji su koeficijenti Fibbonacijevi brojevi,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$$

budući da je $F_0 = 0$.

Odvojimo dva početna člana od zbroja i zamijenimo rekurzivnu relaciju za $F_1$ koeficijentima sume.

$$\begin{aligned} F(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n. \end{aligned}$$

Sada svaku ovu sumu zapišemo pomoću funkcije izvodnice.

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = xF(x).$$

Slično, za drugu sumu imamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x^2 F(x).$$

Slijedi da je

$$F(x) = x + xF(x) + x^2 F(x).$$

Odnosno, dobivamo eksplicitnu formulu za funkciju izvodnicu

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Sada kada smo pronašli eksplicitnu formulu za funkciju izvodnicu, preostaje samo izraziti ovu funkciju kao red potencija. Nakon što to učinimo, njegove koeficijente možemo uskladiti, pojmovno s odgovarajućim Fibonaccijevim brojevima.

Označimo korijene polinoma $1 - x - x^2$ s $-\varphi$ i $-\psi$, pri čemu je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pa polinom možemo zapisati u obliku faktora

$$1 - x - x^2 = -(x + \varphi)(x + \psi)$$

Da bi funkciju izvodnicu izrazili kao red potencija, potrebno je koristiti rastav na parcijalne razlomke.

$$F(x) = -\frac{x}{(x + \varphi)(x + \psi)} = \frac{A}{x + \varphi} + \frac{B}{x + \psi}.$$

Što je ekvivalentno s

$$-x = A(x + \psi) + B(x + \varphi).$$

Neka je $x = -\varphi$, tada je $A = -\frac{\varphi}{\sqrt{5}}$.

Slično, neka je $x = -\psi$, dobivamo da je $A = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$.

Slijedi da je

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\psi}{x + \psi} - \frac{\varphi}{x + \varphi} \right).$$

Pokažimo svaki od ova dva člana pomoću sume geometrijskog niza. Podsjetimo se da je zbroj geometrijskog niza dan kao $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Napomenimo još kako ova beskonačna suma konvergira ako i samo ako je $|x| < 1$.

Koristeći ovaj identitet i činjenicu da je $\varphi = -\frac{1}{\psi}$, prvi član funkcije izvodnice možemo zapisati kao

$$\frac{\psi}{x + \psi} = \frac{1}{1 + \frac{x}{\psi}} = \frac{1}{1 - \varphi x} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n x^n.$$

Slično, dobivamo

$$\frac{\varphi}{x+\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n x^n,$$

pa je

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)x^n.$$

Koeficijent uz potenciju $x^n$ traženi je Fibonaccijev broj $F_n$, tj.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n).$$

**Primjer 2.4.4.** *Odredimo funkciju izvodnica za prosječan broj usporedbi $q_n$ u quicksort algoritmu na niz od n brojeva.[9, Primjer 13][6]*

Quicksort algoritmom sortiramo $n$ brojeva u slučajnom poretku. Pretpostavimo da su svi $x_1, ..., x_n$ različiti. Quickosort radi tako da $x_1$ usporedbi sa svim ostalim članovima niza i podijeli niz na dva niza - jedan s brojevima manjim od $x_1$, a drugi s brojevima većim od $x_1$ (poredak je zadržan). Postupak se rekurzivno ponavlja na podnizovima dok se ne dođe do najviše jednočlanih grupa. Ovo je dakle algoritam tipa „podijeli pa vladaj".

Neka je $q_n$ prosječan (očekivani) broj usporedbi. Očito je $q_0 = 0$.
Za ukupni prosječni broj usporedbi potrebno je zbrojiti broj usporedbi za prvu podjelu $(n-1)$ s brojem usporedbi u dvije grupe nakon podjele. Svaki se element s vjerojatnošću $\frac{1}{n}$ javlja kao „djelišni", a podgrupe na koje je preostalih $n-1$ elemenata podijeljeno imaju veličine $j-1$ i $n-j$ za neko $j = 1, ..., n$. Dakle

$$q_n = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(q_{j-1} + q_{n-j}), n \geq 1.$$

Uz zamjenu $j$ sa $n-j+1$ dobivamo ekvivalentno

$$q_n = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} q_{j-1}.$$

Množenjem s $n$ i uzimanjem u obzir početni uvjet rekurzije dobivamo

$$nq_n = n(n-1) + 2\sum_{j=1}^{n} q_{j-1}, \quad n \geq 1, q_0 = 0.$$

Kada pomnožimo s $x^n$ i sumiramo po $n$, slijedi

$$\sum_{n\geq 1} nq_n x^n = \sum_{n\geq 1} n(n-1)x^n + 2\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n} q_{j-1}x^n. \tag{2.1}$$

Označimo s $Q(x)$ funkciju izvodnicu za $(q_n)$. Sada je lijeva strana očito $xQ'(x)$.
Prvi član s desne strane je

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} n(n-1)x^n &= x\cdot\left(\sum_{n\geq 1}(n-1)x^n\right)' = x\cdot\left(\sum_{n\geq 1} nx^n - \sum_{n\geq 1} x^n\right)' = x\cdot\left(\sum_{n\geq 1} nx^n - \left(\sum_{n\geq 0} x^n - 1\right)\right)' \\
&= x\cdot\left(\sum_{n\geq 1} nx^n - \sum_{n\geq 0} x^n + 1\right)' \overset{2.4.2}{=} x\cdot\left(\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}\right)' \\
&= x\cdot\left(\frac{x-1+x}{(1-x)^2}\right)' = x\cdot\left(\frac{2x-1}{(1-x)^2}\right)' = x\cdot\frac{2(1-x)^2+2(1-x)(2x-1)}{(1-x)^4} \\
&= x\cdot\frac{2(1-x)+2(2x-1)}{(1-x)^3} = x\cdot\frac{2-2x+4x-2}{(1-x)^3} = x\cdot\frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Drugi član s desne strane u (2.1) je

$$\begin{aligned}
2\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n} q_{j-1}x^n &= 2\Big(q_0x^1 + (q_0+q_1)x^2 + (q_0+q_1+q_2)x^3 + (q_0+q_1+q_2+q_3)x^4 + ...\Big) \\
&= 2x\Big(q_0x^0 + (q_0+q_1)x^1 + (q_0+q_1+q_2)x^2 + ...\Big) \\
&= 2x\Big(q_0x^0 + q_1x^1 + q_2x^2 + ...\Big)\Big(x^0 + x^1 + x^2 + ...\Big) \\
&= 2x\left(\sum_{n\geq 0} q_nx^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 2xQ(x)\cdot\frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

Dakle, (2.1) je ekvivalentno sa

$$xQ'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{2xQ(x)}{1-x},$$

odnosno nakon dijeljenja s $x$

$$Q'(x) = \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{2Q(x)}{1-x}. \tag{2.2}$$

Ovo je linearna nehomogena diferencijalna jednadžba prvog reda. Prvo riješimo pripadnu homogenu jednadžbu

$$R'(x) = \frac{2R(x)}{1-x}$$

$$\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{2}{1-x}.$$

Integriramo pa slijedi

$$\begin{aligned}
\ln R(x) &= -2\ln(1-x) + c \\
R(x) &= e^{-2\ln(1-x)} \cdot C \\
R(x) &= \frac{C}{(1-x)^2} \\
Q(x) &= \frac{C(x)}{(1-x)^2} \\
C(x) &= Q(x)(1-x)^2.
\end{aligned}$$

Deriviramo $C(x)$ pa dobijemo

$$\begin{aligned}
C'(x) &= \left(Q(x)(1-x)^2\right)' = Q'(x)(1-x)^2 - 2(1-x)Q(x) \\
&\overset{(2.2)}{=} \frac{2x}{1-x} + 2Q(x)(1-x) - 2(1-x)Q(x) = \frac{2x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Jer je $C(0) = Q(0) = q_0 = 0$, integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
C(x) &= \int_0^x \frac{2t}{1-t}dt = \int_0^x \frac{-2(1-t)+2}{1-t}dt = \int_0^x -2dt + \int_0^x \frac{2}{1-t}dt \\
&= -2x - 2\ln(1-x) = -2(x + \ln(1-x)),
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{C(x)}{(1-x)^2} = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-x - \ln(1-x)) \overset{Pr.2.4.2.}{=} 2\left(\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}\right)\left(-x + \ln\frac{1}{1-x}\right) \\
&= 2\left(\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}\right)\left(-x + \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}\right) = 2\left(\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}\right)\left(\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n}\right) \\
&= 2\left(1 + 2x + 3x^2 + ...\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ...\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}x^2 + (2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^3 + (3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4})x^4 + ...\right)
\end{aligned}$$

S obzirom da je $Q(x) = \sum q_n x^n$ sada možemo očitati da je

$$q_n = 2\sum_{k=2}^{n}(n+1-k)\frac{1}{k} = 2\left(\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\frac{1}{k} - n\right)$$

$$q_n = 2\left(\sum_{k=1}^{n}(n+1)\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} 1 - n\right) = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 4n.$$

Uočimo da je $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ upravo $n$-ti harmonijski broj, $H_n$, pa možemo pisati

$$q_n = 2(n+1)H_n - 4n.$$

**Primjer 2.4.5.** *U jezeru je na početku godine k žaba. Tijekom svake godine broj žaba se poveća l puta. Na početku svake godine se m žaba preseli iz tog jezera u neka druga jezera. Pretpostavimo da su k, l i m takvi da je* $(l-1)k > m$. *Koliko će u tom jezeru biti žaba nakon n godina?[8, 2.1.1.]*

*Rješenje.* Očito je $a_0 = k$ i

$$a_{n+1} = la_n - m, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Iz ove rekurzije možemo izračunati broj žaba na početku svake godine, no moramo znati broj žaba na početku prethodne godine. Tako bi za broj žaba nakon 100 godina prvo trebali odrediti broj žaba nakon 99 godina, a za to broj žaba nakon 98 godina, i tako dalje. Kako bi izbjegli takav dugačak račun, pronaći ćemo funkciju izvodnicu. Neka je funkcija izvodnica

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zapišimo prvih nekoliko rekurzivnih jednadžbi i pomnožimo ih potencijama od $x$:

$$a_1 = la_0 - m / \cdot x$$

$$a_2 = la_1 - m / \cdot x^2$$

$$a_3 = la_2 - m / \cdot x^3$$

$$... \quad ...$$

$$a_{n+1} = la_n - m / \cdot x^{n+1}$$

Formalnim zbrajanjem dobivamo jednakost:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = l\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - m\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}.$$

S lijeve strane imamo

$$G(x) - a_0 = G(x) - k.$$

Desno je

$$l\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = lxG(x),$$

a drugi sumand je

$$m\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = m\frac{x}{1-x}$$

po formuli za sumu geometrijskog reda. Izlučivanjem $G(x)$ dobivamo

$$G(x) = \frac{k}{1-lx} - m\frac{x}{(1-x)(1-lx)}. \tag{2.3}$$

Nakon što smo odredili eksplicitnu formulu za $G(x)$, trebamo odrediti eksplicitnu formulu za $a_n$. To ćemo učiniti tako da izjednačimo koeficijente uz odgovarajuće potencije u lijevom i desnom redu potencija. Jer je lijevo $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, traženi $a_n$ će biti jednak koeficijentu uz $x^n$ na desnoj strani jednakosti. Za to treba raspisati desnu stranu pomoću redova. Po formuli za sumu geometrijskog reda, prvi član s desne strane je

$$\frac{k}{1-lx} = k\sum_{n=0}^{\infty}(lx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} k \cdot l^n \cdot x^n. \tag{2.4}$$

Ovdje je koeficijent uz $x^n$ jednak $kl^n$. Drugi član desnog izraza je

$$\frac{mx}{(1-x)(1-lx)} = mx \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} l^n x^n\right). \tag{2.5}$$

Ovdje je sada teže naći koeficijent uz $x^n$. To možemo učiniti pomoću rastava na parcijalne razlomke ili kombinatorno. Kombinatorno, nakon množenja suma, članovi koji će sadržavati $x^n$ su dobiveni množenjem $k$-tog člana iz duge sume s $n-k-1$-og člana iz prve (jer već imamo jedan $x$ ispred suma), za $k$ od 0 do $n-1$, pa je koeficijent uz $x^n$ jednak

$$\sum_{k=0}^{n-1} ml^k = m \cdot \frac{l^n - 1}{l-1}.$$

S druge strane, rastavom na parcijalne razlomke za lijevu stranu (2.5) dobivamo

$$\frac{mx}{(1-x)(1-lx)} = -\frac{m}{l-1} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{m}{l-1} \cdot \frac{1}{1-lx}.$$

Iz toga po formuli za sumu geometrijskog reda slijedi

$$\frac{mx}{(1-x)(1-lx)} = \frac{m}{l-1}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} l^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{l-1}(l^n - 1)x^n. \tag{2.6}$$

Koeficijent uz $x^n$ je $\frac{m}{l-1}(l^n - 1)$, isto kao što smo dobili kombinatorno.
Konačno, koeficijent uz $x^n$ na desnoj strani jednakosti (2.3) dobivamo oduzimanjem koeficijenata uz $x^n$ dobivenih u (2.4) i (2.6). Taj koeficijent bit će jednak traženom $a_n$:

$$a_n = kl^n - m\frac{l^n - 1}{l - 1}.$$

# Poglavlje 3

# Metode za računanje suma

U ovom ćemo poglavlju proučiti nekoliko metoda za računanje suma: naslućivanje rješenja uz dokaz indukcijom, rastav na parcijalne razlomke i teleskopiranje, metodu perturbacije, zamjenu sume integralom, ekspanziju i kontrakciju, korištenje konačnih diferencija.

## 3.1 Naslutiti rješenje pa ga dokazati indukcijom

Jedan od najintuitivnijih načina za računanje suma sastoji se od toga da izračunamo prvih par parcijalnih suma te pokušamo uočiti neku pravilnost [4, 7]. Ako uspijemo naslutiti formulu za sumu, ostaje nam ju još dokazati matematičkom indukcijom. U sljedećem ćemo primjeru vidjeti kako bi mogli izračunati zbroj prvih $n$ neparnih brojeva.

**Primjer 3.1.1.** *Izračunajte zbroj* $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n - 1$.

*Rješenje.* Označimo sa $S_n$ $n$-tu parcijalnu sumu. Izračunajmo nekoliko prvih $S_n$:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 3 = 4$$
$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$
$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Uočavamo da je $S_n = n^2$ za $n = 1, ..., 5$. Stoga naslućujemo da vrijedi $S_n = n^2$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo tu tvrdnju indukcijom:
Baza: $S_1 = 1 = 1^2$. Pretpostavimo da $S_n = n^2$ vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada za $S_{n+1}$ vrijedi:

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = S_n + 2n + 1 \overset{pretp.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Jer tvrdnja vrijedi za $n = 1$, a iz pretpostavke da vrijedi za neki prirodni broj slijedi da vrijedi i za njegovog sljedbenika, po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja

$$S_n = n^2$$

vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

**Primjer 3.1.2.** *Izračunajte zbroj [3]:*

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

*Rješenje.* Za $n = 1$ imamo:

$$S_1 = \frac{1}{2}.$$

Za $n = 2$ imamo:

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Za $n = 3$ imamo:

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Za $n = 4$ imamo:

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

Naslućujemo da vrijedi: $S_n = \frac{n}{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo ovu hipotezu matematičkom indukcijom po $n$.
Bazu smo već pokazali da vrijedi (slučaj $n = 1$). Pretpostavimo sada da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n = \frac{n}{n+1}$. Sada imamo

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Koristeći pretpostavku matematičke indukcije dobivamo:

$$S_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)}.$$

Budući da hipoteza vrijedi za $n = 1$, a iz pretpostavke da vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ dobivamo da vrijedi za $n + 1$, prema aksiomu matematičke indukcije hipoteza vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

**Primjer 3.1.3.** *Izračunajte zbrojeve [5, 6.9.]:*

$$a) \sum_{k=0}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1} \qquad b) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2}.$$

Koristit ćemo sljedeću formulu:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad (|xy| < 1). \tag{3.1}$$

a)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1},$$

$$S_0 = \operatorname{arctg} 1;$$

Korištenjem (3.1), za $S_1$ dobivamo:

$$S_1 = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \operatorname{arctg} 2.$$

Analogno,

$$S_2 = S_1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} 3.$$

Slutimo da je $S_n = \operatorname{arctg}(n+1)$. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Baza indukcije je dokazana ranije. Uz pretpostavku da za neki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n = \operatorname{arctg}(n+1)$ dobivamo:

$$S_{n+1} = S_n + \operatorname{arctg} \frac{1}{(n+1)^2 + (n+1) + 1} = \operatorname{arctg}(n+1) + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3n+3}.$$

Koristeći (3.1):

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \operatorname{arctg} \frac{n+1+\frac{1}{n^2+3n+3}}{1-\frac{n+1}{n^2+3n+3}} = \operatorname{arctg} \frac{n^3+4n^2+6n+4}{n^2+2n+2} \\ &= \operatorname{arctg} \frac{(n+2)(n^2+2n+2)}{n^2+2n+2} = \operatorname{arctg}(n+2). \end{aligned}$$

Sada je

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1} = \operatorname{arctg}(n+1),$$

za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$.

b)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{19} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2},$$

$$S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2};$$

Korištenjem (3.1), za $S_2$ i $S_3$ dobivamo:

$$S_2 = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

$$S_3 = S_2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Naslućujemo $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Baza je dokazana. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Tada je

$$S_{n+1} = S_n + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{\overline{\frac{n}{n+1+\frac{1}{2(n+1)^2}}}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}} = \cdots = \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}.$$

Prema principu matematičke indukcije, dokazali smo da je

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

.

## 3.2 Rastav na parcijalne razlomke i teleskopiranje

**Primjer 3.2.1.** *Izračunajte zbroj [5, 3.1.]:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

*Rješenje.* Opći član sume rastavimo na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}.$$

Množimo sa zajedničkim nazivnikom i dobivamo

$$1 = A(k+1) + Bk,$$

$$1 = k(A + B) + A.$$

Izjednačimo posebno članove uz $k$ s obje strane, te članove bez $k$ s obje strane. Dobivamo sustav:

$$A + B = 0,$$
$$A = 1.$$

Trivijalno slijedi $A = 1$, $B = -1$ pa se opći član može rastaviti kao $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Raspišimo sumu:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left( \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + .... + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

**Primjer 3.2.2.** *Izračunajte zbroj [5, 3.3.]:*

$$S = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}.$$

*Rješenje.* Rastavimo opći sumand na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k} + \frac{C}{k+1} \\
1 &= A(k^2 + k) + B(k^2 - 1) + C(k^2 - k) \\
1 &= (A + B + C)k^2 + (A - C)k - B.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata na obje strane dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A - C = 0, \\ -B = 1. \end{cases}$$

Odavde zaključujemo $B = -1$, $A = C$. uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $2A = 1$ pa je $A = C = \frac{1}{2}$.

Dakle,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right).$$

Raspišimo i izračunajmo $S$:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right.\\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

## 3.3 Metoda perturbacije

Kada želimo označiti neku sumu $s_n$ pomoću metode perturbacije, trebamo sumu $s_{n+1}$ zapisati na dva različita načina, tako da izdvojimo jedan član. [4, 7]

**Primjer 3.3.1.** *Izračunajmo zbroj* $\sum_{k=1}^{n} H_k$, *gdje je*

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k}$$

*k-ti harmonijski broj [1].*

*Rješenje.* Umjesto tražene sume promotrimo sumu u kojoj je svaki član pomnožen s $k$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kH_k = H_1 + 2H_2 + 3H_3 + ... + nH_n.$$

Promotrimo $S_{n+1}$, izdvojimo zadnji član i zatim reindeksirajmo sumu:

$$S_n + (n+1)H_{n+1} = S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)H_{k+1}.$$

Jer znamo da je $H_{k+1} = H_k + \dfrac{1}{k+1}$ za $k > 0$, možemo pisati:

$$\begin{aligned}
S_n + (n+1)H_{n+1} &= H_1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right)\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} kH_k + \sum_{k=1}^{n} H_k + \sum_{k=1}^{n} 1\\
&= 1 + S_n + \sum_{k=1}^{n} H_k + n.
\end{aligned}$$

Poništimo $S_n$ s obje strane i pogledajmo što dobivamo za traženu sumu $\sum_{k=1}^{n} H_k$:

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_{n+1} - (n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

**Primjer 3.3.2.** *Metodom perturbacije odredimo sumu prvih n prirodnih brojeva [1].*

*Rješenje.* Pogledajmo opet malo drugačiju sumu, sumu prvih $n$ kvadrata, i nazovimo je $S_n$. Raspišimo $S_{n+1}$ uz promjenu granica sumacije:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1.$$

Primijetimo da s lijeve strane možemo izdvojiti zadnji član da dobijemo $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$, a s desne je $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = S_n$. Dakle imamo:

$$S_n + (n+1)^2 = S_n + 2\sum_{k=0}^{n} k + n + 1.$$

Nakon kraćenja $S_n$ dobivamo formulu za sumu prvih $n$ prirodnih brojeva:

$$(n+1)^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n + 1$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)(n+1-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Na sličan bi način primjenom metode perturbacije na sumu prvih $n$ kubova dobiti sumu prvih $n$ kvadrata. Iz oba primjera vidimo da kod metode perturbacije uglavnom želimo raditi s nekom modificiranom sumom, a ne točno s onom koju želimo izračunati.

## 3.4 Zamjena sume integralom

S obzirom da je ponekad lakše izračunati integral nego sumu, možemo iskoristiti činjenicu da je integral zapravo limes zbroja površina pravokutnika ispod grafa funkcije. Konačnu sumu $\sum_{k=1}^{n} a_k$ onda možemo aproksimirati pomoću integrala $\int_{1}^{n} f(x)dx$, gdje je $f(k) = a_k$. Zatim, moramo uzeti u obzir i greške, jer zbroj površina pravokutnika samo aproksimira površinu ispod krivulje, odnosno integral. Dakle postoji i neka greška $E_n$ koja je jednaka razlici između integrala i tražene sume. Ako saznamo grešku, mogli bi iz integrala doći do sume.[4, 7]

**Primjer 3.4.1.** *Izračunajmo sumu prvih n kubova, $\sum_{k=0}^{n} k^3$ [1].*

*Rješenje.* Brojevi $1, 8, 27, 64, ...$ su kubovi u sumi, a to su također površine pravokutnika širine 1 i visine $k^3$. Dakle tražena suma je broj površina pravokutnika kojima su visine kubovi prirodnih brojeva. Ta situacija je slična ideji određenog integrala za $f(x) = x^3$ od 0 do $n$, što će nam biti aproksimacija za našu sumu.

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \approx \int_{0}^{n} x^3 dx.$$

Pri aproksimaciji će se pojaviti i greška $E_n$ koju možemo izračunati kao razliku tražene sume i integrala. Zatim ćemo koristeći svojstvo određenog integrala da ga možemo rastaviti na sumu integrala na podintervalima raspisati izraz:

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 - \int_{0}^{n} x^3 dx = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^3 dx = \sum_{k=1}^{n} \left( k^3 - \frac{k^4 - (k-1)^4}{4} \right).$$

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \left( k^3 - \left( k^3 - \frac{3}{2}k^2 + k - \frac{1}{4} \right) \right) = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{3}{2}k^2 - k + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Primijenimo već poznate rezultate za sumu kvadrata (Pr.1.1.6.) i sumu prirodnih brojeva (Pr.1.1.2.). Dobivamo

$$E_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{4}.$$

Sada možemo traženu sumu dobiti tako da grešku zbrojimo s početnim integralom:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^3 = E_n + \int_0^n x^3 dx &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n^4}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(1+n)(1-n+n^2)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{4}\left(2n+1-2+1-n+n^2\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \cdot (n+n^2) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

## 3.5 Ekspanzija i kontrakcija

U metodi ekspanzije i kontrakcije zamijenjujemo traženu sumu naizgled kompliciranijom dvostrukom sumom koju će kasnije biti lakše pojednostaviti.[4, 7]

**Primjer 3.5.1.** *Izračunajmo zbroj* $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$ *[1].*

*Rješenje.*

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k &= 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot (1+1) + 2^3 \cdot (1+1+1) + ... + 2^n \cdot (1+1+...+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left( 2^k \cdot \sum_{j=1}^{k} 1 \right) = \sum_{1 \le j \le k \le n} 2^k \\
&= (2^1 + 2^2 + 2^3 ... + 2^n) + (2^2 + 2^3 + ... + 2^n) + (2^3 + ... + 2^n) + ... + (2^{n-1} + 2^n) + 2^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 2^k.
\end{aligned}
$$

Sada je unutarnju sumu lako izračunati:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 2^k = \sum_{j=1}^{n} (2^{n+1} - 2^j) = 2^{n+1} \sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} 2^j \\
= n \cdot 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = 2^{n+1}(n-1) + 2.
\end{aligned}
$$

Ekspanzija je napravljena u prvom koraku gdje je jednostruka suma zamijenjena dvostrukom, a kontrakcija pri kraju kada smo dvostruku opet zamijenili jednostrukom.

**Primjer 3.5.2.** *Izračunajmo sumu prvih n kvadrata metodom ekspanzije i kontrakcije [1].*

*Rješenje.*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + ... + n \cdot n = 1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + ... + (n + n + ... + n)\\ &= (1 + 2 + 3 + ... + n) + (2 + 3 + ... + n) + (3 + ... + n) + ... + ((n-1) + n) + n\\ &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=2}^{n} k + \sum_{k=3}^{n} k + ... + \sum_{k=n-1}^{n} k + \sum_{k=n}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k.\end{aligned}$$

Ovu dvostruku sumu sada možemo lakše izračunati jer je unutarnja suma zapravo suma prirodnih brojeva od $j$ do $n$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j+n}{2}(n-j+1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+n)(n-j+1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(jn - j^2 + j + n^2 - jn + n)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(n^2 + n + j - j^2) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} n(n+1) + \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[n \cdot n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{j=1}^{n} j^2\right].\end{aligned}$$

Primijetimo da je zadnji član u zagradi upravo tražena suma. Promijenimo indeks sumacije sa $j$ na $k$ i dovršimo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^2(n+1) + n(n+1)}{4} / \cdot \frac{2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

## 3.6 Metoda konačnih diferencija

Infinitezimalni račun se temelji na operatoru derivacije

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Diskretni analogon bi bio **operator diferencije** [1]:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Analogon relacije $D(x^m) = mx^{m-1}$ je relacija

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}.$$

Ovdje je $x^{\underline{m}}$ **padajuća faktorijelna potencija od** $x$, odnosno

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)...(x-m+1).$$

Analogon Newton-Leibnizovog teorema je relacija

$$g(x) = \Delta f(x) \Leftrightarrow \sum g(x)\delta x = f(x) + C,$$

gdje je $\sum g(x)\delta x$ neodređena suma, odnosno skup svih funkcija čija je diferencija $g(x)$. $C$ je proizvoljna funkcija sa svojstvom $C(x+1) = C(x)$. Vrijedi:

$$\sum_a^b g(x)\delta x = f(x)\Big|_a^{b+1} = f(b+1) - f(a),$$

gdje je

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{a \le k \le b} g(k)$$

za prirodne brojeve $b \geq a$. [4, 7]

**Primjer 3.6.1.** *Izračunajmo zbroj* $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$ *[1].*

*Rješenje.* Primijetimo

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k^{\underline{k}}.$$

Stoga je

$$\Delta(k!) = \Delta(k^{\underline{k}}) = k \cdot k^{\underline{k-1}} = k \cdot (k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 = k \cdot k!$$

Dakle imamo $g(k) = k \cdot k!$ i $g(k) = \Delta f(k)$, gdje je $f(k) = k!$. Slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} \Delta(k!) = k!\Big|_1^{n+1} = (n+1)! - 1.$$

**Primjer 3.6.2.** *Izračunajmo zbroj* $\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k$.

*Rješenje.* S obzirom da je ovo suma geometrijskog niza ($a_0 = 1, q = 3$), znamo da je

$$S_n = a_0 \frac{q_{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Pokažimo to i metodom konačnih diferencija. Primijetimo

$$\Delta(3^k) = 3^{k+1} - 3^k = 3^k(3 - 1) = 2 \cdot 3^k.$$

Slijedi da je

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \Delta(3^k) = \frac{1}{2}\left(3^k \Big|_0^{n+1}\right) = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1).$$

**Primjer 3.6.3.** *Izračunajmo zbroj* $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2+k+1}$ *[5, 6.9.].*

Ovo je isti zadatak kao primjer 3.1.3.a). Opet ćemo koristiti formulu 3.1:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}, \quad (|xy| < 1)$$

(vidjeti str.32).
Pokušajmo opći član sume prikazati kao desnu stranu gornje jednakosti:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{1 - (-k^2 - k)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1 - (-k(k + 1))} \\
&= \operatorname{arctg} \frac{(k + 1) + (-k)}{1 - (k + 1)(-k))} \\
&= \operatorname{arctg}(k + 1) + \operatorname{arctg}(-k).
\end{aligned}$$

Jer je arctg neparna funkcija, slijedi da je opći član sume jednak

$$\operatorname{arctg}(k + 1) - \operatorname{arctg}(k) = \Delta(\operatorname{arctg}(k)).$$

Sada lako možemo izračunati traženu sumu:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} &= \sum_{k=0}^{n} \Delta(\operatorname{arctg}(k)) = \operatorname{arctg}(k) \Big|_0^{n+1} \\
&= \operatorname{arctg}(n + 1) - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg}(n + 1) - 0 \\
&= \operatorname{arctg}(n + 1).
\end{aligned}$$

# Poglavlje 4

# Zbrojevi s elementima kombinatorike

U ovom ćemo dijelu dati nekoliko primjera konačnih suma s elementima kombinatorike iz [5].

**Definicija 4.0.1.** *Neka je $S$ neki $n$-člani skup i $k \leq n$. Svaki podskup koji se sastoji od $k$ različitih elemenata iz $S$ naziva se* ***kombinacija bez ponavljanja k-tog razreda od n elemenata****.*

Broj takvih kombinacija bez ponavljanja, odnosno broj $k$-članih podskupova od $n$-članog skupa, je $C_n^k = \binom{n}{k}$, pri čemu je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

binomni koeficijent. On se može prikazati i pomoću padajuće faktorijelne potencije kao

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!},$$

što omogućuje generalizaciju binomnih koeficijenata kada je $n$ proizvoljan realan broj.

U sljedećoj tablici imamo neka svojstva binomnih koeficijenata [1]:

| Svojstva binomnih koeficijenata | |
|---|---|
| simetrija | $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ |
| apsorpcija/ekstrakcija | $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$ |
| adicijski teorem | $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ |
| gornja negacija | $\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{k-n-1}{k}$ |
| trinomna revizija | $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ |
| binomni teorem | $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}, n \in \mathbb{N}_0$ |
| paralelna sumacija | $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$ |
| gornja sumacija | $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, m, n \geq 0$ |
| Vandermondeova konvolucija | $\sum_{k}\binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}, m, n \in \mathbb{Z}$ |

**Primjer 4.0.2.** *Koliko je ukupno podskupova n-članog skupa? [5, 4.1.]*

*Rješenje.* Znamo da je broj $k$-članih podskupova $n$-članog skupa jednak $\binom{n}{k}$ pa samo moramo zbrojiti brojeve podskupova za sve $0 \leq k \leq n$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}.$$

Po binomnoj formuli vrijedi

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Uvrštavajući $a = b = 1$ očito slijedi da je naša tražena suma jednaka $(1+1)^n = 2^n$. To je očekivano jer smo broj ukupnih podskupova mogli prebrojati i tako da svakom elementu $n$-članog skupa pridružimo ili 1 ili 0 ovisno o tome pojavljuje li se u nekom podskupu ili ne. S obzirom da za svaki od $n$ elemenata imamo dvije mogućnosti (0 ili 1), slijedi da je ukupan broj mogućnosti jednak $2^n$.

**Primjer 4.0.3.** *Izračunajmo zbroj [5, 4.3.]*

$$S = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n}.$$

*Rješenje.* Iskoristit ćemo jednakost $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \cdot \frac{n}{\cancel{k}}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = (i = k-1) \\ &= n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

**Primjer 4.0.4.** *Izračunajmo zbroj [5, 4.7.]*

$$S = \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + 2\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + 3\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} + ... + n\frac{\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}}.$$

*Rješenje.*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k}\frac{\frac{n}{\cancel{k}}\cdot\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \cancel{n} \cdot \frac{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+2)(n-k+1)}{\cancel{(k-1)!}}}{\frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+3)(n-k+2)}{\cancel{(k-1)!}}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+2)}(n-k+1)}{\cancel{(n-1)(n-2)(n-3)...(n-k+3)(n-k+2)}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

**Primjer 4.0.5.** *Izračunajmo zbroj [5, 4.18]*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1}.$$

*Rješenje.* Uočimo da za $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}$ izraz $4k+1$ poprima vrijednosti $1, 5, 9, ..., 4n-3$ - iste vrijednosti koje izraz $4(n-k)-3$ poprima za za $k \in \{n-1, n-2, ..., 1, 0\}$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4(n-k)-3} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4n-[4(n-k)-3]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{4n}{4k+3} \\
&= \frac{1}{2}\left[\binom{4n}{1} + \binom{4n}{5} + \binom{4n}{9} + \ldots + \binom{4n}{4n-3} + \binom{4n}{3} + \binom{4n}{7} + \binom{4n}{11} + \ldots + \binom{4n}{4n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{4n}{2k+1} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{4n-1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{4n-1}{2k}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\binom{4n-1}{1} + \binom{4n-1}{3} + \ldots + \binom{4n-1}{4n-1} + \binom{4n-1}{0} + \binom{4n-1}{2} + \ldots + \binom{4n-1}{4n-2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{4n-1}\binom{4n-1}{k} = \frac{1}{2}\cdot 2^{4n-1} = 2^{4n-2}.
\end{aligned}$$

**Primjer 4.0.6.** *Izračunajmo zbroj [5, 4.26.]*

$$S = \frac{2}{1}\binom{n}{0} + \frac{2^2}{2}\binom{n}{1} + \frac{2^3}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{2^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}.$$

*Rješenje.* Uvedimo funkciju

$$f(t) = (1+t)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}t^2 + \ldots + \binom{n}{n}t^n.$$

Integriranjem član po član dobivamo

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \binom{n}{0}\frac{x}{1} + \binom{n}{1}\frac{x^2}{2} + \binom{n}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

S druge strane, integriranjem $(1+x)^n$ dobivamo

$$\int_0^x (1+t)^n dt = \frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}.$$

Izjednačavanjem slijedi da je

$$\binom{n}{0}\frac{x}{1} + \binom{n}{1}\frac{x^2}{2} + \binom{n}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

Sada je očito da uvrštavanjem $x = 2$ na lijevoj strani dobivamo zadani izraz pa je tražena suma jednaka

$$S = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

**Primjer 4.0.7.** *Odredite funkciju izvodnicu za niz* $a_n = \binom{2n}{n}$*. [9, str.183., pr.7]*

*Rješenje.* Gledamo formalni red potencija

$$\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n.$$

Željeli bi primijeniti binomnu formulu. Zapišimo zadani binomni koeficijent drugačije:

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{(2n)!}{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}\cdot n!} = 2^n\cdot\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{4}\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot\cancel{2n}}{\cancel{2}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{6}\cdot\ldots\cdot\cancel{2n}\cdot n!}\\
&= 2^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!} = 2^n\cdot(-1)^n\cdot\frac{(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(-2n+1)}{n!}\\
&= 2^n\cdot(-1)^n\cdot 2^n\cdot\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdot\ldots\cdot(-n+\frac{1}{2})}{n!}\\
&= (-4)^n\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\\
&= (-4)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{\underline{n}}}{n!} = (-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}.
\end{aligned}$$

Sada ispred binomnog koeficijenta imamo $(-4)^n$ što nam daje ideju da probamo raspisati po binomnoj formuli izraz $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$:

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n\geq 0}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n = \sum_{n\geq 0}(-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n.$$

po gore dokazanoj jednakosti binomnih koeficijenata. Dakle, tražena funkcija izvodnica je

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

# Poglavlje 5

# Razni primjeri konačnih zbrojeva

Izdvajamo još nekoliko zadataka:

**Primjer 5.0.1.** *Odredite zbroj prvih n neparnih brojeva metodom konačnih diferencija.*

Opći član niza je $2k-1$, a tražimo zbroj $1+3+5+...+2n-1$ za prirodne brojeve $n$. Uočimo da je

$$k^2-(k-1)^2 = k^2-(k^2-2k+1) = 2k-1$$

upravo naš opći član niza, s time da je

$$k^2-(k-1)^2 = \Delta((k-1)^2).$$

Stoga je

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}\Delta((k-1)^2) = (k-1)^2 \Big|_1^{n+1} = (n+1-1)^2-(1-1)^2 = n^2.$$

**Primjer 5.0.2.** *Izračunajte zbroj [5, 3.2.]:*

$$S = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-3)(2n-1)}+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

*Rješenje.* Budući da je razlika faktora u svakom nazivniku 2, množenjem obje strane sa 2 dobivamo nešto što se može iskoristiti

$$2S = \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2}{(2n-3)(2n-1)}+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)},$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}
2S &= \frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{(2n-1)-(2n-3)}{(2n-3)(2n-1)} + \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{2n+1} \\
&= \frac{2n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Konačno je

$$S = \frac{n}{2n+1}.$$

**Primjer 5.0.3.** *Za zadanu funkciju* $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x+2}$*, izračunajte zbroj [5, 6.36.]:*

$$f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right).$$

Označimo traženu sumu sa $S$:

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

i zapišimo je obrnutim redom:

$$S = f\left(\frac{n}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{1}{n}\right) + f(0) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n-k}{n}\right).$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n-k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{n-k}{n}\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[ \frac{4^{\frac{k}{n}}}{4^{\frac{k}{n}}+2} + \frac{4^{\frac{n-k}{n}}}{4^{\frac{n-k}{n}}+2} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[ \frac{4^{\frac{k}{n}}}{4^{\frac{k}{n}}+2} \cdot \frac{4^{\frac{n-k}{n}}}{4^{\frac{n-k}{n}}} + \frac{4^{\frac{n-k}{n}}}{4^{\frac{n-k}{n}}+2} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[ \frac{4}{4+2\cdot 4^{\frac{n-k}{n}}} + \frac{4^{\frac{n-k}{n}}}{4^{\frac{n-k}{n}}+2} \right] = \sum_{k=0}^{n} \left[ \frac{2}{2+4^{\frac{n-k}{n}}} + \frac{4^{\frac{n-k}{n}}}{4^{\frac{n-k}{n}}+2} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2+4^{\frac{n-k}{n}}}{2+4^{\frac{n-k}{n}}} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1
\end{aligned}$$

Sada lako slijedi
$$S = \frac{n+1}{2}.$$

**Primjer 5.0.4.** *Izračunajte sumu [5, 3.3.]:*
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3 - k}.$$

Očito je
$$\frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{k(k+1)(k-1)}.$$
Rastavimo na parcijalne razlomke:
$$\frac{1}{k(k+1)(k-1)} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k} + \frac{C}{k+1} = \frac{A(k^2+k) + B(k^2-1) + C(k^2-k)}{(k-1)k(k+1)}.$$
Odavde slijedi
$$(A+B+C)k^2 + (A-C)k - B = 1.$$
Dobivamo sustav
$$A + B + C = 0,$$
$$A - C = 0,$$
$$B = -1.$$
Rješenja su $A = C = \dfrac{1}{2}$ i $B = -1$ pa je
$$\frac{1}{k(k+1)(k-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right);$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3-k} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \ldots\right.\\ &\quad \left.\ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

U predzadnjem su se koraku nakon teleskopiranja međusobno poništili svi članovi osim prva dva i zadnja dva.

**Primjer 5.0.5.** *Izračunajte sumu [5, 4.6.]:*

$$S = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}.$$

Koristeći svojstva binomnih koeficijenata imamo

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{0} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\right] - \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{0} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

**Primjer 5.0.6.** *Izračunajte sumu [5, 6.19.]:*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k}).$$

Imamo redom

$$\begin{aligned} S &= \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \ln\left(\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}\right) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

**Primjer 5.0.7.** *Izračunajte sumu [5, 4.2.]:*

$$S = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

$$S = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

Pođimo od

$$(1-1)^n = 0. \tag{5.1}$$

S druge strane, po binomnom teoremu je

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}. \tag{5.2}$$

Sada iz dvije prethodne jednakosti odmah slijedi da je $S = 0$.

*Napomena:* Primjetimo da je

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots = 0,$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^n,$$

a iz toga slijedi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.$$

**Primjer 5.0.8.** *Odredite funkciju izvodnica za niz*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k},$$

*i pomoću nje izračunajte $a_n$. [9, str.185., pr.9]*

Neka je $A(x)$ odgovarajuća funkcija izvodnica. Imamo

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{k\geq 0} 2^{-k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{2k} 2^n x^n = \sum_{k\geq 0} 2^{-k}(2x)^{-k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{2k} (2x)^{n+k} \\ &= \sum_{k\geq 0} 2^{-k}(2x)^{-k} \frac{(2x)^{2k}}{(1-2x)^{2k+1}} = \sum_{k\geq 0} \cancel{4^{-k}} x^{-k} \frac{\cancel{4^{k}} \cdot x^{2k}}{(1-2x)^{2k}} \cdot \frac{1}{1-2x} \\ &= \frac{1}{1-2x} \sum_{k\geq 0} \left( \frac{x}{(1-2x)^2} \right)^k = \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{(2x-1)^2}} = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)}. \end{aligned}$$

Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-x}.$$

Odavde se lako dobije da je $A = \frac{2}{3}$, a $B = \frac{1}{3}$ pa je

$$A(x) = \frac{2}{3(1-4x)} + \frac{1}{3(1-x)}.$$

Dakle imamo

$$A(x) = \frac{2}{3}\sum_{n\geq 0}(4x)^n + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} x^n,$$

pa će $a_n$ biti koeficijent uz $x^n$ u raspisu gornjeg izraza, odnosno

$$a_n = \frac{2}{3}\cdot 4^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(2^{2n+1} + 1).$$

# Poglavlje 6

# Zaključak

Iako se računanje konačnih suma može činiti jednostavno, zadaci se često mogu zakomplicirati. Ipak, na raspolaganju imamo mnoštvo metoda koje nam mogu pomoći u računu, a daju nam i uvid u rješavanje raznih rekurzivnih problema te u neka područja matematike (npr. konačni račun) s kojima se rijetko srećemo.

S obzirom da se u matematici često susrećemo sa sumama, kako bi se mogli njima uspješno koristili potrebno nam je znanje određenih matematičkih alata. U radu su obrađene opće metode za izračun suma uz primjere. Naslućivanje rješenja i dokaz indukcijom je možda najprirodnija metoda, no nije najefikasnija u složenijim zadacima. Stoga smo proučili i razne druge metode, od poznatijih poput rastava na parcijalne razlomke i teleskopiranja, do neobičnijih poput metode konačnih diferencija. U mnogim problemima postoje veze između suma i rekurzija pa određene sume možemo izračunati služeći se funkcijama izvodnicama. Najprimjerenija metoda ovisi od zadatka do zadatka i općenito nema optimalne metode kojom bi se mogao riješiti svaki zadatak. Inuticija potrebna za brz pronalazak korisne metode dolazi s iskustvom i poznavanjem raznih alata koji su nam dostupni, a nadamo se da će ovaj rad u tome pomoći.

# Bibliografija


[1] *Konkretna matematika 1, interne vježbe, PMF-MO*.

[2] *Mathematical explanation for the Repertoire Method*, `https://math.stackexchange.com/questions/1017498/mathematical-explanation-for-the-repertoire-method/1023510`.

[3] *Vježbe metodike nastave matematike 3, PMF-MO*.

[4] L. Graham, D.E. Knuth i O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[5] A. Marić, *Konačni zbrojevi - zbirka riješenih zadataka*, Element, 1998.

[6] I. Nakić, *Skripta s predavanja za kolegij Diskretna matematika*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kidm/`, 2011.

[7] E. Rakovac, *Opće metode rješavanja suma*, 2001.

[8] M. Režak, *Funkcije izvodnice u kombinatorici*, 2019.

[9] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

# Sažetak

U ovom smo radu proučili neke metode za računanje konačnih suma. Započeli smo s dobro poznatim primjerima aritmetičkog i geometrijskog niza. Kao daljnju inspiraciju za traženje metoda računanja konačnih suma obradili smo par rekurzivnih problema - Hanojske tornjeve i dijeljenje ravnine pravcima, a zatim smo opisali metodu repertoara. Naglasak smo stavili na funkcije izvodnice koje su ovdje posebno korisne. Zatim su obrađene neke metode za računanje suma: naslućivanje rješenja uz dokaz indukcijom, rastav na parcijalne razlomke i teleskopiranje, metoda perturbacije, zamjena sume integralom, ekspanzija i kontrakcija i korištenje konačnih diferencija. Konačno, vidjeli smo i primjere nekih kombinatornih suma koje uključuju binomne koeficijente. Na kraju rada smo riješili još nekoliko primjera sa konačnim sumama koristeći razne metode spomenute u radu.

# Summary

In this thesis we analysed some of the methods for calculating finite sums. We started with the well-known examples of arithmetic and geometric sequences. As further inspiration for finding the methods for calculating finite sums, we also analysed a few recursive problems – the Towers of Hanoi and plane division by lines, and we described the Repertoire Method. Special emphasis was put on generating functions which proved to be especially useful here. In addition, we analysed some other methods for calculating finite sums: guessing the result and proving by induction, partial fractions decomposition and telescoping, the perturbation method, interchanging sums and integrals, expansion and contraction and the method of finite differences. Finally, we presented some examples of combinatorial sums which include binomial coefficients. In conclusion of this thesis, a few more examples of finite sums were solved using the above-mentioned methods.

# Životopis

Rođena sam u Slavonskom Brodu gdje sam završila osnovnu školu i Prirodoslovno-matematičku gimnaziju Matija Mesić. Zatim sam upisala preddiplomski studij Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu na odsjeku za Matematiku. Također sam završila preddiplomski studij poslovne informatike na veleučilištu Vern. Aktivno govorim engleski jezik. Nakon stjecanja akademskog naziva sveučilišne prvostupnice edukacijske matematike počinjem raditi u struci. Tokom rada u školi sudjelovala sam u raznim projektima i stručnim usavršavanjima.