SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dijana Jurić

SPIRALNA SLIČNOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, ožujak, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Juraju Šiftaru na pomoći pri izradi ovog diplomskog rada. Hvala svim profesorima koji su me pratili na mom putu i hvala mojoj obitelji na podršci tijekom cijelog studija.

Sadržaj

Uvod

Spiralna sličnost je preslikavanje euklidske ravnine zadano kao kompozicija homotetije i rotacije sa zajedničkim centrom. U ovom radu proučit ćemo osnovna svojstva spiralne sličnosti te prikazati primjene tog preslikavanja u nekim složenijim zadacima.

Svi pojmovi i teoremi u ovom radu odnose se na euklidsku planimetriju, dakle na geometriju euklidske ravnine E^2. Osnovni pojmovi su točka i pravac, pri čemu ćemo pravce smatrati skupovima točaka i podrazumijevati poznavanje osnovnih aksioma i činjenica te geometrije. Preslikavanja euklidske ravnine na sebe ovdje će redovito biti bijekcije, zadane na skupu točaka ravnine. Time će biti inducirana i preslikavanja na pravcima, budući da će u pravilu biti riječ o kolineacijama, dakle preslikavanjima koja čuvaju kolinearnost pa stoga pravce preslikavaju u pravce. Stoga će biti praktično istaknuti skup točaka, koji ćemo označiti s $\mathcal{T}$.

Služit ćemo se i strukturom vektorskog prostora V^2 uvedenog na uobičajeni način u euklidsku ravninu. Također, za spiralnu sličnost bit će vrlo praktično primijeniti pristup pomoću kompleksne ravnine, identifikacijom točaka euklidske ravnine s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku.

Neke od ključnih tvrdnji odnose se na postojanje i jedinstvenost spiralne sličnosti koja jednu od dviju zadanih dužina preslikava u drugu. Pritom treba posebno razmotriti slučaj podudaranja dviju krajnjih točaka tih dužina, a do izražaja tada dolazi uloga simedijana u trokutu.

Spiralnu sličnost korisno je proučiti, između ostalog, prilikom priprema za različita natjecanja, posebno za Međunarodnu matematičku olimpijadu (IMO) budući da se tamo gotovo svake godine pojavi po jedan problem iz područja geometrije u kojem upravo znanje o spiralnoj sličnosti može olakšati postupak rješavanja. Dakako, osim same spiralne sličnosti potrebno je dobro poznavanje i brojnih drugih geometrijskih teorema pa je radi potpunosti uvršteno i poglavlje koje obuhvaća Menelajev teorem, Pascalov teorem, inverziju s obzirom na kružnicu i druge potrebne pojmove.

U završnom poglavlju detaljno su izložena rješenja izabranih zadataka s IMO i još nekih uglednih matematičkih natjecanja u svijetu (Japan, Južna Koreja, Iran) iz posljednjih desetak godina.

Poglavlje 1

Sličnosti i izometrije

U ovom kratkom uvodnom poglavlju napravit ćemo pregled definicija nekih poznatih preslikavanja sličnosti euklidske ravnine i njihovih međusobnih relacija. Definirat ćemo spiralnu sličnost te istaknuti kako se to preslikavanje uklapa među ostale sličnosti, u obliku dijagrama - genealoškog stabla. Pritom nećemo ulaziti u strukturu grupa preslikavanja i njihovih podgrupa.

1.1 Poznata preslikavanja sličnosti

Označimo s $\mathcal{T}$ skup točaka euklidske ravnine E^2.

Definicija 1.1. ***Preslikavanje sličnosti*** *ili* ***ekviformno preslikavanje*** *je preslikavanje* $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ *takvo da postoji konstanta* $k > 0$ *(koju zovemo koeficijent sličnosti) takva da je* $d(f(A), f(B)) = k \cdot d(A, B)$ *za sve točke* A *i* B *ravnine* E^2.

Definicija 1.2. ***Izometrija*** *ravnine je preslikavanje* $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ *takvo da vrijedi* $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ *za sve točke* A *i* B *ravnine* E^2.

Izometrija je očito sličnost s koeficijentom 1.

Definicija 1.3. *Neka je* p *pravac koji leži u ravnini* E^2. ***Osna simetrija*** *ravnine* E^2 *obzirom na pravac* p *je preslikavanje* $s_p : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ *definirano na sljedeći način:*

- *Ako je* $T \in p$ *onda je* $s_p(T) = T$.
- *Ako* $T \notin p$ *onda je pravac* p *simetrala dužine* $\overline{TT'}$, *gdje je* $T' = s_p(T)$.

Osna simetrija ravnine $s_p : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ je izometrija ravnine E^2 kojoj su sve točke pravca p fiksne ili je identiteta i_m.

Definicija 1.4. *Neka je $\vec{a}$ vektor iz prostora V^2.* ***Translacija*** $t_{\vec{a}} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ *je izometrija ravnine E^2 takva da je $t_{\vec{a}}(T) = T'$, $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$.*

Definicija 1.5. ***Rotacija*** *ravnine E^2 oko čvrste točke O (središta rotacije) za kut α (kut rotacije) u pozitivnom smjeru je preslikavanje $r : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ definirano na sljedeći način:*

- $r(O) = O$.
- *Ako je $T \neq O$ onda vrijedi $r(T) = T'$ tako da je $|OT| = |OT'|$ i $\angle TOT' = \alpha$.*

Rotacija $r : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ je izometrija ravnine E^2 čija je jedina fiksna točka centar O ili je identiteta i_m.

Definicija 1.6. *Neka je O čvrsta točka ravnine E^2.* ***Centralna simetrija*** *ravnine E^2 s obzirom na točku O je preslikavanje $s_O : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ definirano na sljedeći način:*

- $s_O(O) = O$.
- *Ako je $T \neq O$ onda vrijedi $s_O(T) = T'$, gdje je točka O polovište dužine $\overline{TT'}$.*

Centralna simetrija $s_O : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ je rotacija ravnine E^2 oko središta O za kut mjere $180°$ te je ona izometrija ravnine E^2.

Dosad su definirana preslikavanja sličnosti koja su izometrije, to jest čuvaju udaljenost, a time svaki lik preslikavaju u njemu sukladan ili kongruentan lik. Sad ćemo definirati preslikavanja koja preslikavaju lik u njemu sličan lik, tj. preslikavanja koja čuvaju kutove i omjer pripadnih udaljenosti (koeficijent sličnosti).

Definicija 1.7. ***Dilatacija*** *je preslikavanje koje svaki pravac ravnine preslikava u njemu paralelan pravac.*

Dilatacija je preslikavanje sličnosti koje čuva orijentaciju. Podsjetimo da je svaki pravac po definiciji sam sebi paralelan. Uočimo još da je translacija dilatacija koja ili nema fiksnih točaka ili je identiteta, ako je vektor translacije $\vec{0}$.

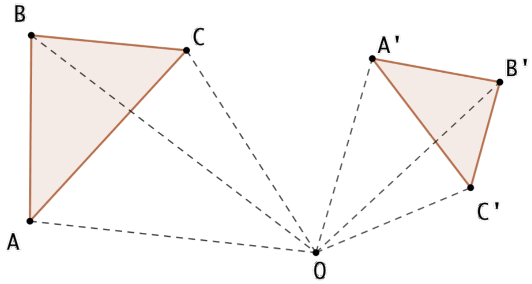
Definicija 1.8. *Neka je O čvrsta točka ravnine E^2 i $k \neq 0$ realan broj. Za točku $T \in \mathcal{T}$ neka je T' točka na pravcu OT takva da vrijedi $|OT'| = |k| \cdot |OT|$.* ***Homotetija*** *ili* ***centralna dilatacija*** *je preslikavanje $h : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ definirano s $h(T) = T'$ na sljedeći način:*

- *za $k > 0$, točke T i T' leže s iste strane točke O,*
- *za $k < 0$, točke T i T' leže sa suprotnih strana točke O.*

Točka O naziva se središte homotetije, a broj k koeficijent homotetije.

1.2 Definicija spiralne sličnosti

Definicija 1.9. ***Spiralna sličnost*** *s centrom u točki O je kompozicija homotetije i rotacije sa zajedničkim centrom O.*



Slika 1.1: Spiralna sličnost oko točke O koja preslikava trokut ABC u trokut $A'B'C'$

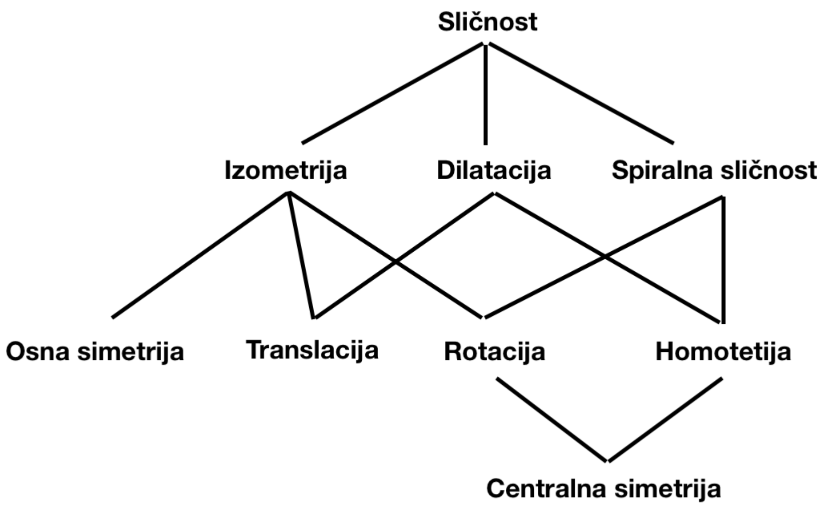
Uočimo da homotetija i rotacija u kompoziciji komutiraju pa je svejedno koji redoslijed navedemo u ovoj definiciji.
Spiralna sličnost očito je potpuno zadana svojim centrom, kutom rotacije i koeficijentom homotetije.

1.3 Usporedba preslikavanja sličnosti

Svi međuodnosi navedenih preslikavanja sličnosti prikazani su u ovom dijagramu oblika genealoškog stabla na slici 1.2.

Znamo da su osna simetrija, translacija, rotacija i centralna simetrija izometrije. Uočimo da je translacija također i dilatacija te da dilatacija može biti ili translacija ili homotetija.

Također, centralna simetrija s obzirom na točku O je rotacija oko središta O za kut mjere $180°$ i homotetija s koeficijentom $k = -1$. Uočimo da su rotacija i homotetija posebni slučajevi spiralne sličnosti kada je koeficijent sličnosti $k = 1$, odnosno kada je mjera kuta rotacije jednaka $0°$.



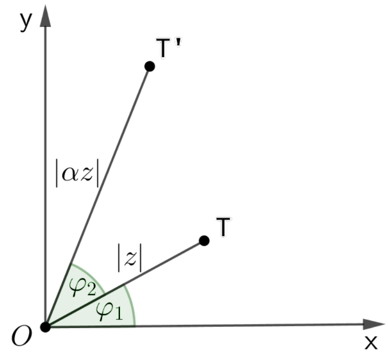
Slika 1.2: Genealoško stablo preslikavanja sličnosti

Poglavlje 2

Osnovni teoremi o spiralnoj sličnosti

U nastavku ćemo koristiti geometrijski prikaz kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini jer takavim prikazom možemo praktično opisati spiralnu sličnost.

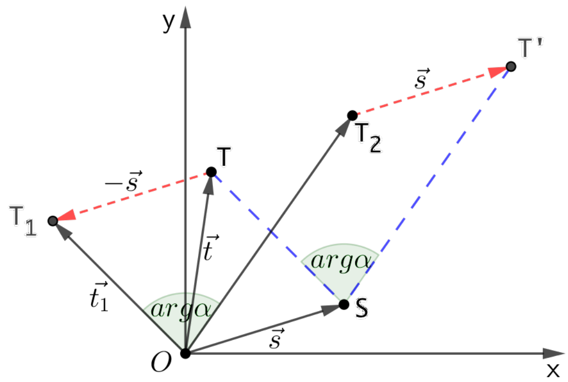
Neka je točka $T(x_1, y_1)$ geometrijska interpretacija kompleksnog broja $z = x_1 + y_1 i$ i neka je zadan kompleksni broj $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha = x_2 + y_2 i$. Trigonometrijski zapisi danih kompleksnih brojeva su $z = |z| \cdot (cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ i $\alpha = |\alpha| \cdot (cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$. Uočimo da geometrijska interpretacija njihovog umnoška $z\alpha = |z\alpha| \cdot [cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ odgovara spiralnoj sličnosti oko ishodišta O koja preslikava točku T u T'. Tada je $|\alpha|$ koeficijent sličnosti, a $\varphi_2 = \arg \alpha$ kut rotacije.



Slika 2.1: Spiralna sličnost oko ishodišta kompleksne ravnine O

Dakle, ako je centar O spiralne sličnosti smješten u ishodištu kompleksne ravnine onda je ta spiralna sličnost opisana umnoškom kompleksnim brojem. Takva spiralna sličnost ima oblik $z \mapsto \alpha z$, gdje je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|\alpha|$ predstavlja koeficijent sličnosti, a $\arg \alpha$ je kut rotacije.

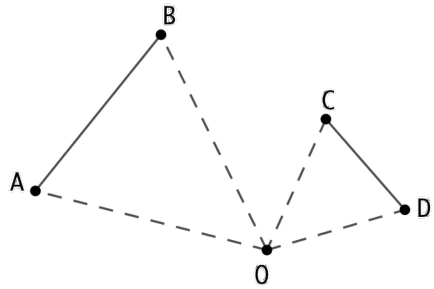
Pogledajmo slučaj kada centar spiralne sličnosti nije smješten u ishodištu kompleksne ravnine nego u točki S. Neka su točke S i T geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva $s = x_0 + y_0 i$ s pripadnim vektorom $\vec{s}$ i $t = x_1 + y_1 i$ s pripadnim vektorom $\vec{t}$ i neka je zadan kompleksni broj $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha = x_2 + y_2 i$ takav da je $|\alpha|$ koeficijent sličnosti, a $\arg \alpha$ kut rotacije.
Da bi odredili točku T' koja je spiralno slična točki T, prvo ćemo translatirati centar spiralne sličnosti S u ishodište O za vektor $-\vec{s}$. Zatim translatiramo točku T za vektor $-\vec{s}$ u točku T_1 koja je geometrijska interpretacija kompleksnog broja t_1 te uvedemo oznaku $\vec{t_1} = \overrightarrow{OT_1}$. Iz slike 2.2 uočimo da vrijedi $\vec{t_1} = \vec{t} - \vec{s}$, odnosno da su koordinate točke T_1 dane s $t_1 = t - s$. Znamo da spiralno slična slika točke T_1 s obzirom na ishodište O ima koordinate $\alpha \cdot t_1 = \alpha(t - s)$ te je označimo s T_2. Sad možemo zaključiti da spiralno slična slika točke T s obzirom na centar S ima koordinate $s + \alpha(t - s)$ te je označimo s T'.



Slika 2.2: Spiralna sličnost oko centra S

Dakle, ako centar O spiralne sličnosti nije smješten u ishodištu kompleksne ravnine nego u nekoj drugoj točki, primjerice u točki koja je geometrijski prikaz kompleksnog broja z_0, tada spiralna sličnost u kompleksnoj ravnini ima oblik $z \mapsto z_0 + \alpha(z - z_0)$ gdje je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|\alpha|$ predstavlja koeficijent sličnosti, a $\arg \alpha$ je kut rotacije.

Teorem 2.1. *Neka su dane četiri točke A, B, C i D u istoj ravnini takve da su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ dvije različite dužine i četverokut $ABCD$ nije paralelogram. Tada postoji jedinstvena spiralna sličnost koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$.*



Slika 2.3: Spiralna sličnost koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$

Prvi dokaz.
Neka su a, b, c, d i z_0 pripadni kompleksni brojevi točaka A, B, C, D i O. Znamo da spiralna sličnost ima oblik $\Psi(z) = z_0 + \alpha(z - z_0)$, gdje je $|\alpha|$ koeficijent sličnosti i arg α kut rotacije. Želimo sad naći α i z_0 takve da vrijedi $\Psi(a) = c$ i $\Psi(b) = d$. Riješimo sljedeći sustav:

$$z_0 + \alpha(a - z_0) = c, \qquad z_0 + \alpha(b - z_0) = d. \tag{2.1}$$

Oduzimanjem jednadžbi dobivamo:

$$\alpha(a - z_0) - \alpha(b - z_0) = c - d$$

$$\alpha = \frac{c - d}{a - b}$$

Uvrštavanjem dobivenog broja α u prvu jednadžbu (2.1) dobivamo:

$$\begin{aligned} z_0 + \frac{c - d}{a - b}(a - z_0) &= c \qquad \Big/ \cdot (a - b) \\ (c - d)(a - z_0) &= (c - z_0)(a - b) \\ ac - ad - cz_0 + dz_0 &= ac - az_0 - bc + bz_0 \\ z_0 &= \frac{ad - bc}{a - b - c + d} \end{aligned}$$

Budući da $ABCD$ nije paralelogram i $A \neq B$ vrijedi $a + d \neq b + c$ i $a \neq b$. Time je pokazano da su z_0 i α dobro definirani. Također, dobiveno je točno jedno rješenje za z_0 i α pa zaključujemo da postoji jedinstvena spiralna sličnost koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$. □

Drugi dokaz.

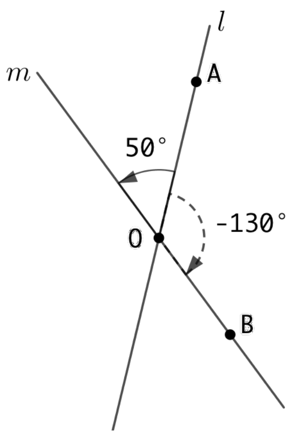
Budući da je $\triangle AOB \sim \triangle COD$ vrijedi $\dfrac{c - z_0}{a - z_0} = \dfrac{d - z_0}{b - z_0}$ što implicira sljedeće:

$$\begin{aligned}\frac{c - z_0}{a - z_0} &= \frac{d - z_0}{b - z_0} \qquad \Big/ \cdot (a - z_0)(b - z_0) \neq 0 \\ z_0(-a - d + c + b) &= bc - ad \\ z_0 &= \frac{ad - bc}{a - b - c + d}\end{aligned}$$

Ponovno, budući da vrijedi $a - b - c + d \neq 0$ postoji centar O koji je potpuno određen točkama A, B, C i D pa je stoga takva spiralna sličnost jedinstvena. □

Sad kada znamo da je spiralna sličnost jedinstvena, pokazat ćemo kako konstruirati centar spiralne sličnosti. U sljedećem teoremu koristit će se pojmovi usmjerenog kuta i koncikličkih točaka pa ćemo te pojmove prvo definirati.

Definicija 2.2. *Neka su dana dva pravca l i m koja se sijeku u točki O. Tada za bilo koju točku A na pravcu l i bilo koju točku B na pravcu m možemo definirati* ***usmjereni kut*** *$\angle AOB$ kao mjeru kuta za koji trebamo rotirati AO u pozitivnom smjeru kako bi bio paralelan s BO, odnosno $\angle AOB = \angle(AO, BO)$.*

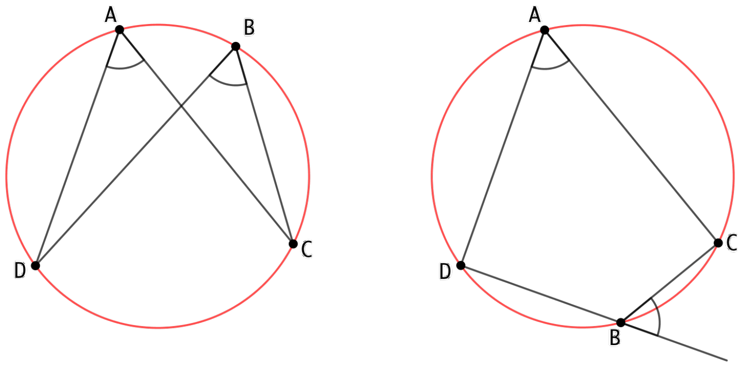


Slika 2.4: Usmjereni kut $\angle AOB$

Uočimo da vrijedi $\angle(AO, BO) + \angle(BO, AO) = 180°$ pa se stoga mjere usmjerenih kutova računalu modulo 180°.

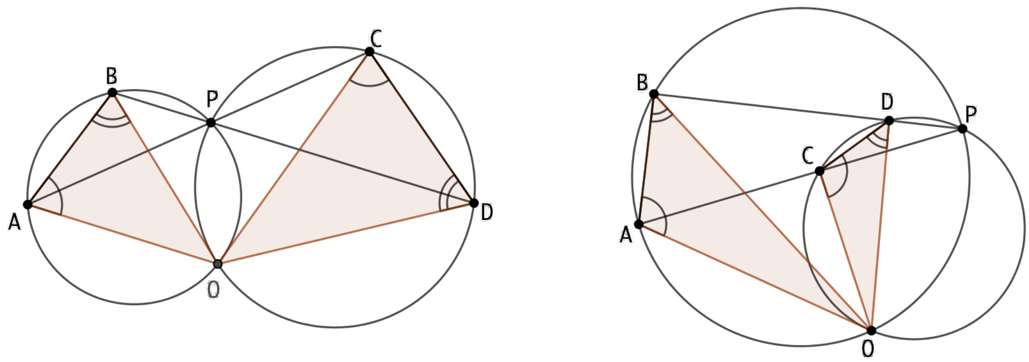
Definicija 2.3. *Točke koje pripadaju istoj kružnici zovemo* ***konciklične točke****.*

Definicija 2.4. *Točke A, B, C i D su konciklične ako i samo ako je $\angle DAC = \angle DBC$, gdje su dani kutovi usmjereni.*



Slika 2.5: Konciklične točke A, B, C i D

Teorem 2.5. *Neka su dane dvije dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ te neka se pravci na kojima one leže sijeku u točki P. Kružnice (ABP) i (CDP) sijeku se ponovno u točki O takvoj da je $O \neq P$. Tada je točka O centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$.*



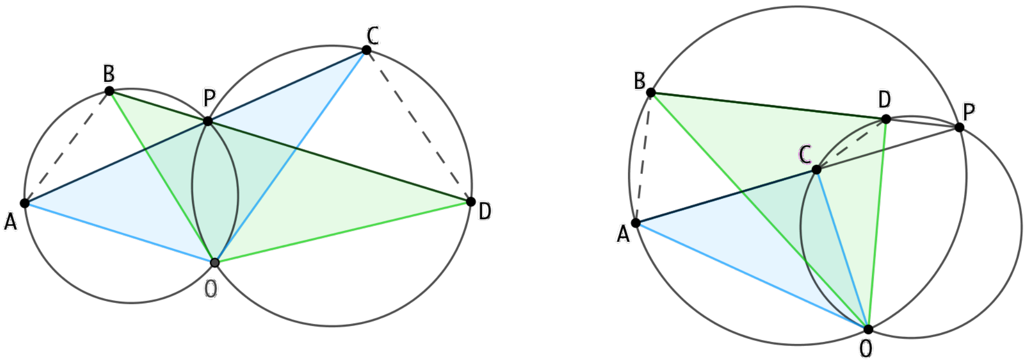
Slika 2.6: Različite konfiguracije spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$

Dokaz.
Iz uvjeta $O \neq P$ jasno je da četverokut $ABCD$ ne može biti paralelogram. Budući da s danim podacima postoji više mogućih konfiguracija spiralne sličnosti, koristit ćemo usmjerene kutove kako bi mogli imati jedinstveni dokaz koji se odnosi na sve moguće konfiguracije.

Točke A, B, P i O su konciklične pa vrijedi $\angle OAB = \angle OPD$. Točke C, D, O i P su također konciklične pa vrijedi $\angle OPD = \angle OCD$. Analogno zaključujemo da vrijedi $\angle ABO = \angle APO = \angle CDO$.
Dakle, budući da vrijedi $\angle OAB = \angle OCD$ i $\angle ABO = \angle CDO$ prema KKK teoremu o sličnosti trokuta zaključujemo da su trokuti AOB i COD slični i da imaju istu orijentaciju. Prema tome, točka O je centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$.

□

Teorem 2.6. *Ako je O centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$, tada je O također i centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AC}$ u $\overline{BD}$.*



Slika 2.7: Različite konfiguracije spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AC}$ u $\overline{BD}$

Dokaz.
Ako je O centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$, tada prema teoremu 2.5 vrijedi $\triangle AOB \sim \triangle COD$ iz čega slijedi:

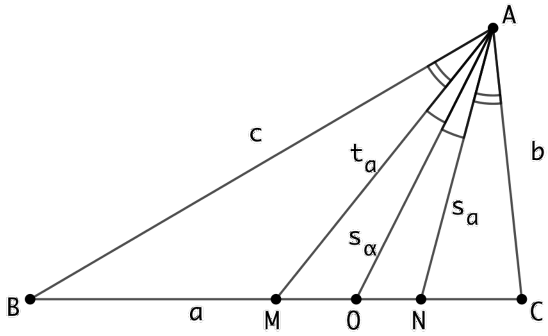
$$\angle BOA = \angle DOC \quad i \quad \frac{|AO|}{|CO|} = \frac{|OB|}{|OD|}.$$

Uočimo da vrijedi $\angle BOA + \angle COB = \angle DOC + \angle COB$, odnosno $\angle COA = \angle DOB$.

Iz $\angle COA = \angle DOB$ i $\dfrac{|AO|}{|CO|} = \dfrac{|OB|}{|OD|}$ zaključujemo da su trokuti AOC i BOD slični i da imaju istu orijentaciju. Prema tome, točka O je centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$ i $\overline{AC}$ u $\overline{BD}$. □

Iz prethodna dva teorema uočavamo da spiralne sličnosti uvijek dolaze u paru pa kod rješavanja zadataka možemo odlučiti koji ćemo par dužina promatrati kako bi se došlo do rješenja.
U sljedećim teoremima koristit ćemo pojam simedijane trokuta pa ga prvo definirajmo.

Definicija 2.7. *Neka je dan trokut ABC. Neka je točka M polovište dužine $\overline{BC}$ tako da je $\overline{AM}$ težišnica trokuta ABC. Neka se točka N nalazi na $\overline{BC}$ tako da vrijedi $\angle BAM = \angle CAN$. Tada je $\overline{AN}$* ***simedijana trokuta*** *ABC.*



Slika 2.8: Simedijana $\overline{AN}$ trokuta ABC

Drugim riječima, možemo reći da je simedijana trokuta pravac koji je osnosimetričan težišnici trokuta u odnosu na simetralu unutarnjeg kuta iz istog vrha. Pod simedijanom trokuta najčešće se podrazumijeva odsječak tog pravca od vrha trokuta kroz koji simedijana prolazi do presječne točke s nasuprotnom stranicom trokuta.
U sljedećoj lemi pokazat ćemo jedno bitno svojstvo simedijane, odnosno još jedan način definiranja pojma simedijane.

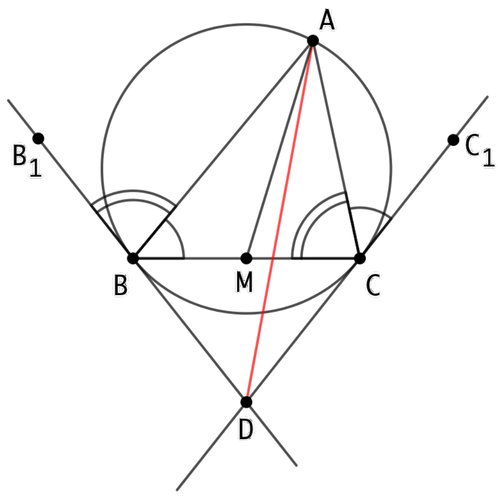
Lema 2.8. *Neka je ABC trokut i k njemu opisana kružnica. Neka se tangente na kružnicu k u točkama B i C sijeku u točki D. Tada se $\overline{AD}$ podudara sa simedijanom trokuta ABC iz vrha A.*

Dokaz.
Neka osnosimetrična slika pravca AD s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$ siječe $\overline{BC}$ u točki M. Da bi dokazali tvrdnju leme trebamo pokazati da je točka M polovište dužine $\overline{BC}$.
Koristeći sinusov teorem u trokutima $\triangle ABM$ i $\triangle ACM$ dobivamo:

$$\frac{|BM|}{sin\angle BAM} = \frac{|AM|}{sin\angle ABC} \quad i \quad \frac{|MC|}{sin\angle CAM} = \frac{|AM|}{sin\angle ACB}.$$

Slijedi:

$$\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{|AM|\dfrac{sin\angle BAM}{sin\angle ABC}}{|AM|\dfrac{sin\angle CAM}{sin\angle ACB}} = \frac{sin\angle BAM sin\angle ACB}{sin\angle ABC sin\angle CAM}. \tag{2.2}$$



Slika 2.9: Simedijana AD trokuta ABC

Označimo točke B_1 i C_1 na danim tangentama BD i CD kao što je prikazano na slici 2.9. Iz poznate činjenice da je kut između tangente kružnice i tetive koja sadržava dirałište tangente jednak obodnom kutu nad tom tetivom slijedi:

$$\angle ABC = \angle ACC_1 \quad i \quad \angle ACB = \angle ABB_1.$$

Uočimo sada da su kutovi $\angle ABC$ i $\angle ACD$ te $\angle ACB$ i $\angle ABD$ suplementarni. Budući da znamo da su sinusi suplementarnih kutova jednaki, vrijedi:

$$sin\angle ABC = sin\angle ACD \quad i \quad sin\angle ACB = sin\angle ABD.$$

Sada iz (2.2) slijedi:

$$\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{sin\angle BAM}{sin\angle ACD}\frac{sin\angle ABD}{sin\angle CAM}. \tag{2.3}$$

Budući da je pravac AM osnosimetrična slika pravca AD s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$, vrijedi $\angle BAM = \angle CAD$ i $\angle CAM = \angle BAD$. Sada iz (2.3) slijedi:

$$\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{sin\angle CAD}{sin\angle ACD}\frac{sin\angle ABD}{sin\angle BAD}. \tag{2.4}$$

Primjenjujući sinusov teorem na $\triangle ACD$ i $\triangle ABD$ dobivamo:

$$\frac{|CD|}{sin\angle CAD} = \frac{|AD|}{sin\angle ACD}, \quad \frac{|AD|}{sin\angle ABD} = \frac{|BD|}{sin\angle BAD}.$$

Uočimo da budući da je točka D sjecište dviju tangenti, vrijedi $|BD| = |CD|$. Sada iz (2.4) slijedi:

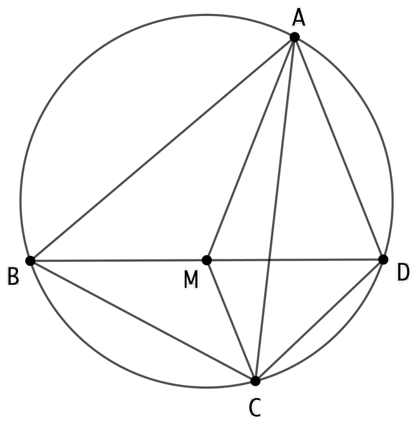
$$\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{|CD|}{|AD|}\frac{|AD|}{|BD|} = 1.$$

Time smo pokazali da je točka M polovište od $\overline{BC}$ te da je AD simedijana trokuta ABC iz vrha A.

□

U nastavku ćemo opisati još jedno korisno svojstvo simedijana trokuta koje će se koristiti u dokazima idućih teorema i u rješavanju zadataka.

Lema 2.9. *Neka je dan trokut ABD i neka se njegova simedijana iz vrha A siječe s njemu opisanom kružnicom u točki C. Tada je AC simedijana trokuta ABD i BCD, a BD je simedijana trokuta ABC i ACD.*



Slika 2.10

Dokaz.
Neka je točka M polovište od $\overline{BD}$.
Budući da je AC simedijana trokuta ABD vrijedi $\angle BAM = \angle CAD$. Iz činjenice da su točke A, B, C i D konciklične slijedi $\angle ABM = \angle ACD$. Sada po KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi $\triangle ABM \sim \triangle ACD$. Vrijedi:

$$\frac{|BE|}{|AC|} = \frac{|BM|}{|CD|},$$

odnosno

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BM|. \tag{2.5}$$

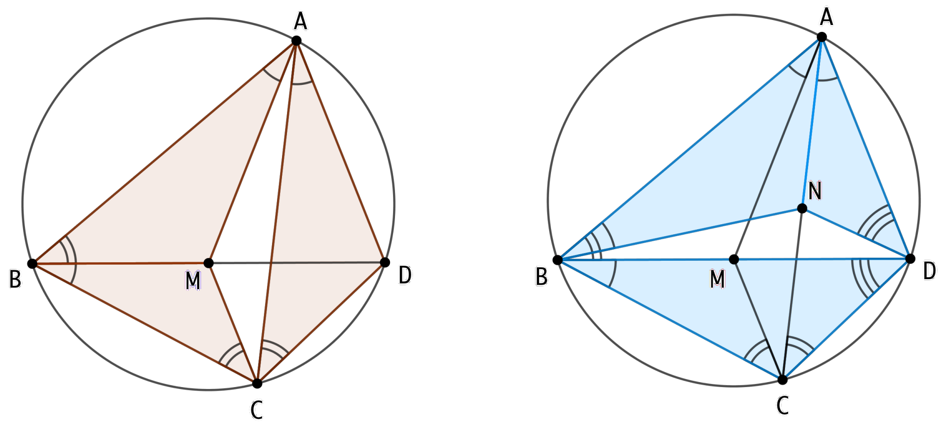
Budući da je četverokut $ABCD$ tetivan, prema Ptolomejevom teoremu vrijedi:

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|. \tag{2.6}$$

Iz jednadžbi (2.5) i (2.6) slijedi:

$$\begin{aligned}
|BC| \cdot |DA| &= |AC| \cdot |BD| - |AC| \cdot |BM| \\
|BC| \cdot |DA| &= |AC| \cdot (|BD| - |BM|) \\
|BC| \cdot |DA| &= |AC| \cdot |DM| = |AC| \cdot |BM|. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BM|}$. Zbog obodnog kuta nad istim lukom vrijedi $\angle CAD = \angle CBM$ pa prema SKS teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle ACD \sim \triangle BCM$. Stoga zaključujemo da vrijedi $\angle ACD = \angle BCM$ te da je AC simedijana trokuta CBD iz vrha C (prva slika 2.11).



Slika 2.11: Simedijane trokuta

Pokažimo sada da je BD simedijana trokuta ABC. Neka je N polovište od $\overline{AC}$. Iz jednadžbi 2.7 slijedi:

$$\begin{aligned}
|BC| \cdot |DA| &= |AC| \cdot |BM| \\
|BC| \cdot |DA| &= 2|AN| \cdot \frac{1}{2}|BD| \\
|BC| \cdot |DA| &= |AN| \cdot |BD|.
\end{aligned}$$

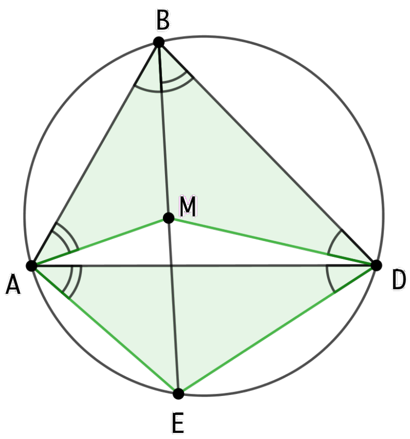
Prema tome vidimo da vrijedi $\dfrac{|BC|}{|AN|} = \dfrac{|BD|}{|AD|}$ i $\angle CAD = \angle CBD$ pa prema SKS teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle BCD \sim \triangle AND$. Dakle, $\angle ADN = \angle BDC$ pa zaključujemo da je

BD simedijana trokuta ACD iz vrha D (druga slika 2.11).
Iz pokazanog slijedi da je BD također i simedijana trokuta ABC iz vrha B.

□

Iz slika 2.6 i 2.7 uočimo da se do sada spomenuti teoremi ne odnose na slučaj kada vrijedi $B = C$ ili $A = D$. Pretpostavimo da vrijedi $B = C$ i pokažimo kako u tom slučaju odrediti centar spiralne sličnosti.

Teorem 2.10. *Neka je dan trokut ABD i točka $E \neq B$ koja se nalazi na presjeku simedijane trokuta ABD iz vrha B i opisane kružnice trokuta ABD. Tada je polovište M dužine $\overline{BE}$ jedinstveni centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$.*



Slika 2.12: Spiralna sličnost s centrom u točki M

Dokaz.
Budući da je BE simedijana od $\triangle ABD$, prema lemi 2.9 znamo da je AD simedijana od $\triangle EAB$ i $\triangle EDB$. Tada vrijedi:

$$\angle MAB = \angle DAE = \angle DBE = \angle DBM \quad i \quad \angle MAB = \angle DAE = \angle DBE = \angle DBM.$$

Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle AMB \sim \triangle AED \sim \triangle BMD$ te su svi navedeni trokuti jednake orijentacije. Dakle, točka M je centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$ gdje je $\frac{|BD|}{|AB|}$ koeficijent sličnosti, a usmjereni kut $\angle AMB$ je kut rotacije.
Pokažimo još da je točka M jedinstveni centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$.

Neka su a, b, d i m pripadni kompleksni brojevi točaka A, B, D i M. Budući da vrijedi $\triangle AMB \sim \triangle BMD$ slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{b-m}{a-m} &= \frac{d-m}{b-m} \qquad \Big/ \cdot (a-m)(b-m) \neq 0 \\ m(-2b+a+d) &= ad - b^2 \\ m &= \frac{ad-b^2}{-2b+a+d} \end{aligned}$$

Uočimo da bi $2b = a + d$ vrijedilo kada bi točku D zarotirali oko točke B, $D \neq A$, tako da točke A, B i D budu kolinearne. Budući da su dane točke zadane tako da nisu kolinearne, vrijedi $-2b+a+d \neq 0$ pa zaključujemo da je m dobro definiran te da je točka M jedinstveni centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$.

□

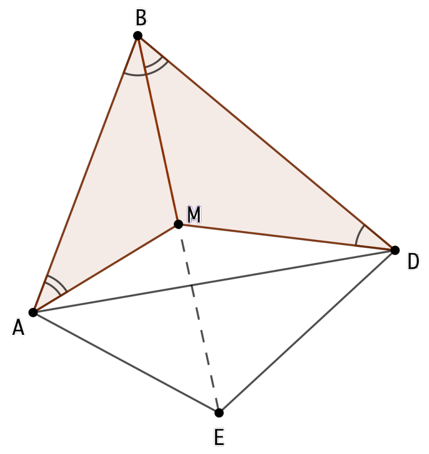
Slijedi teorem u kojem ćemo opisati još neka svojstva spiralne sličnosti.

Teorem 2.11. *Neka su dane dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$ takve da točke A, B i D nisu kolinearne. Neka je točka M centar spiralne sličnosti koja $\overline{AB}$ preslikava u $\overline{BD}$ i neka je dana točka E koja je centralnosimetrična točki B s obzirom na točku M. Tada vrijedi:*

1. *ME je simedijana trokuta ABD iz vrha B (odnosno simedijana trokuta AED iz vrha E).*
2. *Četverokut $ABDE$ je tetivan.*
3. *Spiralna sličnost s centrom u točki M preslikava $\overline{AE}$ u $\overline{ED}$.*
4. *Spiralna sličnost s centrom u točki A preslikava $\overline{BM}$ u $\overline{DE}$ (te prema teoremu 2.6 preslikava i $\overline{BD}$ u $\overline{ME}$). Spiralna sličnost s centrom u točki D preslikava $\overline{BM}$ u $\overline{AE}$ (te prema teoremu 2.6 preslikava i $\overline{BA}$ u $\overline{ME}$).*

Dokaz.

1. Budući da je zadan centar spiralne sličnosti M koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$, tada prema teoremu 2.10 znamo da je dani centar spiralne sličnosti M jedinstven te da se nalazi na simedijani trokuta ABD iz vrha B.
   Prema lemi 2.9 slijedi da je ME također i simedijana trokuta AED iz vrha E.



Slika 2.13: Spiralna sličnost s centrom u točki M

2. Znamo da se centar spiralne sličnosti M nalazi u polovištu dužine $\overline{BE}$. Tada se prema teoremu 2.10 točka E nalazi na opisanoj kružnici trokuta ABD. Budući da su točke A, B, D i E koncikličke, četverokut $ABDE$ je tetivan.

3. Budući da je M centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{BD}$, vrijedi $\triangle ABM \sim \triangle BMD$ pa slijedi $\angle BMA = \angle DMB$. Uočimo da vrijedi:

$$\angle BMA + \angle AME = \angle EMD + \angle DMB = 180°,$$

odnosno

$$\angle AME = \angle EMD. \tag{2.8}$$

Iz $\triangle ABM \sim \triangle BMD$ vrijedi $\dfrac{|AM|}{|BM|} = \dfrac{|BM|}{|DM|}$. Budući da je zadano $\overline{BM} = \overline{ME}$ vrijedi:

$$\frac{|AM|}{|ME|} = \frac{|ME|}{|DM|}. \tag{2.9}$$

Iz (2.8) i (2.9) po SKS teoremu o sličnosti trokuta uočavamo da vrijedi $\triangle AME \sim \triangle EMD$. Dakle, spiralna sličnost s centrom u točki M preslikava $\overline{AE}$ u $\overline{ED}$.

4. Budući da smo u dokazima 1. i 2. tvrdnje ovog teorema pokazali da je BE simedijana trokuta ABD iz vrha B te da je četverokut $ABDE$ tetivan, iz leme 2.9 slijedi da je AD simedijana trokuta BAE iz vrha A i trokuta BDE iz vrha D.

Prema tome zaključujemo $\angle MAB = \angle EAD$ i $\angle ADE = \angle BDM$. Tada prema KKK

teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle AMB \sim \triangle AED$.
Dakle, zaključujemo da spiralna sličnost s centrom u točki A preslikava $\overline{BM}$ u $\overline{DE}$.
Sada iz činjenice da vrijedi $\triangle BMD \sim \triangle AMB \sim \triangle AED$ zaključujemo da spiralna sličnost s centrom u točki D preslikava $\overline{BM}$ u $\overline{AE}$.

□

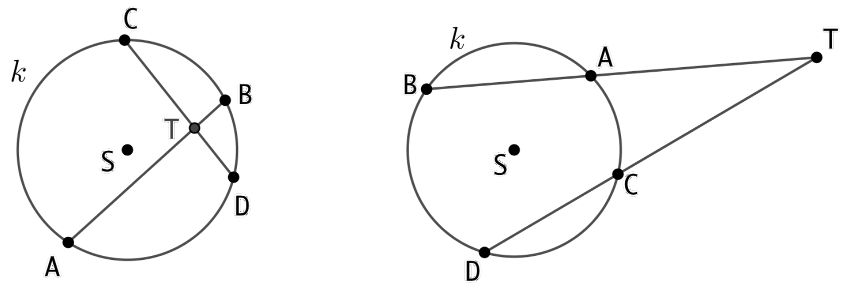
Poglavlje 3

Neki rezultati iz geometrije kružnice

U rješavanju narednih zadataka koristit ćemo dodatne pojmove i tvrdnje koje ćemo sada definirati odnosno dokazati.

Definicija 3.1. *Neka je k kružnica, a T točka ravnine. Neka je p bilo koji pravac koji prolazi točkom T i siječe kružnicu k u točkama A i B. Tada je vrijednost izraza $|TA| \cdot |TB|$ konstantna, ondosno ne ovisi o izboru pravca p.* ***Potenciju točke*** *T definiramo kao:*

- *umnožak $|TA| \cdot |TB|$, kada je točka T izvan kružnice,*
- *umnožak $-|TA| \cdot |TB|$, kada je točka T unutar kružnice,*
- *0, kada je točka T na kružnici k.*

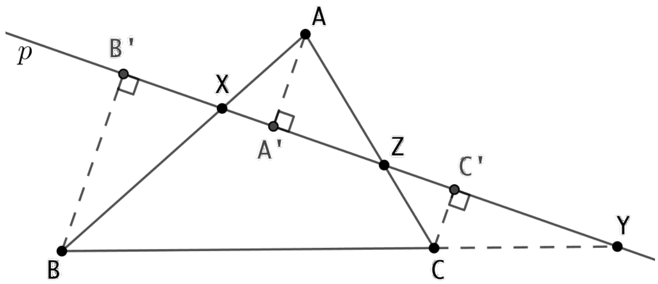


Slika 3.1: Potencija točke T s obzirom na kružnicu k.

Teorem 3.2 (Menelajev teorem)**.** *Neka se tri točke X, Y i Z nalaze redom na pravcima AB, BC i AC tako da se dvije točke od danih tri nalaze na stranicama trokuta ABC, a treća se* *nalazi na produžetku stranice tog trokuta. Tada su točke X, Y i Z kolinearne ako i samo ako vrijedi:*

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = 1. \tag{3.1}$$

Dokaz. Neka su točke X, Y i Z kolinearne i pripadaju pravcu p i neka su točke A', B' i C' redom nožišta okomica iz vrhova A, B i C na pravac p.



Slika 3.2: Menelajev teorem.

Uočimo da prema KKK teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle AA'X \sim \triangle BB'X$ pa slijedi:

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}.$$

Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle AA'Z \sim \triangle CC'Z$ pa slijedi:

$$\frac{|CZ|}{|ZA|} = \frac{|CC'|}{|AA'|}.$$

Također, prema KKK teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle BB'Y \sim \triangle CC'Y$ pa slijedi:

$$\frac{|BY|}{|YC|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}.$$

Slijedi:

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = \frac{|AA'|}{|BB'|} \cdot \frac{|BB'|}{|CC'|} \cdot \frac{|CC'|}{|AA'|} = 1.$$

Obratno, neka vrijedi 3.1. Pokažimo da su točke X, Y i Z kolinearne.
Neka je X' sjecište pravaca YZ i AB. Tada prema prvom dijelu ovog dokaza slijedi:

$$\frac{|AX'|}{|X'B|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = 1.$$

Uočimo da tada vrijedi:

$$\frac{|AX'|}{|X'B|}\cdot\frac{|BY|}{|YC|}\cdot\frac{|CZ|}{|ZA|}=\frac{|AX|}{|XB|}\cdot\frac{|BY|}{|YC|}\cdot\frac{|CZ|}{|ZA|},$$

odnosno

$$\frac{|AX'|}{|X'B|}=\frac{|AX|}{|XB|}. \tag{3.2}$$

Iz 3.2 slijedi $\frac{|AB|-|BX'|}{|X'B|}=\frac{|AB|-|BX|}{|XB|}$, odnosno $\frac{|AB|}{|X'B|}=\frac{|AB|}{|XB|}$ pa je $|X'B|=|XB|$ iz čega zaključujemo da je $X'=X$.
Dakle, točke X, Y i Z su kolinearne. □

Napominjemo da Menelajev teorem vrijedi i u slučaju kada se sve tri dane točke nalaze na produžecima stranica zadanog trokuta.

Teorem 3.3 (Pascalov teorem)**.** *Neka su A, B, C, X, Y i Z redom šest točaka na konici. Tada su točke u presjecima pravaca AX i CZ, AY i BZ te BX i CY kolinearne.*

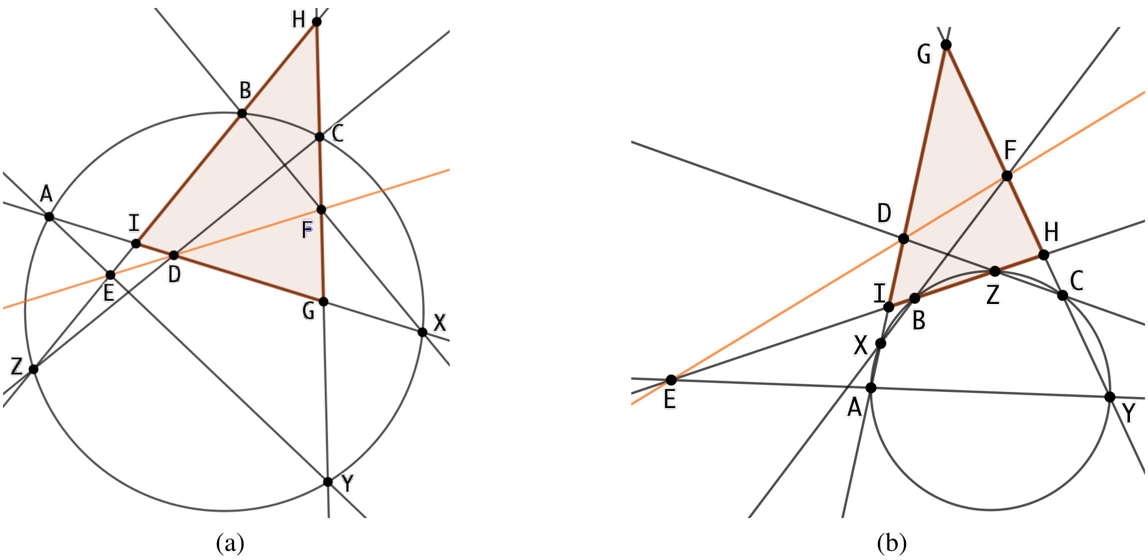
Ovaj teorem vrijedi za sve konike, no dokaz ćemo izložiti za slučaj kružnice budući da nam je to za ovaj rad dostatno. Naime, primijenit ćemo potenciju točke s obzirom na kružnicu, čime se dokaz znatno pojednostavljuje.

Dokaz. Neka je $D=AX\cap CZ$, $E=AY\cap BZ$ i $F=BX\cap CY$. Trebamo pokazati da su ove tri točke kolinearne.
Neka je $G=AX\cap CY$, $H=BZ\cap CY$ i $I=AX\cap BZ$.
Na slici 3.3a vidimo da se točke C i D nalaze redom na stranicama $\overline{HG}$ i $\overline{GI}$ trokuta GHI, a točka Z na produžetku stranice $\overline{IH}$, dok su na slici 3.3b točke D i Z na stranicama $\overline{GI}$ i $\overline{IH}$, a točka C na produžetku stranice $\overline{HG}$. U oba slučaja točke C, D i Z su kolinearne te prema Menelajevom teoremu 3.2 vrijedi:

$$\frac{|GC|}{|HC|}\cdot\frac{|HZ|}{|IZ|}\cdot\frac{|ID|}{|GD|}=1. \tag{3.3}$$

Na slikama 3.3a i 3.3b vidimo da se točke A, E i Y nalaze redom na produžecima stranica $\overline{IG}$, $\overline{HI}$ i $\overline{HG}$ trokuta GHI te su točke A, E i Y kolinearne. Tada prema Menelajevom teoremu 3.2 vrijedi:

$$\frac{|GY|}{|HY|}\cdot\frac{|HE|}{|IE|}\cdot\frac{|IA|}{|GA|}=1. \tag{3.4}$$



Slika 3.3: Pascalov teorem (različite konfiguracije).

Na slikama 3.3a i 3.3b vidimo da se točke B i F nalaze redom na stranicama $\overline{HI}$ i $\overline{HG}$ trokuta GHI, a točka X na produžetku stranice $\overline{IG}$ te su točke B, F i X kolinearne. Tada prema Menelajevom teoremu 3.2 vrijedi:

$$\frac{|GF|}{|HF|} \cdot \frac{|HB|}{|IB|} \cdot \frac{|IX|}{|GX|} = 1. \tag{3.5}$$

Iz 3.3, 3.4 i 3.5 dobivamo zajednički umnožak:

$$\frac{|GC|}{|HC|} \cdot \frac{|HZ|}{|IZ|} \cdot \frac{|ID|}{|GD|} \cdot \frac{|GY|}{|HY|} \cdot \frac{|HE|}{|IE|} \cdot \frac{|IA|}{|GA|} \cdot \frac{|GF|}{|HF|} \cdot \frac{|HB|}{|IB|} \cdot \frac{|IX|}{|GX|} = 1. \tag{3.6}$$

Primjenjujući definiciju potencije točke na točke I, G i H s obzirom na kružnicu $(ABCXYZ)$ dobivamo:

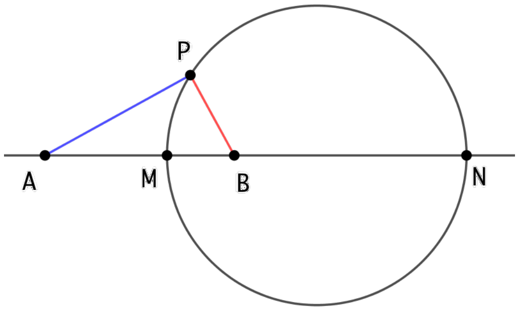
$$\frac{|GC|}{|HC|} \cdot \frac{|HZ|}{|IZ|} \cdot \frac{|GY|}{|HY|} \cdot \frac{|IA|}{|GA|} \cdot \frac{|HB|}{|IB|} \cdot \frac{|IX|}{|GX|} = \frac{|IA| \cdot |IX|}{|IB| \cdot |IZ|} \cdot \frac{|GC| \cdot |GY|}{|GA| \cdot |GX|} \cdot \frac{|HB| \cdot |HZ|}{|HC| \cdot |HY|} = 1. \tag{3.7}$$

Iz 3.6 i 3.7 slijedi:

$$\frac{|ID|}{|GD|} \cdot \frac{|HE|}{|IE|} \cdot \frac{|GF|}{|HF|} = 1. \tag{3.8}$$

Znamo da se točke F i D nalaze redom na stranicama $\overline{HG}$ i $\overline{IG}$ trokuta GHI te da se točka E nalazi na produžetku stranice $\overline{HI}$. Tada iz činjenice da vrijedi 3.8 prema Menelajevom teoremu 3.2 slijedi da su točke F, D i E kolinearne. □

Definicija 3.4. ***Apolonijeva kružnica*** *je geometrijsko mjesto točaka čiji je omjer udaljenosti od dvije različite točke A i B konstantan. Središte takve kružnice nalazi se na pravcu AB i ona prolazi točkama M i N na pravcu AB koje dijele dužinu $\overline{AB}$ u danom omjeru. U slučaju kada je omjer udaljenosti od zadane dvije točke jednak 1, riječ je o simetrali dužine $\overline{AB}$.*

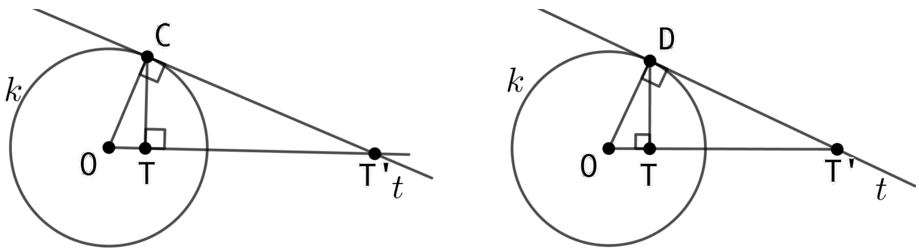


Slika 3.4: Apolonijeva kružnica

Apolonijevu kružnicu definiranu omjerom udaljenosti od točaka A i B koja prolazi vrhom P trokuta ABP nazivamo P-Apolonijeva kružnica.

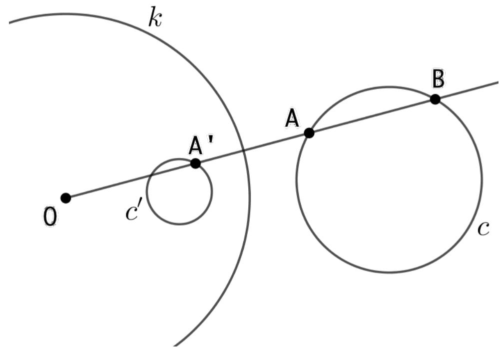
Definicija 3.5. *Neka je O neka čvrsta točka ravnine E^2 te neka je R pozitivan broj. Preslikavanje $I_O : \mathcal{T} \setminus \{O\} \to \mathcal{T} \setminus \{O\}$ naziva se* ***inverzija s obzirom na kružnicu sa središtem O i polumjerom R*** *ako za svaku točku T i njezinu sliku T' vrijedi:*

- *točke O, T i T' su kolinearne takve da su T i T' s iste strane točke O,*
- $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.



Slika 3.5: Inverzija točke T s obzirom na kružnicu k.

Lema 3.6. *Neka je dana kružnica inverzije k, njeno središte O i kružnica c koja ne prolazi središtem O. Tada je inverzna slika kružnice c s obzirom na kružnicu k kružnica c' koja ne prolazi središtem O.*



Slika 3.6: Inverzija kružnice c s obzirom na kružnicu k.

Dokaz. Neka je točka A na kružnici c i točka A' njena inverzna slika s obzirom na kružnicu k. Tada prema definiciji inverzije vrijedi:

$$|OA||OA'| = R^2, \tag{3.9}$$

gdje je R polumjer kružnice inverzije k.
Neka je $B = OA \cap c$. Tada je prema definiciji potencija točke O s obzirom na kružnicu c jednaka:

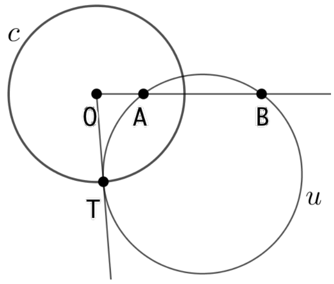
$$|OA||OB| = p^2. \tag{3.10}$$

Uočimo da p ne ovisi o točkama A i B već da je to duljina dužine od točke O do točke dodira tangente iz točke O na kružnicu c i kružnice c. Iz 3.9 i 3.10 slijedi:

$$|OA'| = \frac{R^2}{d^2}|OB|.$$

Sad vidimo da se točka A' preslikava u točku B homotetijom s centrom u točki O i koeficijentom $\frac{R^2}{d^2}$. Dakle, inverzna slika kružnice c s obzirom na kružnicu k je homotetična slika kružnice c prema opisanoj homotetiji, a to je kružnica c'. □

Lema 3.7. *Neka je dana kružnica c, točka $A \notin c$ i njoj inverzna točka B s obzirom na kružnicu c. Tada je bilo koja kružnica koja prolazi točkama A i B ortogonalna kružnici c.*



Slika 3.7: Ortogonalne kružnice.

Dokaz. Neka kružnica u prolazi točkama A i B. Tangenta iz točke O na kružnicu u dira kružnicu u u točki T. Tada je potencija točke O s obzirom na kružnicu u jednaka:

$$|OA||OB| = |OT|^2. \tag{3.11}$$

S druge strane, budući da su točke A i B međusobno inverzne s obzirom na kružnicu c znamo da vrijedi $|OA||OB| = R^2$, gdje je R polumjer kružnice inverzije c. Sada iz 3.11 slijedi $R = |OT|$ pa zaključujemo da je $T \in c$.
Budući da je $\overline{OT}$ radijus kružnice c, OT je okomit na tangentu kružnice c pa slijedi da su tangente kružnica c i u okomite, odnosno da su kružnice c i u ortogonalne. □

Poglavlje 4

Primjena spiralne sličnosti u zadatcima

Slijedi nekoliko riješenih zadataka s Međunarodne matematičke olimpijade (IMO), Japanske matematičke olimpijade (JMO), Iranske geometrijske olimpijade (IGO) i Južnokorejske matematičke olimpijade (KMO). U danim zadatcima bit će važno uočiti spiralnu sličnost kao međukorak koji daje glavnu ideju za rješavanje zadatka.

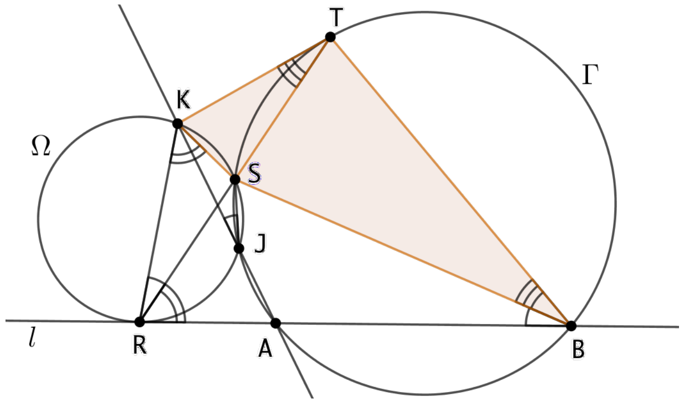
4.1 Zadatak: Međunarodna matematička olimpijada 2017., P4

Zadatak 4.1. *Neka su R i S međusobno različite točke na kružnici Ω takve da $\overline{RS}$ nije promjer. Neka je ℓ tangenta na kružnicu Ω u točki R. Neka je T točka takva da je S polovište dužine $\overline{RT}$. Točka J nalazi se na kraćem luku RS kružnice Ω tako da se opisana kružnica Γ trokuta JST i pravac ℓ sijeku u dvije različite točke. Neka je A ono sjecište od Γ i ℓ koje je bliže točki R. Pravac AJ siječe kružnicu Ω još u točki K. Dokaži da pravac KT dodiruje kružnicu Γ.*

Rješenje.
Označimo s B sjecište pravca RA i kružnice Γ tako da je $B \neq A$. Budući da su točke A, B, S i J konciklične uočimo da vrijedi:

$$\angle SBR = \angle SBA = \angle SJK = \angle SRK.$$

Iz poznate činjenice da je kut između tangente kružnice i tetive koja sadržava diralište tangente jednak obodnom kutu nad tom tetivom i činjenice da je ℓ tangenta na kružnicu Ω slijedi $\angle BRS = \angle RKS$. Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta zaključujemo $\triangle SKR \sim \triangle SRB$.
Sad možemo zaključiti da je točka S centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{KR}$ u $\overline{RB}$.



Slika 4.1

Prema teoremu 2.11 (3. tvrdnja) S je također i centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{KT}$ u $\overline{TB}$. Tada vrijedi $\triangle KST \sim \triangle TSB$ pa slijedi $\angle KTS = \angle TBS$.
Dakle, obodni kut $\angle TBS$ nad tetivom $\overline{ST}$ jednak je kutu kojeg zatvaraju pravac KT i tetiva $\overline{ST}$ pa zaključujemo da je KT tangenta na kružnicu Γ.

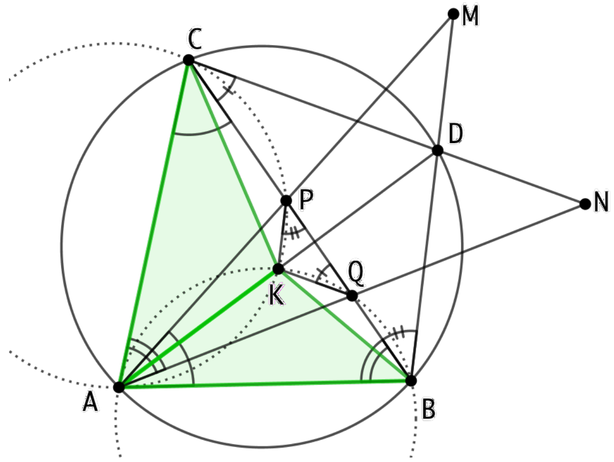
□

4.2 Zadatak: Međunarodna matematička olimpijada 2014., P4

Zadatak 4.2. *Točke P i Q leže na stranici $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC tako da je $\angle PAB = \angle BCA$ i $\angle CAQ = \angle ABC$. Točke M i N nalaze se na pravcima AP i AQ redom, tako da je P polovište dužine $\overline{AM}$, a Q polovište dužine $\overline{AN}$. Dokaži da se pravci BM i CN sijeku na opisanoj kružnici trokuta ABC.*

Rješenje.
Neka je točka K centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{BA}$ u $\overline{AC}$ i neka je točka D centralnosimetrična točki A s obzirom na točku K. Tada prema teoremu 2.11 (2. tvrdnja) znamo da točka D pripada kružnici (ABC). Kako bi riješili zadatak, pokazat ćemo da vrijedi $D = \overline{BM} \cap \overline{CN}$.

Uočimo da je $\overline{KQ}$ srednjica trokuta DAN i $\overline{KP}$ srednjica trokuta MAD pa vrijedi $KQ \parallel DN$ i $KP \parallel DM$. Za rješenje zadatka potrebno je još pokazati da vrijedi $KQ \parallel CD$ i $KP \parallel BD$.



Slika 4.2

Pokažimo da je četverokut $KQBA$ tetivan. Uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle QAK &= \angle BAK - \angle BAQ \\ &= \angle BAC - \angle KAC - (\angle BAC - \angle QAC) \\ &= \angle QAC - \angle KAC \\ &= \angle CBA - \angle KBA \quad \text{(jer zbog dane spiralne sličnosti vrijedi } \triangle CAK \sim \triangle ABK) \\ &= \angle QBK.\end{aligned}$$

Zaključujemo da su točke K, Q, B i A konciklične, odnosno da je četverokut $KQBA$ tetivan. Analogno pokažimo da je i četverokut $KPCA$ tetivan:

$$\begin{aligned}\angle PAK &= \angle CAK - \angle CAP \\ &= \angle CAB - \angle KAB - (\angle CAB - \angle PAB) \\ &= \angle PAB - \angle KAB \\ &= \angle BCA - \angle KCA \\ &= \angle PCK.\end{aligned}$$

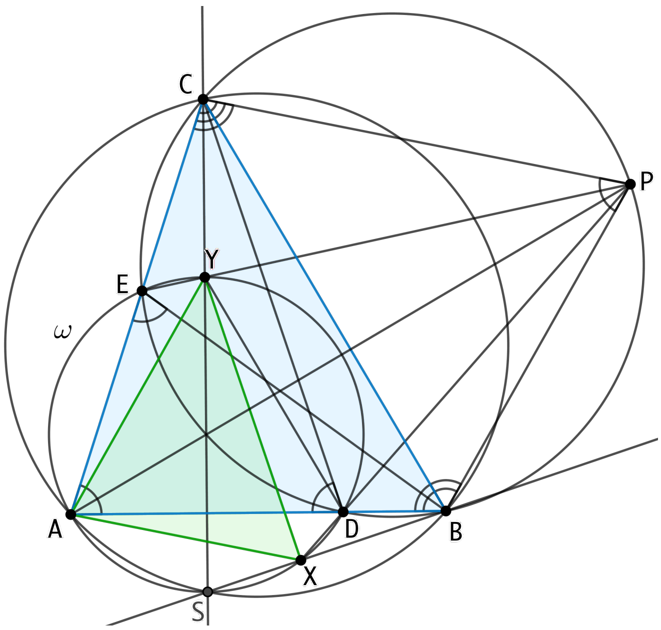
Sada slijedi:
$\angle CQK$ = (točke K, Q, B i A su konciklične) = $\angle BAK = \angle BAD$ = (točke A, B, D i C su konciklične) = $\angle BCD = \angle QCD$;
$\angle KPB$ = (točke K, P, C i A su konciklične) = $\angle KAC = \angle DAC$ = (točke A, B, D i C su konciklične) = $\angle DBC = \angle DBQ$.
Nadalje, po KKK teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle PKQ \sim \triangle BDC$, a budući da $\overline{PQ}$ leži na $\overline{CB}$ slijedi $KQ \parallel CD$ i $KP \parallel BD$.

□

4.3 Zadatak: Japanska matematička olimpijada, Finalni dio 2018., P2

Zadatak 4.3. *Neka je dan raznostranični trokut ABC, i neka su D i E točke redom na $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ takve da vrijedi $\overline{CA} = \overline{CD}$ i $\overline{BA} = \overline{BE}$. Neka je ω opisana kružnica trokuta ADE i točka P osnosimetrična slika točke A s obzirom na pravac BC. Pravci PD i PE drugi puta sijeku kružnicu ω redom u točkama X i Y. Dokaži da se pravci BX i CY sijeku na kružnici ω.*

Rješenje.
U rješavanju zadatka koristit ćemo usmjerene kutove. Želimo pokazati da su trokuti ABC i AXY slični kako bi pomoću spiralne sličnosti pokazali da vrijedi tražena tvrdnja zadatka.



Slika 4.3

Budući da je točka P osnosimetrična točki A s obzirom na pravac BC, vrijedi $\overline{AB} = \overline{PB}$ i $\overline{AC} = \overline{CP}$ pa po SSS teoremu o sukladnosti trokuta slijedi $\triangle ABC \cong \triangle PBC$. Također iz uvjeta zadatka znamo da vrijedi $\overline{CA} = \overline{CD}$ i $\overline{BA} = \overline{BE}$ pa iz $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD}$ i $\angle DAC = \angle BAE$ prema SKS teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle ADC \sim \triangle AEB$.

Uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle BEC &= 180^\circ - \angle AEB \\ &= 180^\circ - \angle DAC \quad (\text{jer je } \triangle ADC \sim \triangle AEB). \\ &= 180^\circ - \angle BAC \\ &= 180^\circ - \angle CPB \quad (\text{jer je } \triangle ABC \cong \triangle PBC).\end{aligned}$$

Budući da je zbroj nasuprotnih kutova četverokuta $CEBP$ jednak 180° zaključujemo da je četverokut $CEBP$ tetivan.
Vidimo da je trokut ADC jednakokračan pa vrijedi $\angle CDA = \angle DAC$. Tada slijedi:

$$\begin{aligned}\angle CDA &= \angle DAC \\ &= \angle BAC \\ &= \angle CPB \quad (\text{jer je } \triangle ABC \cong \triangle PBC),\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je četverokut $CDBP$ tetivan.
Dakle, točke C, E, D, B i P su konciklične. Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle AXY &= \angle AEY \quad (\text{jer je četverokut } AXYE \text{ tetivan}) \\ &= \angle CEP \\ &= \angle CBP \quad (\text{jer je četverokut } CEBP \text{ tetivan}) \\ &= \angle ABC \quad (\text{jer je } \triangle ABC \cong \triangle PBC),\end{aligned}$$

odnosno

$$\angle YXA = \angle CBA. \tag{4.1}$$

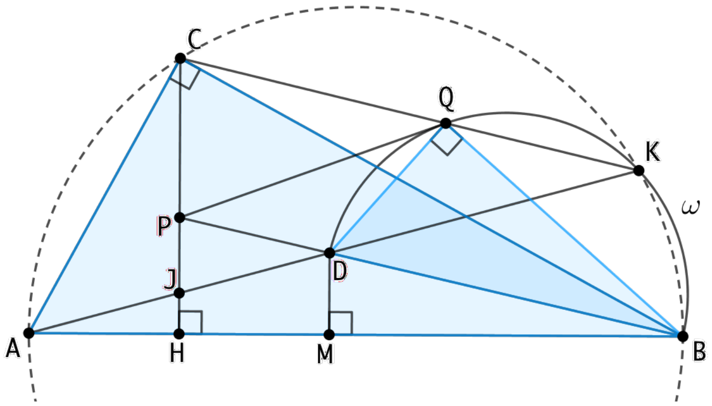
Iz $\angle EPD = \angle ECD$ (jer je četverokut $CEDP$ tetivan), odnosno $\angle YPD = \angle ACD$ i činjenice $\angle DYP = \angle DAE = \angle DAC$ (jer je četverokut $DAEY$ tetivan) prema KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi $\triangle YDP \sim \triangle ADC$ pa zaključujemo da je trokut YDP jednakokračan, odnosno da vrijedi $\overline{PY} = \overline{PD}$ i $\angle DYP = \angle PDY$. Sad uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle XAY &= \angle PDY \quad (\text{jer je četverokut } AXDY \text{ tetivan}) \\ &= \angle DYP \quad (\text{jer je trokut } YDP \text{ jednakokračan}) \\ &= \angle DAE \quad (\text{jer je četverokut } ADYE \text{ tetivan}) \\ &= \angle BAC. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nadalje uočavamo da iz 4.1 i 4.2 po KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi $\triangle ABC \sim \triangle AXY$.
Uočimo da je tada točka A centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{XY}$ u $\overline{BC}$. Tada prema teoremu 2.5 slijedi da se pravci CY i BX sijeku u točki S koja se nalazi na presjeku kružnica (ABC) i (AXY), odnosno točka S se nalazi na kružnici ω što je tražena tvrdnja. □

4.4 Zadatak: Međunarodna matematička olimpijada 2015. SL, G3

Zadatak 4.4. *Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C, a točka H nožište visine iz vrha C. Neka je točka D unutar trokuta CBH takva da visina $\overline{CH}$ raspolavlja dužinu $\overline{AD}$. Sjecište pravaca BD i CH označimo s P. Neka je ω polukružnica s promjerom BD koja siječe dužinu $\overline{CB}$ u unutrašnjoj točki. Tangenta iz točke P dira polukružnicu ω u točki Q. Dokaži da se pravci CQ i AD sijeku na polukružnici ω.*



Slika 4.4

Rješenje.
Neka je $J = \overline{AD} \cap \overline{CH}$. Neka je točka M na $\overline{AB}$ takva da je $\angle BMD = 90°$. Tada je $CH \parallel DM$ jer su oba pravca okomita na pravac AB. Kako je J polovište dužine $\overline{AD}$, a $JH \parallel DM$, očito je $\overline{JH}$ srednjica trokuta AMD pa vrijedi $\overline{AH} = \overline{HM}$.

Sada želimo pokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle DBQ$ kako bi iskoristili svojstva spiralne sličnosti i došli do rješenja.
Potencijom točke P na kružnicu ω dobivamo $|PQ|^2 = |PD| \cdot |PB|$. Tada vrijedi:

$$\frac{|PQ|^2}{|PD|^2} = \frac{|PB|}{|PD|}. \tag{4.3}$$

Krakovi kuta $\angle PBH$ presiječeni su s dva paralelna pravca PH i DM pa su prema Talesovom poučku dužine koje ti pravci odsijecaju na jednom kraku proporcionalne dužinama koje ti pravci odsijecaju na drugom kraku, odnosno vrijedi $|PB| : |PD| = |HB| : |HM|$. Tada iz (4.3) slijedi:

$$\frac{|PQ|^2}{|PD|^2} = \frac{|HB|}{|HM|} = \frac{|HB|}{|AH|}. \tag{4.4}$$

Uočimo sada da po KKK teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle ABC \sim \triangle CBH$ pa vrijedi $\frac{|HB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|AB|}$, odnosno $|HB| = \frac{|CB|^2}{|AB|}$.
Također, po KKK teoremu o sličnosti trokuta vidimo da vrijedi $\triangle ABC \sim \triangle ACH$ pa vrijedi $\frac{|AH|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$, odnosno $|AH| = \frac{|AC|^2}{|AB|}$.
Iz (4.4) slijedi:

$$\frac{|PQ|^2}{|PD|^2} = \frac{|CB|^2}{|AB|} : \frac{|AC|^2}{|AB|} = \frac{|CB|^2}{|AC|^2}.$$

Dakle, pokazali smo da vrijedi $\frac{|PQ|}{|PD|} = \frac{|CB|}{|AC|}$.

Prema teoremu o kutu tetive i tangente vrijedi $\angle QBD = \angle PQD$ i vidimo da vrijedi $\angle QPD = \angle QPB$ pa prema KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi $\triangle PDQ \sim \triangle PQB$. Slijedi $\frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|PQ|}{|PD|} = \frac{|QB|}{|QD|}$, a budući da znamo da je $\angle ACB = \angle DQB = 90°$ zaključujemo da je prema SKS teoremu o sličnosti trokuta $\triangle ACB \sim \triangle DQB$.
Sada slijedi da je točka B centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AC}$ u $\overline{DQ}$. Prema teoremu 2.5 zaključujemo da se pravci CQ i AD sijeku u drugoj točki presjeka kružnice ω i kružnice (ABC), nazovimo je točkom K. Time smo pokazali traženu tvrdnju.

□

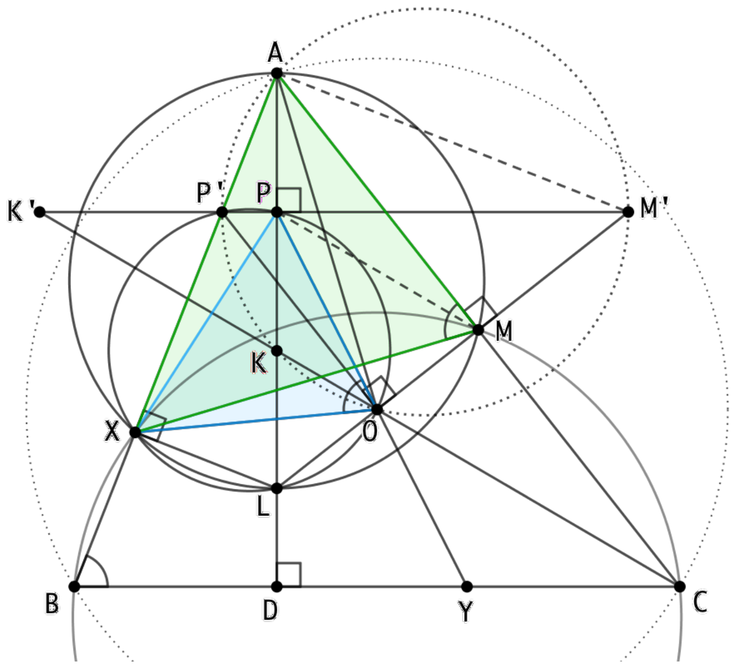
4.5 Zadatak: Iranska geometrijska olimpijada, Napredna razina 2017., P3

Zadatak 4.5. *Neka je točka O središte opisane kružnice trokutu ABC. Pravac CO siječe visinu iz vrha A u točki K. Neka su P i M polovišta dužina $\overline{AK}$ i $\overline{AC}$ redom. Ako pravac PO siječe BC u točki Y i ako opisana kružnica trokutu BCM siječe AB u točki X, dokaži da je četverokut BXOY tetivan.*

Rješenje.
U nastavku ćemo koristiti usmjerene kutove.
Neka je ℓ pravac paralelan s BC i prolazi točkom P, $P' = \overline{AB} \cap \ell$, $K' = \overline{CO} \cap \ell$, $M' = \overline{OM} \cap \ell$, $L = \overline{OM} \cap \overline{AK}$ i neka je D nožište visine iz vrha A.

Uočimo, da bi pokazali da je četverokut $BXOY$ tetivan, trebamo pokazati da vrijedi $\angle CBA = \angle POX$.
Točke B, C, M i X su konciklične pa vidimo da vrijedi $\angle MXA = \angle ACB$. Također, uočimo da je $\angle AML = 90° = \angle CDA$ i $\angle LAM = \angle DAC$ pa slijedi:

$$\angle MLA = \angle ACB = \angle MXA.$$



Slika 4.5

Budući da su obodni kutovi nad istom tetivom jednaki, četverokut $AXLM$ je tetivan. Prema Talesovom teoremu kutovi nad promjerom su pravi pa budući da je $\angle AML = 90°$ tada je i $\angle LXP' = 90°$.
Uočimo, $\angle M'PA = 90° = \angle M'MA$ pa je prema Talesovom teoremu četverokut $AM'MP$ tetivan. Točka M je polovište dužine $\overline{AC}$, a točka P je polovište dužine $\overline{AK}$ pa je $\overline{PM}$ srednjica trokuta AKC. Slijedi $MP \parallel CK \parallel CK'$. Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle MAM' &= \angle MPM' \quad \text{(jer je } AM'MP \text{ tetivan)}\\ &= \angle CK'M' \quad \text{(jer su } \angle MPM' \text{ i } \angle CK'M' \text{ kutovi s paralelnim krakovima)}\\ &= \angle OCB \quad \text{(jer su } \angle CK'M' \text{ i } \angle OCB \text{ kutovi s paralelnim krakovima).} \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Uočimo da je $\angle CBO = \angle OCB$ jer su $\overline{BO}$ i $\overline{CO}$ polumjeri kružnice (ABC). Zatim po teoremu o obodnom i središnjem kutu vidimo da je $\angle BOC = 2\angle BAC$. Zbroj kutova u trokutu je 180°

pa za trokut $\angle BOC$ vrijedi $2\angle BAC + 2\angle OCB = 180°$, odnosno $\angle OCB = 90° - \angle BAC$. Iz 4.5 slijedi:

$$\angle MAM' = \angle 90° - \angle BAC. \tag{4.6}$$

Iz 4.6 slijedi $\angle P'AM' = 90°$. Budući da je točka K osnosimetrična točki A s obzirom na pravac ℓ, vidimo da je četverokut $AP'KM'$ tetivan. Uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\angle M'P'A &= \angle CBA \quad \text{(kutovi s paralelnim krakovima)}\\ &= \angle MOA \quad (\angle CBA \text{ je obodni kut nad } \overline{CA}, \text{ a } \angle MOA \text{ je pola središnjeg kuta nad } \overline{CA})\\ &= \angle M'OA.\end{aligned}$$

Slijedi da je četverokut $AP'OM'$ tetivan.
Zaključujemo sada da se točke A, K i O nalaze na kružnici promjera $\overline{P'M'}$ stoga vrijedi $\angle MOP' = 90° = \angle LXP'$ pa je četverokut $P'XLO$ tetivan. Nadalje, vrijedi $\angle P'PL = 90°$ pa točka P također leži na kružnici $(P'XLO)$.
Konačno, budući da vrijedi $L = (PXO) \cap (AMX)$, $L \neq X$ i $L = \overline{AP} \cap \overline{MO}$ prema teoremu 2.5 slijedi da je X centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{PO}$ u $\overline{AM}$. Tada vrijedi $\triangle PXO \sim \triangle AXM$ iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}\angle POX &= \angle AMX\\ &= \angle CBA \quad \text{(jer je četverokut } BCMX \text{ tetivan)}\\ &= \angle YBX,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je četverokut $BXOY$ tetivan što je bila tražena tvrdnja.

□

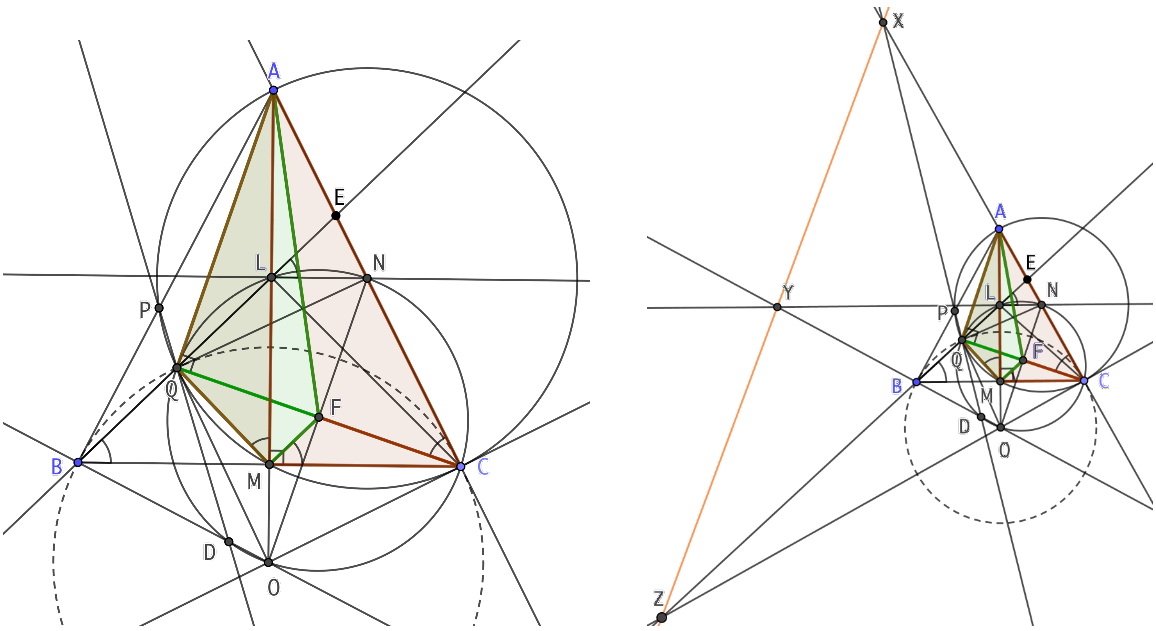
4.6 Zadatak: Južnokorejska matematička olimpijada, Finalni dio 2020., P5

Zadatak 4.6. *Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Neka su točke M, L i N redom središta dužina $\overline{BC}$, $\overline{AM}$ i $\overline{AC}$. Neka je Ω opisana kružnica trokuta AMC, njezino drugo sjecište s dužinom $\overline{AB}$ točka $P \neq A$, a njezino sjecište s dužinom $\overline{BL}$ točka Q. Neka je O centar opisane kružnice trokuta BQC. Pretpostavimo da se pravci AC i PQ sijeku u točki X, pravci OB i LN u točki Y i pravci BQ i CO u točki Z. Dokaži da su točke X, Y i Z kolinearne.*

Rješenje.
Pokazat ćemo da su točke X, Y i Z kolinearne koristeći Pascalov teorem, no prvo ćemo pokazati da su točke Q, D, O, N, C i L konciklične.

Pokažimo da je CQ simedijana trokuta AMC iz vrha C.
Pretpostavimo da simedijana trokuta AMC iz vrha C siječe kružnicu (AMC) drugi puta u točki Q'. Tada vrijedi $\angle Q'CM = \angle ACL$. Neka je točka F polovište dužine $\overline{CQ'}$. Tada prema teoremu 2.10 znamo da postoji spiralna sličnost s centrom u točki F koja preslikava $\overline{AC}$ u $\overline{CM}$. Tada vrijedi $\triangle AFC \sim \triangle CFM$ pa slijedi:

$$\begin{aligned}
\angle FML &= 90^\circ - \angle CMF \quad (\text{jer je } AM \perp BC) \\
&= 90^\circ - \angle FCA \\
&= 90^\circ - \angle LCM \quad (\text{jer je } \angle FCM = \angle ACL) \\
&= \angle MLC \\
&= \angle BLM \quad (\text{jer je } \triangle LMC \sim \triangle LMB).
\end{aligned}$$



(a) (b)

Slika 4.6

Dakle, $\angle MBL = \angle CMF$ pa budući da im krak leži na istom pravcu slijedi $MF \parallel BL$. Homotetija s centrom C i koeficijentom $\dfrac{|CM|}{|BC|}$ preslikava pravac MF u pravac BL pa slijedi da je Q' na pravcu BL, odnosno da je $Q' = Q$.
Dakle, CQ je simedijana trokuta AMC iz vrha C.

Neka je $E = BL \cap AC$. Uočimo da je $\overline{LN}$ srednjica trokuta AMC pa vrijedi $BC \parallel LN$. Kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca su jednaki pa vrijedi $\angle CBL = \angle NLE$.
Sada zbog $\angle NCQ = \angle NLE$ zaključujemo da su točke C, N, L i Q konciklične.

Iz dokaza teorema 2.10 također znamo da vrijedi $\triangle AQM \sim \triangle AFC \sim \triangle CFM$. Iz teorema 2.11 (tvrdnja 3.) znamo da spiralna sličnost s centrom u točki F također preslikava i $\overline{MQ}$ u $\overline{QA}$ pa vrijedi $\triangle FMQ \sim \triangle FQA$. Slijedi:

$$\begin{aligned} \angle FQA &= \angle FMQ \quad (\text{jer je } \triangle FQA \sim \triangle FMQ) \\ &= \angle AMQ + \angle FMA \\ &= \angle CMF + \angle FMA \quad (\text{jer je } \angle AMQ = \angle CMF) \\ &= \angle CMA \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

Iz $\angle FQA = 90^\circ = \angle CQA$ prema obratu Talesovog teorema zaključujemo da je $\overline{AC}$ promjer kružnice (AMC). Uočimo da je $\overline{NQ} = \overline{NC}$ polumjer kružnice (AMC).
$\overline{QC}$ je zajednička tetiva kružnica (AMC) i (BQC) pa su polumjeri tih kružnica koji prolaze središtem te tetive, odnosno točkom F, okomiti na tu tetivu stoga zaključujemo da su točke O, F i N kolinearne.
Također, uočimo da je $\angle CBQ$ obodni kut nad tetivom $\overline{QC}$ kružnice (BQC), a $\angle COQ$ je pripadni središnji kut. Tada prema teoremu o središnjem i obodnom kutu vrijedi:

$$\angle NCQ = \angle CBQ = \angle COF = \angle CON = \angle FOQ = \angle NOQ. \tag{4.7}$$

Dakle, zbog jednakih obodnih kutova nad istom tetivom iz (4.7) slijedi da se i točka O nalazi na kružnici $(CNLQ)$.
Pokažimo još da je $D \in (CNLQO)$.
Uočimo da iz $BC \parallel LN$ i $AM \perp BC$ slijedi $AM \perp LN$. Tada vrijedi $\angle OLN = 90^\circ$ pa je prema obratu Talesovog teorema $\overline{ON}$ promjer kružnice $(CNLQO)$.
Prema (SSS) teoremu o sličnosti trokuta vidimo da vrijedi $\triangle OBA \sim \triangle OCA$ pa slijedi:

$$\angle OBA = \angle ACO = \angle NCO = 90^\circ. \tag{4.8}$$

Iz $\angle BPD = \angle ACQ$ (jer je $APQC$ tetivan) i (4.8) prema KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi $\triangle BPD \sim \triangle QCA$ pa vrijedi:

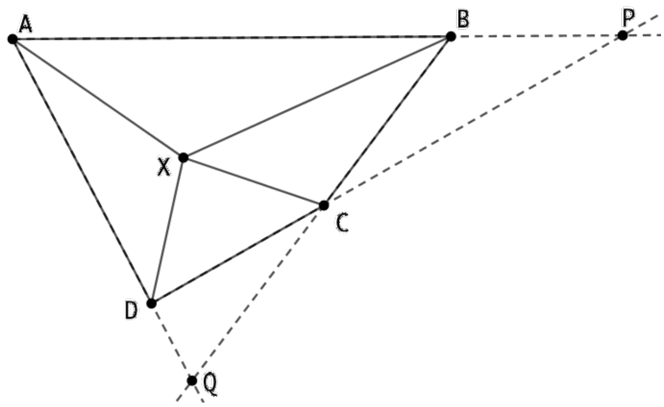
$$\angle PDB = 90^\circ - \angle BPD = 90^\circ - \angle ACQ = \angle QCO.$$

Dakle, točka D pripada kružnici $CNLQO$.
Budući da imamo šest točaka na kružnici $(CNLQDO)$ i da su točke X, Y i Z redom presjeci pravaca NC i QD, LN i DO te LQ i CO, primjenom Pascalovog teorema 3.3 zaključujemo da su točke X, Y i Z kolinearne. $\square$

4.7 Zadatak: Međunarodna matematička olimpijada 2018., P6

Zadatak 4.7. *Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Točka X leži unutar $ABCD$ tako da vrijedi $\angle XAB = \angle XCD$ i $\angle XBC = \angle XDA$. Dokaži da je $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.*

Rješenje.
Budući da nije odmah očito kako bi se konstruirala dana točka X, napravimo prvo skicu 4.7. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$. Neka je $P = AB \cap CD$ i $Q = AD \cap BC$.

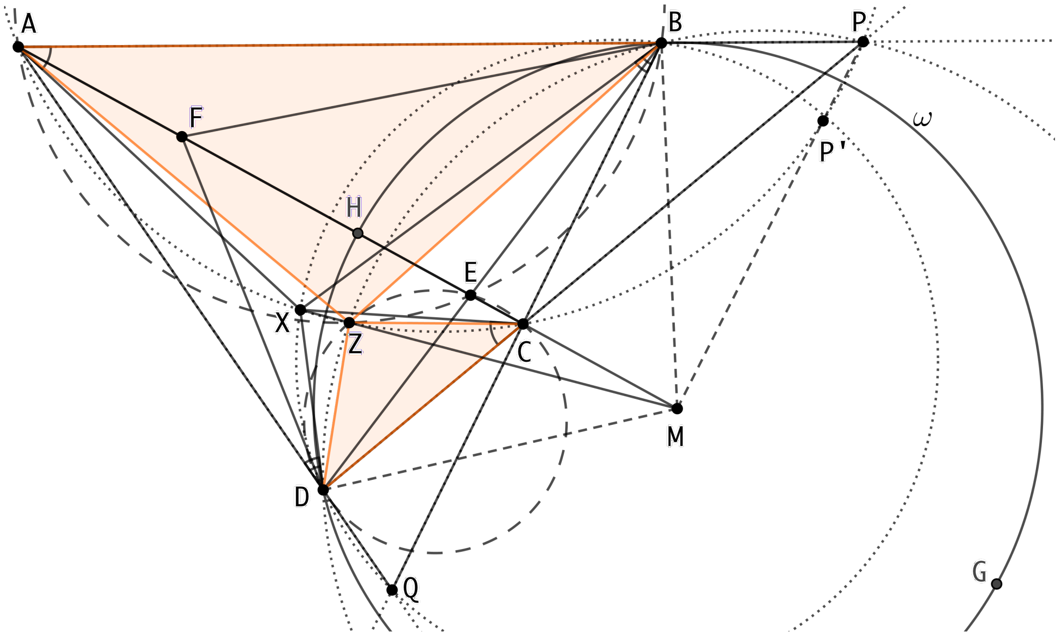


Slika 4.7: Skica

Pretpostavimo da vrijedi uvjet zadatka $\angle XAB = \angle XCD$. Tada vidimo da iz $\angle XCD + \angle XCP = 180°$ slijedi $\angle XAP + \angle XCP = 180°$ pa zaključujemo da je četverokut $APCX$ tetivan.
Analogno, iz uvjeta zadatka $\angle XBC = \angle XDA$ i činjenice $\angle XDA + \angle XDQ = 180°$ slijedi $\angle XDQ + \angle XBQ = 180°$ pa zaključujemo da je četverokut $BQDX$ tetivan.
Dakle, točka X se nalazi na presjeku kružnica (APC) i (BQD) unutar četverokuta $ABCD$ (slika 4.8).

Sad konstruiramo točke $E = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ i $Z = (BAE) \cap (CDE)$, $Z \neq E$. Prema teoremu 2.5 vidimo da je točka Z centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AB}$ u $\overline{CD}$. Tada prema teoremu 2.6 slijedi da je točka Z također centar spiralne sličnosti koja preslikava $\overline{AC}$ u $\overline{BD}$ pa zaključujemo da su četverokuti $AZCP$ i $DZBP$ tetivan.

Iz zadatka znamo da vrijedi $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|DA|}{|CD|}$, odnosno omjer udaljenosti točke B od točaka A i C jednak je omjeru udaljenosti točke D od točaka A i C. Tada prema definiciji Apolonijeve



Slika 4.8

kružnice 3.4 zaključujemo da se točka D nalazi na B-Apolonijevoj kružnici trokuta ABC, nazovimo je ω.
Neka je točka M centar kružnice ω i točka X' inverzna slika točke Z s obzirom na kružnicu ω. Tada prema definiciji inverzije 3.5 vrijedi:

$$|MZ| \cdot |MX'| = |MD|^2. \tag{4.9}$$

Neka su $H = \omega \cap AC$ i $G = \omega \cap AC$ takve da se točka H nalazi između točaka A i C. Tada iz činjenice da je ω B-Apolonijeva i D-Apolonijeva kružnica trokuta ABC te da vrijedi $\overline{MH} = \overline{MD}$ slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{|AH|}{|HC|} = \frac{|AG|}{|CG|} &\Leftrightarrow \frac{|AH|}{|HC|} = \frac{|AH| + 2|MD|}{|MD| + |CM|} \\
&\Leftrightarrow \frac{|MA| - |MD|}{|MD| - |MC|} = \frac{(|MA| - |MD|) + 2|MD|}{|MD| + |CM|} \\
&\Leftrightarrow (|MA| - |MD|)(|MD| + |CM|) = (|MD| - |MC|)(|MA| + |MD|) \\
&\Leftrightarrow |MA| \cdot |CM| = |MD|^2. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Iz dobivenih jednakosti 4.9 i 4.10 vidimo da vrijedi:

$$|MZ| \cdot |MX'| = |MD|^2 = |MA| \cdot |CM|,$$

pa prema definiciji potencije točke 3.1 zaključujemo da X' leži na kružnici $(APCZ)$, a prema definiciji inverzije 3.5 zaključujemo da je točka A inverzna slika točke C s obzirom na kružnicu ω.
Neka je točka F inverzna slika točke E s obzirom na kružnicu ω. Budući da je $E \in \overline{AC}$ i da je A inverzna slika točke C s obzirom na kružnicu ω, zaključujemo da se i F nalazi na $\overline{AC}$.
Znamo da su točke A, B, E i Z te C, E, Z i D konciklične pa su četverokuti $ABEZ$ i $CEZD$ tetivan.
Prema lemi 3.6 inverzna slika kružnice koja ne prolazi središtem kružnice inverzije je kružnica koja ne prolazi središtem kružnice inverzije. Budući da su inverzne slike točaka A, B, E i Z s obzirom na kružnicu ω redom točke C, B, F i X', a inverzne slike točaka C, E, Z i D s obzirom na kružnicu ω redom točke A, F, X' i D, zaključujemo da su četverokuti $CBFX'$ i $AFX'D$ tetivan. Koristeći usmjerene kutove uočimo da vrijedi:

$$\angle DX'B = \angle FX'B + \angle DX'F. \tag{4.11}$$

Koristeći činjenicu da su točke C, B, F i X' konciklične dobivamo $\angle FX'B = \angle FX'C + \angle CX'B = \angle FBC + \angle CFB = \angle FCB$. Također, koristeći činjenicu da su točke A, F, X' i D konciklične dobivamo $\angle DX'F = \angle DAF$. Sada iz 4.11 slijedi:

$$\begin{aligned}\angle DX'B &= \angle FCB + \angle DAF \\ &= \angle FCB + \angle DAC \\ &= \angle ACQ + \angle QAC \quad \text{(jer su } \angle FCB \text{ i } \angle ACQ \text{ vršni kutovi)} \\ &= \angle DQB. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Sada iz 4.12 zbog jednakih kutova nad istom tetivom zaključujemo da točka X' leži na kružnici (BDQ), odnosno da je točka X' zajednička točka kružnica $(AZCP)$ i (BDQ).
Sada definiramo točku P' kao inverznu sliku točke P s obzirom na kružnicu ω. Budući da je točka A inverzna točki C s obzirom na kružnicu ω, prema lemi 3.7 zaključujemo da su kružnice $(AZCP)$ i ω ortogonalne pa stoga slijedi da je točka P' na kružnici $(AZCP)$.

Znamo da je četverokut $DZBP$ tetivan i da su inverzne slike točaka D, Z, B i P redom točke D, X', B i P' pa iz leme 3.6 slijedi da je četverokut $DX'BP'$ tetivan. Budući da znamo da je i četverokut $BX'DQ$ tetivan, slijedi da točke Q, D, X', B i P' pripadaju istoj kružnici. Sada iz činjenice da točka P' pripada kružnicama $(AZCP)$ i (QBD) zaključujemo da je točka P' druga točka presjeka kružnica $(AZCP)$ i (QBD). Uočimo da tada treba vrijediti $X' = X$ ili $X' = P'$.
Pretpostavimo da vrijedi $X' = P'$. Budući da je X' inverzna slika točke Z s obzirom na kružnicu ω, vrijedi $Z = P$ što je kontradikcija s činjenicama da je $P = AB \cap CD$ i $Z = (BAE) \cap (CDE)$. Dakle, vrijedi $X' = X$.
Iz već pokazane tvrdnje da je četverokut $AFX'D$ tetivan sada slijedi da je četverokut $AFXD$

tetivan. Uočimo da tada zbog jednakih obodnih kutova nad istom tetivom vrijedi:

$$\angle AXD = \angle AFD = \angle MFD. \tag{4.13}$$

Također, iz činjenice da je točka F inverzna slika točke E s obzirom na kružnicu ω prema definiciji inverzije 3.5 slijedi:

$$|ME| \cdot |MF| = |MD|^2 = |MB|^2,$$

odnosno

$$\frac{ME}{MD} = \frac{MD}{MF} \quad \text{i} \quad \frac{ME}{MB} = \frac{MB}{MF}. \tag{4.14}$$

Tada iz 4.14 i činjenica $\angle FMD = \angle EMD$ i $\angle BMF = \angle BME$ po SKS teoremu o sličnosti trokuta vrijedi $\triangle MFD \sim \triangle MDE$ i $\triangle MBF \sim \triangle MEB$ pa slijedi:

$$\angle DFM = \angle MDE \quad \text{i} \quad \angle MFB = \angle EBM.$$

Budući da je trokut DMB jednakokračan, kutovi $\angle MDE$ i $\angle EBM$ su jednakih veličina pa vrijedi:

$$\angle DFM = \angle MFB.$$

Nadalje uočimo da vrijedi:

$$\angle MFD = 180^\circ - \angle DFM = 180^\circ - \angle MFB = \angle BFM. \tag{4.15}$$

Iz 4.13 i 4.15 slijedi:

$$\begin{aligned} \angle AXD &= \angle BFM \\ &= \angle BFC \\ &= \angle BXC \quad \text{(jer je četverokut } CBFX \text{ tetivan).} \end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi $\angle AXD + \angle CXB = 180^\circ$ iz čega slijedi tražena tvrdnja $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$. $\square$

4.8 Zaključak

U zadatcima s natjecanja u kojima se koristi spiralna sličnost možemo uočiti da često treba pokazati da neki pravac dira kružnicu, da se pravci sijeku na kružnici, da je neki četverokut tetivan ili da neka točka leži na kružnici i slično.

Postupak rješavanja zadataka najčešće je takav da se koriste razni geometrijski teoremi kako bi se uočili slični trokuti i odredio centar spiralne sličnosti ili se počinje od pretpostavke da je neka točka centar spiralne sličnosti. Tada se korištenjem teorema o spiralnoj sličnosti dolazi do rezultata koji vodi k rješenju ili je rješenje zadatka.

U ovdje riješenim zadatcima najčešće smo koristili teoreme 2.5 za određivanje centra spiralne sličnosti i 2.11 za pokazivanje da je neki četverokut tetivan te za uočavanje drugog para spiralne sličnosti.

Također, svi se zadatci riješeni u ovom radu mogu riješiti na više načina od kojih neki mogu biti i pogodniji od onih prikazanih ovdje kao što je to slučaj sa rješenjem zadatka 4.7.

Bibliografija

[1] *AoPS Online*, https://artofproblemsolving.com/community/c13_contests, (studeni 2020.).

[2] *International Mathematical Olympiad*, https://www.imo-official.org/problems.aspx, (studeni 2020.).

[3] J. Baca, *On a special center of spiral similarity*, (2019), https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2019-01/mr_1_2019_spiral_similarity.pdf.

[4] M. Bombardelli i D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, (2007), https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/EGskripta.pdf.

[5] Brilliant.org, *Pascal's Theorem*, https://brilliant.org/wiki/pascals-theorem/.

[6] E. Chen, *How to Use Directed Angles*, (2015), https://web.evanchen.cc/handouts/Directed-Angles/Directed-Angles.pdf.

[7] H. S. M. Coxeter i S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, sv. 19, The Mathematical Association of America, 1967, str. 95–101.

[8] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika I*, str. 297–299, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[9] N. Rapanos, *The harmonic quadrilateral and its properties*, (2009), str. 1–2, https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpQkZ3NklyXzliWG8/view.

[10] Y. Zhao, *Three Lemmas In Geometry*, Massachusetts Institute of Tehnology, (2010), https://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf.

Sažetak

Spiralna sličnost je preslikavanje euklidske ravnine zadano kao kompozicija homotetije i rotacije sa zajedničkim centrom. U ovom radu prikazani su osnovni teoremi o spiralnoj sličnosti te neke njezine primjene u rješavanju složenijih zadataka iz područja planimetrije.

U uvodnom poglavlju dan je pregled poznatih preslikavanja sličnosti i istaknuto je mjesto spiralne sličnosti među njima. Zatim se uočava da je spiralnu sličnost praktično prikazati kao geometrijsku interpretaciju umnoška dvaju kompleksnih brojeva te se dokazuje egzistencija i jedinstvenost spiralne sličnosti koja za zadane dvije dužine preslikava jednu dužinu u drugu. U daljnjim teoremima opisuje se određivanje centra spiralne sličnosti za različite slučajeve te se uočava da spiralne sličnosti uvijek dolaze u paru. Definira se pojam simedijane u trokutu i pokazuje se povezanost simedijane s položajem centra spiralne sličnosti.

U svrhu rješavanja zadataka u kojima se primjenjuje spiralna sličnost navedeni su još neki pojmovi odnosno dokazani pojedini rezultati, uglavnom povezani s geometrijom kružnice (Apolonijeva kružnica, inverzija, Pascalov teorem).

Završno, najopsežnije poglavlje sastoji se od rješenja nekoliko zadataka s Međunarodne matematičke olimpijade (IMO) te s matematičkih natjecanja u Japanu, Južnoj Koreji i Iranu. U svim zadatcima primjenjuje se spiralna sličnost. To nije uvijek i najprikladniji način rješavanja, ali su primjeri pogodni za uočavanje uloge spiralne sličnosti.

Summary

Spiral similarity is the mapping of the Euclidean plane given as a composition of homothety and rotation with a common center. This paper presents the basic theorems on spiral similarity and some of its applications in solving complex problems in the field of planimetry.

The introductory chapter gives an overview of the known similarity mappings and highlights the place of the spiral similarity among them. It is noticed that it is useful to present the spiral similarity as a geometric interpretation of the product of two complex numbers, and the existence and uniqueness of the spiral similarity is proven, which for a given pair of line segments maps one onto another. Further theorems describe the determination of the center of spiral similarity in different cases and it is observed that spiral similarities always occur in pairs. The notion of a symmedian in a triangle is defined and its connection with the position of the center of the spiral similarity is explained.

In order to solve problems in which spiral similarity is applied, some other concepts and results are set forth, mainly related to the geometry of a circle, such as the Apollonius circle, inversion and Pascal's theorem.

The final and the most comprehensive chapter consists of solutions to several problems from the International Mathematical Olympiad (IMO) and from mathematical competitions in Japan, South Korea and Iran. In each solution, spiral similarity is applied. This approach is not always the most practical one, but the examples are suitable for observing the role of spiral similarity.

Životopis

Rođena sam 27. siječnja 1989. u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole, 2003. godine upisala sam Prirodoslovno - matematičku gimnaziju u Karlovcu. 2007. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2011. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički, isto na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2013. godine upisala sam diplomski sveučilišni studij matematike i informatike, smjer nastavnički, također na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu.