Modeli kreditnog rizika temeljeni na intenzitetu

Krizman, Ana Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Marija Krizman

MODELI KREDITNOG RIZIKA TEMELJENI NA INTENZITETU

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, ožujak, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima koji su bili uz mene na svakom koraku ovog dugog i teškog putovanja.
Hvala na bezuvjetnoj potpori, strpljenju i ljubavi.
Veliko hvala mentorici na ukazanom povjerenju, suradnji, strpljenju i pomoći u izradi ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Rizik od neispunjenja ugovornih obveza je mogućnost da jedna od ugovornih strana ne ispoštuje svoje ugovorne obveze te tako drugu ugovornu stranu dovede do gubitka. Pod pojmom kreditni rizik podrazumijevamo rizik povezan uz kreditne događaje, kao što su promjene u kvaliteti kredita ili neispunjenje ugovornih obveza. Kako bi se smanjila mogućnost gubitka nastalog pojavom nekog od kreditnih događaja izrazito je važno pridati veliku pozornost modeliranju kreditnog rizika.

Ovaj rad je strukturiran u četiri poglavlja od kojih se u prvom poglavlju uvode opći pojmovi koji će se koristiti u radu, kao što su pojam kredita, kreditnog rizika te važnosti modeliranja istog. Također, uvode se vrste modela kreditnog rizika te se ukratko opisuju razlike među njima. Kako se ovaj rad bazira na modelima koji su temeljeni na intenzitetu, ostale vrste modela bit će samo ukratko objašnjene.

U drugom poglavlju ovog rada uvest ćemo pojam brojećeg procesa te preko njega definirati Poissonov te Coxov proces koji će nam dati potreban alat za modeliranje vremena neispunjenja ugovornih obveza. Naime, u modelima kreditnog rizika temeljenim na intenzitetu vrijeme neispunjenja ugovornih obveza je vrijeme prvog skoka u Poissonovom, odnosno Coxovom procesu ovisno o tome je li intenzitet, odnosno stopa hazarda deterministička funkcija ili slučajni proces.

Treće poglavlje posvećeno je isključivo modelima kreditnog rizika temeljenim na intenzitetu. Kod ove vrste modela neispunjenje ugovornih obveza je potpuno nepredvidivo, te se oni oslanjaju na tržišne podatke umjesto na parametre specifične za neko poduzeće. Proučavat će se temeljni problemi vrednovanja potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza (*eng. defaultable claims*) te ćemo uvesti procese cijena za slučaj kad je intenzitet deterministički, odnosno kad je intenzitet slučajan. Na kraju ovog poglavlja opisat ćemo rezultat koji je dao Lando (1998.).

Na kraju, u četvrtom poglavlju promatrat ćemo zamjene kreditnog rizika, odnosno kreditne derivate koji pružaju zaštitu od pojave nekog od kreditnih događaja. Uvest ćemo formule za izračun vrijednosti zamjene kreditnog rizika te njezine cijene. Također, dat ćemo formulu za kalibriranje intenziteta kada je on konstantan, a koja se često koristi na tržištu.

Poglavlje 1

Krediti i kreditni rizik

Izraz kredit ili zajam se odnosi na vrstu sredstva financiranja u kojem se novčani iznos posuđuje u zamjenu za buduću otplatu posuđene vrijednosti ili iznosa glavnice. U mnogim slučajevima zajmodavac, odnosno pružatelj kredita također dodaje troškove kamata te dodatnih naknada na vrijednost glavnice koju zajmoprimac, odnosno tražitelj kredita mora vratiti uz glavnicu. Zajmovi se mogu dati kao određeni iznos isplaćen jednokratno ili mogu biti dostupni kao otvorena kreditna linija do određenog limita koja je dostupna za korištenje unutar unaprijed određenog vremenskog perioda. Krediti dolaze u mnogo različitih oblika, uključujući osigurane, neosigurane, komercijalne i osobne zajmove.

Zajam je oblik duga pojedinca ili drugog entiteta. Zajmodavac, obično korporacija, financijska institucija ili vlada, posuđuje određenu sumu novca zajmoprimcu. Zauzvrat, zajmoprimac pristaje na određeni skup uvjeta, uključujući sve financijske troškove, kamate, datum otplate i druge uvjete. U nekim slučajevima zajmodavac može zahtijevati kolateral kako bi osigurao zajam i osigurao otplatu. Krediti također mogu biti u obliku obveznica te depozitnih potvrda.

Krediti, ukoliko se njima pametno upravlja, mogu izgraditi ekonomiju, stvoriti učinkovitu raspodjelu kapitala i bogatstva i donijeti prosperitet te su nužni u svakom financijskom sustavu. Krediti imaju jednu od glavnih funkcija na financijskim tržištima, a to je usmjeravanje sredstava od štediša do potrošača, odnosno omogućavanje prelaska sredstava s korisnika koji nemaju mogućnost ulagati produktivno, onima koji imaju takve mogućnosti. Krediti omogućuju pojedincima da financiraju svoje potrebe kao što su kupnja kuće, automobila, namještaja itd. Pomažu tvrtkama da pokrenu ili prošire poslovanje, a vladama omogućuju financiranje projekata od javnog interesa, kao što su komunalije, škole, ceste itd.

Odobravanje kredita obavljaju financijski posrednici. Financijski posrednici ključni su za zdravo funkcioniranje financijskih tržišta. Oni određuju kome će se kredit odobriti te uvjete po kojima se kredit odobrava. U financijske posrednike spadaju poslovne i investicijske banke, štedno-kreditne zadruge, osiguravajuća društva, uzajamni fondovi, mirovinski fondovi i financijska poduzeća.

U protekla tri desetljeća došlo je do velikog rasta u broju inovativnih financijskih ugovora i sofisticiranih proizvoda koje nude financijski posrednici. Međutim, ako se ne koriste oprezno i njihov se puni rizik ne razumije u potpunosti, mogu imati razorne posljedice na financijski sustav. Nakon financijske krize 2007. godine, došlo je do promjena na financijskim tržištima i povećanog fokusa na važnost kredita, kreditnog rizika te upravljanja istim.

Kreditni rizik je mogućnost gubitka koji nastaje uslijed neplaćanja zajma ili ispunjenja ugovornih obveza. Tradicionalno se odnosi na rizik da zajmodavcu dugovana glavnica i kamate neće biti vraćene, što rezultira prekidom novčanih tokova i povećanim troškovima naplate. Dodatni novčani tokovi mogu se dogovoriti kako bi se osiguralo dodatno pokriće kreditnog rizika. Kada se zajmodavac suoči s povećanim kreditnim rizikom, on se može umanjiti višom kuponskom stopom, što osigurava veće novčane tokove.

Kada zajmodavci nude hipoteke, kreditne kartice ili druge vrste zajmova, postoji rizik da zajmoprimac ne može vratiti zajam. Slično tome, ako se klijentu nudi kredit, postoji rizik da ga on neće moći vratiti. Kreditni rizik također opisuje rizik da izdavatelj obveznica ne može izvršiti plaćanje ili da osiguravajuće društvo neće moći platiti zahtjev.

Kreditni rizik se računa na temelju ukupne sposobnosti dužnika da vrati zajam prema izvornim uvjetima tog zajma. Da bi procijenili kreditni rizik potrošačkog zajma, zajmodavci razmatraju kreditnu povijest klijenta, sposobnost otplate, kapital, uvjete zajma i povezano osiguranje, odnosno kolaterale.

Iako je nemoguće točno znati tko će ispuniti obveze, pravilna procjena i upravljanje kreditnim rizikom može smanjiti ozbiljnost gubitka. Neispunjenje ugovornih obveza ili *default* dužnika se može dogoditi zbog nesposobnosti ili nespremnosti dužnika. Financijski gubitak koji proizlazi iz nespremnosti obveznika na plaćanje je rjeđi u usporedbi s gubitkom do kojeg dolazi zbog nemogućnosti plaćanja. Nespremnost dužnika da plati svoje obveze može proizići iz uvjeta financijskog ugovora, ali može nastati i kod transakcija s visokom polugom, gdje sudjelovanje u kapitalu ne postoji.

Kreditni rizik u većini slučajeva proizlazi iz nemogućnosti ispunjavanja ugovornih obveza dužnika. Nemogućnost plaćanja povezana je s pojmovima neplaćanja, insolventnosti i bankrota ili stečaja. Insolventnost se odnosi na situaciju u kojoj obveza dužnika prelazi vrijednost njegove imovine i pravni je pojam koji znači da dužnik nije u mogućnosti platiti svoje obveze. Stečaj je pravni pojam koji nameće sudski nadzor nad financijskim poslovima onih koji su insolventni ili u neplaćanju. Kad dužnik dođe do stečaja, njegova imovina je izgubila na vrijednosti, a stečajni postupak još više smanjuje vrijednost imovine. Iako će sud pokušati zadržati obveznika u poslovanju, u stvarnosti su kupci, dobavljači i druge povezane pravne i fizičke osobe manje sklone daljnjem poslovanju. Imovina se brzo prodaje po cijenama ispod pravedne vrijednosti, a nematerijalna imovina, poput imena poduzeća, nema vrijednost. Kao rezultat toga, vjerovnici dobivaju manje od onoga što im se duguje.

Default ili neispunjenje ugovornih obveza definira se kao zakašnjelo ili propušteno plaćanje ugovorne obveze ili podnošenje zahtjeva za stečaj. Nadalje, neispunjavanje ugovornih obveza se može smatrati narušenom razmjenom kojom dužnik nudi vjerovnicima restrukturirani dug, vrijednosne papire ili imovinu koji rezultiraju smanjenom financijskom obvezom u odnosu na izvornu obvezu.

Postoje i tehnička neispunjavanja ugovornih obveza koja se mogu dogoditi ukoliko se krše određeni financijski ugovori, poput maksimalne financijske poluge ili minimalnog pokrića duga kako je definirano ugovorima. Tehnički *default* je uveden kako bi ograničili utjecaj dužnika iznad određene razine i održali minimalni omjer primljenog dohotka u odnosu na otplatu duga. Iako tehnički *default* obično ne dovodi do financijskog gubitka, ipak daje moć vjerovnicima da ubrzaju proces naplate duga ukoliko dužnik ne uspije riješiti kršenje financijskih ugovora u razdoblju počeka. Neuspjeh u ispunjavanju ugovornih obveza kod dugoročnih obveza zbog administrativnih pogrešaka koje nisu povezane sa kreditnom sposobnošću ili spremnošću izvršenja plaćanja u većini slučajeva rješavaju se u jedan do dva dana te obično ne dovode do financijskog gubitka. Međutim, ako plaćanje nije na vrijeme, bilo zbog nemogućnosti ili nespremnosti dužnika, to će dovesti do financijskog gubitka, a stupanj gubitka ovisit će o tome koliko je kašnjenje.

Kreditni rizik uključuje i smanjenje kreditne sposobnosti, što će, iako je manje ozbiljno od neispunjenja ugovornih obveza, povećati buduću vjerojatnost *defaulta*. Dokle god izloženost postoji, kreditni rizik je određen vjerojatnošću *defaulta*, povratom ili gubitkom s obzirom na *default* te kreditnom izloženošću.

Da bi se procijenio kreditni rizik, potrebno je identificirati rizične transakcije i proizvode. Iz tog razloga, upravljanje kreditnim rizikom važan je dio poslovanja banaka i drugih korporacija koje posluju s velikim brojem kreditno izloženih stranaka te imaju velike iznose kredita. Prije nego rizikom možemo upravljati, potrebno ga je procijeniti. Kako bi procijenili kreditni rizik, financijski posrednici koriste modele kreditnog rizika. Modeli kreditnog rizika sastavni su dio procjene kreditnog rizika te igraju sve veću ulogu u upravljanju rizikom.

Mnogi sofisticirani modeli kreditnog rizika razvijeni su proteklih godina. Brz napredak na ovom području rezultat je sve veće važnosti upravljanja kreditnim rizikom, kao i rasta inovativnih financijskih proizvoda poput kreditnih izvedenica i drugih strukturiranih proizvoda s isplatama vezanim za kreditne događaje. Čimbenici poput regulatornih pitanja, dostupnosti empirijskih podataka o neispunjavanju ugovornih obveza kao i promjene kreditnog rejtinga također naglašavaju važnost modela kreditnog rizika te njegove procjene.

1.1 Podjela modela kreditnog rizika

Kreditnim događajem podrazumijevamo svaki slučajan događaj čije nastupanje utječe na sposobnost ugovorne strane u financijskom ugovoru da ispuni svoju ugovornu obvezu. *Default* smatramo kreditnim događajem, a ostali primjeri kreditnih događaja uključuju npr. promjene u kreditnoj kvaliteti korporativne obveznice. Napomenimo da ugovorne strane u financijskom ugovoru ne mogu izravno primijetiti kreditne događaje. Ovdje želimo naglasiti da sposobnost ugovorne strane dužnika u financijskom ugovoru da ispuni ugovornu obvezu ne mora nužno nepovoljno utjecati i na nastupanje kreditnog događaja. Na primjer, ako se kreditni događaj dogodi zbog povećanja kreditne kvalitete korporativnih obveznica, tada se na gore navedenu sposobnost ne utječe nepovoljno.

Veliki broj matematičkih istraživanja koja su posvećena kreditnom riziku tiču se modeliranja slučajnog vremena kada se dogodi *default*, to jest vremena neispunjenja ugovornih obveza. Neki pristupi dozvoljavaju mogućnost povremenih kreditnih događaja koji su povezani s promjenama u kreditnoj kvaliteti korporativne obveznice. U tom slučaju, modeliranje slučajnog vremena migracije kredita postaje važno pitanje.

Drugi važan problem koji se javlja kod modeliranja kreditnog rizika je pitanje matematičkog modeliranja takozvane stope oporavka. Stopa oporavka određuje iznos koji je potrebno platiti ugovornoj strani koja drži ugovor u slučaju neispunjenja ugovornih obveza. Plaćanja oporavka zajedno s nominalnim iznosom ugovora određuju potencijalne novčane tokove povezane s ugovorom. Glavni cilj modela kreditnog rizika je osigurati načine određivanja cijena i zaštite od financijskih ugovora koji su osjetljivi na kreditni rizik. Bilo koji pristup procjeni kreditnog rizika treba imati za cilj stvaranje konzistentnog financijskog modela.

S obzirom na način utvrđivanja vremena neispunjenja ugovornih obveza, uz nekoliko sporednih, postoje dvije glavne vrste modela kreditnog rizika koje opisuju proces neispunjenja ugovornih obveza. Prvu vrstu nazivamo strukturalnim modelima, a drugu modelima temeljenim na intenzitetu. Osim ove dvije vrste postoje i hibridni modeli koji su kombinacija modela temeljenih na intenzitetu i strukturalnih modela te empirijski modeli.

Strukturalni modeli koriste razvoj strukturalnih varijabli poduzeća, kao što su vrijednost imovine i duga, da bi utvrdile vrijeme neispunjenja ugovornih obveza. Prvi suvremeni model kreditnog rizika je Mertonov model iz 1974. godine te se on smatra prvim strukturalnim modelom. U Mertonovom modelu poduzeće neće ispuniti svoje ugovorne obveze ukoliko je, u trenutku otplate dugovanja, nepodmireno dugovanje veće od imovine. U tom modelu poduzeće ima nepodmireni dug, a vrijednost imovine poduzeća prati geometrijsko Brownovo gibanje. Drugi pristup strukturalnim modelima dali su Black i Cox (1976.). U njihovom pristupu se smatra da poduzeće neće ispuniti svoje ugovorne obveze čim mu vrijednost imovine padne ispod određenog praga. Za razliku od Mertonovog modela, kod Black-Coxovog modela se neispunjenje ugovornih obveza može dogoditi u bilo kojem trenutku.

Jedna od glavnih nerealnih pretpostavki, odnosno nedostataka izvornog Mertonovog okvira bila je da se neispunjenje ugovornih obveza može dogoditi samo po dospijeću duga kada imovina tvrtke više nije dovoljna za pokrivanje svih ugovornih obveza. Kao odgovor na takve poteškoće razvijen je alternativni pristup koji i dalje usvaja Mertonov okvir što se tiče procesa neispunjenja ugovornih obveza, ali je uklonio nerealne pretpostavke. Unatoč tim poboljšanjima u odnosu na izvorni Mertonov okvir, modeli druge generacije strukturalnih modela i dalje trpe neke nedostatke koji su glavni razlozi njihovih relativno loših rezultata, a jedan od njih je činjenica da većina strukturalnih modela pretpostavlja da je vrijednost poduzeća neprekidna kroz vrijeme. Osim toga, strukturalni pristup pokušava odrediti kojim bi se korporativnim obveznicama s kreditnim raspršenjem trebalo trgovati na temelju brojnih informacija o pojedinom poduzeću, poput strukture kapitala i vrijednosti imovine poduzeća. Dakle, strukturalni modeli zahtijevaju informacije o bilanci tvrtke, koje su dostupne javnosti najviše četiri puta godišnje, odnosno kvartalno. Pored toga, imovinom poduzeća se često trguje privatno, što otežava promatranje njene vrijednosti tokom vremena. Zbog toga je procjena ulaznih parametara problematična, pa je strukturalne modele teško kalibrirati za vanjske korisnike. Strukturalne modele nećemo detaljnije obrađivati u ovom radu, a više informacija o njima može se pronaći u gore spomenutoj literaturi, Merton (1974.) i Black i Cox (1976.)

S druge strane, modeli temeljeni na intenzitetu ne razmatraju vezu između neispunjenja ugovornih obveza i vrijednosti poduzeća na eksplicitan način, a najpoznatiji modeli temeljeni na ovom principu su Jarrow i Turnbull model (1995.), Jarrow, Lando i Turnbull model (1997.), Madan i Unal model (1998.), Duffie i Singleton model (1999.) te Kijima i Muromachi model (2000.).

U modelima temeljenim na intenzitetu uvode se zasebne i eksplicitne pretpostavke o dinamici vjerojatnosti neispunjenja ugovornih obveza i stopi oporavka. Te se varijable modeliraju neovisno o strukturnim svojstvima poduzeća, kao što su njezina volatilnost i financijska poluga. Općenito govoreći, modeli temeljeni na intenzitetu pretpostavljaju egzogeno danu stopu oporavka, neovisnu o vjerojatnosti neispunjenja ugovornih obveza.

Za razliku od strukturalnih modela, vrijeme neispunjenja ugovornih obveza kod modela temeljenih na intenzitetu nije određeno pomoću vrijednosti poduzeća, već pomoću prvog skoka u egzogeno danom procesu skokova (npr. Poissonovom ili Coxovom procesu). Proces skoka je slučajan proces kod kojeg se stanje mijenja samo u slučajnim trenucima tvoreći rastući niz. Pojam proces skoka ponekad se primjenjuje za bilo koji proces koji je po dijelovima konstantan.

Parametri koji određuju stopu hazarda neispunjenja ugovornih obveza izvedeni su iz dostupnih tržišnih podataka. Kod modela temeljenih na intenzitetu proces vrijednosti poduzeća se ili ne modelira uopće ili ima samo pomoćnu ulogu dok je vrijeme neispunjenja ugovorne obveze ili vrijeme *defaulta* modelirano kao nepredvidivo vrijeme zaustavljanja, pa je prema tome neispunjenje ugovornih obveza potpuno iznenađenje.

U modelima temeljenim na intenzitetu, slučajno vrijeme neispunjenja ugovornih obveza je dano kao potpuno nepristupačno vrijeme zaustavljanja. Glavni alat u ovom pristupu je egzogena definiranost uvjetne vjerojatnosti neispunjenja ugovornih obveza, uz pretpostavku da se *default* još nije dogodio. S obzirom da je u većini slučajeva to napravljeno pomoću stope hazarda, modele temeljene na intenzitetu se još naziva i modelima stope hazarda ili modelima skraćene forme.

Strukturalni modeli neispunjenja ugovornih obveza nam daju vezu između kreditne sposobnosti poduzeća te ekonomskih i financijskih uvjeta poduzeća. Prema tome, neispunjenja ugovornih obveza su endogeno generirana u modelu za razliku od egzogeno danih kod pristupa temeljenog na intenzitetu. Sljedeća razlika između ova dva pristupa je odnos prema stopi oporavka. Kod modela temeljenih na intenzitetu, stope oporavka su egzogeno dane, a kod strukturalnih modela stope oporavka su određene imovinom te obvezama poduzeća.

Neki autori, uključujući Madana i Unala (1998., 2000.) te Davydova i druge (2000.)

kombiniraju osnovne ideje oba gore spomenuta pristupa uzimajući da je stopa hazarda neispunjenja ugovornih obveza direktno povezana s trenutnom vrijednošću imovine poduzeća (ili kapitalom poduzeća). Modeli temeljeni na intenzitetu s ovom značajkom nazivaju se hibridni modeli. Kod ovakvog pristupa vrijeme neispunjenja ugovornih obveza je i dalje potpuno nedostupno vrijeme zaustavljanja, ali vjerojatnost da će doći do neispunjenja ugovornih obveza može brzo narasti kada ukupna vrijednost imovine poduzeća, odnosno vrijednost kapitala poduzeća dođe do određene granice. Kod hibridnih modela je vrijeme neispunjenja ugovornih obveza modelirano u terminima slučajnog intenziteta, a uvjetna vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza je direktno povezana s trenutnom razinom vrijednosti promatranog poduzeća ili trenutnom tržišnom vrijednošću imovine poduzeća.

Kao i ostale vrste modela, i hibridni modeli imaju svoje prednosti i nedostatke. Neke od prednosti hibridnih modela su da je vrijeme neispunjenja ugovornih obveza nepredvidivo vrijeme zaustavljanja, te je zbog toga neispunjenje ugovornih obveza gotovo iznenađenje. Također, razina kreditnog rizika može se jednostavno izraziti. Nedostatak hibridnih modela je taj što se trenutne informacije o imovini poduzeća ne uzimaju u obzir te što s određenim specifičnim značajkama povezanim sa sigurnosnim obvezama i starosti duga nije lako upravljati. Uz to, sva važna pitanja vezana uz strukturu kapitala promatranog poduzeća su van dosega ovog pristupa. Jedan takav hibridni model opisali su Duffie i Lando (2001.) u kojem u obzir uzimaju model vrijednosti poduzeća s nepotpunim knjigovodstvenim podacima.

Zadnja vrsta modela kreditnog rizika, koju ćemo također samo spomenuti, naziva se empirijski modeli neispunjenja ugovornih obveza ili kredit skoring modeli. Najpoznatiji modeli temeljeni na ovom pristupu su *Z-score* model koji je razvio Altman (1968.) te njegov nasljednik ZETA model (Altman i drugi 1977.) koji koriste brojne varijable za dobivanje kreditnog skora koji daje informacije o kreditnoj sposobnosti poduzeća. Međutim, empirijski modeli ne daju vjerojatnosti neispunjenja ugovornih obveza koje bi se mogle koristiti za modeliranje kreditnog rizika.

U *Z-score* modelu, Altman je uveo upotrebu pet računovodstvenih omjera koji se koriste za predviđanje neispunjenja ugovornih obveza za industrijska poduzeća. Jedan od nedostataka *Z-score* modela je pogreška tipa II. Iako su identificirane sve tvrtke koje ne ispunjavaju ugovorne obveze, druge tvrtke koje nisu *defaultirale* su također klasificirane kao tvrtke koje ne ispunjavaju ugovorne obveze. Kod ovog modela, više pozitivne vrijednosti Z-statistike impliciraju manju vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza.

Altman je razvio i varijacije svog izvornog *Z-score* modela za privatna proizvodna poduzeća, neproizvodna poduzeća i poduzeća na novim tržištima. Ove varijacije koriste različite pondere i financijske omjere za procjenu vrijednosti Z-statistike.

Problem kod ove vrste modela je da su računovodstveni podaci dostupni samo u određenim intervalima (npr. tromjesečno) i temelje se na povijesnim ili knjigovodstvenim principima. Stoga ovi modeli neće identificirati tvrtku koja vrlo brzo propada ili događaje uslijed financijskih kriza.

Drugi model nazvan ZETA model rješava neke od nedostataka *Z-score* modela. ZETA model koristi podatke iz financijskih izvještaja poduzeća za praćenje trendova i slanje upozorenja o njihovom financijskoj sposobnosti.

Poglavlje 2

Poissonovi i Coxovi procesi

2.1 Poissonov proces

Brojeći proces je nenegativan, cjelobrojan te rastući slučajni proces. Najčešće se upotrebljava kada je potrebno izbrojiti koliko se puta neki promatrani događaj ponavlja kroz određeni vremenski period te se stoga za skup indeksa obično uzima skup nenegativnih realnih brojeva $[0, +\infty\rangle$, iako se često koristi i općenitiji skup indeksa $\mathbb{R}$. Formalno, brojeći proces $N = (N_t : t \geq 0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je bilo koji nenegativni, cjelobrojni slučajni proces takav da $N_s \leq N_t$ za $s \leq t$. Ako je $s < t$, tada je $N_t - N_s$ broj događaja koji su se dogodili unutar intervala $\langle s, t]$. Primjeri brojećih proces uključuju Poissonove procese te procese obnavljanja.

Poissonov proces jedan je od najčešće korištenih brojećih procesa te se koristi u situacijama kada je u nekom vremenskom periodu potrebno izbrojiti kreditne događaje koji se javljaju potpuno nasumično. Poissonovi procesi nam omogućavaju prigodan način modeliranja rizika od neispunjenja ugovornih obveza. Za razliku od strukturalnih modela, u modelima temeljenim na intenzitetu vrijeme neispunjenja ugovornih obveza nije određeno pomoću vrijednosti poduzeća, već je to prvi skok slučajnog procesa, a parametri koji određuju intenzitet defaulta izvedeni su iz tržišnih podataka.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Pretpostavimo da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Također, neka je dana filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$. Ne pretpostavljamo da nužno vrijedi $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, niti $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definicija 2.1.1. *Slučajnu varijablu $\tau : \Omega \to [0, +\infty\rangle$ nazivamo vrijeme zaustavljanja ako za svaki $t \in [0, T]$ vrijedi*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Radi praktičnosti, pretpostavljamo da je $\mathbb{P}(\tau = 0) = 0$ i $\mathbb{P}(\tau > t) > 0$ za svaki $t \in \mathbb{R}^+$. Posljednji uvjet znači da se pretpostavlja da je τ neograničen, točnije nije dominiran konstantom s vjerojatnošću 1.

Općenito se brojeći slučajni procesi mogu jednostavno definirati na sljedeći način. Uzmimo strogo rastući niz vremena zaustavljanja $\tau = (\tau_k : k \in \mathbb{N})$ te definiramo brojeći proces pridružen tom nizu kao slučajni proces $N = (N_t : t \geq 0)$ dan s

$$N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}} \tag{2.1}$$

Definirajmo prvo Poissonov proces $N = (N_t : t \geq 0)$ s konstantnim intenzitetom $\lambda > 0$.

Definicija 2.1.2. *Slučajni proces $N = (N_t : t \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazivamo Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ ako vrijedi:*

i) $N_0 = 0$,

ii) proces $(N_t : t \geq 0)$ ima nezavisne priraste,

iii) prirasti $N_t - N_s$ imaju Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda(t - s)$, odnosno, za sve $0 \leq s < t$ je

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lema 2.1.3. *Neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija dana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Poissonov proces $N = (N_t : t \geq 0)$ s intenzitetom $\lambda > 0$ je brojeći proces, odnosno postoji strogo rastući niz vremena zaustavljanja $(\tau_n : n \geq 0)$ takav da je*

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau_k \leq t\}}.$$

Dokaz. Neka je niz vremena zaustavljanja $(\tau_n : n \geq 0)$ dan sa $\tau_n = \tau_{n-1} + \xi_n$, pri čemu je $\tau_1 = \xi_1$, gdje je $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabili te $\xi_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Slučajna varijabla ξ_n je pozitivna i vrijedi

$$\mathbb{P}(\xi_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad \mathbb{P}(\xi_n > x) = e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Zbog nezavisnosti, za proizvoljne nenegativne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\xi_1 > x_1, \ldots, \xi_n > x_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(\xi_j > x_j\right) = e^{-\lambda(x_1 + \cdots + x_n)}.$$

Tada je $\tau_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ za $n \in \mathbb{N}$ n-to slučajno vrijeme zaustavljanja, odnosno ξ_n vrijeme između $(n-1)$-og i n-tog vremena zaustavljanja. Kako je (ξ_n) niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ, slijedi da τ_n prati gama distribuciju s parametrima n i $1/\lambda$. Neka je N_t ukupan broj događaja do trenutka t. Tada je

$$\{N_t \geq n\} = \{\tau_n \leq t\}.$$

Pokažimo sada da brojeći proces N zadovoljava svojstva Poissonovog procesa. Svojstvo $i)$ iz Definicije 2.1.2 slijedi direktno iz $\mathbb{P}(\xi_1 > 0) = 1$. Pokažimo najprije da je za svaki $t > 0$, N_t Poissonova slučajna varijabla s parametrom λt. Kako τ_n ima gama razdiobu s parametrima n i $1/\lambda$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(\{N_t \geq n\} \setminus \{N_t \geq n+1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\tau_n \leq t\} \setminus \{\tau_{n+1} \leq t\}) \\ &= \mathbb{P}(\tau_n \leq t) - \mathbb{P}(\tau_{n+1} \leq t) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}dx - \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^t x^n e^{-\lambda x}dx.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Parcijalnom integracijom sada imamo

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^t x^n e^{-\lambda x}dx,$$

pa sada iz (2.2) imamo

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

iz čega slijedi da N ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt.

Neka je sada sa W_t dano vrijeme između trenutka t i prvog sljedećeg pojavljivanja vremena zaustavljanja. Pokazat ćemo da vrijedi

$$\mathbb{P}(W_t \leq z) = \mathbb{P}(\tau_1 \leq z), \qquad z \geq 0.$$

Imamo da je

$$\{W_t \leq z\} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t+z\}.$$

Doista, ako za n vrijedi $\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t+z$, tada je $W_t \leq z$, te obratno, ako je $W_t \leq z$ tada je sljedeće vrijeme zaustavljanja koje mora postojati u intervalu $\langle t, t+z]$. Recimo da je to vrijeme zaustavljanja $(n+1)$-o vrijeme zaustavljanja. Tada je $\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t+z$. Prema tome, gornja jednadžba vrijedi pa je

$$\mathbb{P}(W_t \leq z) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t+z). \tag{2.3}$$

Prema teoremu 11.3. iz [10] su $\tau_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ i ξ_{n+1} nezavisne slučajne varijable pa je zbog $\tau_{n+1} = \tau_n + \xi_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t+z\right) &= \iint\limits_{\substack{x \leq t \\ t < x+y \leq t+z}} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1}\, e^{-\lambda x}\, \lambda\, e^{-\lambda y}\, dx\, dy \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1}\, e^{-\lambda x} \left(\int_{-x+t}^{-x+t+z} \lambda\, e^{-\lambda y} dy \right) dx \\
&= \frac{(\lambda\, t)^n}{n!} \left(e^{-\lambda\, t} - e^{-\lambda(t+z)} \right).
\end{aligned}$$

Sada iz (2.3) imamo

$$\mathbb{P}\left(W_t \leq z\right) = \left(e^{-\lambda\, t} - e^{-\lambda(t+z)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1 - e^{-\lambda z}, \qquad z \geq 0,$$

odnosno, W_t ima istu distribuciju kao ξ_1.

Neka su $V_1, V_2, \ldots$ vremena između dva uzastopna vremena zaustavljanja, gdje proces počinje u trenutku t, to jest $V_1 = W_t$. Pokažimo da su $V_1, V_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable te da za svako i varijable V_i i ξ_i imaju jednaku distribuciju što opravdava tvrdnju da proces počinje od početka u trenutku t. Vrijedi

$$\left\{V_1 \leq x_1, \ldots, V_k \leq x_k\right\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t + x_1, \xi_{n+2} \leq x_2, \ldots, \xi_{n+k} \leq x_k\right\},$$

pa imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(V_1 \leq x_1,\ \ldots, V_k \leq x_k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t + x_1, \xi_{n+2} \leq x_2, \ldots, \xi_{n+k} \leq x_k\right) \\
&\overset{\text{nezavisnost}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t + x_1\right)\, \mathbb{P}\left(\xi_{n+2} \leq x_2\right) \ldots \mathbb{P}\left(\xi_{n+k} \leq X_k\right) \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t + x_1\right) \right] \prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}\left(\xi_i \leq x_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(W_t \leq x_1\right) \prod_{i=2}^{k} \mathbb{P}\left(\xi_i \leq x_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(\xi_i \leq x_i\right),
\end{aligned}$$

gdje poslijednji redak slijedi zbog (2.3). Fiksirajmo sada j i pustimo $x_i \to +\infty$ za $i \neq j$ pa zaključujemo da je $\mathbb{P}\left(V_j \leq x_j\right) = \mathbb{P}\left(\xi_j \leq x_j\right)$, odnosno vrijedi

$$\mathbb{P}\left(V_1 \leq x_1, \ldots, V_k \leq x_k\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(V_i \leq x_i\right).$$

Sada je prema Teoremu 11.1. iz [10] niz $(V_n : n \geq 0)$ niz nezavidnih slučajnih varijabli. Dakle, proces se ponaša kao da kreće izpočetka pa slijedi da je za svaki $h > 0$ ukupan broj vremena zaustavljanja u intervalu $\langle t, t+h]$ Poissonova slučajna varijabla s parametrom λh, odnosno vrijedi $N_{t+h} - N_t \sim \text{Poiss}(\lambda h)$ za svaki $h > 0$. Svojstvo *ii*) pokaže se na sličan način. □

Gore definirani Poissonov proces nazivamo vremenski homogenim iz razloga što je vjerojatnosna razdioba prirasta $N_{t+h} - N_{s+h}$ invarijantna s obzirom na pomak $h \geq -s$. Posebno, za proizvoljni $s < t$ se vjerojatnosna razdioba prirasta $N_t - N_s$ podudara s razdiobom slučajne varijable N_{t-s}. Konačno, primijetimo da je za sve $0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}\,(N_t - N_s) = \lambda(t - s).$$

Homogeni Poissonov proces gdje je intenzitet defaulta konstantan parametar λ vrlo lako možemo generalizirati dopuštajući da intenzitet defaulta ovisi o vremenu, odnosno $\lambda_t = \lambda(t)$ za neku funkciju $\lambda : \langle 0, \infty\rangle \to \langle 0, \infty\rangle$. U tom slučaju govorimo o nehomogenom Poissonovom procesu $N = (N_t : t \geq 0)$ s funkcijom intenziteta $\lambda(t)$ te, za razliku od homogenog Poissonovog procesa, svojstvo *iii*) iz Definicije 2.1.2 postaje:

$$\mathbb{P}\,(N_t - N_s = k) = \frac{\left(\int_s^t \lambda(u)\,du\right)^k}{k!}\, e^{-\int_s^t \lambda(u)\,du}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Posebno, uz pretpostavku da je $N_0 = 0$, imamo

$$\mathbb{P}\,(N_t = 0) = e^{-\int_0^t \lambda(u)\,du}.$$

Modifikacijom Leme 2.1.3 pokaže se da je N također brojeći proces određen vremenima zaustavljanja $(\tau_n : n \geq 0)$, gdje je $\tau_1 = \xi_1$, $\tau_n = \tau_{n-1} + \xi_n$, $(\xi_n)_n$ su nezavisne, jednako distribuirane kao ξ, gdje je

$$\xi = \inf\left\{t : \int_0^t \lambda(u) du \geq E_1\right\}, \tag{2.4}$$

za neku slučajnu varijablu $E_1 \sim \text{Exp}(1)$.

Vjerojatnosti opstanka u ovakvim procesima dane su sa

$$\mathbb{P}\,(N_t = 0) = \mathbb{P}\,(\tau > t) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_0^t \lambda(s) ds}\right).$$

Intenzitet, ili stopa hazarda, je uvjetna stopa *defaulta* te je uzimajući da se *default* nije dogodio dana sa

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}\,(\tau \in (t, t+h) \mid \tau > t)}{h} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda(t),$$

gdje je $F(t) = \mathbb{P}(\tau \leq t)$, a $f(t)$ je gustoća od F.

Stopa hazarda ili intenzitet $\lambda(t)$ je središnji element modela temeljenih na intenzitetu i predstavlja trenutnu vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza, odnosno kratkoročni rizik od neispunjenja ugovornih obveza.

2.2 Coxov proces

Coxov proces, odnosno dvostruki slučajni Poissonov proces daje nam koristan okvir za modeliranje cijena financijskih instrumenata u kojima značajnu ulogu ima kreditni rizik. U sklopu ovog okvira mogu se promatrati slučajevi u kojima se kreditni rizik javlja zbog mogućnosti neispunjenja ugovornih obveza jedne od ugovornih strana te slučajevi u kojima se neka mjera kreditnog rizika (na primjer kreditno raspršenje) koristi kao osnovna varijabla u ugovoru o izvedenici.

Ključni doprinos ovog pristupa je jednostavnost modeliranja kreditnog rizika kada postoji ovisnost između ročne strukture slobodne od *defaulta* i karakteristika neispunjenja ugovornih obveza poduzeća. Kao ilustraciju metode uvodimo generaliziranu verziju Markovljevog modela objašnjenu u Jarrow, Lando i Turnbull (1997). Ovakva generalizacija dopušta da intenziteti koji upravljaju intenzitetom neispunjenja ugovornih obveza i prijelaze između rejtinga ovise o varijablama stanja koje istodobno određuju razvoj ročne strukture slobodne od *defaulta* i mogućim drugim ekonomskim varijablama od interesa. Ovakav model se može koristiti za analizu raznih ugovora u kojima su kreditni rejting i mogućnost neispunjenja ugovornih obveza dio ugovora. Dva značajna primjera su ugovori zaštite od neispunjenja ugovornih obveza koji pružaju osiguranje poduzeću i takozvani kreditni okidači (eng. *credit triggers*) u ugovorima zamjene koji obično traže nagodbu u slučaju pogoršanja u poslovanju jedne od ugovornih strana.

Uvođenjem dodatne strukture u model, dobivamo novu klasu modela koju uz posebne postavke postaju sume afinih modela strukture oročenja. Ideja afinih modela strukture oročenja je generalizacija Vasičekovog modela i CIR modela koji daju osnovu za modeliranje krivulje dobiti. Navedena klasa modela istovremeno modelira ročne strukture za različite rejtinge i dopušta da raspršenja osciliraju nasumično čak i u razdobljima kad rejting poduzeća koje može neispuniti ugovornu obvezu ostaje nepromijenjen. Takvi modeli su korisni upraviteljima portfelja korporativnih obveznica i rizičnog javnog duga koji su ograničeni kreditnim linijama uz postavljenu gornju granicu na količinu obveznica određene kategorije rejtinga. S obzirom na takve linije, slučaj pogoršanja rejtinga može prisiliti upravitelja da ili proda dio pozicije ili se pokuša riješiti kreditne izloženosti na tržištima kreditnih derivata.

Konstrukcija Coxovog procesa

Coxov proces je generalizacija Poissonovog procesa u kojem je dozvoljeno da je intenzitet slučajan, ali na način da ako promatramo specifičnu realizaciju funkcije intenziteta $l(\cdot, \omega)$, proces skokova postane nehomogeni Poissonov proces s intenzitetom $l(s, \omega)$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor sa zadanom filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ te neka je $X = (X_t : 0 \leq t \leq T)$ adaptiran slučajni proces koji je neprekidan zdesna te ima limes slijeva i E_1 jedinična eksponencijalna slučajna varijabla koja je nezavisna od X. Također, neka je funkcija $\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ neprekidna i nenegativna funkcija. Jedna od mogućnosti za uvođenje stohastičkog intenziteta je da stavimo $\lambda_t = \lambda(X_t)$.

Varijable stanja uključuju kamatne stope bezrizičnog duga te mogu uključivati vrijeme, cijene dionica, kreditne rejtinge i druge relevantne varijable za određivanje vjerojatnosti neispunjenja ugovornih obveza. Uz pretpostavku da je poduzeće ispunilo svoje obveze do vremena t te uz danu povijest od $X = (X_t : 0 \leq t \leq T)$ do vremena t, vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza u nekom budućem malom vremenskom intervalu Δt jednaka je $\lambda(X_t)\Delta t + o(\Delta t)$.

Općenito ćemo promatrati adaptiran slučajni proces $(\lambda_t : t \geq 0)$ kojem su trajektorije integrabilne na konačnim intervalima. Trajektorije za koje je ovaj integral intenziteta beskonačan na intervalu $[0, T]$ su trajektorije za koje se neispunjenja ugovornih obveza uvijek dogode.

Vrijeme neispunjenja ugovornih obveza za ovakve pretpostavke definiramo s

$$\tau = \inf \left\{ t : \int_0^t \lambda_s \, ds \geq E_1 \right\}.$$

Primijetimo da je gornja definicija ekvivalentna definiciji vremena zaustavljanja (2.4). Ovo vrijeme neispunjenja ugovornih obveza možemo uzeti kao vrijeme prvog skoka Coxovog procesa s procesom intenziteta λ_s. Kad je λ_s velik, stopa hazarda raste brže i dostiže razinu nezavisne eksponencijalne varijable brže, pa prema tome vjerojatnost da je τ mali raste.

Iznad je modeliran prvi skok Coxovog procesa. Prilikom modeliranja Coxovog procesa nakon prvog skoka potrebno je osigurati da intenzitet integriran u modelu ostane konačan na konačnim intervalima da bi izbjegli eksplozije. Tada, uz dani vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te jedinični Poissonov proces $N = (N_t : t \geq 0)$ uz pretpostavku $N_0 = 0$ i nenegativan adaptiran slučajni proces $\lambda = (\lambda_t : t \geq 0)$ koji je nezavisan od $(N_t : t \geq 0)$ i neprekidan zdesna s limesima slijeva te integrabilan na konačnim intervalima, definiramo

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s \, ds < \infty, \qquad t \in [0, T] .$$

Tada je $\Lambda_0 = 0$ i Λ ima neopadajuće realizacije. Sada sa

$$\tilde{N}_t := N(\Lambda_t)$$

definiramo Coxov proces sa slučajnom mjerom intenziteta Λ. Tehnički uvjeti iz kojih slijedi da je ova definicija dobra mogu se pronaći u [9, Poglavlje 1.3.4].

Analogno kao kod homogenog Poissonovog procesa, za Coxov proces se može pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) &= e^{-\int_0^t \lambda_s \, ds}, \qquad 0 \le t \le T, \\ \mathbb{P}(\tau > t) &= \mathbb{E}\left(e^{-\int_0^t \lambda_s \, ds}\right), \qquad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Poglavlje 3

Modeli temeljeni na intenzitetu

Modeli temeljeni na intenzitetu opisuju neispunjenje ugovornih obveza pomoću egzogenog procesa skoka. Točnije, vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ je prvo vrijeme skoka Poissonovog procesa. Poissonov proces može imati deterministički ili slučajni intenzitet, te ga u tom slučaju zovemo Coxovim procesom. Kod ovih modela *default* nije izazvan osnovnim tržišnim parametrima, već oni imaju egzogenu komponentu koja je neovisna o svim tržišnim informacijama, a koja utječe na vrijeme neispunjenja ugovornih obveza. Nadgledanje tržišta (kamatne stope, deviznih tečajeva, itd.) ne daje cjelovite informacije o procesu neispunjenja ugovornih obveza te za neispunjenje ugovornih obveza ne postoji nikakvo ekonomsko obrazloženje. Ova familija modela posebno je prikladna za modeliranje opcija kreditnog raspršenja te ju je u njenoj osnovnoj formulaciji lako kalibrirati za zamjene kreditnog rizika (CDS) ili podatke o korporativnim obveznicama.

Za razliku od strukturalnih modela, modeli temeljeni na intenzitetu zaobilaze probleme s kalibracijom modela koristeći se tržišnim podacima. Pristup temeljen na intenzitetu oslanja se na tržišne podatke umjesto na parametre specifične za neko poduzeće i modelira neispunjenje ugovornih obveza kao neovisno od vrijednosti poduzeća. Dakle, pretpostavlja se da nema izravne veze između vrijednosti tvrtke i njenog neispunjenja ugovornih obveza. Umjesto toga, neispunjenje ugovornih obveza se smatra potpuno nepredvidivim i posljedica je iznenadnog, neobjašnjivog gubitka tržišne vrijednosti poduzeća. Dakle, poduzeće može neispuniti svoje ugovorne obveze u bilo kojem trenutku do dospijeća, što znači da je vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza uvijek veća od nule.

Glavna odstupanja između različitih modela temeljenih na intenzitetu svode se na drugačije pretpostavke u vezi s definiranjem procesa neispunjenja ugovornih obveza, stopom povrata te okidačem neispunjenja ugovornih obveza, kao i s procesom kamatne stope. Dakle, modeli temeljeni na intenzitetu dijele se na tri glavne grane: modeli temeljeni na *defaultu*, modeli tranzicije rejtinga i disperzivni modeli.

Pristup koji se temelji na *defaultu* povezuje cijenu obveznice s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza s obveznicom bez mogućnosti neispunjenja ugovornih obveza primjenom deviznog tečaja koji ovisi o neispunjenju ugovornih obveza i stopi povrata. Proces neispunjenja ugovornih obveza je proces skoka s intenzitetom skoka za kojeg se pretpostavlja da je konstantan ili da se mijenja kroz vrijeme, a za stopu povrata se pretpostavlja da je djelić nominalne ili tržišne vrijednosti vrijednosnog papira pri dospijeću. Najpoznatiji model koji pripada ovoj kategoriji je Jarrow-Turnbull model.

Pristup tranzicije rejtinga uglavnom je produžetak pristupa koji se temelji na *defaultu*, a glavna razlika među njima je pretpostavka da se neispunjenje ugovornih obveza tretira kao rezultat migracije kredita, a ne kao iznenadna, neočekivana pojava u procesu difuzije skoka. Pristup tranzicije rejtinga pretpostavlja da se raspršenja kredita razlikuju bez pojave defaulta i da isplata može ovisiti o kreditnom rejtingu ili pojavi drugih kreditnih događaja osim neispunjenja ugovornih obveza.

Disperzivni pristup vrednuje rizičnu obveznicu kao da se radi o bezrizičnoj obveznici, zamjenom konvencionalnog procesa kamatnih stopa s procesom prinosa koji je prilagođen neispunjenju ugovornih obveza na rizičnom instrumentu. Pretpostavlja se da su bezrizična kamatna stopa i stopa neispunjenja ugovornih obveza, a u nekim slučajevima i stopa povrata, slučajne. Stoga je postupak određivanja cijena u osnovi zbroj tri slučajna procesa.

3.1 Potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza

U ovom poglavlju ćemo dati osnovne rezultate koje dobivamo primjenom pristupa temeljenog na intenzitetu na vrednovanje potraživanja za koja postoji mogućnost neispunjenja ugovornih obveza (*eng. defaultable claims*). Pretpostavimo da je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te njemu pridružena filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Potraživanje s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza definiramo kao uređenu petorku $DCT = (X, A, \tilde{X}, Z, \tau)$ gdje je:

- X obećano potencijalno potraživanje koje predstavlja uplatu dobivenu od strane vlasnika potraživanja u vremenu T, ako nije bilo neispunjenja ugovornih obveza prije vremena T,
- $A = (A_t : t \geq 0)$ adaptirani slučajni proces koji predstavlja obećane dividende,

odnosno priljev novčanih tokova dobivenih od strane vlasnika potraživanja prije neispunjenja ugovornih obveza,

- $Z = (Z_t : t \geq 0)$ adaptirani slučajni proces za koji je $Z_t > 0$ iznos oporavka u trenutku neispunjenja ugovornih obveza, odnosno $Z_t = 0$ za svaki $t \geq 0$ u kojem nije došlo do neispunjenja ugovornih obveza,
- $\tilde{X}$ potraživanje oporavka koje predstavlja isplatu oporavka u vremenu T, ako se neispunjenje ugovornih obveza dogodilo prije vremena dospijeća T,
- τ vrijeme neispunjenja ugovornih obveza.

Ako se neispunjenje ugovornih obveza dogodi nakon vremena dospijeća T, obećano potraživanje X se isplaćuje u cijelosti u trenutku T. U suprotnom, s obzirom na uzeti model, iznos Z_τ je isplaćen u trenutku τ ili je iznos $\tilde{X}$ isplaćen u trenutku dospijeća T. U općenitom slučaju, u obzir uzimamo obje vrste isplate oporavka.

Vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ je proizvoljna nenegativna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Posebno, vrijedi da je $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$. Radi praktičnosti pretpostavljamo da vrijedi $\mathbb{P}(\tau = 0) = 0$ te $\mathbb{P}(\tau > t) > 0$ za sve $t \in \mathbb{R}^+$. Za dano vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ uvodimo pridruženi proces skoka $N = (N_t : t \geq 0)$ definiran s $N_t = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$ za sve $t \in \mathbb{R}^+$. Proces $(N_t : t \geq 0)$ ćemo zvati proces neispunjenja ugovornih obveza, odnosno proces *defaulta*, a možemo primijetiti da je očito neprekidan zdesna. Neka je $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t : t \geq 0)$ filtracija generirana procesom $(N_t : t \geq 0)$, odnosno $\mathcal{H}_t = \sigma(N_s : s \leq t) = \sigma(\{\tau \leq s\} : s \leq t)$. Pretpostavimo i da imamo filtraciju $\mathbb{G}$ koja je dana s $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ te $\mathcal{G}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{H}_t, \mathcal{F}_t)$. Naglasimo da vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ nije nužno vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$, ali je, s druge strane, nužno vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{G}$. Za procese A i Z pretpostavljamo da su adaptirani s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$, a X i $\tilde{X}$ su $\mathcal{F}_T$-izmjerivi. Dodatno, za A se pretpostavlja da je proces konačne kvadratne varijacije te da je $A_0 = 0$.

Vrijeme neispunjenja ugovornih obveza obično je modelirano kao potpuno nepristupačno vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju $\mathbb{G}$, a u općoj teoriji slučajnih procesa, vremena zaustavljanja se klasificiraju kao predvidiva, dostupna i potpuno nedostupna vremena zaustavljanja.

Definicija 3.1.1. *Kažemo da je vrijeme zaustavljanja* τ

i) predvidivo ako postoji rastući niz vremena zaustavljanja $(\tau_n)_{n\geq 1}$*, vrijedi da je* $\tau_n < t$ *na* $\{\tau > 0\}$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = \tau$ *g.s.;*

ii) dostupno ako postoji niz predvidivih vremena zaustavljanja $(\tau_n)_{n\geq 1}$ *takav da je*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\omega\in\Omega : \tau(\omega) = \tau_n(\omega) < +\infty\}\right) = 1;$$

iii) potpuno nedostupno ako za svako predvidivo vrijeme zaustavljanja T *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega : \tau(\omega) = T(\omega)\}\right) = 0.$$

Kratkoročni proces kamatne stope $(r_t : t \geq 0)$ slijedi $\mathbb{F}$-adaptiran proces takav da je štedni račun $B = (B_t : t \geq 0)$ dan izrazom

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right), \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

dobro definiran.

Formula valuacije neutralna na rizik

Uzmimo model financijskog tržišta bez arbitraže. Posebno, uzmimo da je $\mathbb{P}$ vjerojatnost neutralna na rizik, što znači da proces cijene bilo koje vrijednosnice, koja ne donosi dividende ili kupone, nužno slijedi $\mathbb{G}$-martingal na $\mathbb{P}$ kada je diskontiran štednim računom B. Pretpostavimo da su procesi Z i A adaptirani s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$, te da su slučajne varijable X i $\tilde{X}$ $\mathcal{F}_T$-izmjerive. Također, pretpostavimo da je proces obećanih dividendi A proces konačnih kvadratnih varijacija uz $A_0 = 0$. Za trajektorije procesa $X, \tilde{X}, A, Z$ se pretpostavlja da su funkcije neprekidne zdesna s konačnim lijevim limesima. Također, uočimo da su sve trajektorije procesa N neprekidne zdesna, odnosno svaka trajektorija je jednaka 0 prije vremena τ te jednaka 1 za $t \geq \tau$. Pretpostavimo još i da sve gore navedene varijable zadovoljavaju odgovarajuće uvjete integrabilnosti koji su potrebni za daljnje vrednovanje.

Definirajmo sada proces dividendi te proces cijena potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza.

Definicija 3.1.2. *Proces dividendi* $D = (D_t : t \geq 0)$ *potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza* $DCT = (X, A, \tilde{X}, Z, \tau)$ *jednak je*

$$D_t = X^d(T)\,\mathbb{1}_{\{t\geq T\}} + \int_{[0,t]} (1 - N_u)\, dA_u + \int_{[0,t]} Z_u\, dN_u, \tag{3.1}$$

gdje je $X^d(T) = X\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} + \tilde{X}\,\mathbb{1}_{\{\tau\leq T\}}$.

Proces D je proces konačne varijacije na $[0, T]$. Naime, vrijedi

$$\int_{[0,t]} (1 - N_u)\, dA_u = \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{\tau > u\}}\, dA_u = A_{\tau -} \mathbb{1}_{\{\tau \le t\}} + A_t\, \mathbb{1}_{\{\tau > t\}},$$

i

$$\int_{[0,t]} Z_u\, dN_u = Z_{\tau \wedge t}\, \mathbb{1}_{\{\tau \le t\}} = Z_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \le t\}},$$

gdje je $\tau \wedge t = \min(t, \tau)$. U slučaju neispunjenja ugovornih obveza u trenutku t dividenda $A_t - A_{t-}$ koja bi tada trebala biti isplaćena se ne isplaćuje.

Definicija 3.1.3. *Proces cijena $X^d(\cdot, T)$ potraživanja s mogućnošću defaulta $DCT = (X, A, \tilde{X}, Z, \tau)$ koji se podmiruje u trenutku T dan je s*

$$X^d(t, T) = B_t\, \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1}\, dD_u \mid \mathcal{G}_t \right), \qquad t \in [0, T] \tag{3.2}$$

Jednakost (3.2) *nazivamo formulom valuacije neutralnom na rizik.*

Radi jednostavnosti, pisat ćemo $S_t = X^d(t, T)$. Kombinacijom formula (3.1) i (3.2) dobivamo

$$S_t = B_t\, \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1}(1 - N_u)\, dA_u + \int_{[t,T]} B_u^{-1} Z_u\, dN_u + B_T^{-1} X^d(T) \mid \mathcal{G}_t \right),$$

gdje je $X^d(T) = \tilde{X}\mathbb{1}_{\{\tau \le T\}} + X\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} = \tilde{X} N_T + X(1 - N_T)$.

Razmotrimo sada jedan specijalni slučaj formule valuacije neutralne na rizik. Ako se za potraživanje ne isplate dividende prije vremena neispunjenja ugovornih obveza, odnosno $A \equiv 0$ i $\tilde{X} = 0$, formula valuacije neutralna na rizik dana je s

$$S_t = B_t\, \mathbb{E}\left(B_\tau^{-1}\, Z_\tau \mathbb{1}_{\{t < \tau \le T\}} + B_T^{-1}\, X\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{G}_t \right) \tag{3.3}$$

Očito je u ovom slučaju $S_t = 0$ na $\{\tau \le t\}$ pa imamo

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}\, B_t\, \mathbb{E}\left(B_\tau^{-1}\, Z_\tau\, \mathbb{1}_{\{t < \tau \le T\}} + B_T^{-1}\, X\, \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{G}_t \right). \tag{3.4}$$

Potrebno je naglasiti da ne pretpostavljamo da je potraživanje s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza dostupno.

3.2 Valuacija procesom hazarda

Prije nego navedemo definiciju procesa hazarda, navedimo sljedeći rezultat

$$\mathbb{P}(t < \tau \le T \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{P}(t < \tau \le T \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)}. \tag{3.5}$$

Označimo $F_t = \mathbb{P}(\tau \le t \mid \mathcal{F}_t)$ te pretpostavimo da nejednakost $F_t < 1$ vrijedi za sve $t \in \mathbb{R}^+$. Proces preživljavanja G slučajnog vremena τ s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ jednak je

$$G_t := 1 - F_t = \mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Kako je $\{\tau \le t\} \subseteq \{\tau \le s\}$ za sve $0 \le t \le s$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(F_s \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(\tau \le s \mid \mathcal{F}_s) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{P}(\tau \le s \mid \mathcal{F}_t) \ge \mathbb{P}(\tau \le t \mid \mathcal{F}_t) = F_t,\end{aligned}$$

te tako proces F (odnosno proces preživljavanja G) prati ograničeni, nenegativan submartingal (odnosno supermartingal) na $\mathbb{P}$. Proces hazarda vremena neispunjenja ugovornih obveza, uz dan tok informacija predstavljen filtracijom $\mathbb{F}$ formalno je dan sljedećom definicijom.

Definicija 3.2.1. *Proces hazarda vremena neispunjenja ugovornih obveza τ označavamo sa $\Lambda = (\Lambda_t : t \ge 0)$ te definiramo formulom $1 - F_t = e^{-\Lambda_t}$ ili ekvivalentno*

$$\Lambda_t := -\ln G_t = -\ln(1 - F_t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

Kako je $G_0 = 1$, očito je $\Lambda_0 = 0$. Također, u vidu jednakosti $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ lako se pokaže da je $\lim_{t\to\infty} \Lambda_t = \infty$. Kombinirajući formulu (3.5) s definicijom procesa hazarda dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t < \tau \le T \mid \mathcal{G}_t) &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{\Lambda_t} \mathbb{E}\left(e^{-\Lambda_t} - e^{-\Lambda_T} \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left(1 - e^{\Lambda_t - \Lambda_T} \mid \mathcal{F}_t\right).\end{aligned}$$

Očito je proces hazarda Λ neprekidan ako i samo ako submartingal F, a time i supermartingal G, prati neprekidan proces. Dodatno pretpostavimo da su trajektorije od F neopadajuće funkcije, što znači da pretpostavljamo da martingalni dio od F iščezava. Takav proces nazivamo rastući neprekidan proces. U ovom slučaju, proces hazarda Λ od τ prati rastući neprekidan proces.

U većini nedavno razvijenih modela kreditnog rizika temeljenih na intenzitetu pretpostavlja se da za proces hazarda Λ vremena neispunjenja ugovornih obveza vrijedi sljedeća reprezentacija

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_u \, du, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

za neki nenegativan adaptiran slučajan proces $\lambda = (\lambda_t : t \geq 0)$ koji ima integrabilne trajektorije. Slučajan proces $\lambda = (\lambda_t : t \geq 0)$ nazivamo stopom hazarda ili intenzitetom od τ. Također, uobičajeno je λ nazivati slučajnim intenzitetom vremena neispunjenja ugovornih obveza τ.

U terminu slučajnog intenziteta vremena neispunjenja ugovornih obveza, uvjetna vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza događaja $\{t < \tau \leq T\}$, ako je informacija $\mathcal{G}_t$ dostupna u vremenu t, jednaka je

$$\mathbb{P}(\tau \leq T \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} + \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left(1 - e^{-\int_t^T \lambda_u \, du} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Kako je događaj $\{\tau \leq t\}$ očigledno iz σ-algebre $\mathcal{G}_t$, također imamo

$$\mathbb{P}(t < \tau \leq T \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left(1 - e^{-\int_t^T \lambda_u \, du} \mid \mathcal{F}_t\right). \tag{3.6}$$

Kako događaj $\{\tau > t\}$ pripada σ-algebri $\mathcal{G}_t$, dobivamo

$$\mathbb{P}(t < \tau \leq T \mid \mathcal{G}_t) + \mathbb{P}(\tau > T \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}},$$

tako da je uvjetna vjerojatnost događaja $\{\tau > T\}$ koji nije vrijeme neispunjenja ugovornih obveza jednaka

$$\mathbb{P}(\tau > T \mid \mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T \lambda_u \, du} \mid \mathcal{F}_t\right). \tag{3.7}$$

U nekim slučajevima intenzitet vremena neispunjenja ugovornih obveza nije slučajan. U takvim slučajevima nazivamo ga funkcijom intenziteta od τ. Koncept funkcije intenziteta se pojavljuje kada se, na primjer, za filtraciju $\mathbb{F}$ odabere trivijalna filtracija. U tom slučaju je $\mathbb{G} = \mathbb{H}$. Kako bi naglasili deterministički pristup funkcije hazarda, pisat ćemo $\lambda(t)$ umjesto λ_t, pa jednadžbe (3.6) i (3.7) postaju

$$\mathbb{P}(t < \tau \leq T \mid \mathcal{H}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \left(1 - e^{-\int_t^T \lambda(u) \, du}\right) \tag{3.8}$$

i

$$\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{H}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_t^T \lambda(u) \, du}, \tag{3.9}$$

respektivno. Prisjetimo se da je $\mathcal{H}_t = \sigma(N_u : u \leq t) = \sigma(\{\tau \leq u\} : u \leq t)$ i prema tome $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t : t \geq 0)$ prirodna filtracija slučajnog vremena τ. Pretpostavka da filtracija $\mathbb{H}$

modelira tok informacija dostupan trgovcu znači da nema pristup tržišnim podacima, osim pojavljivanja vremena neispunjenja ugovornih obveza τ.

U nekim općenitijim slučajevima, na primjer kada je vrijeme neispunjenja ugovornih obveza neovisno o (netrivijalnoj) filtraciji $\mathbb{F}$, uzima se deterministički intenzitet s obzirom na $\mathbb{F}$, te jednakosti (3.8) i (3.9) vrijede ako σ-algebru $\mathcal{H}_t$ zamijenimo sa strogo većom σ-algebrom $\mathcal{G}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{F}_t$.

Kanonska konstrukcija vremena neispunjenja ugovornih obveza

Sada ćemo ukratko opisati najčešće korištenu konstrukciju vremena neispunjenja ugovornih obveza vezanog uz dani proces hazarda $\Lambda = (\Lambda_t : t \geq 0)$. Pretpostavimo da je Λ $\mathbb{F}$-adaptiran, neprekidan zdesna, strogo rastući proces na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Također, pretpostavljamo da je $\Lambda_0 = 0$ te $\Lambda_\infty = +\infty$. U mnogim slučajevima $\Lambda = (\Lambda_t : t \geq 0)$ je dano sa

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_u \, du, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

za neki nenegativan, $\mathbb{F}$-adaptiran proces intenziteta λ. Još jedna od pretpostavki je da na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ postoji slučajna varijabla $\xi \sim U(0,1)$. U ovoj verziji kanonske konstrukcije vremena neispunjenja ugovornih obveza Λ predstavlja $\mathbb{F}$-adaptiran proces hazarda od τ obzirom na $\mathbb{P}$.

Definiramo slučajno vrijeme $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^+$ postavljanjem

$$\tau = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : e^{-\Lambda_t} \leq \xi\right\} = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : \Lambda_t \geq \eta\right\}, \tag{3.10}$$

gdje slučajna varijabla $\eta = -\ln \xi$ prati jediničnu eksponencijalnu distribuciju. Lako se pronađe proces $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_t)$. Doista, kako je $\{\tau > t\} = \left\{\xi < e^{-\Lambda_t}\right\}$ i slučajna varijabla Λ_t je $\mathcal{F}_\infty$-izmjeriva, imamo

$$\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}\left(\xi < e^{-\Lambda_t} \mid \mathcal{F}_\infty\right) = e^{-\Lambda_t} \tag{3.11}$$

Posljedično, imamo

$$1 - F_t = \mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_\infty) \mid \mathcal{F}_t\right) = e^{-\Lambda_t}, \tag{3.12}$$

pa je $F = (F_t : t \geq 0)$ $\mathbb{F}$-adaptiran, neprekidan zdesna te rastući proces. Također je očito da proces Λ predstavlja $\mathbb{F}$-proces hazarda od τ obzirom na $\mathbb{P}$. Kao direktnu posljedicu (3.11) i

(3.12), dobivamo sljedeću rastuću vjerojatnost kanonske konstrukcije vremena neispunjenja ugovornih obveza

$$\mathbb{P}(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_t), \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.13}$$

Sada možemo vidjeti neke važne posljedice jednadžbe (3.13). Primarno, imamo da je

$$\mathbb{P}(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_u) = \mathbb{P}(\tau \leq t \mid \mathcal{F}_t) = e^{-\Lambda_t}, \tag{3.14}$$

gdje je $0 \leq t \leq u$. Primijetimo da proces Λ od τ nužno zadovoljava zadnju jednakost u (3.14), a prve dvije jednakosti su dodatne značajke kanonske konstrukcije τ, što znači da one ne moraju nužno vrijediti u generalnom slučaju.

Integralna reprezentacija procesa vrijednosti

Sljedeći cilj nam je uvesti vrijednost potraživanja koje može neispuniti ugovorne obveze prije nego se neispunjenje ugovornih obveza dogodi, u okviru procesa hazarda $\Lambda = (\Lambda_t : t \geq 0)$.

Propozicija 3.2.2. *Vrijednost procesa S_t potraživanja $(X, A, 0, Z, \tau)$ koje može neispuniti ugovorne obveze prije događaja neispunjenja ugovornih obveza ima sljedeću reprezentaciju za $t \in [0, T]$*

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} G_t^{-1} B_t \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1} \, (G_u \, dA_u - Z_u \, dG_u) + G_T \, B_T^{-1} \, X \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Ako je proces preživljavanja G, a time i proces hazarda Λ, neprekidan, tada vrijedi

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} B_t \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1} \, e^{\Lambda_t - \Lambda_u} \, (dA_u + Z_u \, d\Lambda_u) + B_T^{-1} X e^{\Lambda_t - \Lambda_T} \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Dokaz. Stavimo da je $S_t = I_t(A) + J_t(Z) + \tilde{K}_t + K_t$, gdje su

$$I_t(A) = B_t \, \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1} \, (1 - N_u) \, dA_u \mid \mathcal{G}_t \right), \qquad J_t(Z) = B_t \, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} B_\tau^{-1} \, Z_\tau \mid \mathcal{G}_t \right)$$

$$\tilde{K}_t = B_t \, \mathbb{E}\left(B_T^{-1} \, \tilde{X} \, \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \mid \mathcal{G}_t \right), \qquad K_t = B_t \, \mathbb{E}\left(B_T^{-1} \, X \, \mathbb{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right)$$

Kako je $\tilde{X} = 0$ slijedi da je $\tilde{K} = 0$ za sve $t \in [0, T]$ pa imamo da je proces cijene jednak $S_t = I_t(A) + J_t(Z) + K_t$. Sada primjenom Propozicije 5.1.2. iz [14] na proces konačne varijacije $\int_{[t,T]} B_u^{-1} \, dA_u$ dobivamo

$$I_t(A) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} G_t^{-1} \, B_t \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1} \, G_u \, dA_u \mid \mathcal{F}_t \right),$$

odnosno, ekvivalentno

$$I_t(A) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} B_t \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1} e^{\Lambda_t - \Lambda_u} dA_u \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Također, prema Propoziciji 5.1.1. iz [14] dobivamo

$$J_t(Z) = -\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} G_t^{-1} B_t \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1} Z_u \, dG_u \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Budući da je proces preživljavanja G neprekidan i prema tome opadajući, proces Λ je rastući, neprekidan proces i imamo

$$J_t(Z) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} B_t \mathbb{E}\left(\int_t^T B_u^{-1} e^{\Lambda_t - \Lambda_u} Z_u \, d\Lambda_u \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Konačno, imamo

$$K_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} G_t^{-1} B_t \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Kako su X i B_T $\mathcal{F}_T$-izmjerive slijedi da je

$$K_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} G_t^{-1} B_t \mathbb{E}\left(G_T B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} B_t \mathbb{E}\left(B_T^{-1} X e^{\Lambda_t - \Lambda_T} \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Obje formule iz iskaza propozicije sada dobivamo sumiranjem. □

Vratimo se sada vremenu neispunjenja ugovornih obveza sa slučajnim intenzitetom λ. Druga formula u Propoziciji 3.2.2 u ovom slučaju poprima sljedeći formu:

$$\begin{aligned} S_t = {} & \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} e^{-\int_t^u (r_v + \lambda_v) dv} (dA_u + \lambda_u Z_u \, du) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ & + \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T (r_v + \lambda_v) dv} X \mid \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Kako bi dobili sažetiju reprezentaciju posljednje jednakosti uvest ćemo oznaku $\tilde{r}_t = r_t + \lambda_t$ te ćemo ju zvati kamatnom stopom prilagođenom riziku neispunjenja ugovornih obveza, a njoj pridružen $\tilde{B} = (\tilde{B}_t : t \geq 0)$ dan formulom

$$\tilde{B}_t = e^{\int_0^t \tilde{r}_u \, du}, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

zvat ćemo štedni račun prilagođen riziku neispunjenja ugovornih obveza. Iako $\tilde{B}_t$ ne predstavlja cijenu vrijednosnice kojom se može trgovati, on ima slična obilježja kao štedni račun $B = (B_t : t \geq 0)$. Posebno, $\tilde{B}$ također prati $\mathbb{F}$-adaptiran, neprekidan proces konačne varijacije.

U terminima procesa $\tilde{B}$ imamo

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \tilde{B}_t \, \mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} \tilde{B}_u^{-1} \, dA_u + \int_t^T \tilde{B}_u^{-1} \, Z_u \, \lambda_u \, du + \tilde{B}_T^{-1} \, X \mid \mathcal{F}_t \right). \tag{3.15}$$

Potrebno je napomenuti kako se vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ ne pojavljuje eksplicitno u uvjetnom očekivanju s desne strane gornje jednakosti.

Slučaj determinističkog intenziteta

U ovom ćemo odjeljku, radi jednostavnosti, pretpostaviti da vrijeme neispunjenja ugovornih obveza prati funkciju intenziteta $\lambda = (\lambda_t : t \geq 0)$ s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ te da je kamatna stopa $r = (r_t : t \geq 0)$ deterministička. U vidu ovakvih pretpostavki, u vremenu t je cijena bezkuponske obveznice s dospijećem T koja nije neispunila ugovorne obveze jednaka

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T r_v \, dv}, \qquad t \in [0,T] \, .$$

Naš cilj je dobiti integralne reprezentacije vrijednosti jednostavnih potraživanja koja mogu neispuniti ugovorne obveze, prije neispunjenja ugovornih obveza. Uzmimo $A \equiv 0$, $\tilde{X} = 0$ i $Z_\tau = h(\tau)$ za neku neprekidnu funkciju $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Dodatno, ako obećana isplata X nije slučajna, vrijednost potraživanja prije neispunjenja ugovornih obveza jednaka je

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} B_t \left(\int_t^T e^{-\int_t^u \lambda_v \, dv} B_u^{-1} \, \lambda_u \, h(u) \, du + B_T^{-1} \, X \, e^{-\int_t^T \lambda_v \, dv} \right)$$

ili, ekvivalentno

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \left(\int_t^T e^{-\int_t^u \tilde{r}_v \, dv} \lambda_u \, h(u) \, du + X \, e^{-\int_t^T \tilde{r}_v dv} \right), \tag{3.16}$$

gdje je $\tilde{r}_v = r_v + \lambda_v$.

Napomena 3.2.3. *Napomenimo da S_t predstavlja vrijednost potraživanja koje može neispuniti ugovorne obveze prije nego se neispunjenje ugovornih obveza dogodi. U bilo kojem trenutku t, diskontirana isplata potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza navedena gore, dana je sljedećim izrazom*

$$Y_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \, h(\tau) \, e^{-\int_t^\tau r_v \, dv} + \mathbb{1}_{\{\tau>T\}} \, X \, e^{-\int_t^T r_v \, dv}.$$

Time je "puna" vrijednost u vremenu t potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza jednaka

$$\mathbb{E}\left(Y_t \mid \mathcal{H}_t\right) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \left(\int_t^T e^{-\int_t^u \tilde{r}_v \, dv} h(u) \, \lambda_u \, du + X \, e^{-\int_t^T \tilde{r}_v \, dv} \right) + \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} \, h(\tau) \, e^{\int_\tau^t r_v \, dv}. \tag{3.17}$$

Posljednji pribrojnik u jednadžbi (3.17) *predstavlja trenutnu vrijednost toka novca oporavka h_τ primljenog od strane vlasnika potraživanja u trenutku neispunjenja ugovornih obveza, koji je uložen u štedni račun.*

Navedimo sada primjere korporativnih bezkuponskih obveznica s vremenom dospijeća T koje imaju različite oblike oporavka. U svim navedenim slučajevima čini se da je vrijednost korporativne obveznice prije neispunjenja ugovornih obveza proporcionalna njenoj nominalnoj vrijednosti L. Kada ćemo govoriti o vrijednostima korporativne obveznice prije neispunjenja ugovornih obveza, pretpostavit ćemo da je $L = 1$ te ćemo ga izbaciti iz notacije.

Pogledajmo najprije korporativnu bezkuponsku obveznicu bez oporavka u vremenu neispunjenja ugovornih obveza. Ovo odgovara izboru $h = 0$ i $X = L = 1$ u formuli (3.16). Označimo sa $D(t, T)$ vrijednost takve obveznice prije neispunjenja ugovornih obveza u trenutku t. Za svaki $t \in [0, T]$ tada imamo

$$D(t,T) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\, e^{-\int_t^T (r_v+\lambda_v)\,dv} = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\, B(t,T)\, e^{-\int_t^T \lambda_v\,dv}$$

O ovakvom okviru, korporativna obveznica, naravno, postaje bezvrijedna čim se dogodi neispunjenje ugovornih obveza.

Razmotrimo sada slučaj djelomičnog povrata nominalne vrijednosti. Pretpostavimo da funkcija oporavka h zadovoljava $h = \delta L = \delta$ za neki konstantni koeficijent oporavka $0 \leq \delta \leq 1$. Vrijednost korporativne obveznice prije neispunjenja ugovornih obveza u trenutku t koja odgovara ovakvim pretpostavkama te ju označavamo s $\tilde{D}(t, T)$ je jednaka

$$\tilde{D}(t,T) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \left(\int_t^T e^{-\int_t^u \tilde{r}_v\,dv}\, \delta\, \lambda_u\, du + e^{-\int_t^T \tilde{r}_v\,dv} \right).$$

Primijetimo da $\tilde{D}(t, T)$ predstavlja vrijednost korporativne obveznice prije neispunjenja ugovornih obveza, koja u trenutku neispunjenja ugovornih obveza isplaćuje iznos proporcionalan nominalnoj vrijednosti obveznice, u slučaju da se neispunjenje ugovornih obveza dogodi prije vremena dospijeća obveznice T. Međutim, jasno je da konstantan koeficijent δ možemo zamijeniti nekom funkcijom $\delta(t)$.

Ovakav okvir možemo koristiti i za potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza $DCT = (X, A, \tilde{X}, Z, \tau)$. Pretpostavimo da je nominalna vrijednost potraživanja s mogućnošću neispunjenja ugovornih obveza dobro definirana. Sa L ćemo označiti konstantu koja predstavlja nominalnu vrijednost potraživanja, a sa δ stopu oporavka potraživanja. Stavimo da je $Z_t = \delta L$. Prema tome, vrijednost prije neispunjenja ugovornih obveza $\tilde{D}_t$

jednaka je

$$\tilde{D}_t = B_t\,\mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1}\,(1 - N_u)\,dA_u + \int_{[t,T]} B_u^{-1}\,\delta\,L\,dN_u + B_T^{-1}\,X\,\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{G}_t\right). \tag{3.18}$$

Posljedično, zbog Propozicije 3.2.2 imamo

$$\tilde{D}_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} G_t^{-1}\,B_t\,\mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1}\,\left(G_u\,dA_u - \delta\,L\,dG_u\right) + G_T\,B_T^{-1}\,X \mid \mathcal{F}_t\right),$$

gdje je G proces preživljavanja vremena neispunjenja ugovornih obveza s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$. U slučaju da je G neprekidan proces preživljavanja, posljednja formula glasi

$$\tilde{D}_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} B_t\,\mathbb{E}\left(\int_{[t,T]} B_u^{-1}\,e^{\Lambda_t-\Lambda_u}(dA_u + \delta\,L\,d\Lambda_u) + B_T^{-1}\,X\,e^{\Lambda_t-\Lambda_T} \mid \mathcal{F}_t\right),$$

gdje je $\Lambda_t = -\ln\, G_t$ proces hazarda vremena neispunjenja ugovornih obveza.

3.3 Modeli s varijablama stanja

U ovom poglavlju ćemo pobliže opisati rezultat koji je dao Lando u [8]. Pretpostavimo da je dan k-dimenzionalan slučajan proces $Y = (Y_t : t \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neka je Y $\mathbb{F}$-adaptiran te prati Markovljev proces pod martingalnom mjerom $\mathbb{P}$. Pretpostavljamo da je vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ vrijeme prvog skoka Coxovog procesa s intenzitetom $\lambda_t = \lambda(Y_t)$, za funkciju $\lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$. Očito je intenzitet od τ $\mathbb{F}$-adaptiran proces.

Kanonska konstrukcija vremena neispunjenja ugovornih obveza τ dobiva se na sljedeći način. Neka je $\mathbb{F}$ neka filtracija na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je proces Y $\mathbb{F}$-adaptiran te neka je $\eta \sim \text{Exp}(1)$ slučajna varijabla nezavisna od $\mathbb{F}$. Kako bi definirali vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ dovoljno je uzeti da je

$$\tau = \inf\left\{t \in \mathbb{R}^+ : \int_0^t \lambda(Y_u)\,du \geq \eta\right\}.$$

Kako bi u potpunosti iskoristili gornju definiciju vremena neispunjenja ugovornih obveza u terminima varijabli stanja, također pretpostavljamo da je obećana isplata X potraživanja s danom dospijeća T reprezentirana $\mathcal{F}_T$-izmjerivom slučajnom varijablom, da je proces oporavka Z predvidiv, te da proces kratkoročne kamatne stope zadovoljava $r_t = r\,(Y_t)$ za neku funkciju $r : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$.

S ovim skupom pretpostavki, u svim formulama, u kojima se vrijeme neispunjenja ugovornih obveza ne pojavljuje eksplicitno, nego kroz $\mathbb{F}$-adaptiran proces $\lambda_t = \lambda(Y_t)$, možemo zamijeniti uvjetno očekivanje s obzirom na $\mathcal{G}_t$ uvjetovanjem obzirom na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.

Imamo

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^u R(Y_v)\,dv} Z_u \lambda(Y_u)\,du + e^{-\int_t^T R(Y_v)\,dv} X \mid \mathcal{F}_t \right),$$

gdje je $R(Y_u) = r(Y_u) + \lambda(Y_u)$. Ova formula može se izvesti i direktno, a takav rezultat daje sljedeća propozicija.

Propozicija 3.3.1. *Neka je vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ dano sa*

$$\tau = \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : \int_0^t \lambda(Y_u)\,du \geq \eta \right\}.$$

Tada vrijedi

$$S_t = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \tilde{B}_t \mathbb{E}\left(\int_t^T \tilde{B}_u^{-1} Z_u \lambda(Y_u)\,du + \tilde{B}_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t \right),$$

gdje je $\tilde{B}$ štedni račun prilagođen riziku neispunjenja ugovornih obveza

$$\tilde{B}_t = e^{\int_0^t (r(Y_u) + \lambda(Y_u)\,du)}.$$

Dokaz. Primijetimo da za $0 \leq t \leq u \leq T$ imamo

$$\mathbb{P}(\tau > u \mid \mathcal{F}_T \vee \mathcal{H}_t) = \begin{cases} e^{-\int_t^u \lambda(Y_v)\,dv}, & \text{na skupu } \{\tau > t\}, \\ 0, & \text{na skupu } \{\tau \leq t\}, \end{cases}$$

gdje je $\mathcal{H}_t = \sigma(N_u : u \leq t)$ prirodna filtracija procesa neispunjenja ugovornih obveza $N_t = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$.

Sada je

$$
\begin{aligned}
S_t &= B_t\,\mathbb{E}\left(\int_t^T B_u^{-1}\,Z_u\,\lambda(Y_u)\,\mathbb{1}_{\{u\le\tau\}}\,du \;+\; B_T^{-1}\,X\,\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{G}_t\right)\\
&= B_t\,\mathbb{E}\left(\int_t^T B_u^{-1}\,Z_u\,\lambda(Y_u)\,\mathbb{P}\,(\tau\ge u\mid \mathcal{F}_T\vee\mathcal{H}_t)\;du\mid \mathcal{G}_t\right)\\
&+ B_t\,\mathbb{E}\left(B_T^{-1}\,X\,\mathbb{P}\,(\tau>T\mid \mathcal{F}_T\vee\mathcal{H}_t)\mid \mathcal{G}_t\right)\\
&= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,B_t\,\mathbb{E}\left(\int_t^T B_u^{-1}\,Z_u\,\lambda(Y_u)e^{-\int_t^u\lambda(Y_v)\,dv}du\mid \mathcal{G}_t\right)\\
&+ \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,B_t\,\mathbb{E}\left(B_T^{-1}\,X\,e^{-\int_t^T\lambda(Y_v)\,dv}\mid \mathcal{G}_t\right)\\
&= \mathbb{1}_{\{t<\tau\}}\,\tilde{B}_t\,\mathbb{E}\left(\int_t^T \tilde{B}_u^{-1}\,Z_u\,\lambda(Y_u)\,du+\tilde{B}_T^{-1}\,X\;\mid \mathcal{G}_t\right).
\end{aligned}
$$

Sada u zadnjoj jednakosti možemo zamijeniti $\mathcal{G}_t$ sa $\mathcal{F}_t$. Primijetimo najprije da se uvjetovanje s obzirom na $\mathcal{G}_t$, u našem slučaju, podudara s uvjetovanjem s obzirom na $\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_t\subseteq\mathcal{F}_t\vee\sigma(\eta)$. Nadalje, slučajna varijabla η je nezavisna od $\mathcal{F}_\infty$ pa su σ-algebre $\mathcal{F}_\infty$ i $\mathcal{H}_t$ nezavisne s obzirom na $\mathcal{F}_t$. Tvrdnja sada lako slijedi iz razloga što je gornja slučajna varijabla izmjeriva s obzirom na $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}_\infty$. □

Poglavlje 4

Zamjene kreditnog rizika

Izvedenica je financijska vrijednosnica čija se vrijednost temelji na nekoj dogovorenoj financijskoj imovini poput vrijednosnog papira, odnosno na nekom skupu financijskih imovina poput indeksa. Uobičajena temeljna imovina uključuje obveznice, robu, valute, kamatne stope, tržišne indekse i dionice, dok je sama izvedenica ugovor između dvije ili više strana, a vrijednost dobiva fluktuacijama vrijednosti temeljne imovine.

Kreditne izvedenice su jedne od najznačajnijih inovacija u financijskom svijetu u posljednjih dvadeset godina. Doživjele su jako velik rast, a tržište kreditnih izvedenica postalo je jedno od najvećih i najsloženijih tržišta. Među kreditnim izvedenicama, zamjene kreditnog rizika ili CDS (*eng. Credit Default Swaps*) najpopularniji su instrumenti za trgovanje kreditnim rizikom. One su derivati ili ugovori koji investitoru omogućuju da zamijeni ili nadoknadi svoj kreditni rizik rizikom drugog ulagača. Na primjer, ako je zajmodavac zabrinut da će zajmoprimac zaostati sa zajmom, zajmodavac može upotrijebiti CDS kako bi nadoknadio ili zamijenio taj rizik. Da bi zamijenio rizik od neplaćanja, zajmodavac kupuje CDS od drugog ulagača koji pristaje nadoknaditi gubitak zajmodavcu u slučaju da zajmoprimac ne podmiri svoje obveze. Zamjena kreditnog rizika većinom zahtjeva da kupac zamjene kreditnog rizika plaća unaprijed određenu fiksnu periodičnu premiju prodavatelju do dospijeća zamjene kreditnog rizika ili dok se ne dogodi neki unaprijed ugovorom definirani kreditni događaj. Kreditni događaji su definirani kao pojave jednog ili više od sljedećih događaja:

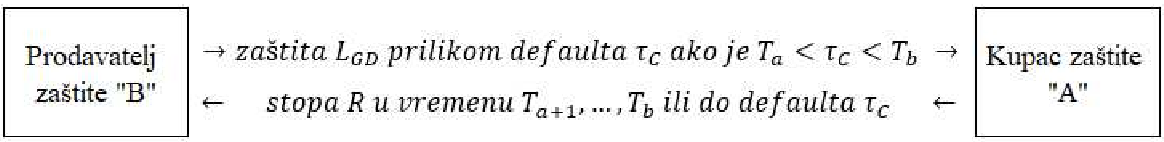
- stečaj: relevantno samo za pravne osobe; sudski postupak za namirenje svih vjerovnika
- ubrzanje otplate obveze: obveza dospijeva i plaća se prije uobičajenog datuma isteka
- neispunjenje obveze: odnosi se na tehničko neispunjavanje obveza, poput kršenja ugovornih obveza

- neplaćanje: neuspjeh referentnog entiteta da izvrši dospjele isplate
- moratorij: osigurava naknadu nakon određenih vladinih radnji (npr. kašnjenja s plaćanjem)
- restrukturiranje: smanjenje i ponovno pregovaranje o neurednim dugovanjima radi poboljšanja ili obnavljanja likvidnosti

Zamjena kreditnog rizika daje osiguranje od rizika neispunjavanja obveza određenog poduzeća. Ovaj ugovor uglavnom uključuje tri strane, odnosno tri glavna aktera: izdavatelja dužničkog vrijednosnog papira, odnosno referentni entitet, kupca dužničkog vrijednosnog papira te treću stranu, koja je obično osiguravajuće društvo ili velika banka koja izdaje CDS kupcu dužničkog vrijednosnog papira.

U slučaju nepodmirenja obveza, to jest ako se aktivira CDS, prodavatelj zaštite dužan je podmiriti ugovor, tj. platiti kupcu zaštite nastali gubitak. U idealnom slučaju nastali gubitak može se izračunati kao razlika između nominalne vrijednosti temeljnog vrijednosnog papira i iznosa koji se može povratiti od referentnog zajmoprimca. U praksi je, međutim, teško predvidjeti vrijednost oporavka nakon neispunjenja ugovornih obveza u trenutku nagodbe ugovora.

Formalno, dva poduzeća, "A" (kupac zaštite) i "B" (prodavatelj zaštite) dogovore se sljedeće. Ako treće poduzeće, "C" (referentni entitet) neispuni ugovorne obveze u vremenu $\tau = \tau_C$, gdje je $T_a < \tau < T_b$, "B" isplaćuje "A" određeni (deterministički) iznos koji nazivamo gubitkom nastalim zbog neispunjenja obveza i označavamo sa L_{GD} (*eng. Loss Given Default*). Zauzvrat "A" uplaćuje iznos R u korist poduzeća "B" u svakom $T_{a+1}, \dots, T_b$ ili do neispunjenja ugovornih obveza. Također, pretpostavljamo da je $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$ te $T_0 = 0$.



Slika 4.1: Odnos ugovornih strana kod zamjene kreditnog rizika

Iznos L_{GD} je zaštita koju poduzeće "A" dobiva u slučaju da "C" neispuni ugovorne obveze. Obično se uzima da je L_{GD} = osnovica ili L_{GD} = osnovica − oporavak = $1 - R_{EC}$. Tipičan pojednostavljeni slučaj CDS-a je situacija u kojoj tvrtka "A" kupuje korporativnu obveznicu koju je izdala tvrtka "C" te očekuje kupone i finalnu isplatu od "C". Ako "C" neispuni ugovorne obveze prije dospijeća korporativne obveznice, ”A” neće primiti navedene iznose. Ako umjesto čekanja dospijeća poduzeće ”A” kupi zaštitu od ”B”, ono dobiva isplatu koja je približno jednaka izgubljenom iznosu (npr. pretpostavljeni iznos umanjen za deterministički iznos oporavaka). Obično je u vrijeme evaluacije, odnosno vrijeme t, iznos R postavljen na vrijednost $R_{a,b}(t)$ koji ugovor čini pravednim, odnosno on je takav da je sadašnja vrijednost zamijenjenih novčanih tokova jednaka nuli.

Uzmimo CDS kod kojeg uplaćujemo stopu R za zaštitu u vremenu $T_{a+1}, \ldots, T_b$ ili do neispunjenja ugovornih obveza (tzv. ”noga premije” ili *eng. ”premium leg”*) u zamjenu za jednokratnu isplatu iznosa L_{GD} (”noga zaštite” ili *eng. ”protection leg”*) u vremenu neispunjenja ugovornih obveza τ referentnog entiteta ”C”, uz pretpostavku $T_{a+1} < \tau < T_b$. Prvu liniju sa Slike 4.1 nazivamo ”noga zaštite”, a drugu ”noga premije”.

Formalno, diskontiranu vrijednost zamjene kreditnog rizika u vremenu t sa stajališta poduzeća ”B” možemo prikazati sa

$$\begin{aligned}\Pi_{CDS\,a,b}(t) &:= D(t,\tau)(\tau - T_{\beta(\tau)-1})\, R\, \mathbb{1}_{\{T_a<\tau<T_b\}} + \\ &+ \sum_{i=a+1}^{b} D\,(t,T_i)\ \alpha_i\, R\, \mathbb{1}_{\{\tau\geq T_i\}} - \mathbb{1}_{\{T_a<\tau\leq T_b\}}\, D\,(t,\tau)\ L_{GD},\end{aligned} \tag{4.1}$$

gdje je $t \in [T_{\beta(t)-1}, T_{\beta(t)}]$, a α_i razlika između T_i i T_{i-1}. Nadalje, slučajni diskontni faktor u vremenu t za dospijeće T je označen sa $D(t,T) = B(t)/B(T)$, gdje je $B(t) = e^{\int_0^t r_u\,du}$, a r_t je kamatna stopa u trenutku t. Potrebno je naglasiti da pretpostavljamo da je iznos L_{GD} deterministički. Uobičajeno je uzeti $L_{GD} = 1 - R_{EC}$, gdje za stopu oporavka R_{EC} pretpostavljamo da je deterministička.

Ponekad se za CDS ugovore uzima malo drugačija formula za isplatu. Umjesto da se u obzir uzima točno vrijeme neispunjenja ugovornih obveza τ, plaćanje iznosa za zaštitu L_{GD} odgađa se na prvo vrijeme T_i nakon neispunjenja ugovornih obveza, to jest na $T_{\beta(\tau)}$. Uz ovakvu formulaciju vrijednost zamjene kreditnog rizika može se zapisati kao

$$\Pi_{PCDS\,a,b}(t) := \sum_{i=a+1}^{b} D(t,T_i)\,\alpha_i\, R\, \mathbb{1}_{\{\tau\geq T_i\}} - \sum_{i=a+1}^{b} \mathbb{1}_{\{T_{i-1}<\tau<T_i\}}\, D(t,T_i)\, L_{GD}, \tag{4.2}$$

te ju nazivamo diskontiranom isplatom odgođene zamjene kreditnog rizika. Prednost odgođenog plaćanja zaštite je u tome što nije potreban iznos obračunate kamate u $(\tau - T_{\beta(\tau)-1})$ i što se sva plaćanja odvijaju u mreži T_i-eva.

4.1 Cijena zamjene kreditnog rizika

Označimo sa $CDS(t, [T_{a+1}, \dots, T_b], T_a, T_b, R, L_{GD})$ vrijednost standardne zamjene kreditnog rizika u vremenu t. Skraćeno možemo pisati i $CDS_{a,b}(t, R, L_{GD})$. Formule za određivanje vrijednosti isplata ovise o pretpostavkama o dinamici kamatnih stopa te o vremenu neispunjenja ugovornih obveza τ. Ako pretpostavimo da je τ nezavisan od kamatnih stopa, tada je moguće koristiti formule valuacije za CDS koje su neovisne o modelu te koje uključuju vjerojatnost *defaulta* (ili preživljavanja).

Od sada nadalje većinom ćemo se koristiti okvirom slučajnog intenziteta, gdje je intenzitet $\mathcal{F}_t$-adaptiran, neprekidan, pozitivan proces. $\mathcal{F}_t$ kao i do sada označava osnovnu filtraciju bez *defaulta*, odnosno pretpostavljamo da je vrijeme neispunjenja ugovornih obveza modelirano kao vrijeme prvog skoka u Coxovom procesu. Preciznije, imamo da je $\tau = \Lambda^{-1}(\xi)$, gdje je Λ slučajna funkcija hazarda za koju pretpostavljamo da je $\mathcal{F}$-adaptirana, apsolutno neprekidna te strogo rastuća, a $\xi \sim \text{Exp}(1)$ nezavisna od $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Ove pretpostavke impliciraju postojanje pozitivnog, adaptiranog procesa $\lambda = (\lambda_t : t \geq 0)$ za koji također pretpostavljamo da je neprekidan zdesna te ograničen slijeva te da je $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s \, ds$ za svaki t.

Općenito, koji god model uzeli, možemo izračunati cijenu zamjene kreditnog rizika prema valuaciji neutralnoj na rizik:

$$CDS_{a,b}(t, R, L_{GD}) = \mathbb{E}\left[\Pi_{CDS_{a,b}}(t) \mid \mathcal{G}_t\right]. \tag{4.3}$$

Gornja očekivana vrijednost dobiva se s obzirom na filtraciju $\mathcal{G}_t$ koja uključuje praćenje neispunjenja ugovornih obveza iz razloga što u trenutku izračuna cijene znamo je li se *default* dogodio do promatranog trenutka ili nije. Imamo da je $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$, odnosno filtraciji $\mathcal{F}_t$ dodajemo informaciju o tome je li došlo do neispunjenja ugovornih obveza, te ako jest, kada se on dogodio. Ovu informaciju zovemo praćenje neispunjenja ugovornih obveza te ju označavamo sa $\sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$, gdje je t trenutno vrijeme.

U nekim slučajevima poželjnije je zadržati računanje cijene kao očekivanja s obzirom na filtraciju $\mathcal{F}_t$. To je moguće, a formulu (4.3) tada možemo pisati u obliku

$$CDS_{a,b}(t, R, L_{GD}) = \frac{\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \mathbb{E}\left[\Pi_{CDS_{a,b}}(t) \mid \mathcal{F}_t\right]. \tag{4.4}$$

Sada vidimo da možemo promijeniti filtraciju prilikom određivanja cijene. Također, potrebno je uključiti uvjet da referentni kredit nije neplaćen prije vremena vrednovanja, kao što je implicirano sa $\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$ u brojniku, no to nije potrebno kada uvjetujemo sa $\mathcal{G}_t$. Odnosno, za $T > t$ i generalnu isplatu X imamo

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{G}_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{G}_t\right] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} X \mid \mathcal{G}_t\right],$$

gdje prva jednakost slijedi zbog činjenice da ako znamo da tvrtka posluje u trenutku T, onda sigurno znamo da posluje i u trenutku t, a druga jednakost slijedi iz činjenice da je $\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}$ $\mathcal{G}_t$-izmjeriva slučajna varijabla.

Sada imamo

$$\begin{aligned} CDS_{a,b}(t, R, L_{GD}) &= \frac{\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}}{\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} \cdot \Big\{ R\,\mathbb{E}\Big[D(t,\tau)(\tau - T_{\beta(\tau)-1})\, \mathbb{1}_{\{T_a<\tau<T_b\}} \mid \mathcal{F}_t \Big] \\ &+ \sum_{i=a+1}^{b} \alpha_i\, R\,\mathbb{E}\left[D(t,T_i)\mathbb{1}_{\{\tau\geq T_i\}} \mid \mathcal{F}_t\right] - L_{GD}\,\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_a<\tau\leq T_b\}}\, D(t,\tau) \mid \mathcal{F}_t\right] \Big\}. \end{aligned}$$

Sada možemo uvesti formulu za vrijednost zamjene kreditnog rizika koja ne zavisi o modelu te pretpostavlja nezavisnost između kamatnih stopa i vremena neispunjenja ugovornih obveza. Pretpostavimo da je slučajni diskontni faktor $D(s,t)$ nezavisan od vremena neispunjenja ugovornih obveza τ za sve $0 < s < t$. "Nogu premije" zamjene kreditnog rizika u vremenu $t = 0$ možemo vrednovati sa

$$\begin{aligned} \text{Premija}_{a,b}(R) &= \mathbb{E}\Big[D(0,\tau)\,(\tau - T_{\beta(\tau)-1})\, R\, \mathbb{1}_{\{T_a<\tau<T_b\}}\Big] + \sum_{i=a+1}^{b} \mathbb{E}\left[D(0,T_i)\,\alpha_i\, R\,\mathbb{1}_{\{\tau\geq T_i\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty D(0,t)(t - T_{\beta(t)-1})\, R\, \mathbb{1}_{\{T_a<t<T_b\}}\mathbb{1}_{\{\tau\in dt\}}\right] + \sum_{i=a+1}^{b} \mathbb{E}\left[D(0,T_i)\right]\, \alpha_i\, R\,\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau\geq T_i\}}\right] \\ &= \int_{T_a}^{T_b} \mathbb{E}\left[D(0,t)\right](t - T_{\beta(t)-1})\, R\,\mathbb{P}(\tau\in dt) + \sum_{i=a+1}^{b} P(0,T_i)\,\alpha_i\, R\,\mathbb{P}(\tau \geq T_i) \\ &= \int_{T_a}^{T_b} \mathbb{E}\left[D(0,t)\right]\Big(t - T_{\beta(t)-1}\Big)\, R\,\mathbb{P}(\tau\in dt) + \sum_{i=a+1}^{b} P(0,T_i)\,\alpha_i\, R\,\mathbb{P}(\tau \geq T_i) \\ &= R\int_{T_a}^{T_b} P(0,t)(t - T_{\beta(t)-1})\,\mathbb{P}(\tau\in dt) + R\sum_{i=a+1}^{b} P(0,T_i)\,\alpha_i\,\mathbb{P}(\tau \geq T_i)\,, \end{aligned}$$

gdje koristimo nezavisnost u faktoriranju očekivanja, a $P(t,T)$ predstavlja vrijednost bezkuponske obveznice s dospijećem T u trenutku t. Sličnu formulu dobivamo i za "nogu zaštite", uz pretpostavku nezavisnosti vremena neispunjenja ugovornih obveza τ i kamatnih stopa.

$$
\begin{aligned}
\text{Zaštita}_{a,b}(L_{GD}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_a<\tau\le T_b\}} D(0,\tau)\, L_{GD}\right] = L_{GD}\,\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{T_a<\tau\le T_b\}} D(0,t)\, \mathbb{1}_{\{\tau\in dt\}}\right] \\
&= L_{GD}\left[\int_{T_a}^{T_b} \mathbb{E}\left[D(0,t)\mathbb{1}_{\{\tau\in dt\}}\right]\right] = L_{GD}\int_{T_a}^{T_b} \mathbb{E}\left[D(0,t)\right]\mathbb{P}(\tau\in dt) \\
&= L_{GD}\int_{T_a}^{T_b} P(0,t)\,\mathbb{P}(\tau\in dt).
\end{aligned}
$$

Sada pretpostavljamo postojanje determinističkog intenziteta, kao u modelima determinističkog intenziteta, i ukratko ilustriramo pojam impliciranog determinističkog kumuliranog intenziteta (funkcije hazarda), koji zadovoljava

$$
\mathbb{P}\{\tau \ge t\} = \exp(-\Gamma(t)), \qquad \mathbb{P}\{s < \tau \le t\} = \exp(-\Gamma(s)) - \exp(-\Gamma(t)).
$$

Tržišne Γ dobivamo invertiranjem formule cijene uz pretpostavku da je τ prvo vrijeme skoka u Poissonovom procesu s determinističkih intenzitetom $\lambda_t = \gamma(t) = d\Gamma(t)/dt$. Iz čega slijedi da je vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza u vremenu $[t, t+dt\rangle$ uz uvjet da se *default* još nije dogodio jednaka $\gamma(t)\,dt$, odnosno

$$
\mathbb{P}(\tau \in dt \mid \tau > t, \mathcal{F}_t) = \gamma(t)\,dt.
$$

U ovom je slučaju formula cijene zamjene kreditnog rizika sljedeća:

$$
\begin{aligned}
CDS_{a,b}(t, R, L_{GD}; \Gamma) = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\Bigg[&R\int_{T_a}^{T_b} P(t,u)(u - T_{\beta(u)-1})\, e^{-(\Gamma(u)-\Gamma(t))}\, d\Gamma(u) \\
&+ \sum_{i=a+1}^{b} P(t,T_i)\, R\, \alpha_i\, e^{\Gamma(t)-\Gamma(T_i)} - L_{GD}\int_{T_a}^{T_b} P(t,u)\, e^{-(\Gamma(u)-\Gamma(t))}\, d\Gamma(u)\Bigg].
\end{aligned}
$$

4.2 Formula za kalibriranje intenziteta

Na tržištu se intenzivno koristi jednostavnija formula za kalibriranje konstantnog intenziteta (a time i stope hazarda) $\gamma(t) = \gamma$ kod ugovaranja jedne zamjene kreditnog rizika. Nazovimo ju $\mathrm{CDS}_{0,b}$. Formula je sljedeća:

$$
\gamma = \frac{R_{0,b}(0)}{L_{GD}}, \tag{4.5}
$$

gdje sa $R_{a,b}(t)$ označavamo vrijednost iznosa R u trenutku t. Ova formula je korisna iz razloga što za njenu primjenu nije potrebna krivulja kamatne stope. Također, intenzitet $\gamma = \lambda$

se može interpretirati kao trenutni kreditni raspon, a tada takva interpretacija uključuje i R. U ovom kontekstu, ova formula pokazuje da se uz konstantan intenzitet (i posljedično nezavisnost vremena neispunjenja ugovornih obveza i kamatnih stopa) stopa premije R zamjene kreditnog rizika može prikazati kao kreditni raspon ili kao vjerojatnost neispunjenja ugovornih obveza.

Pretpostavimo da imamo pojednostavljeni ugovor o zamjeni kreditnog rizika za zaštitu u vremenu $[0, T]$ pod pretpostavkom nezavisnosti kamatnih stopa $(D(0, t) : t \in [0, T])$ i vremena neispunjenja ugovornih obveza τ. "Noga premije" konstantno plaća stopu premije R, to jest u intervalu $[t, t + dt]$ "noga premije" plaća iznos $R\,dt$. Diskontiranjem svake premije $R\,dt$ počevši od vremena t pa sve do 0 dobivamo $D(0, t)\,R\,dt$ pa je ukupna diskontirana premija do $\tau \wedge T$

$$\int_0^T D(0,t)\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,R\,dt.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\text{Premija} &= \mathbb{E}\left[\int_0^T D(0,T)\,\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\,R\,dt\right] = R\int_0^T \mathbb{E}\left[D(0,t)\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right]dt = \\ &= R\int_0^T \mathbb{E}\left[D(0,t)\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\right]dt = R\int_0^T P(0,t)\,\mathbb{P}(\tau>t)dt\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\text{Zaštita} &= \mathbb{E}\left[L_{GD}\,D(0,\tau)\,\mathbb{1}_{\{\tau\le T\}}\right] = L_{GD}\int_0^T \mathbb{E}\left[D(0,t)\mathbb{1}_{\{\tau\in dt\}}\right] = \\ &= L_{GD}\int_0^T \mathbb{E}\left[D(0,t)\right]\mathbb{P}(\tau\in dt) = L_{GD}\int_0^T P(0,t)\,\mathbb{P}(\tau\in dt) = \\ &= -L_{GD}\int_0^T P(0,t)\,d\mathbb{P}(\tau>t).\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je krivulja neispunjenja ugovornih obveza iz modela konstantnog intenziteta gdje je neispunjenje ugovornih obveza prvi skok u vremenski homogenom Poissonovom procesu ($\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\gamma t}$). Zamijenimo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau>t) &= e^{-\gamma t}, \\ d\mathbb{P}(\tau>t) &= -\gamma e^{-\gamma t}dt = -\gamma\mathbb{P}(\tau>t)dt\end{aligned}$$

te dobivamo

$$\text{Zaštita} = -\,L_{GD}\int_0^T P(0,t)\,d\mathbb{P}(\tau>t) = \gamma\,L_{GD}\int_0^T P(0,t)\,\mathbb{P}(\tau>t)dt$$

S obzirom na to da je stopa R jednaka objema ”nogama” rješavamo jednadžbu

$$\text{Premija} = \text{Zaštita},$$

odnosno

$$\gamma\, L_{GD} \int_0^T P(0,t)\,\mathbb{P}(\tau > t)\,dt = R \int_0^T P(0,t)\,\mathbb{P}(\tau > t)\,dt$$

te dobivamo jednadžbu (4.5) s početka poglavlja.

Ova formula je samo aproksimativna zbog pretpostavki o kontinuiranim plaćanjima u ”nozi premije”. Također, ne uzima u obzir vremensku strukturu zamjene kreditnog rizika iz razloga što se temelji na jedinstvenoj ponudi za R. Međutim, može se koristiti u bilo kojoj situaciji u kojoj je potrebna brza kalibracija intenziteta neispunjenja ugovornih obveza ili vjerojatnosti neispunjenja ugovornih obveza za ponudu jedne zamjene kreditnog rizika.

Bibliografija

[1] A. Elizalde, *Credit Risk Models: Default Correlation in Intensity Models*, 2006, `https://ideas.repec.org/p/cmf/wpaper/wp2006_0605.html` (14.02.2021.)

[2] C. Bluhm, L. Overbeck, C. Wagner, *Introduction to Credit Risk Modeling*, Chapman & Hall/CRC, 2010.

[3] C. Theis, *The Risks and Benefits of Credit Default Swaps and the Impact of a New Regulatory Environment*, Haupt Verlag AG, 2013.

[4] C. Weistroffer, *Credit default swaps: Heading towards a more stable system*, Deutsche Bank Research, 2009.

[5] D. Brigo, F. Mercurio, *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer, 2006.

[6] D. J. Daley, D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes: Elementary Theory and Methods*, Springer, 2003.

[7] D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall/CRC, 2008.

[8] D. Lando, *On Cox Processes and Credit Risky Securities*, Review of Derivatives Research 2, 99–120 (1998).

[9] J. Grandell, *Doubly Stochastic Point Processes*, Springer-Verlag, 1974.

[10] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[11] P. Koulafetis, *Modern Credit Risk Management: Theory and Practice*, Palgrave, 1988.

[12] R. A. Jarrow, *Credit Risk Models*, Annual Review of Financial Economics, 3, 37-68 (2009.), `https://www.jstor.org/stable/42939933` (28.01.2021.)

[13] S. E. Fadugba, H. Edogbanya Olaronke *On Hybrid Model for the Valuation of Credit Risk*, Applied and Computational Mathematics, Special Issue: Computational Finance, 3(6-1), 8-11 (2014).

[14] T. R. Bielecki, M. Rutkowski, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer, 2002.

[15] Y. Wen, J. Kinsella, *Credit Default Swap: Pricing Theory, Real Data Analysis and Classroom Applications Using Bloomberg Terminal*, (2016), https://data.bloomberglp.com/bat/sites/3/2016/10/WhitePaper_Wen.pdf (14.02.2021.)

Sažetak

Kreditnim događajem smatramo bilo koji slučajni događaj čija pojava utječe na mogućnost jedne od ugovornih strana da ispuni svoje obveze određene ugovorom. Događaj *defaulta* ili neispunjenja ugovornih obveza jedan je od kreditnih događaja, te predstavlja veliki rizik za ugovornu stranu koja svoj novac posuđuje drugoj ugovornoj strani uz određene uvjete te se zbog toga velika pažnja pridaje modeliranju kreditnog rizika, odnosno modeliranju slučajnog vremena kada se neispunjenje ugovornih obveza dogodi.

Za modeliranje kreditnog rizika razvijeno je više vrsta modela, od kojih mi proučavamo vrstu koja je temeljena na intenzitetu. Kod modela kreditnog rizika temeljenih na intenzitetu imovina poduzeća te njena kapitalna struktura se ne modeliraju, a vrijeme neispunjenja ugovornih obveza modelirano je kao potpuno nepristupačno vrijeme zaustavljanja čija je distribucija određena intenzitetom, odnosno stopom hazarda koja može biti deterministička funkcija ili slučajni proces. Ovisno o tome je li intenzitet deterministički ili slučajni, vrijeme neispunjenja ugovornih obveza se modelira kao prvi skok u Poissonovom ili Coxovom procesu.

Jedan od načina zaštite od kreditnog rizika su zamjene kreditnog rizika (CDS). To su kreditni derivati koji pružaju zaštitu od kreditnih događaja koji mogu dovesti do gubitka na način da ugovornoj strani koja je kupila zamjenu kreditnog rizika jamče isplatu, odnosno pokriće gubitka u slučaju neispunjenja ugovornih obveza druge ugovorne strane u zamjenu za plaćanje dogovorenog iznosa za sve vrijeme važenja CDS-a (do dospijeća ili neispunjenja ugovornih obveza).

Summary

A credit event is considered to be any event whose occurrence might affect the ability of a counterparty in a financial contract to fulfil their contractual obligations. Default is one of the credit events and it represents significant risk for the counterparty that is borrowing their funds under agreed upon terms and, therefore, great significance is paid to modeling of credit risk, i.e. modeling stochastic time of default.

There are a few credit risk models available, out of which we base ourselves on introducing intensity-based credit risk models. In this approach, the value of the company's assets and its capital structure are not modeled, and the time of default is modeled as totally inaccessible stopping time whose distribution is defined by intensity, or the hazard rate which can be a deterministic function or a stochastic process. Depending on the fact if the intensity is deterministic or stochastic, time of default is modeled as the first jump of a Poisson or a Cox process.

One of the means of protection from credit risk are credit default swaps (CDS). Credit default swaps are credit derivatives that offer protection from credit event that could lead to losses. They guarantee pay-off to the counterparty in the amount close to the nominal value of the contract in case default occurs, in exchange for constant payments until the maturity or default.

Životopis

Zovem se Ana Marija Krizman i rođena sam 25. travnja 1994. Nakon završene II. Osnovne škole u Varaždinu upisala sam opći smjer u Prvoj gimnaziji Varaždin. Potom sam 2013. godine upisala preddiplomski sveučilišni studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci. Preddiplomski studij završavam 2017. godine i stječem titulu sveučilišne prvostupnice matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.