Prostori funkcija

Zrilić, Marijana

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:650162

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-13**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marijana Zrilić

PROSTORI FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, ožujak 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo prostore funkcija. U prvom poglavlju podsjećamo se nekih osnovnih definicija vezanih uz topološke prostore, kao što su kompaktnost, neprekidnost, podbaza i baza. U drugom poglavlju proučavamo prostore omeđenih funkcija i dokazujemo da je uz neke uvjete taj prostor potpun te promatramo svojstva prostora neprekidnih funcija kao podskupa prostora omeđenih funkcija. U trećem poglavlju definiramo produkt indeksirane familije topoloških prostora, a zatim na skupu funkcija između skupa X i topološkog prostora Y definiramo tzv. topologiju otvorenu po točkama. U četvrtom poglavlju definiramo kompaktno otvorenu topologiju na skupu funkcija između dva topološka prostora, te ispitujemo kakva svojstva ta topologija ima s obzirom na aksiome separacije. Nadalje, proučavamo kompaktno otvorenu topologiju na prostoru svih neprekidnih funkcija sa X u Y i dokazujemo da je ona uz neke uvjete inducirana određenom metrikom na skupu svih neprekidnih funkcija sa X u Y. Proučavamo produkt dva topološka prostora X i Y, te lokalnu kompaktnost te dajemo neke rezultate vezane uz kompaktno otvorenu topologiju. U petom, zadnjem poglavlju proučavamo Hilbertov prostor, prvo dajemo definiciju Hilbertovog prostora i neka njegova osnovna svojstva, a zatim dokazujemo da Hilbertov prostor nije lokalno kompaktan te dokazujemo da je strogo konveksan i bez grananja. Na kraju promatramo jedan poseban potprostor Hilbertovog prostora, tzv. Hilbertovu kocku i proučavamo neka njezina osnovna svojstva.

Poglavlje 1

Osnovni topološki pojmovi

Većina tvrdnji iz ovog diplomskog rada nalazi se u knjigama koje su navedene na popisu literature na kraju rada. Dokazi onih tvrdnji koje su navedene bez dokaza mogu se naći u literaturi.

1.1 Metrički prostor, metrika, otvoreni skupovi, omeđenost

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup.* ***Metrika*** *na X je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća četiri svojstva:*

M1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$

M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

Definicija 1.1.2. ***Metrički prostor*** *je uređeni par (X, d) nepraznog skupa X i metrike d na tom skupu.*

Primjer 1.1.3. *Neka je X neprazan podskup od $\mathbb{R}$ te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$, dana sa $d(x, y) = |x - y|$. Tada se lako može pokazati da je d metrika na X. Za d kažemo da je euklidska metrika na X.*

Općenitije, neka je $n \in \mathbb{N}$ i $X \subseteq \mathbb{R}^n$, X neprazan.Tada se može pokazati da je $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

metrika na X. Kažemo da je d euklidska metrika na X.

Definicija 1.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definiramo $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Kažemo da je $K(x_0, r)$* ***otvorena kugla*** *u (X, d) oko x_0 polumjera r.*

Definicija 1.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$.Kažemo da je S* ***omeđen skup*** *u (X, d) ako $\exists x \in X$ i $\exists r > 0$ tako da je $S \subseteq K(x, r)$.*

Propozicija 1.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su S i T omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S \cup T$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Kako je S omeđen skup, slijedi da postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r)$ i postoje $y \in X$ i $r_2 > 0$ takvi da je $T \subseteq K(y, r_2)$. Želimo pokazati da je

$$S \cup T \subseteq K(x, d(x, y) + max\{r_2, r\}).$$

Ako je $z \in T$, dobivamo

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r_2 + d(y, x) < d(y, x) + max\{r_2, r\}.$$

Dakle, $z \in K(x, d(x, y) + max\{r_2, r\})$.

Ako je $z \in S$,

$$d(z, x) < r < max\{r, r_2\} + d(x, y).$$

Dakle, $S \cup T \subseteq K(x, d(x, y) + max\{r_2, r\})$. Stoga je $S \cup T$ omeđen skup u (X, d). □

1.2 Konvergencija, Cauchyjevi nizovi, potpunost

Definicija 1.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Kažemo da (x_n)* ***teži prema*** *a u metričkom prostoru (X, d) i pišemo $x_n \to a$ ili $(x_n) \to a$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n > n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \varepsilon$. U tom slučaju kažemo da je a* ***limes*** *niza (x_n).*

Uočimo: ako $(x_n) \to a$ i $(x_n) \to b$, onda je $a = b$.

(Ova tvrdnja se jednostavno može dokazati: U suprotnom za $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{2}$ vrijedi $\varepsilon > 0$ i $K(a, \varepsilon) \cap K(b, \varepsilon) = \emptyset$, što lako slijedi iz nejednakosti trokuta,a iz $x_n \to a$ i $x_n \to b$ lako dobivamo da $\exists n \in \mathbb{N}$ tako da je $x_n \in K(a, \varepsilon)$ i $x_n \in K(b, \varepsilon)$, što je nemoguće.)

Definicija 1.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n)* ***konvergentan niz*** *u (X, d) ako $\exists a \in X$ tako da $(x_n) \to a$.*

Definicija 1.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n)* ***Cauchyjev niz*** *u (X, d) ako za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $\forall m, n > n_0$ vrijedi $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Lako se može vidjeti da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. No obrnuto ne mora vrijediti uvijek, što pokazuje sljedeći protuprimjer.

Primjer 1.2.4. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran sa* $x_n = \frac{1}{n}$

Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. *Lako se može pokazati da* $x_n \to 0$ *u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}, d)$.*Stoga je* (x_n) *Cauchyjev niz u* $(\mathbb{R}, d)$.

Neka je d' euklidska metrika na $\langle 0, \infty \rangle$. *Za sve* $m, n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $d(x_m, x_n) = d'(x_m, x_n)$. *Slijedi da je* (x_n) *Cauchyjev niz u* $(\langle 0, \infty \rangle, d')$. *No* (x_n) *nije konvergentan niz u* $(\langle 0, \infty \rangle, d')$. *Naime,kada bismo imali* $(x_n) \to L$ *u metričkom prostoru* $(\langle 0, \infty \rangle, d')$*, onda bismo imali* $(x_n) \to L$ *u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}, d)$ *pa bi slijedilo da je* $L = 0$*, no* $0 \notin \langle 0, \infty \rangle$ *pa dobivamo kontradikciju.*

Definicija 1.2.5. *Za metrički prostor* (X, d) *u kojem je svaki Cauchyjev niz konvergentan kažemo da je* ***potpun***. *Na primjer, poznato je da je* $(\mathbb{R}^n, d)$ *potpun metrički prostor, gdje je* $n \in \mathbb{N}$ *i d euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.2.6. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $U \subseteq X$. *Za U kažemo da je* ***otvoren skup*** *u metričkom prostoru* (X, d) *ako za* $\forall x \in U$ *postoji* $r > 0$ *tako da je* $K(x, r) \subseteq U$.

Poznato je i lako se može vidjeti da je svaka otvorena kugla u metričkom prostoru (X, d) otvoren skup u (X, d).

Propozicija 1.2.7. *(Bez dokaza)*

Ako je (X, d) *metrički prostor,* (x_n) *niz u X te* $a \in X$*,onda vrijedi sljedeće:* $x_n \to a$ *ako i samo ako za svaki otvoren skup U u* (X, d) *takav da je* $a \in U$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da* $\forall n \geq n_0$ *vrijedi* $x_n \in U$.

Definicija 1.2.8. *Za* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$ *definiramo* $\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$. *Za* $\overline{K}(x_0, r)$ *kažemo da je* ***zatvorena kugla*** *u* (X, d) *oko* x_0 *radijusa r.*

Definicija 1.2.9. *Za* $F \subseteq X$ *kažemo da je* ***zatvoren skup*** *u metričkom prostoru* (X, d) *ako je* $X \setminus F$ *otvoren skup u* (X, d).

Poznato je i lako se može pokazati da je svaka zatvorena kugla zatvoren skup.

Propozicija 1.2.10. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* (x_n) *niz u X, F zatvoren skup u* (X, d) *i* $a \in X$. *Pretpostavimo da* $(x_n) \to a$ *te da* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $x_n \in F, \forall n > n_0$. *Tada je* $a \in F$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno.Tada je $a \in F^{\complement}$. Kako je $F^{\complement}$ otvoren skup, $a \in F^{\complement}$, te $x_n \to a$, po propoziciji 1.2.7 slijedi da $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tako da je za svaki $n > m_0$ $x_n \in F^{\complement}$. Za $n = max\{n_0, m_0\}$ vrijedi da je za $\forall l \geq n$ $x_l \in F$ i $x_l \in F^{\complement}$, čime dobivamo kontradikciju pa slijedi da mora vrijediti $a \in F$. □

1.3 Neprekidnost

Definicija 1.3.1. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f : X \to Y$. Neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je f* ***neprekidna*** *u x_0 (s obzirom na d i d') ako $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tako da je $f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon)$. Kažemo da je f neprekidna na X (s obzirom na d i d') ako je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in X$.*

Propozicija 1.3.2. *(Bez dokaza.)*
Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori te $f : X \to Y$ funkcija. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1) *f je neprekidna*
2) *$f^{-1}(U)$ je otvoren skup u (X, d) za svaki otvoren skup U u (Y, d')*
3) *$f^{-1}(G)$ je zatvoren skup u (X, d) za svaki zatvoren G u (Y, d')*

Propozicija 1.3.3. *(Bez dokaza)*
Neka je (X, d) metrički prostor te $F \subseteq X$. Tada je F zatvoren skup ako i samo ako vrijedi sljedeće: ako je (x_n) niz u F i $a \in X$ tako da $x_n \to a$, onda je $a \in F$.

Propozicija 1.3.4. *(Bez dokaza)*
Neka je (X, d) potpun metrički prostor i F zatvoren neprazan skup u (X, d). Tada je $(F, d\big|_{F\times F})$ potpun metrički prostor.

1.4 Topološki prostor

Definicija 1.4.1. *Neka je X skup, te $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ takav da vrijedi:*

1) $\emptyset, X \in \tau$
2) $U_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$ *(gdje je A proizvoljan indeksni skup)*
3) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

Tada kažemo da je τ ***topologija*** *na X.*

Primjer 1.4.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te $\tau_d = \{U \subseteq X\colon U$ otvoren u $(X, d)\}$. Tada se može pokazati da je τ_d topologija na X. Za τ_d kažemo da je topologija inducirana metrikom d.*

Primjer 1.4.3. *Neka je X skup.Tada je $\mathcal{P}(X)$ topologija na X. Nadalje, $\{\emptyset, X\}$ je topologija na X.*

Primjer 1.4.4. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Tada za* τ_d *(definiranu kao u primjeru 1.4.2) kažemo da je euklidska topologija na* $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.4.5. *Ako je* τ *topologija na X, tada za* (X, τ) *kažemo da je* ***topološki prostor***.

Definicija 1.4.6. *Za topološki prostor* (X, τ) *kažemo da je* ***metrizabilan*** *ako postoji metrika d na X tako da je* $\tau = \tau_d$. *(* τ_d *definirana kao u primjeru 1.4.2)*

Napomena 1.4.7. *Neka je X topološki prostor. Ako je* $\mathcal{F}$ *familija zatvorenih skupova na X, tada je* $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F$ *zatvoren skup u X (to se lako vidi iz definicije topologije i činjenice da je zatvoren skup komplement otvorenog).*

Neka je $A \subseteq X$. *Definiramo* ***zatvarač*** *skupa A u topološkom prostoru X, u oznaci* $\overline{A}$, *kao* $\bigcap\limits_{F zatvoren, A \subseteq F} F$

Uočimo, $\overline{A}$ *je zatvoren skup u X.*

Nadalje, vrijedi:

1) $A \subseteq \overline{A}$

2) *Ako je* $A \subseteq F$ *i F zatvoren, tada slijedi da je* $\overline{A} \subseteq F$.

3) $A = \overline{A}$ *ako i samo ako je A zatvoren.*

Propozicija 1.4.8. *Neka je X topološki prostor te neka su A i B podskupovi od X. Tada vrijedi* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dokaz. Imamo $A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$. Stoga slijedi da je $A \subseteq \overline{A \cup B}$. Kako je $\overline{A \cup B}$ zatvoren skup, slijedi da je i $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Savim analogno bismo dobili i $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Dakle, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Dokažimo i obrnutu inkluziju.Imamo da je $A \subseteq \overline{A}$ i $B \subseteq \overline{B}$. Slijedi da je $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Kako je $\overline{A} \cup \overline{B}$ zatvoren skup,slijedi da je i $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. □

(Tada naravno induktivno isto slijedi i za konačnu uniju skupova u X.)

Primjer 1.4.9. *Primjer koji pokazuje da nije svaki topološki prostor metrizabilan.*

Neka je X skup koji ima bar 2 elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ *nije metrizabilan. Naime,odaberimo* $x_0, y_0 \in X, x_0 \neq y_0$. *Pretpostavimo da postoji metrika d na X tako da je* $\{\emptyset, X\} = \tau_d$. *Definiramo* $r = d(x_0, y_0)$.*Tada je* $r > 0$ *i* $K(x_0, \frac{r}{2}) \cap K(y_0, \frac{r}{2}) = \emptyset$. *Dakle, i* $\emptyset$ *i X su različiti od obje navedene kugle. Stoga vidimo da se niti jedna od ovih dviju kugli ne nalazi u topologiji* τ_d,*pa bi slijedilo da te dvije kugle nisu otvoreni skupovi u* (X, d),*čime dobivamo kontradikciju zbog primjera 1.4.2 i činjenice da je svaka otvorena kugla otvoren skup.*

1.5 Baza topologije, podbaza

Definicija 1.5.1. *Neka je τ topologija na X te $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Kažemo da je $\mathcal{B}$* ***baza topologije*** *τ ako se svaki $U \in \tau$, $U \neq \emptyset$ može napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, tj. vrijedi da je:*

1) $\mathcal{B} \subseteq \tau$

2) $\forall U \in \tau, \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}$ *tako da je* $x \in B \subseteq U$.

Primjer 1.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $\mathcal{B} = \{K(x, r) : x \in X, r > 0\}$. Tada se lako vidi da je $\mathcal{B}$ baza topologije τ_d.*

Primjer 1.5.3. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te $r > 0$. Lako se vidi da vrijedi $K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$. Također, neka je $\langle a, b\rangle$ otvoren interval u $\mathbb{R}$. Tada je $\langle a, b\rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$ za $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $r = \frac{b-a}{2}$. Dakle,$\{K(x_0, r) : x_0 \in \mathbb{R}, r > 0\} = \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. To jest, $\{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ je baza euklidske topologije na $\mathbb{R}$. (To sada slijedi iz primjera 1.5.2.)*

Propozicija 1.5.4. *Neka je X skup te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da vrijedi:*

1) $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{B}} S = X$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \mathcal{B}$ *tako da je* $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Tada postoji jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Dokaz. Definiramo $\tau = \{U \subseteq X : \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subseteq U\}$. Ustvari smo mogli τ definirati kao skup svih mogućih unija elemenata iz $\mathcal{B}$. τ je tražena topologija. (Lako se vidi da je τ topologija.) □

Definicija 1.5.5. *Neka je (X, τ) topološki prostor i $C \subseteq \tau$.Kažemo da je C* ***podbaza topologije*** *τ ako je $\{C_1 \cap ... \cap C_n \mid C_1, ..., C_n \in C\}$ baza topologije τ.*

Definicija 1.5.6. *Neka je (X, τ) topološki prostor,(x_n) niz u X te $a \in X$. Kažemo da niz (x_n)* ***teži prema a u topološkom prostoru*** *(X, d) i pišemo $x_n \to a$ ako za svaki $U \in \tau$ tako da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Napomena: Neka je (X, d) metrički prostor,(x_n) niz u X te $a \in X$. Tada $x_n \to a$ u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako $x_n \to a$ u topološkom prostoru (X, τ_d). To slijedi iz propozicije 1.2.7.

Definicija 1.5.7. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Kažemo da je skup A* ***otvoren*** *u topološkom prostoru (X, τ) ako je element topologije τ.*

Definicija 1.5.8. *Neka su (X,τ) i (Y,φ) topološki prostori, $x_0 \in X$ i $f : X \to Y$. Kažemo da je funkcija f* ***neprekidna*** *u x_0 (s obzirom na topologije τ i φ) ako za svaki $V \in \varphi$ takav da je $f(x_0) \in V$ postoji $U \in \tau$ tako da je $x_0 \in U$ i $f(U) \subseteq V$.*

Propozicija 1.5.9. *Neka su τ_1 i τ_2 topologije na skupu X.*

1) *Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije τ_1 te da je $\mathcal{B} \subseteq \tau_2$. Tada je $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*
2) *Pretpostavimo da je $\mathcal{P}$ podbaza topologije τ_1 te da je $\mathcal{P} \subseteq \tau_2$. Tada je $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*

Dokaz. 1) Neka je $U \in \tau_1$. Slijedi da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, $B_\alpha \in \mathcal{B}, \alpha \in A$. Slijedi da je $U \in \tau_2$.

2) Sada lako slijedi iz definicije podbaze i dijela 1).

□

Propozicija 1.5.10. *Neka je (X,τ) topološki prostor te (Y,φ) njegov potprostor.*

1) *Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije τ. Tada je $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ baza topologije φ.*
2) *Neka je $\mathcal{P}$ podbaza topologije τ. Tada je $\{P \cap Y : P \in \mathcal{P}\}$ podbaza topologije φ.*

Dokaz. 1) Iz $\mathcal{B} \subseteq \tau$ slijedi da je $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\} \subseteq \varphi$. Neka je $V \in \varphi$ te $y \in V$. Želimo pronaći element E familije $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ tako da je $y \in E, E \subseteq V$. Tada postoji $U \in \tau$ tako da je $V = U \cap Y$, pa slijedi da je $y \in U$. Kako je U element topologije τ, a $\mathcal{B}$ baza od τ, slijedi da postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $y \in B \subseteq U$, pa je $y \in B \cap Y \subseteq U \cap Y$, tj. $y \in B \cap Y \subseteq V$. Dakle, $B \cap Y$ je bio traženi element te familije. Stoga zaključujemo da je $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ baza topologije φ.

2) Imamo da je $\{P_1 \cap ... \cap P_n : P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$ baza topologije τ. Iz 1)) slijedi da je $\{(P_1 \cap ... \cap P_n) \cap Y : P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$ baza topologije φ. Dakle, to je $\{(P_1 \cap Y) \cap ... \cap (P_n \cap Y) : P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$. To znači da je $\{P \cap Y : P \in \mathcal{P}\}$ podbaza topologije φ.

□

Primjer 1.5.11. *Neka je $\mathcal{P} = \{\langle -\infty, a\rangle : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle a, \infty\rangle : a \in \mathbb{R}\}$. Tada se lako vidi da je $\mathcal{P}$ podbaza euklidske topologije na $\mathbb{R}$.*

Propozicija 1.5.12. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{P}$ familija podskupova od X takva da je $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = X$.Tada postoji jedinstvena topologija na X kojoj je P podbaza.*

Dokaz. Definirajmo $\mathcal{B} = \{P_1 \cap ... \cap P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$. Iz $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ slijedi da je $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$. Uočimo: ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, onda je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Stoga iz propozicije 1.5.4 slijedi da postoji jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Tada iz definicije podbaze slijedi da je ta topologija jedinstvena topologija kojoj je $\mathcal{P}$ podbaza. □

Propozicija 1.5.13. *Neka je X skup te neka su τ_1 i τ_2 dvije topologije na X.*

a) Pretpostavimo da je $\mathcal{B}_1$ baza topologije τ_1 i $\mathcal{B}_2$ baza topologije τ_2. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$. Tada je $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

b) Pretpostavimo da je $\mathcal{P}_1$ podbaza topologije τ_1 i $\mathcal{P}_2$ podbaza topologije τ_2. Pretpostavimo da je $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$. Tada je $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Dokaz. a) Tvrdnja pod *a*) slijedi prilično očito, jer ukoliko je A neki proizvoljan element topologije τ_1, tada se A može napisati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}_1$, a svaki od njih je ujedno element iz $\mathcal{B}_2$, te je stoga A ujedno element iz τ_2.

b) Iz $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ slijedi da je

$$\{A_1 \cap ... \cap A_n \mid A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}_1\} \subseteq \{B_1 \cap ... \cap B_n \mid B_1, ..., B_n \in \mathcal{P}_2\},$$

gdje je iz definicije podbaze očito da je $\{A_1 \cap ... \cap A_n \mid A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}_1\}$ baza topologije τ_1i $\{B_1 \cap ... \cap B_n \mid B_1, ..., B_n \in \mathcal{P}_2\}$ baza topologije τ_2, pa sada tvrdnja *b*) slijedi iz tvrdnje *a*).

□

1.6 Neprekidnost u topološkom prostoru

Definicija 1.6.1. *Ako su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je f* ***neprekidna funkcija*** *ako za svaki otvoren skup V u Y vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren u X.*

(Odnosno, ako su (X, τ) i (Y, φ) topološki prostori te $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je f neprekidna (s obzirom na topologije τ i φ) ako je $f^{-1}(V) \in \tau$, $\forall V \in \varphi$.)

Propozicija 1.6.2. *Neka su (X, τ) i (Y, φ) topološki prostori te $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna ako i samo ako je f neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in X$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna te neka je x_0 neka točka iz X.Tada slijedi da, ako je $V \in \varphi$ takav da je $f(x_0) \in V$, $f^{-1}(V)$ je otvoren u (X, τ), tj. $f^{-1}(V) \in \tau$. Tada očito za $U := f^{-1}(V)$ vrijedi $x_0 \in U$, te $f(U) \subseteq V$, stoga je to upravo okolina U iz definicije neprekidnosti funkcije f u točki x_0. Stoga slijedi da je f neprekidna u x_0.

Dokažimo sada i obratni smjer. Pretpostavimo da je f neprekidna u svakoj točki $x_0 \in X$. Želimo pokazati da je f neprekidna. Neka je V proizvoljan skup otvoren u (Y, φ). Htjeli bismo pokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, τ). (Očito ako je $x \in f^{-1}(V)$, tada je $f(x) \in V$.) Pretpostavili smo da je f neprekidna u x, za svaku točku $x \in X$. Uzmimo točku $x \in X$ takvu da je $f(x) \in V$. Sada po definiciji slijedi da postoji U_x otvoren u (X, τ) tako da je $x \in U_x$ i

$f(U_x) \subseteq V$. Tj., slijedi da je $x \in U_X \subseteq f^{-1}(V)$. Dakle, dobili smo da za svaki $x \in f^{-1}(V)$ postoji otvoren skup U_x u (X, τ) takav da je $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Sada očito možemo $f^{-1}(V)$ dobiti kao $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, što je očito element topologije τ, kao unija elemenata iz τ, stoga po definiciji slijedi da je f neprekidna. □

Propozicija 1.6.3. *(Bez dokaza)*

Ako su X,Y i Z topološki prostori te $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidne funkcije, onda je i $g \circ f : X \to Z$ neprekidna funkcija.

Propozicija 1.6.4. *Neka su (X, τ) i (Y, φ) topološki prostori, $x_0 \in X$ i $f : X \to Y$ funkcija neprekidna u x_0. Pretpostavimo da je (x_n) niz u X takav da $x_n \to x_0$. Tada $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Dokaz. Želimo pokazati da za svaki $V \in \varphi$ takav da je $f(x_0) \in V$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $f(x_n) \in V$. Uzmimo neki $V \in \varphi$ takav da je $f(x_0) \in V$. Tada iz neprekidnosti funkcije f u x_0 slijedi da postoji $U \in \tau$ tako da je $x_0 \in U$ i $f(U) \subseteq V$. Sada, kako $(x_n) \to x_0$, iz propozicije 1.2.7 slijedi da za taj U postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n \geq n_0$ $x_n \in U$. Kako je $f(U) \subseteq V$,slijedi da je $f(x_n) \in V$, za svaki $n \geq n_0$. □

Definicija 1.6.5. *Neka su X i Y topološki prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **otvoreno preslikavanje** ako za svaki otvoren skup U u X vrijedi da je $f(U)$ otvoren u Y.*

Primjer 1.6.6. *Ovaj primjer pokazuje da nije svaka neprekidna funkcija ujedno i otvoreno preslikavanje.*

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ je neprekidna (to se lako vidi), ali nije otvoreno preslikavanje (što se također lako vidi). Pri tome na $\mathbb{R}$ promatramo euklidsku topologiju.

Karakterizacija neprekidnosti pomoću baze i podbaze

Propozicija 1.6.7. *Neka su (X, τ) i (Y, φ) topološki prostori ,neka je $f : X \to Y$ funkcija te neka je $\mathcal{B}$ baza topologije φ. Pretpostavimo da je $f^{-1}(B) \in \tau$, $\forall B \in \mathcal{B}$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $V \in \varphi$.Tada postoji indeksirana familija (B_α) elemenata od $\mathcal{B}$ tako da je $V = \bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$. Slijedi da je $f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha)$. Stoga zbog pretpostavke propozicije slijedi da je $f^{-1}(V) \in \tau$. □

Propozicija 1.6.8. *Neka su (X, τ) i (Y, φ) topološki prostori, $\mathcal{P}$ podbaza topologije φ te $f : X \to Y$. Pretpostavimo da je $f^{-1}(P) \in \tau$, $\forall P \in \mathcal{P}$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{P_1 \cap ...P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$.Znamo da je $\mathcal{B}$ baza topologije φ .Neka je $B \in \mathcal{B}$.Tada je $B = P_1 \cap ... \cap P_n$,gdje su P_1 , ... , $P_n \in \mathcal{P}$.Imamo $f^{-1}(B) = f^{-1}(P_1 \cap$

$...P_n)=f^{-1}(P_1)\cap...\cap f^{-1}(P_n)\in\tau$(iz pretpostavke propozicije slijedi da je to element od τ). Sada iz propozicije 1.6.7 slijedi da je f neprekidna funkcija. □

1.7 Kompaktnost

Napomena 1.7.1. *Neka je (X,τ) topološki prostor. Neka je $K\subseteq X$. Neka je $\mathcal{U}\subseteq\tau$, $\mathcal{U}\neq\emptyset$, takav da je $K\subseteq\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}}U$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je* ***otvoren pokrivač*** *od K u (X,τ).*

Kažemo da su skupovi $U_1,...,U_n$, $n\in\mathbb{N}$ konačan potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$ ako je $U_1,...,U_n\in\mathcal{U}$ i $U_1,...,U_n$ također čine pokrivač za K, tj. $K\subseteq U_1\cup...\cup U_n$.

Definicija 1.7.2. *Neka je (X,τ) topološki prostor te $K\subseteq X$. Kažemo da je K kompaktan skup u topološkom prostoru (X,d) ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od K u (X,τ) postoji njegov konačan potpokrivač.*

Napomena 1.7.3. *Neka je (X,d) metrički prostor te $K\subseteq X$. Kažemo da je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X,d) ako je K kompaktan skup u topološkom prostoru (X,τ_d). Može se pokazati da, ako je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X,d), onda je K omeđen i zatvoren u (X,d).*

Međutim, nije svaki zatvoren i omeđen skup kompaktan. Primjerice, neka je X beskonacan skup te neka je d diskretna meterika na X (tj. metrika d je definirana sa $d(x,y)=$ $\begin{cases}1, x\neq y\\ 0, x=y.\end{cases}$)

Promotrimo skup X u metričkom prostoru (X,d). Jasno je da je X zatvoren. Također je omeđen, jer, ukoliko uzmemo bilo koju točku $x_0\in X$, $X\subseteq K(x_0,2)=X$. Međutim, X nije kompaktan. Naime, $\mathcal{U}:=\{\{x\}\mid x\in X\}$ je očito otvoren pokrivač za X, međutim, on nema konačan potpokrivač jer je X beskonačan.

Napomena 1.7.4. *Za topološki prostor (X,τ) kažemo da je kompaktan ako je X kompaktan skup u (X,τ).*

Propozicija 1.7.5. *Neka su X i Y topološki prostori te $f:X\to Y$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je K kompaktan skup u X. Tada je $f(K)$ kompaktan skup u Y.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ neki otvoren pokrivač od $f(K)$ u Y. Neka je $\mathcal{U}=\{f^{-1}(V)\mid V\in\mathcal{V}\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od K u X. Stoga slijedi da postoje $V_1,...,V_n\in\mathcal{V}$ takvi da je $K\subseteq f^{-1}(V_1)\cup...\cup f^{-1}(V_n)$. Slijedi da je $f(K)\subseteq V_1\cup...\cup V_n$. Dakle,$f(K)$ je kompaktan. □

Napomena 1.7.6. *Poznato je sljedeće:*

Ako je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X,d), onda je K omeđen i zatvoren u (X,d).

Kako dokazati da je K omeđen?

Fiksirajmo $x_0 \in X$. Definirajmo $\mathcal{U} = \{K(x_0, r) : r > 0\}$. $\mathcal{U}$ je očito pokrivač za svaki podskup od X , pa posebno i za K. Kako je K kompaktan u (X, τ_d), slijedi da postoji konačan potpokrivač za K u τ_d. Stoga je po definiciji K omeđen (jer je posebno podskup kugle koja ima najveći polumjer među kuglama iz konačnog potpokrivača.)

Propozicija 1.7.7. *Neka je (X, τ) topološki prostor, neka je F zatvoren skup u (X, τ),te neka je K kompaktan skup u (X, τ). Pretpostavimo da je $F \subseteq K$. Tada je F kompaktan u (X, τ).*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od F u (X, τ). Tada je $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ otvoren pokrivač od X,pa onda i od K. Budući da jr K kompaktan, postoji $U_1, .., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $K \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n \cup (X \setminus F)$. Kako je $F \subseteq K$, slijedi da je $F \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n$. Slijedi da je F kompaktan. □

Korolar 1.7.8. *Neka je (X, τ) kompaktan topološki prostor te neka je F zatvoren skup u (X, τ). Tada je F kompaktan skup u (X, τ).*

1.8 Aksiomi separacije

Definicija 1.8.1. *Neka je (X, τ) topološki prostor.*

*a) Kažemo da je (X, τ) T_0 **prostor** ako za sve $x, y \in X$, $x \neq y$, postoji $U \in \tau$ tako da je $(x \in U$ i $y \notin U)$ ili $(y \in U$ i $x \notin U)$.*

*b) Kažemo da je (X, τ) T_1 **prostor** ako za sve $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje $U, V \in \tau$ takvi da je $(x \in U$ i $y \notin U)$ i $(y \in V$ i $x \notin V)$.*

*c) Kažemo da je (X, τ) T_2 **prostor** ili **Hausdorffov prostor** ako za sve $x, y \in X$, $x \neq y$, postoje $U, V \in \tau$ tako da je $x \in U, y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Uočimo da je svaki T_1 prostor ujedno i T_0 prostor te je svaki T_2 prostor ujedno i T_1 prostor.

Jasno je već iz definicije da nije svaki T_0 prostor ujedno i T_1 prostor. Konkretan primjer koji to pokazuje je topološki prostor $(\{1, 2\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\})$. Taj prostor je očito T_0, no nije T_1 jer ako uzmemo točke 1 i 2 ne postoji otvoren skup takav da sadrži 2, a ne sadrži 1.

Definicija 1.8.2. *Za topološki prostor X kažemo da je T_3 prostor ako za svaki zatvoren skup F u X i svaki $x \in X$ takav da $x \notin F$ postoje otvoreni skupovi U i V takvi da je $U \cap V = \emptyset$ te $F \subseteq U$ i $x \in V$.*

Primjer 1.8.3. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada je topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ T_3, ali nije T_0.*

Propozicija 1.8.4. *Neka je X topološki prostor. Tada je X T_1 prostor ako i samo ako za svaki $x \in X$ vrijedi da je $\{x\}$ zatvoren skup u X.*

Dokaz. Dokažimo prvi smjer. Neka je X T_1 prostor. Neka je $x \in X$. Neka je $y \in X$, $y \neq x$. Tada (stoga što je X T_1 prostor) slijedi da postoji U_y otvoren u X takav da $y \in U_y$, $x \notin U_y$. Slijedi da je $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$. Dakle, $\{x\}$ je zatvoren u X (jer je njegov komplement otvoren).

Dokažimo i obratan smjer. Neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Slijedi da je $x \in X \setminus \{y\}$ i $y \notin X \setminus \{y\}$. Dakle, X je T_1 prostor (jer zbog simetričnosti ista stvar vrijedi i za $X \setminus \{x\}$ te su $X \setminus \{x\}$ i $X \setminus \{y\}$ otvoreni skupovi kao komplementi zatvorenih). □

Definicija 1.8.5. *Za topološki prostor X kažemo da je* ***regularan*** *ako je X T_1 i T_3 prostor.*

Uočimo: Svaki regularan prostor je Hausdorffov.

Napomena 1.8.6. *Neka je (X, τ) topološki prostor te neka je $Y \subseteq X$. Definiramo $\mathcal{S} = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$. Tada se vrlo lako može vidjeti da je $\mathcal{S}$ topologija na Y.*

Kažemo da je $\mathcal{S}$ ***relativna topologija*** *na Y (određena s τ).*

Za $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je ***potprostor*** *topološkog prostora (X, τ).*

Propozicija 1.8.7. *Neka je (X, τ) topološki prostor te (Y, φ) potprostor od (X, τ).*

1) Pretpostavimo da je (X, τ) T_0 prostor. Tada je i (Y, φ) T_0 prostor.

2) Pretpostavimo da je (X, τ) T_1 prostor. Tada je i (Y, φ) T_1 prostor.

3) Pretpostavimo da je (X, τ) T_2 prostor. Tada je i (Y, φ) T_3 prostor.

Dokaz.

1) Neka su $x, y \in Y, x \neq y$. Kako je (X, τ) T_0 prostor,slijedi da postoji $U \in \tau$ takav da je $x \in U$ i $y \notin U$ ili $x \notin U$ i $y \in U$. Stoga vrijedi i: $x \in U \cap Y$ i $y \notin U \cap Y$ ili $x \notin U \cap Y$ i $y \in U \cap Y$. Stoga je $U \cap Y$ i upravo skup iz definicije T_0 prostora za (Y, φ) pa slijedi da je i (Y, φ) T_0 prostor.

2) Neka su $x, y \in Y, x \neq y$. Kako je (X, τ) T_1 prostor,slijedi da postoje $U, V \in \tau$ takvi da je $x \in U$ i $y \notin U$ i $x \notin V$ i $y \in V$. Slijedi da je $x \in U \cap Y$ i $y \notin U \cap Y$, te $x \notin V \cap Y$ i $y \in V \cap Y$. Stoga su $U \cap Y$ i $V \cap Y$ upravo skupovi iz definicije T_1 prostora za (Y, φ) pa slijedi da je i (Y, φ) T_1 prostor.

3) Sasvim analogno bismo dokazali i treći dio, u skladu s definicijom T_2 prostora.

□

Poglavlje 2

Prostori omeđenih funkcija

2.1 Omeđene funkcije

Prostori omeđenih funkcija su prvi primjer prostora funkcija koji će se spomenuti u ovom diplomskom radu.

Definicija 2.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je A skup te neka je $f : A \to X$ funkcija. Kažemo da je funkcija f* **omeđena** *(s obzirom na metriku d) ako je $f(A)$ omeđen skup u (X, d).*

Propozicija 2.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, A skup te $f, g : A \to X$ funkcije omeđene s obzirom na metriku d. Tada je skup $\{d(f(a), g(a))|a \in A\}$ odozgo omeđen u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Budući da su f i g omeđene,skup $f(A) \cup g(A)$ je omeđen (po propoziciji 1.1.6), kao unija omeđenih skupova, pa $\exists x_0 \in X$ i $r > 0$ tako da je $f(A) \cup g(A) \subseteq K(x_0, r)$. Neka je sada $a \in A$ proizvoljan. Imamo $f(a), g(a) \in K(x_0, r)$ pa je $d(f(a), g(a)) \leq d(f(a), x_0) + d(x_0, g(a)) < 2r$. Dakle, slijedi da je $\{d(f(a), g(a))|a \in A\}$ odozgo omeđen u $\mathbb{R}$ jer je $d(f(a), g(a)) < 2r$, za svaki $a \in A$. □

Neka je (X, d) metrički prostor te A neprazan skup. Označimo s B(A,(X,d)) skup svih omeđenih funkcija $f : A \to X$.

Definiramo funkciju $d_\infty : B(A, (X, d)) \times B(A, (X, d)) \to \mathbb{R}$ sa

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(a), g(a)) : a \in A\}. \tag{2.1}$$

(Ova funkcija je dobro definirana prema propoziciji 2.1.2.)
Tvrdimo da je d_∞ metrika na $B(A, (X, d))$.
Trebamo pokazati da zadovoljava definicijska svojstva metrike iz definicije 1.1.1
Očito je $d_\infty(f,g) \geq 0$, $\forall f, g \in B(A, (X, d))$ (Dakle, d_∞ zadovoljava svojstvo M1))

Ako su f,g $\in B(A,(X,d))$ takvi da je $f = g$, očito je $d_\infty(f,g)$= 0.Obratno, ako su f,g $\in B(A,(X,d))$ takve da je $d_\infty(f,g)$= 0, onda je $d(f(a),g(a)) \leq 0$, $\forall a \in A$ pa je $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$, tj. $f = g$. (Dakle, d_∞ zadovoljava svojstvo M2).)

Jasno je da je $d_\infty(f,g)$=$d_\infty(g,f)$, $\forall f, g \in B(A,(X,d))$. (Dakle, d_∞ zadovoljava svojstvo M3))

Neka su f,g,h $\in B(A,(X,d))$. Neka je $a \in A$. Imamo: $d(f(a),h(a)) \leq d(f(a),g(a)) + d(g(a),h(a)) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$. Dakle, $d(f(a),h(a)) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h), \forall a \in A$. Slijedi da je $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$. (Dakle, d_∞ zadovoljava svojstvo M3))

Zaključak:d_∞ je metrika na $B(A,(X,d))$.

2.2 Potpunost prostora omeđenih funkcija

Teorem 2.2.1. *Neka je (X,d) potpun metrički prostor, A neprazan skup te d_∞ metrika na $B(A,(X,d))$ definirana kao u (2.1). Tada je $(B(A,(X,d)),d_\infty)$ potpun metrički prostor.*

Dokaz. Neka je (f_n) proizvoljan Cauchyjev niz u $(B(A,(X,d)),d_\infty)$. Trebamo pokazati da postoji funkcija $g \in B(A,(X,d))$ kojoj niz (f_n) teži u $(B(A,(X,d)),d_\infty)$.

Znamo da je $f_n(a) \in X, \forall a \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.Fiksirajmo neki $a \in A$. Tvrdimo da je $(f_n(a))$ Cauchyjev niz u (X,d).Neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran. Znamo da je (f_n) Cauchyjev niz u $(B(A,(X,d)),d_\infty)$. To po definiciji 1.2.3 znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $\forall m,n \geq n_0$ vrijedi $d_\infty(f_m,f_n) < \varepsilon$. Po definiciji d_∞ slijedi da je $d(f_m(a),f_n(a)) \leq d_\infty(f_m,f_n)$ za $\forall m,n \in \mathbb{N}$. Stoga posebno za sve $m,n \in \mathbb{N}$ takve da je $m,n \geq n_0$ vrijedi: $d(f_m(a),f_n(a)) \leq d_\infty(f_m,f_n) < \varepsilon$. Stoga vidimo da vrijedi da je $d(f_m(a),f_n(a)) < \varepsilon$. Stoga je po definiciji $(f_n(a))$ Cauchyjev niz u (X,d). Kako je po pretpostavci (X,d) potpun metrički prostor, po definiciji slijedi da je $(f_n(a))$ također i konvergentan niz u (X,d).

Označimo njegov limes sa $g(a)$. Time smo definirali funkciju $g : A \to X$. Pokazat ćemo da je tako definirana funkcija g upravo funkcija kakva želimo pokazati da postoji, tj. da je element skupa $B(A,(X,d))$ i da niz (f_n) teži prema g u $(B(A,(X,d),d_\infty)$. Prvo želimo pokazati da je g omeđena funkcija, tj. da je $g \in B(A,(X,d))$.

Odaberemo neki $\varepsilon > 0$ (npr. $\varepsilon = 1$) (Zapravo će ovo što slijedi vrijediti za bilo koji proizvoljan ε koji uzmemo, ali dosta nam je uzeti jedan za koji će vrijediti). Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $\forall m,n \geq n_0$ vrijedi $d_\infty(f_m,f_n) < \varepsilon$. Posebno, $d_\infty(f_n,f_{n_0}) < \varepsilon$, za svaki $n \geq n_0$. Uzmimo $a \in A$. Za svaki $n \geq n_0$ po definiciji od d_∞ vrijedi $d(f_n(a),f_{n_0}(a)) \leq d_\infty(f_n,f_{n_0}) < \varepsilon$. Tj. vidimo da vrijedi $d(f_n(a),f_{n_0}(a)) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.Slijedi da je $f_n(a) \subseteq K(f_{n_0}(a),\varepsilon)$, $\forall n \geq n_0$. Očito je također $f_n(a) \in \overline{K}(f_{n_0}(a),\varepsilon)$, za $\forall n \geq n_0$.Dakle,zbog propozicije 1.2.10 slijedi da je $g(a) \in \overline{K}(f_{n_0}(a),\varepsilon)$, za $\forall a \in A$. Stoga slijedi da je za $\forall a \in A$

$$d(g(a),f_{n_0}(a)) \leq \varepsilon. \tag{$*$}$$

Znamo da je $f_{n_0}(A)$ omeđen skup u (X,d) (jer je f_{n_0} omeđena funkcija). Po definiciji 1.1.4 onda slijedi da postoji $x_0 \in X$ i $r > 0$ tako da je $f_{n_0}(A) \subseteq K(x_0,r)$. Želimo pokazati da je

$$g(A) \subseteq K(x_0, r+\varepsilon). \tag{$**$}$$

Neka je $a \in A$. Zbog $(*)$ imamo da je $d(g(a), f_{n_0}(a)) \leq \varepsilon$ te je $f_{n_0}(a) \in f_{n_0}(A)$. Slijedi da je $f_{n_0}(a) \in K(x_0,r)$. Slijedi da je $d(f_{n_0}(a), x_0) < r$. Po nejednakosti trokuta imamo da je $d(g(a), x_0) \leq d(g(a), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), x_0) < \varepsilon + r$. Dakle,vidimo da je $g(a) \in K(x_0, r+\varepsilon)$. Dakle, vrijedi $(**)$.

Dakle, vidimo da je $g(A)$ omeđen skup u (X,d),tj g je po definiciji omeđena funkcija, tj. $g \in B(A,(X,d))$. Sada još trebamo dokazati da $f_n \to g$ u $(B(A,(X,d)), d_\infty)$ da bismo dobili tvrdnju teorema.

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je (f_n) Cauchyjev niz u $(B(A,(X,d)), d_\infty)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $\forall m,n \geq n_0$ vrijedi $d_\infty(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Posebno,za $\forall n \geq n_0$ vrijedi

$$d_\infty(f_n, f_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{$***$}$$

Uzmimo $a \in A$. Po definiciji od d_∞ slijedi $d(f_n(a), f_{n_0}(a)) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$. Kao i maloprije (koristeći propoziciju 1.2.10) zaključujemo da je $d(g(a), f_{n_0}(a)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Kako ova nejednakost vrijedi za $\forall a \in A$, po definiciji od d_∞ slijedi da je $d_\infty(g, f_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Za $n \geq n_0$, iz prethodne nejednakosti i $(***)$ slijedi da je $d_\infty(f_n, g) \leq d_\infty(f_n, f_{n_0}) + d_\infty(f_{n_0}, g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Dakle, $d_\infty(f_n, g) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Slijedi da $f_n \to g$.

Dakle, (f_n) je konvergentan niz u $(B(A,(X,d)), d_\infty)$. □

2.3 Prostor neprekidnih funkcija kao podskup prostora omeđenih funkcija

Neka su (A,p) i (X,d) metrički prostori. Neka je $BC((A,p),(X,d))$ skup svih funkcija $f : A \to X$ koje su neprekidne i omeđene. Očito je $BC((A,p),(X,d)) \subseteq B(A,(X,d))$.

Propozicija 2.3.1. *Neka su (A,p) i (X,d) metrički prostori. Tada je $BC((A,p),(X,d))$ zatvoren skup u metričkom prostoru $(B(A,(X,d)), d_\infty)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (f_n) niz u $BC((A,p),(X,d))$ te da je $h \in B(A,(X,d))$ tako da $f_n \to h$ u metričkom prostoru $(B(A,(X,d)), d_\infty)$.Dokažimo da je $h \in BC((A,p),(X,d))$, tj. da je h neprekidna funkcija.Neka je $a_0 \in A$ te neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $(f_n) \to h$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za $\forall n \geq n_0$ vrijedi $d_\infty(f_n, h) < \frac{\varepsilon}{3}$.Posebno, $d_\infty(f_{n_0}, h) < \frac{\varepsilon}{3}$.Znamo da je $f_{n_0} : A \to X$ neprekidna funkcija pa postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f_{n_0}(K(a_0,\delta)) \subseteq K(f_{n_0}(a_0), \frac{\varepsilon}{3}). \tag{$*$}$$

Tvrdimo da je

$$h(K(a_0, \delta)) \subseteq K(h(a_0), \varepsilon). \qquad (**)$$

Neka je $a \in K(a_0, \delta)$. Prema $(*)$ vrijedi $f_{n_0}(a) \in K(f_{n_0}(a_0), \frac{\varepsilon}{3})$, tj. da je $d(f_{n_0}(a), f_{n_0}(a_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.Imamo

$$d(h(a), h(a_0)) \leq d(h(a), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f_{n_0}(a_0) + d(f_{n_0}(a_0), h(a_0))$$

$$< d_\infty(h, f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{3} + d_\infty(h, f_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Slijedi da je $h(a) \in K(h(a_0), \varepsilon)$. Stoga vrijedi $(**)$.Dakle, slijedi da je h neprekidna. Stoga iz propozicije 1.3.3 slijedi tvrdnja propozicije. □

Korolar 2.3.2. *Neka su* (A, p) *i* (X, d) *metrički prostori. Tada je* $(BC((A, p), (X, d)), d_\infty\big|_{BC((A,p),(X,d))\times BC((A,p),(X,d))})$ *popun metrički prostor.*

Dokaz. U prethodnoj propoziciji smo vidjeli da je BC((A,p),(X,d)) zatvoren skup u metričkom prostoru $(B(A, (X, d)), d_\infty)$. Također smo u teremu 2.2.1 vidjeli da je $(B(A, (X, d)), d_\infty)$ potpun metrički prostor. Sada iz propozicije 1.3.4 odmah slijedi da je $(BC((A, p), (X, d)), d_\infty\big|_{BC((A,p),(X,d))\times BC((A,p),(X,d))})$ potpun metrički prostor. □

Napomena 2.3.3. *Neka je* (X, τ) *topološki prostor te neka je* (Y, d) *metrički prostor. Neka je* $C((X, \tau), (Y, d))$ *skup svih funkcija* $f : X \to Y$ *neprekidnih s obzirom na topologije* τ *i* τ_d. *Tada je* $C((X, \tau), (Y, d)) = C((X, \tau), (Y, \tau_d))$.

Korolar 2.3.4. *Neka je* (X, τ) *kompaktan topološki prostor te* (Y, d) *metrički prostor. Tada je* $C((X, \tau), (Y, d)) \subseteq B(X, (Y, d))$.

Dokaz. Tvrdnja odmah slijedi iz toga što je X kompaktan topološki prostor te iz toga što neprekidne funkcije slikaju kompakte u kompakte (propozicija 1.7.7.) □

Poglavlje 3

Topologija otvorena po točkama

3.1 Uvod

Produktna topologija

Definicija 3.1.1. *Neka je (X_α) indeksirana familija skupova (dakle to je funkcija koja svakom α iz indeksnog skupa A pridruži skup X_α).*

Sada definiramo ***produkt indeksirane familije skupova*** (X_α) *kao* $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall\alpha \in A\}$

Neka je (X'_α) indeksirana familija topoloških prostora (dakle funkcija koja svakom $\alpha \in A$ pridruži topološki prostor X'_α)

Imamo $X'_\alpha = (X_\alpha,\tau_\alpha)$, $\forall\alpha \in A$, gdje je τ_α topologija na X_α.

Na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ definiramo topologiju na sljedeći način:

Neka je

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha\ \forall\alpha \in A, U_\alpha = X_\alpha,\ \text{za sve osim konačno mnogo } \alpha \in A\}. \tag{3.1}$$

(Očito vrijedi $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \subseteq \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.)

Također, očito je $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \in \mathcal{B}$ pa je unija svih elemenata iz $\mathcal{B}$ upravo jednaka $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Neka su B_1,$B_2 \in \mathcal{B}$. Tada vrijedi: $B_1 = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, gdje je $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha = \{f : \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \mid f(\alpha) \in U_\alpha, \forall\alpha \in A,\ U_\alpha \in \tau_\alpha, \forall\alpha \in A\ U_\alpha = X_\alpha, \forall\alpha \in A \setminus K_1\}$, gdje je K_1 konačan podskup od A te $B_2 = \prod_{\alpha\in A} V_\alpha$, gdje je $\prod_{\alpha\in A} V_\alpha = \{f : \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha \mid f(\alpha) \in V_\alpha, \forall\alpha \in A,\ V_\alpha \in \tau_\alpha, \forall\alpha \in A\ V_\alpha = X_\alpha, \forall\alpha \in A \setminus K_2\}$ gdje je K_2 konačan podskup od A.

Slijedi da je $B_1 \cap B_2 = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha \cap V_\alpha$, gdje je $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha \cap V_\alpha = \{f : A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A}(U_\alpha \cap V_\alpha) \mid f(\alpha) \in U_\alpha \cap V_\alpha, \forall\alpha \in A, U_\alpha \cap V_\alpha \in \tau_\alpha, \forall\alpha \in A, U_\alpha \cap V_\alpha = X_\alpha, \forall\alpha \in A \setminus (K_1 \cap K_2)$.

Slijedi da je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Prema propoziciji 1.5.2 sada slijedi da postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ tako da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{R}$. Tu topologiju nazivamo produktna topologija.

Definicija 3.1.2. *Za topološki prostor* $(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, \mathcal{R})$ *kažemo da je* ***produkt indeksirane familije topoloških prostora*** (X'_α). *Označavamo ga s* $\prod\limits_{\alpha\in A} X'_\alpha$

Ako je (X_α) indeksirana familija skupova i $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, onda za $\alpha \in A$ umjesto $x(\alpha)$ obično pišemo x_α, a funkciju x označavamo i sa (x_α).

Dakle,$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{(x_\alpha) : x_\alpha \in X_\alpha\}$.

Projekcije

Definicija 3.1.3. *Neka je* (X_α) *indeksirana familija skupova te* $\beta \in A$. *Definiramo funkciju* $p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ *sa* $p_\beta((x_\alpha)) = x_\beta$.

Dakle, $p_\beta(f) = f(\beta)$, $\forall f \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, tj. p_β je projekcija na β - koordinatu funkcije $f \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Propozicija 3.1.4. *Neka je* (X'_α) *indeksirana familija topoloških prostora te* $\beta \in A$. *Tada je* $p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ *neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka je V otvoren skup u X_β. Imamo $p_\beta^{-1}(V) = \{f \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \mid f(\beta) \in V\}=\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, gdje je U_α jednak X_α za $\alpha \neq \beta$ te je jednak V za $\alpha = \beta$, dakle vidimo da je $p_\beta^{-1}(V)$ otvoren u $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, jer je element baze $\mathcal{B}$ produktne topologije $\mathcal{R}$. □

Propozicija 3.1.5. *Neka je* (X'_α) *indeksirana familija topoloških prostora.Neka je* $\beta \in A$.*Tada je* $p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ *otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Neka je W otvoren skup u $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Tada se W može prikazati kao $W = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma$, gdje je (B_γ) indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$, pri čemu je $\mathcal{B}$ standardna baza produktne topologije. Slijedi da je $p_\beta(W) = p_\beta(\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} p_\beta(B_\gamma)$. Stoga je dovoljno dokazati da je $p_\beta(B)$ otvoren skup u X_β, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Neka je $B \in \mathcal{B}$. Tada je $B = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, gdje je U_α otvoren u X_α i $U_\alpha = X_\alpha$ za sve osim konačno mnogo $\alpha \in A$.

Imamo $p_\beta(B) = p_\beta(\prod_{\alpha\in A} U_\alpha)$=
$$\begin{cases} U_\beta, U_\alpha \neq \emptyset, \forall a \in A \\ \emptyset,\ \text{inače} \end{cases}$$
Označimo to sa $(*)$

Zašto? Pretpostavimo da je $U_\alpha \neq \emptyset$, $\forall a \in A$. Neka je $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$. Imamo $p_\beta((x_\alpha)) = x_\beta \in U_\beta$. Dakle, $p_\beta((x_\alpha)) \in U_\beta, \forall (x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$. Slijedi da je $p_\beta(\prod_{\alpha\in A} U_\alpha) \subseteq U_\beta$.

Dokažimo i obrnutu inkluziju.Neka je $z \in U_\beta$ .Odaberemo bilo koji element $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$. Definiramo $(y_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ ovako:

$$(y_\alpha) = \begin{cases} x_\alpha, \alpha \neq \beta \\ z, \alpha = \beta, \end{cases}$$

Tada je $p_\beta((y_\alpha)) = z$ pa slijedi da je $z \in p_\beta(\prod_{\alpha\in A} U_\alpha)$.

Iz $(*)$ zaključujemo da je $p_\beta(B)$ otvoren u X_β. Dakle, p_β je otvoreno preslikvanje. □

Baza i podbaza produktne topologije

Propozicija 3.1.6. *Neka je (X'_α) indeksirana familija topoloških prostora. Tada je $\mathcal{P} := \{p_\beta^{-1}(V) \mid \beta \in A, V$ otvoren u $X_\beta\}$ podbaza (produktne) topologije na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha | U_\alpha$ otvoren u $X_\alpha, \forall\alpha \in A, U_\alpha = X_\alpha$ za sve osim konačno mnogo $\alpha \in A\}$ (onako kako smo i definirali bazu $\mathcal{B}$ u (3.1)). Tvrdimo da je

$$\mathcal{B} \subseteq \{P_1 \cap ... \cap P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\} \qquad (*)$$

Neka je $B \in \mathcal{B}$. Tada postoji indeksirana familija skupova (U_α) tako da je $B = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ te $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ međusobno različiti tako da je U_{α_1} otvoren u X_{α_1} , U_{α_n} otvoren u X_{α_n} i U_α=X_α, $\forall\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Slijedi da je B=$p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap ... \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$. Dakle, $B \in \{P_1 \cap ... \cap P_n \mid P_1, ..., p_n \in \mathcal{P}\}$ pa vrijedi $(*)$.

Iz propozicije 3.1.4 slijedi da je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, gdje je $\mathcal{R}$ produktna topologija na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Stoga je $\{P_1 \cap ...P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\} \subseteq \mathcal{R}$.

Iz toga i iz $(*)$ slijedi da je $\{P_1 \cap ... \cap P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$ baza topologije $\mathcal{R}$ (jer je podskup topologije koji sadrži bazu).

Dakle , $\mathcal{P}$ je podbaza topologije $\mathcal{R}$. □

Neprekidnost

Propozicija 3.1.7. *Neka je (X'_α) indeksirana familija topoloških prostora te Y topološki prostor. Neka je $f : Y \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ funkcija. Tada je f neprekidna ako i samo ako je $\forall\alpha \in A$ funkcija $p_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ neprekidna.*

Dokaz. Trivijalno se vidi da ako je f neprekidna, slijedi da je funkcija $p_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ neprekidna (slijedi iz propozicije 3.1.4 i iz propozicije 1.6.3).

Dokažimo sad drugi smjer, tj. da ako je $p_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ neprekidna za $\forall\alpha \in A$ da slijedi da je tada f neprekidna.

Neka je $\mathcal{P} = \{p_\alpha^{-1}(V) \mid \alpha \in A, V$ otvoren u $X_\alpha\}$. Iz propozicije 3.1.6 slijedi da je $\mathcal{P}$ podbaza produktne topologije na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Prema propoziciji 1.6.8,dovoljno je dokazati da je $f^{-1}(P)$ otvoren u Y , $\forall P \in \mathcal{P}$. Neka je $p_\alpha^{-1}(V)$ proizvoljan element iz $\mathcal{P}$. Tada vrijedi $f^{-1}(p_\alpha^{-1}(V)) = (p_\alpha \circ f)^{-1}(V)$,što je otvoren skup u Y , jer smo pretpostavili da je $p_\alpha \circ f$ neprekidna. □

3.2 Topologija otvorena po točkama

Neka je X skup i Y topološki prostor.Za svaki $x \in X$ definiramo $S_x = Y$. Tada je (S_x) indeksirana familija topoloških prostora i $\prod_{x\in X} S_x = Y^X$ (ovdje mislimo na jednakost skupova).

No na $\prod_{x\in X} S_x$ imamo i topologiju pa možemo onda na Y^X promatrati upravo tu topologiju.

Za tu topologiju kažemo da je topologija otvorena po točkama na Y^X.

Označimo tu topologiju sa $\mathcal{R}$.Vrijedi da je $\mathcal{B} = \{\prod_{x\in X} U_x \mid U_x$ otvoren u S_x, $\forall x \in X$ i $U_x = Y$ za sve osim konačno mnogo $x \in X\}$ baza topologije $\mathcal{R}$. Dakle imamo $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in A} U_x \mid U_x$ otvoren u Y, $\forall x \in X$ i $U_x = Y$ za sve osim konačno mnogo $x \in X\}$.

Znamo da je $\mathcal{P} = \{p_x^{-1}(U) \mid x \in X, U$ otvoren u $S_x\}$ podbaza topologije $\mathcal{R}$ .Imamo: $\mathcal{P} = \{p_x^{-1}(U) \mid x \in X, U$ otvoren u $Y\}$.

Neka su $x \in X$ i U otvoren u Y . Imamo $p_x^{-1}(U) = \{f \in \prod_{\alpha\in A} S_x \mid p_x(f) \in U\} = \{f \in Y^X \mid f(x) \in U\}$.

Ako su X i Y skupovi i $x \in X$, onda za funkciju $e_x : Y^X \to Y$, $e_x(f) = f(x)$ kažemo da je evaluacijska funkcija s obzirom na x.

Korolar 3.2.1. *Neka je X skup, Y topološki prostor. Promotrimo na Y^X topologiju otvorenu po točkama. Neka je $x_0 \in X$. Tada je $e_{x_0} : Y^X \to Y$ neprekidno i otvoreno preslikavanje.*

Dokaz. Iz $\prod_{x\in X} S_x = Y^X$ slijedi da je $e_{x_0} = p_{x_0}$, gdje je $p_{x_0} : \prod_{x\in X} S_x \to S_{x_0}$ funkcija iz 3.1.3. Sada iz propozicije 3.1.4 i propozicije 3.1.5 slijedi da je p_{x_0} neprekidno i otvoreno preslikavanje. □

Podbaza topologije otvorene po točkama

Neka je X skup te Y topološki prostor. Za $x \in X$ i U otvoren skup u Y definiramo

$$M(x, U) = \{f \in Y^X : f(x) \in U\} \tag{3.2}$$

Korolar 3.2.2. *Neka je X skup,Y topološki prostor. Tada je $\{M(x, U) : x \in X, U$ otvoren u $Y\}$ podbaza topologije otvorene po točkama na Y^X.*

Dokaz. Imamo $\prod_{x\in X} S_x = Y^X$, $S_x = Y$, $\forall x \in X$. Neka je $x \in X$ te neka je U otvoren u Y. Imamo:

$$M(x, U) = \{f \in Y^X : f(x) \in U\} = \{f \in Y^X : p_x(f) \in U\} = {p_x}^{-1}(U). \tag{3.3}$$

Dakle, $\{M(x, U) : x \in X, U$ otvoren u $Y\} = \{{p_x}^{-1}(U) : x \in X$, U otvoren u $S_x\}$. Sada iz propozicije 3.1.6 slijedi tvrdnja korolara. □

Pretpostavimo da je X skup, Y topološki prostor. Neka je τ topologija otvorena po točkama na Y^X. Pretpostavimo da je τ' neka topologija na Y^X tako da je $e_x : Y^X \to Y$ neprekidna (s obzirom na τ' i topologiju na Y), za svaki $x \in X$.

Tvrdimo da je tada $\tau \subseteq \tau'$.

Neka je $x \in X$ te neka je U otvoren skup u Y . Imamo $M(x, U) = {e_x}^{-1}(U)$ pa iz činjenice da je e_x neprekidna slijedi da je $M(x, U) \in \tau'$. Znamo da je $\mathcal{P} = \{M(x, u) : x \in X, U$ otvoren u $Y\}$ podbaza topologije τ.

Stoga iz definicije podbaze slijedi da je $\{P_1 \cap ... \cap P_n | P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$ baza topologije τ. Vidjeli smo da je $\mathcal{P} \subseteq \tau'$, a iz definicije topologije stoga slijedi da je $\{P_1 \cap ... \cap P_n | P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\} \subseteq \tau'$.

Označimo $\mathcal{B} = \{P_1 \cap ... \cap P_n \mid P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$. Dakle, $\mathcal{B}$ je baza topologije τ i $\mathcal{B} \subseteq \tau'$.

Stoga slijedi da je $\tau \subseteq \tau'$

Dakle, τ je najmanja topologija na Y^X tako da je e_x neprekidna s obzirom na tu topologiju i topologiju na Y, za svaki $x \in X$.

Konvergencija funkcija u topologiji otvorenoj po točkama

Teorem 3.2.3. *Neka je X skup te Y topološki prostor. Promotrimo na Y^X topologiju otvorenu po točkama. Neka je (f_n) niz u Y^X te $g \in Y^X$. Tada $f_n \to g$ u Y^X ako i samo ako $f_n(x) \to g(x)$ u Y za svaki $x \in X$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $f_n \to g$ u Y^X. Htjeli bismo dobiti da tada $f_n(x) \to g(x)$, za svaki $x \in X$. Neka je $x \in X$. Kako je (iz korolara 3.2.1) evaluacijska funkcija $e_x : Y^X \to Y$ neprekidna, tada zbog propozicije 1.6.4 slijedi da $e_x(f_n) \to e_x(g)$, tj. (iz definicije evaluacijske funkcije), $f_n(x) \to g(x)$.

Dokažimo sada i obratni smjer. Pretpostavimo da $f_n(x) \to g(x)$, za svaki $x \in X$. Htjeli bismo dobiti da tada $f_n \to g$. Neka je $x \in X$ i U otvoren u Y. Neka je $M(x, U) = \{h \in Y^X : h(x) \in U\}$(definirana kao u (3.2)). Pretpostavimo da $g \in M(x, U)$ (tj. $g(x) \in U$). Kako $f_n(x) \to g(x)$, slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$, $f_n(x) \in U$. Tj., za $n \geq n_0$, $f_n \in M(x, U)$.

(Jasno je da smo time gotovi, tj. da je dovoljno promatrati elemente podbaze i dobiti da za svaki element podbaze $M(x, U)$ koji sadrži g vrijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$ $f_n \in M(x, U)$, jer svaki element baze A je presjek konačno mnogo elemenata podbaze, pa će također postojati $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq m_0$ $f_n \in A$, jer uzmemo da je m_0 maksimum od svih vrijednosti n_0 za elemente $M(x, U)$ koji u presjeku tvore A.Također,svaki element D topologije otvorene po točkama možemo dobiti kao uniju elemenata iz baze, pa također postoji odgovarajući $s \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq s$ je $f_n \in D$, s ćemo dobiti kao bilo koji od odgovarajućih indeksa elemenata baze koji u uniji tvore D.) □

Zbog ovog teorema se nekad topologija otvorena po točkama zove još i topologija konvergencije po točkama.

Topologija otvorena po točkama ni na koji način ne odražava topologiju na X (odnosno, mogli smo uzeti da je X bilo koji skup, ne nužno s topologijom). Stoga je moguće da niz (f_n) neprekidnih funkcija u Y^X konvergira funkciji g u Y^X koja nije neprekidna.

Sljedeći primjer pokazuje jedan takav konkretan slučaj.

Primjer 3.2.4. *Neka je* $X = Y = [0, 1]$ *(zajedno sa euklidskom topologijom). Definiramo niz funkcija* $(f_n) : [0, 1] \to [0, 1]$ *sa* $f_n(x) = x^n$*. Tako definirane funkcije* f_n *su neprekidne za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *(lako se vidi da su neprekidne u euklidskoj metrici,a time i u euklidskoj topologiji.) Međutim, za* $x \in [0, 1\rangle$ $f_n(x) = x^n \to 0$, *dok za* $x = 1$ $f_n(x) \to 1$. *Stoga niz* (f_n) *teži prema funkciji g definiranoj sa :*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases},$$

koja očito nije neprekidna na $[0, 1]$ *(nije neprekidna u* 1*).*

Poglavlje 4

Kompaktno otvorena topologija

4.1 Definicija kompaktno otvorene topologije

Sada uvodimo kompaktno otvorenu topologiju kao generalizaciju topologije otvorene po točkama. Neka su X i Y topološki prostori. Dakle, sada i na X imamo topologiju pa će kompaktno otvorena topologija, za razliku od topologije otvorene po točkama odražavati i topologiju na X. Za kompaktan skup K u X i otvoren skup U u Y definiramo

$$S(K, U) = \{f \in Y^X \mid f(K) \subseteq U\}. \tag{4.1}$$

Propozicija 4.1.1. *Neka su X i Y topološki prostori.Tada postoji jedinstvena topologija na Y^X kojoj je*

$$\mathcal{S} = \{S(K, U) \mid K \text{ kompaktan u } X, U \text{ otvoren u } Y\} \tag{4.2}$$

podbaza.

Dokaz. Prema propoziciji 1.5.12 dovoljno je pokazati da je

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = Y^X. \tag{$*$}$$

Očito je $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}} S \subseteq Y^X$.

Dokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $f \in Y^X$. Odaberimo $x_0 \in X$. Definiramo $K = \{x_0\}$ i $U = Y$. Očito je $f(K) \subseteq U$, dakle $f \in S(K, U)$. Dakle, i druga inkluzija vrijedi.

Stoga vrijedi ($*$). □

Definicija 4.1.2. *Za topologiju na Y^X kojoj je (4.2) podbaza kažemo da je* ***kompaktno otvorena topologija*** *na Y^X.*

Neka su X i Y topološki prostori. Znamo da je $\mathcal{P} = \{M(x, U) \mid x \in X, U$ otvoren u $Y\}$ podbaza topologije otvorene po točkama. Za svaki $x \in X$ i U otvoren skup u Y vrijedi da je $\{x\}$ kompaktan skup u X i $M(x, U) = S(\{x\}, U)$. Stoga je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$, gdje je

$$\mathcal{S} = \{S(K, U) \mid K \text{ kompaktan u } X, U \text{ otvoren u } Y\}$$

(tj. definiran kao u (4.2)).

Znamo da je $\mathcal{S}$ podbaza kompaktno otvorene topologije na Y^X, pa iz propozicije 1.5.13 slijedi da je topologija otvorena po točkama podskup kompaktno otvorene topologije.

Sada odmah slijedi da je evaluacijska funkcija $e_x : Y^X \to Y$ neprekidna s obzirom na kompaktno otvorenu topologiju. Naime, vidjeli smo u prethodnom poglavlju da je evaluacijska funkcija neprekidna s obzirom na topologiju otvorenu po točkama. To po definiciji znači da za svaki V iz topologije na Y vrijedi da je $e_x^{-1}(V)$ element topologije otvorene po točkama. No, svaki element topologije otvorene po točkama je ujedno i element kompaktno otvorene topologije, pa to znači da je e_x neprekidna s obzirom na kompaktno otvorenu topologiju.

4.2 Kompaktno otvorena topologija i aksiomi separacije

Propozicija 4.2.1. *Neka su X i Y topološki prostori. Promotrimo na Y^X kompaktno otvorenu topologiju. Vrijedi sljedeće:*

a) Y^X je T_0 prostor ako i samo ako je Y T_0 prostor.

b) Y^X je T_1 prostor ako i samo ako je Y T_1 prostor.

c) Y^X je T_2 prostor ako i samo ako je Y T_2 prostor.

Dokaz. a) Pretpostavimo da je Y T_0 prostor. Htjeli bismo pokazati da je tada i Y^X T_0 prostor. Neka su $f, g \in Y^X$, $f \neq g$. Tada postoji $x \in X$ takav da je $f(x) \neq g(x)$. Sada (stoga što je Y T_0 prostor) slijedi da postoji otvoren skup U u Y takav da je ($f(x) \in U$ i $g(x) \notin U$) ili ($g(x) \in U$ i $f(x) \notin U$.)

U prvom slučaju ($f(x) \in U, g(x) \notin U$) , slijedi da je $f \in S(\{x\}, U), g \notin S(\{x\}, U)$.

U drugom slučaju ($g(x) \in U, f(x) \notin U$), slijedi da je $g \in S(\{x\}, U), f \notin S(\{x\}, U)$.

Dakle, Y^X je T_0 prostor.

Dokažimo sada i obratni smjer. Pretpostavimo da je Y^X T_0 prostor. Htjeli bismo dobiti da je tada i Y T_0 prostor. Neka su $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$. Definirajmo $f, g : X \to Y$, $f(x) = y_1, g(x) = y_2$, za svaki $x \in X$. Imamo $f, g \in Y^X$ i $f \neq g$. Stoga iz toga što je

Y^X T_0 prostor slijedi da postoji otvoren skup W u Y^X takav da je ($f \in W$ i $g \notin W$) ili ($g \in W$ i $f \notin W$).

U prvom slučaju ($f \in W, g \notin W$) imamo: Neka je $\mathcal{S} = \{S(K,U) \mid K$ kompaktan u X, U otvoren u $Y\}$ (tj. definiran kao u (4.2)). Znamo da je $\{S_1 \cap ... \cap S_n\} \mid S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}\}$ baza kompaktno otvorene topologije. Stoga (iz definicije baze) slijedi da postoje $S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}$ takvi da je $f \in S_1 \cap ... \cap S_n \subseteq W$. Znamo da za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ postoje kompaktan skup K_i u X i otvoren skup U_i u Y takvi da je $S_i = S(K_i, U_i)$. Zbog $g \notin W$ imamo $g \notin S_1 \cap ... \cap S_n$. Slijedi da postoji $i \in \{1, ..., n\}$ takav da $g \notin S_i$, tj. $g \notin S(K_i, U_i)$,tj. $g(K_i) \nsubseteq U_i$. Dakle, postoji $x \in K_i$ takav da $g(x) \notin U_i$, tj. $y_2 \notin U_i$.

S druge pak strane, iz $f \in S_i$ slijedi da je $f \in S(K_i, U_i)$, tj. $f(K_i) \subseteq U_i$, tj. $y_1 \in U_i$.

U drugom slučaju ($g \in W, f \notin W$) sasvim analogno dobivamo da postoji otvoren skup U otvoren u Y takav da $y_1 \notin U, y_2 \in U$. Stoga slijedi da je Y T_0 prostor.

b) Dokaz pod b) je dosta analogan dokazu pod a).

c) Pretpostavimo da je Y T_2 prostor. Htjeli bismo dobiti da je tada i Y^X T_2 prostor. Neka su $f, g \in Y^X, f \neq g$. Stoga slijedi da postoji $x \in X$ takav da $f(x) \neq g(x)$. Sad zbog toga što je Y T_2 prostor slijedi da postoje U, V otvoreni u Y takvi da je $f(x) \in U, g(x) \in V, U \cap V = \emptyset$. Dakle, $f \in S(\{x\}, U), g \notin S(\{x\}, U)$ i $S(\{x\}, U) \cap S(\{x\}, V) = \emptyset$. Stoga slijedi da je Y^X T_2 prostor.

Obratno, pretpostavimo da je Y^X T_2 prostor. Neka su $y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$. Opet kao u a) definiramo $f, g : X \to Y, f(x) = y_1, g(x) = y_2$, za svaki $x \in X$. Dakle,$f, g \in Y^X, f \neq g$. Stoga (jer je Y^X T_2 prostor) slijedi da postoje W_1, W_2 otvoreni u Y^X takvi da je $f \in W_1, g \in W_2$ i $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Neka je $\mathcal{S}$ kao u dokazu pod a) (tj.kao što je definirana u (4.2)). Tada postoje $S_1, ..., S_n, T_1, ..., T_m \in \mathcal{S}$ takvi da je $f \in S_1 \cap ... \cap S_n \subseteq W_1$ i $g \in T_1 \cap ... \cap T_m \subseteq W_2$. Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ postoje K_i kompaktan u X i U_i otvoren u Y tako da je $S_i = S(K_i, U_i)$. Možemo pretpostaviti da je $K_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, ..., n\}$ (inače bi W_1 bio jednak Y^X, pa njegov presjek s W_2 ne bi mogao biti $\emptyset$). Isto tako, za svaki $j \in \{1, ..., m\}$ postoje L_j kompaktan u X i V_j otvoren u Y takvi da je $T_j = S(L_j, V_j)$. (Također možemo pretpostaviti da su svi L_j neprazni.)

Neka je sada $i \in \{1, ..., n\}$. Imamo $f \in S_i$ tj., $f \in S(K_i, U_i)$, tj. $f(K_i) \subseteq U_i$. Sad (zbog $K_i \neq \emptyset$) slijedi $y_1 \in U_i$. Dakle,$y_1 \in U_i$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Stoga je $y_1 \in U_1 \cap ... \cap U_n$. Analogno dobivamo da je $y_2 \in V_1 \cap ... \cap V_m$. Skupovi $U_1 \cap ... \cap U_n$ i $V_1 \cap ... \cap V_m$ su otvoreni u Y. Dakle,da bismo dokazali da je Y T_2 prostor, još samo moramo dokazati da su $U_1 \cap ... \cap U_n$ i $V_1 \cap ... \cap V_m$ disjunktni. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $z \in (U_1 \cap ... \cap U_n) \cap (V_1 \cap ... \cap V_m)$. Definirajmo $h : X \to Y, h(x) = z$, za svaki $x \in X$. Stoga imamo: $h(K_i) \subseteq U_i$, za svaki $i \in \{1, ...n\}$, tj. $h \in S_i$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$, tj. $h \in S_1 \cap ... \cap S_n$, tj. $h \in W_1$. Također, $h(L_j) \subseteq V_j$, za svaki $j \in \{1, ..., n\}$, tj. $h \in T_j$, za svaki $j \in \{1, ...m\}$, tj. $h \in T_1 \cap ... \cap T_m$, tj. $h \in W_2$, no to je kontradikcija jer su W_1 i W_2 disjunktni. Dakle, sada slijedi da je Y T_2 prostor.

□

Neka su X i Y topološki prostori.

Neka je $C(X, Y)$ skup svih neprekidnih funkcija sa X u Y. Jasno je da je $C(X, Y) \subseteq Y^X$. Za relativnu topologiju na $C(X, Y)$ određenu kompaktno otvorenom topologijom na Y^X kažemo da je kompaktno otvorena topologija na $C(X, Y)$.

Lema 4.2.2. *Neka je X topološki prostor. Tada je X T_3 prostor ako i samo ako za svaki $x \in X$ i svaki otvoren skup U u X takav da je $x \in U$ postoji otvoren skup V u X takav da je $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X T_3 prostor. Neka je $x \in X$ i U otvoren skup u X takav da je $x \in U$. Slijedi da $x \notin U^{\complement}$. Kako je $U^{\complement}$ zatvoren skup, iz toga što je X T_3 prostor, slijedi da postoje otvoreni skupovi V, W u X takvi da je $x \in V$, $U^{\complement} \subseteq W$ i $V \cap W = \emptyset$. Slijedi da je $W^{\complement} \subseteq U$ te $V \subseteq W^{\complement}$. Slijedi da je $\overline{V} \subseteq W^{\complement}$. Dakle, $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Pretpostavimo sada da za svaki $x \in X$ i svaki otvoren skup U takav da je $x \in U$ postoji otvoren skup V takav da je $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Pokažimo da je tada X T_3 prostor. Neka je F zatvoren skup u X te neka je $x \in X$ takav da $x \notin F$. Slijedi da je $x \in F^{\complement}$. Kako je $F^{\complement}$ otvoren skup, slijedi da postoji otvoren skup V takav da je $x \in V$ i $\overline{V} \subseteq F^{\complement}$. Slijedi da je $F \subseteq \overline{V}^{\complement}$. Kako je $\overline{V}^{\complement}$ otvoren skup, te je $V \cap \overline{V}^{C} = \emptyset$, slijedi da je X T_3 prostor. □

Lema 4.2.3. *Neka je (X, τ) topološki prostor te neka je $\mathcal{P}$ podbaza topologije τ. Pretpostavimo da za svaki $x \in X$ i svaki $P \in \mathcal{P}$ takav da je $x \in P$ postoji $W \in \tau$ takav da je $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq P$. Tada je (X, τ) T_3 prostor.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ i U otvoren skup takav da je $x \in U$. Budući da je $\mathcal{P}$ podbaza topologije τ, postoje $P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$ takvi da je $x \in P_1 \cap ... \cap P_n \subseteq U$. Za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ vrijedi $x \in P_i$ pa postoji otvoren skup W_i takav da je $x \in W_i$ i $\overline{W_i} \subseteq P_i$. Slijedi da je $x \in W_1 \cap ... \cap W_n \subseteq \overline{W_1} \cap ... \cap \overline{W_n} \subseteq P_1 \cap ... \cap P_n \subseteq U$.

Definirajmo $V = W_1 \cap ... \cap W_n$. Slijedi da je V otvoren i $x \in V$. Imamo $V \subseteq \overline{W_1} \cap ... \cap \overline{W_n}$. Kako je $\overline{W_1} \cap ... \cap \overline{W_n}$ zatvoren skup, slijedi da je $\overline{V} \subseteq \overline{W_1} \cap ... \cap \overline{W_n}$. Slijedi da je $\overline{V} \subseteq U$. Sada iz leme 4.6.2 slijedi da je X T_3 prostor. □

Teorem 4.2.4. *Neka su X i Y topološki prostori, pri čemu je Y regularan. Tada je $C(X, Y)$, s kompaktno otvorenom topologijom, regularan prostor.*

Dokaz. Kako je Y T_1 prostor, iz propozicije 4.2.1 slijedi da je i Y^X T_1 prostor. Tada iz napomene 1.8.7 slijedi da je i $C(X, Y)$ T_1 prostor. Dakle, još moramo pokazati da je $C(X, Y)$ T_3 prostor.

Po propoziciji 1.5.10 $\varphi = \{C(X,Y) \cap S(A,V) \mid A$ kompaktan u X, V otvoren u $Y\}$ je podbaza kompaktno otvorene topologije na $C(X,Y)$. Neka je $W \in \varphi$. Tada postoje A kompaktan u X, V otvoren u Y takvi da je $W = S(A,V) \cap C(X,Y)$.

Neka je $g \in W$. Tvrdimo da tada postoji otvoren skup U u $C(X,Y)$ takav da je $g \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W$. Ukoliko pokažemo da to vrijedi, tada će iz leme 4.2.3 slijediti da je $C(X,Y)$ T_3 prostor.

Za svaki $x \in A$, imamo da je $g(x) \in V$. Kako je Y T_3 prostor, po lemi 4.6.2 slijedi da postoji skup V_x u Y takav da je $g(x) \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq V$. Tada je familija $\{V_x \mid x \in A\}$ otvoren pokrivač kompaktnog skupa $g(A)$. Stoga postoji konačan potpokrivač. Neka je $\{V_{x_1}, ..., V_{x_n}\}$ konačan potpokrivač.

Pokazat ćemo da je $U := S(A, \bigcup\limits_{i=1,...,n} V_{x_i}) \cap C(X,Y)$ otvoreni skup koji smo htjeli naći, tj. takav da sadrži g i njegov zatvarač je u W. Jasno je da U sadrži g. Trebamo još pokazati da je $\overline{U} \subseteq W$. Prvo primijetimo da , kako je (za svaki $i = 1, ..., n$) $\overline{V_{x_i}} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i=1,...,n} V_{x_i}} = \bigcup\limits_{i=1,...,n} \overline{V_{x_i}} \subseteq V$, imamo da je $\{h \in C(X,Y) \mid h(A) \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i=1,...,n} V_{x_i}}\} \subseteq W$.

Uzmimo sada neki $p \in C(X,Y)$ takav da $p \notin W$. Tada postoji $a \in A$ takav da $p(a) \notin V$, pa stoga također $p(a) \notin \overline{\bigcup\limits_{i=1,...,n} V_{x_i}}$. Dakle, $p \in \{k \in C(X,Y) \mid k(a) \in Y \setminus \overline{\bigcup\limits_{i=1,...,n} V_{x_i}}\} =: O$. O je otvoren skup u $C(X,Y)$ te je disjunktan s U. (Kad bismo pretpostavili da postoji $b \in U \cap O$, tada bi slijedilo da je $b(a) \in ((\bigcup\limits_{i=1,...,n} V_{x_i}) \cap (Y \setminus \overline{\bigcup\limits_{i=1,...,n} V_{x_i}}))$, što je očito prazan skup.)

Dakle, $p \in O$, O otvoren, $O \cap U = \emptyset$, pa slijedi da je $U \subseteq C(X,Y) \setminus O$. Kako je $C(X,Y) \setminus O$ zatvoren skup, slijedi da je i $\overline{U} \subseteq C(X,Y) \setminus O$, a slijed da je $\overline{U} O 0$. Dakle, $p \notin \overline{U}$, pa je $\overline{U} \subseteq W$.

Dakle, imamo da je $g \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W$. Stoga je $C(X,Y)$ T_3 prostor.

□

4.3 Kompaktno otvorena topologija i prostori omeđenih funkcija

Lema 4.3.1. *Neka je (X,d) metrički prostor , neka je K kompaktan skup u (X,d) te neka je V otvoren skup u (X,d). Pretpostavimo da je $K \subseteq V$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K(x,\epsilon) \subseteq V$, za svaki $x \in K$.*

Dokaz. Neka je $x \in K \subseteq V$. Tada postoji $r_x > 0$ takav da je $K(x, r_x) \subseteq V$.

Neka je $\mathcal{U} = \{K(x, \frac{r_x}{2}) : x \in K\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od K u (X,d). Onda se on može reducirati na konačan. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, ..., x_n \in K$ takvi da je $K \subseteq K(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}) \cup ... \cup K(x_n, \frac{r_{x_n}}{2})$.

Definirajmo $\epsilon = min\{\frac{r_{x_1}}{2}, ..., \frac{r_{x_n}}{2}\}$. Neka je $x \in K$. Tada postoji $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x \in K(x_i, \frac{r_{x_i}}{2})$.

Tvrdimo da je $K(x, \epsilon) \subseteq K(x_i, r_{x_i})$. Neka je $y \in K(x, \epsilon)$. Tada je $d(y, x) < \epsilon \leq \frac{r_{x_i}}{2}$. Imamo $d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{r_{x_i}}{2} + \frac{r_{x_i}}{2} = r_{x_i}$. Dakle, $d(y, x_i) < r_{x_i}$ pa je $y \in K(x_i, r_{x_i})$. Prema tome,vrijedi da je $K(x, \epsilon) \subseteq K(x_i, r_{x_i})$.

Kako je $K(x_i, r_{x_i}) \subseteq V$, slijedi da je $K(x, \epsilon) \subseteq V$. Dakle, $K(x, \epsilon) \subseteq V$, za svaki $x \in K$. □

Teorem 4.3.2. *Neka je (X, τ) kompaktan topološki prostor te neka je (Y, d) metrički prostor. Neka je D metrika na $C((X, \tau), (Y, d))(\subseteq B(X, (Y, d))$ definirana sa $D = d_\infty\big|_{C((X,\tau),(Y,d))\times C((X,\tau),(Y,d))})$. Tada se topologija inducirana metrikom D podudara s kompaktno otvorenom topologijom na $C((X, \tau), (Y, d)) = C((X, \tau), (Y, \tau_d))$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ kompaktno otvorena topologija na $C((X, \tau), (Y, d))$. Želimo dokazati da je $\mathcal{F} = \tau_D$. Neka je $\varphi = \{S(A, V) \cap C((X, \tau), (Y, d)) : A$ kompaktan u $(X, \tau), V$ otvoren u $(Y, d)\}$. Tada je, po propoziciji 1.5.10, φ podbaza topologije $\mathcal{F}$.

Tvrdimo da je $\varphi \subseteq \tau_D$. Neka je A kompaktan skup u (X, τ) te V otvoren u (Y, d). Dokažimo da je $S(A, V) \cap C((X, \tau), (Y, d)) \in \tau_D$, to jest da je $S(A, V) \cap C((X, \tau), (Y, d))$ otvoren skup u metričkom prostoru $(C((X, \tau), (Y, d)), D)$.

Neka je $f \in S(A, V) \cap C((X, \tau), (Y, d))$. Tada je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije τ i τ_d te je $f(A) \subseteq V$. Iz propozicije 1.7.7 slijedi da je $f(A)$ kompaktan skup u (Y, τ_d), tj. u (Y, d). Budući da je V otvoren skup u (Y, d) te da je $f(A) \subseteq V$, iz prethodne leme slijedi da postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K_d(y, \epsilon) \subseteq V$, za svaki $y \in f(A)$.

Tvrdimo da je $K_D(f, \epsilon) \subseteq S(A, V) \cap C((X, \tau), (Y, \tau_d))$. Neka je $g \in K_D(f, \epsilon)$. Očito je $g \in C((X, \tau), (Y, \tau_d))$. Dokažimo da je također $g \in S(A, V)$, tj. da je $g(A) \subseteq V$. Neka je $a \in A$ proizvoljan, želimo pokazati da je $g(a) \in V$.

Zbog $g \in K_D(f, \epsilon)$, vrijedi $D(g, f) < \epsilon$, tj. $d_\infty(g, f) < \epsilon$. Imamo $d(g(a), f(a)) \leq d_\infty(g, f) < \epsilon$. Dakle, $d(g(a), f(a)) < \epsilon$, pa je $g(a) \in K_d(f(a), \epsilon)$.

Kako je $f(a) \in f(A)$, slijedi da je $K_d(f(a), \epsilon) \subseteq V$, pa je $g(a) \in V$.

Prema tome, vrijedi $g(a) \in V$, za svaki $a \in A$. Stoga vrijedi $g(A) \subseteq V$. Dakle, $g \in S(A, V)$. Dakle, slijedi da je $K_D(f, \epsilon) \subseteq S(A, V) \cap C((X, \tau), (Y, \tau_d))$. Zaključujemo da je $S(A, V) \cap C((X, \tau), (Y, \tau_d))$ otvoren skup u $(C((X, \tau), (Y, \tau_d)), D)$. Dakle, $\varphi \subseteq \tau_D$. Stoga je i $\mathcal{F} \subseteq \tau_D$.

Dokažimo sada $\tau_D \subseteq \mathcal{F}$. Uzmimo $U \in \tau_D$, te uzmimo $f \in U$. Želimo pronaći element iz $\mathcal{F}$ koji sadrži f, i podskup je od U. Kako je U otvoren skup u topologiji τ_D, slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $K_D(f, r) \subseteq U$. Znamo da je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija s obzirom na τ i τ_D, te, kako je (X, τ) kompaktan topološki prostor, slijedi da je i $f(X)$ kompaktan skup u (Y, d).

Neka je $\mathcal{U} = \{K_d(y, \frac{r}{6}) : y \in f(X)\}$ otvoren pokrivač za $f(X)$.Kako je $f(X)$ kompaktan, slijedi da postoje $y_1, ..., y_n \in f(X)$ takvi da je $f(X) \subseteq K_d(y_1, \frac{r}{6}) \cup ... \cup K_d(y_n, \frac{r}{6})$. Postoje $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je $y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$. Slijedi da je

$$f(X) \subseteq K_d(f(x_1), \frac{r}{6}) \cup ... \cup K_d(f(x_n), \frac{r}{6}). \tag{$*$}$$

Za $i \in \{1, ..., n\}$ definiramo $C_i = f^{-1}(\overline{K_d}(f(x_i), \frac{r}{6}))$. C_i je zatvoren skup kao praslika zatvorenog skupa po neprekidnoj funkciji te je stoga, kako je (X, τ) kompaktan topološki prostor, također i kompaktan. Definiramo i $V_i = K_d(f(x_i), \frac{r}{3})$. V_i je očito otvoren skup u (Y, d) za svaki $i \in \{1, ..., n\}$.

Za $i \in \{1, ..., n\}$ definirajmo $S_i = S(C_i, V_i) \cap C((X, \tau), (Y, d))$. Pokažimo da je $f \in S_i$. Kako je f očito iz $C((X, \tau), (Y, d))$, treba još pokazati da je $f \in S(C_i, V_i)$. Vrijedi $f(C_i) \subseteq \overline{K_d}(f(x_i), \frac{r}{6}) \subseteq K_d(f(x_i), \frac{r}{3})$. Dakle, $f(C_i) \subseteq V_i$, pa je $f \in S(C_i, V_i)$. Stoga je $f \in S_i$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Dakle, $f \in \bigcap_{i \in \{1,...,n\}} S_i$. Htjeli bismo pokazati da je

$$\bigcap_{i \in \{1,...,n\}} S_i \subseteq K_D(f, r). \tag{$**$}$$

Uzmimo $g \in \bigcap_{i \in \{1,...,n\}} S_i$. Slijedi da je $g \in S_i$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Dakle, $g \in C((X, \tau), (Y, d))$,te je ,posebno, $g \in S_i = S(C_i, V_i)$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Dakle, $g(C_i) \subseteq V_i$, za svaki $i \in \{1, .., n\}$. Želimo pokazati da je $D(f, g) < r$.

Neka je $x \in X$. Prema $(*)$ postoji $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $f(x) \in K_d(f(x_i), \frac{r}{6})$. Slijedi da je $f(x) \in \overline{K_d}(f(x), \frac{r}{6})$. Slijedi da je $x \in f^{-1}(\overline{K_d}(f(x_i), \frac{r}{6})$, dakle $x \in C_i$. Budući da je $g(C_i) \subseteq V_i$, imamo da je $g(x) \in V_i$. Dakle, $g(x) \in K(f(x_i), \frac{r}{3})$. Znamo da je $f(x) \in K_d(f(x_i), \frac{r}{6})$.

Imamo $d(g(x), f(x)) \leq d(g(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \frac{r}{3} + \frac{r}{6} = \frac{r}{2}$. Kako je x bio proizvoljan iz X, zaključujemo da je $d(g(x), f(x)) < \frac{r}{2}$, za svaki $x \in X$.

Slijedi da je $d_\infty(g, f) = sup\{d(g(x), f(x)) : x \in X\} \leq \frac{r}{2}$, pa slijedi da je $d_\infty(g, f) < r$, odnosno, $D(g, f) < r$, pa slijedi da je $g \in K_D(f, r)$.

Dakle, vrijedi da je $\bigcap_{i \in \{1,...n\}} S_i \subseteq K_D(f, r)$, tj. vrijedi $(**)$.

Dakle, $f \in \bigcap_{i \in \{1,...,n\}} S_i \subseteq K_D(f, r) \subseteq U$. Uočimo da je $\bigcap_{i \in \{1,...,n\}} S_i \in \mathcal{F}$. Dakle, za proizvoljan $U \in \tau_D$, dokazali smo sljedeće : za svaki $f \in U$, postoji $W_f \in \mathcal{F}$(taj W_f dobijemo upravo kao $\bigcap_{i \in \{1,...,n\}} S_i$) takav da je $f \in W_f \subseteq U$.

Dakle,slijedi da je $U = \bigcup_{f \in U} W_f$. Slijedi da je $U \in \mathcal{F}$.Dakle, $\tau_D \subseteq \mathcal{F}$. Dakle, dokazali smo $\tau_D = \mathcal{F}$. □

Korolar 4.3.3. *Neka je (X, τ) kompaktan topološki prostor te neka je (Y, d) metrički prostor. Neka je $\mathcal{F}$ kompaktno otvorena topologija na $C((X, \tau), (Y, d))$. Neka je (f_n) niz u $C((X, \tau), (Y, d))$ te neka je $g \in C((X, \tau), (Y, d))$. Tada $f_n \to g$ u topološkom prostoru*

$(C((X, \tau), (Y, d)), \mathcal{F})$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $d(f_n(x), g(x)) < \varepsilon$, za svaki $x \in X$.

Dokaz. Koristit ćemo prethodni teorem. Naime, neka je D metrika na $C((X,\tau),(Y,d))$ iz prethodnog teorema. Po prethodnom teoremu znamo da je $\tau_D = \mathcal{F}$.

Pretpostavimo da $f_n \to g$ u topološkom prostoru $(C((X,\tau),(Y,d)),\mathcal{F})$. Tada $f_n \to g$ i u $(C((X,\tau),(Y,d)),D)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$, $D(f_n,g) < \varepsilon$. Neka je $n \geq n_0$. Tada je $d_\infty(f_n,g) < \varepsilon$, a za svaki $x \in X$ vrijedi $d(f_n(x),g(x)) \leq d_\infty(f_n,g) < \varepsilon$.

Dokažimo sada i obratni smjer. Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(f_n(x),g(x)) < \varepsilon$, za svaki $x \in X$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(f_n(x),g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, za svaki $x \in X$. Stoga za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d_\infty(f_n,g) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, dakle, $D(f_n,g) < \varepsilon$. Stoga $f_n \to g$ u metričkom prostoru $(C(X,\tau),(Y,d)),D)$, pa po prethodnom teoremu, kako je $\tau_D = \mathcal{F}$, slijedi da $f_n \to g$ i u topološkom prostoru $(C(X,\tau),(Y,d)),\mathcal{F})$. $\square$

4.4 Produkt dva topološka prostora

Neka su (X,τ) i (Y,φ) topološki prostori. Neka je $\mathcal{E} = \{U \times V : U \in \tau, V \in \varphi\}$. Neka su $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$. Tada je $E_1 = U_1 \times V_1$, $U_1 \in \tau, V_1 \in \varphi$, $E_2 = U_2 \times V_2$, $U_2 \in \tau, V_2 \in \varphi$. Dakle, $E_1 \cap E_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, što je očito element iz $\mathcal{E}$. Stoga je $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$, za sve $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$.

Također je očito da je $\bigcup\limits_{E \in \mathcal{E}} E = X \times Y$.

Sada po propoziciji 1.5.4 (u svojstvu 2 iz iskaza propozicije za B_3 uzmemo baš $B_1 \cap B_2$) slijedi da postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ na $X \times Y$ kojoj je $\mathcal{E}$ baza.

Za $\mathcal{R}$ kažemo da je **produktna topologija** na $X \times Y$ određena topologijama τ i φ, a za topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ kažemo da je izravni produkt topoloških prostora (X,τ) i (Y,φ).

Sada želimo vidjeti u kakvoj je vezi ova definicija sa definicijom produkta indeksirane familije skupova i definicijom produkta indeksirane familije topoloških prostora s početka trećeg poglavlja.

Neka su (X,τ) i (Y,φ) topološki prostori. Definirajmo $X_1 = X, X_2 = Y$(odnosno, indeksni skup je $\{1,2\}$) te $X'_1 = (X,\tau)$ i $X'_2 = (Y,\varphi)$. Imamo indeksiranu familiju topoloških prostora, (X'_α), za $\alpha \in \{1,2\}$.

Zanima nas u kojoj su vezi topološki prostori $\prod\limits_{\alpha \in \{1,2\}} X'_\alpha$ i $(X \times Y, \mathcal{R})$, gdje je $\mathcal{R}$ produktna topologija prostora (X,τ) i (Y,φ).

Znamo da je $\prod\limits_{\alpha \in 1,2} X'_\alpha = (\prod\limits_{\alpha \in 1,2} X_\alpha, \mathcal{V})$, gdje je $\prod\limits_{\alpha \in 1,2} X_\alpha = \{f : \{1,2\} \to X_1 \cup X_2 : f(1) \in X_1, f(2) \in X_2\}$, a $\mathcal{V}$ je topologija na $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ kojoj je baza skup $\mathcal{B} = \{\prod\limits_{\alpha \in 1,2} U_\alpha :$ U_α otvoren u $X'_\alpha, \forall \alpha \in A\}$ (izostavljamo uvjet $U_\alpha = X_\alpha$, za sve osim konačno mnogo $\alpha \in A$, jer je indeksni skup $\{1,2\}$ konačan.)

Definicija 4.4.1. *Neka su X i Y topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija takva da je $f^{-1} : Y \to X$ neprekidna funkcija. Tada za f kažemo da je* ***homeomorfizam*** *topoloških prostora X i Y. Za prostore X i Y kažemo da su homeomorfni ako postoji homeomorfizam između X i Y.*

Htjeli bismo pokazati da su prostori $\prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} X'_\alpha$ i $(X \times Y, \mathcal{R})$ homeomorfni.

Neka je $\Phi : X \times Y \to \prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha$ funkcija definirana na sljedeći način:

$\Phi(x, y) : \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2$.

Dakle , Φ elementu (x, y) iz $X \times Y$ pridružuje funkciju $\Phi(x, y) \in \prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha$, na način da je $(\Phi(x, y))(1) = x$, $(\Phi(x, y))(2) = y$.

Lako vidimo da je funkcija Φ bijekcija, tj. da je injekcija i surjekcija.

Pokažimo da je Φ injekcija. Ako su $(x, y), (x', y') \in X \times Y$, takvi da je $(x, y) \neq (x', y')$, onda je $x \neq x'$ ili $y \neq y'$, pa slijedi da je $(\Phi(x, y))(1) \neq (\Phi(x', y'))(1)$ ili $(\Phi(x, y))(2) \neq (\Phi(x', y'))(2)$. Stoga je $\Phi(x, y) \neq \Phi(x', y')$.

Dakle, Φ je injekcija.

Pokažimo sada da je Φ također surjekcija. Neka je $f \in \prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha$. Imamo da je $f : \{1, 2\} \to X \cup Y$, takva da je $f(1) \in X$ i $f(2) \in Y$. Slijedi da je $\Phi(f(1), f(2)) = f$. (Očito vrijedi da je $(f(1), f(2)) \in X \times Y$.)

Prema tome, Φ je surjekcija.

Dakle, Φ je bijekcija.

Pokažimo još da je Φ neprekidna i da je Φ^{-1} neprekidna. Po propoziciji 1.6.7 slijedi da je dovoljno pokazati da je praslika po funkciji Φ elemenata baze topologije $\mathcal{V}$ na $\prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha$ element topologije $\mathcal{R}$ na $X \times Y$.

Dakle, dovoljno je promatrati praslike funkcije Φ za elemente baze topologije $\mathcal{V}$, tj. za elemente familije $\mathcal{B} = \{ \prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha : U_\alpha$ otvoren u $X'_\alpha, \forall\alpha \in A\}$.

Neka je $B \in \mathcal{B}$. Tada je $B = \prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha$, gdje je U_1 otvoren u X'_1 i U_2 otvoren u X'_2, tj. $U_1 \in \tau$, $U_2 \in \varphi$. Mi tvrdimo da je

$$\Phi^{\leftarrow}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) = U_1 \times U_2. \tag{$*$}$$

Pokažimo prvo da je $\Phi^{\leftarrow}(\prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) \subseteq U_1 \times U_2$.

Neka je $(x, y) \in \Phi^{\leftarrow}(\prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha)$. Tada slijedi da je $\Phi(x, y) \in \prod\limits_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha$. Dakle, $(\Phi(x, y))(1) \in U_1$ i $(\Phi(x, y))(2) \in U_2$.

Po načinu na koji smo definirali preslikavanje Φ , $(\Phi(x, y))(1) = x$ i $(\Phi(x, y))(2) = y$.

Dakle, slijedi da je $x \in U_1$ i $y \in U_2$, odnosno, $(x, y) \in U_1 \times U_2$.

Dakle, pokazali smo da je $\Phi^{\leftarrow}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) \subseteq U_1 \times U_2$.

Želimo sada pokazati da je $U_1 \times U_2 \subseteq \Phi^{\leftarrow}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha)$, tj. da je $\Phi(U_1 \times U_2) \subseteq \prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha$.

Neka je $(x, y) \in U_1 \times U_2$. Tada je $x \in U_1$ i $y \in U_2$ pa je $\Phi(x, y) : \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2$ takva da je $(\Phi(x, y))(1) = x \in U_1$ i $(\Phi(x, y))(2) = y \in U_2$. Stoga je $\Phi(x, y) \in \prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha$, odnosno, $(x, y) \in \Phi^{\leftarrow}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha)$.

Dakle, $U_1 \times U_2 \subseteq \Phi^{\leftarrow}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha)$.

Dakle, vrijedi $(*)$.

Kako je U_1 bio iz τ, a U_2 iz φ, slijedi da je $U_1 \times U_2$ element baze topologije $\mathcal{R}$ na $X \times Y$.

Dakle, iz $(*)$ slijedi da je $\Phi^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{R}$. Kako je B bio proizvoljan element iz $\mathcal{B}$ (tj. iz baze topologije $\mathcal{V}$ na $\prod_{\alpha\in\{1,2\}} X'_\alpha$), po propoziciji 1.6.7 slijedi da je Φ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{V}$.

Dokažimo još da je funkcija $\Phi^{-1} : \prod_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha \to X \times Y$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{V}$ i $\mathcal{R}$.

Znamo da je familija $\{U_1 \times U_2 : U_1 \in \tau, U_2 \in \varphi\}$ baza topologije $\mathcal{R}$ na $X \times Y$. Dakle, opet po propoziciji 1.6.7, slijedi da je dovoljno pokazati da je $(\Phi^{-1})^{\leftarrow}(U_1 \times U_2)$ element baze topologije na $\prod_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha$, tj. da je element familije $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha : U_\alpha$ otvoren u $X'_\alpha\}$.

Neka su $U_1 \in \tau$ i $U_2 \in \varphi$.

Tvrdimo da je

$$(\Phi^{-1})^{\leftarrow}(U_1 \times U_2) = \prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha. \tag{$**$}$$

Napomena 4.4.2. *Neka su S i T skupovi te $f : S \to T$ i $g : T \to V$ funkcije. Neka je $A \subseteq S$. Tada se lako pokaže da je $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.*

Napomena 4.4.3. *Neka su S i T skupovi te $f : S \to T$ bijekcija. Neka je $B \subseteq T$. Tada je $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$. (Odnosno, praslika skupa B pri funkciji f jednaka je slici skupa B pri funkciji f^{-1}.)*

Naime, neka je $x \in f^{\leftarrow}(B)$. Tada je $f(x) = y$, za neki $y \in B$. Kako je f bijekcija, slijedi da je $x = f^{-1}(y)$, dakle, $x \in f^{-1}(B)$. Dakle, $f^{\leftarrow}(B) \subseteq f^{-1}(B)$.

Obratno, neka je $x \in f^{-1}(B)$. Slijedi da postoji $y \in B$ takav da je $x = f^{-1}(y)$. Kako je f bijekcija, slijedi da je i $f(x) = y$. Dakle, $f(x) \in B$, pa slijedi da je $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Sada, koristeći prethodnu napomenu (napomena 4.4.3) i $(*)$, želimo pokazati $(**)$, tj. da je $(\Phi^{-1})^{\leftarrow}(U_1 \times U_2) = \prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha$.

Po prethodnoj napomeni, $(**)$ je ekvivalentno sa $(\Phi^{-1})^{-1}(U_1 \times U_2) = \prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha$, tj.

$$\Phi(U_1 \times U_2) = \prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha. \qquad (***)$$

Iz $(*)$ slijedi da je $\Phi^{\leftarrow}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) = U_1 \times U_2$. Po prethodnoj napomeni 4.4.3 to je ekvivalentno sa $\Phi^{-1}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) = U_1 \times U_2$.

Sada slijedi da je $\Phi(\Phi^{-1}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) = \Phi(U_1 \times U_2)$. Odnosno, po napomeni 4.4.2, slijedi da je to ekvivalentno sa $(\Phi \circ \Phi^{-1})(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) = \Phi(U_1 \times U_2)$. Kako je $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{\prod_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha}$, slijedi da je to dalje ekvivalentno sa $id_{\prod_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha}(\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha) = \Phi(U_1 \times U_2)$.

Odnosno, slijedi da je $\prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha = \Phi(U_1 \times U_2)$.

Dakle, vrijedi $(***)$.

Kako je $(***)$ ekvivalentno sa $(**)$, slijedi da vrijedi i $(**)$, odnosno, da je $(\Phi^{-1})^{\leftarrow}(U_1 \times U_2) = \prod_{\alpha\in\{1,2\}} U_\alpha$.

Dakle, $(\Phi^{-1})^{\leftarrow}(U_1 \times U_2)$ je element familije $\mathcal{B}$ koja je baza za topologiju $\mathcal{V}$ na $\prod_{\alpha\in\{1,2\}} X_\alpha$.

Stoga, opet po propoziciji 1.6.7 slijedi da je Φ^{-1} neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{V}$ i $\mathcal{R}$.

Dakle, pokazali smo da je Φ homeomorfizam topoloških prostora $(X \times Y, \mathcal{R})$ i $\prod_{\alpha\in\{1,2\}} X'_\alpha$.

4.5 Lokalna kompaktnost

Definicija 4.5.1. *Za topološki prostor X kažemo da je **lokalno kompaktan** ako za svaki $x \in X$ postoje otvoren skup U u X i kompaktan skup K u X takvi da je $x \in U \subseteq K$.*

Napomena 4.5.2. *Svaki kompaktan topološki prostor je i lokalno kompaktan. No prostor koji je lokalno kompaktan ne mora biti i kompaktan. Primjerice,prostor $(\mathbb{R}, d)$,, (gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$), odnosno,sa pripadnom topologijom $(\mathbb{R}, \tau_d)$ nije kompaktan (jer $\mathbb{R}$ nije omeđen,odnosno jer, primjerice,otvoren pokrivač $\{\langle -n, n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ za $\mathbb{R}$ očito nema konačan potpokrivač.)*

No $(\mathbb{R}, d)$, odnosno $(\mathbb{R}, \tau_d)$ je lokalno kompaktan. Naime,ako je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan,očito je $x \in \langle x-1, x+1\rangle \subseteq [x-1, x+1]$.

Isto vrijedi i za prostore $(\mathbb{R}^n, d)$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Ti su prostori lokalno kompaktni, no nisu kompaktni.

Lema 4.5.3. *Neka je X lokalno kompaktan T_3 topološki prostor. Neka je $x \in X$ te neka je W otvoren skup u X takav da je $x \in W$. Tada postoji otvoren skup U u X takav da je $x \in U$ i $\overline{U} \subseteq W$, te je $\overline{U}$ kompaktan skup.*

Dokaz. Budući da je X lokalno kompaktan, postoje otvoreni skupovi V u X i kompaktni skup K u X takvi da je $x \in V \subseteq K$. Skup $W \cap V$ je otvoren i sadrži x. Stoga imamo $x \notin (W \cap V)^{\complement}$, a $(W \cap V)^{\complement}$ je zatvoren skup u X. Budući da je X T_3 prostor, postoje otvoreni skupovi $U_1, U_2 \in X$ takvi da je $x \in U_1$, $(W \cap V)^{\complement} \subseteq U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Iz $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, slijedi da je $U_1 \subseteq U_2^{\complement}$. Kako je $U_2^{\complement}$ zatvoren u X, slijedi da je $\overline{U_1} \subseteq U_2^{\complement}$.

Iz $(W \cap V)^{\complement} \subseteq U_2$ slijedi da je $U_2^{\complement} \subseteq W \cap V$. Sada iz toga što je $\overline{U_1} \subseteq U_2^{\complement}$ slijedi da je $\overline{U_1} \subseteq W \cap V$. Slijedi da je $\overline{U_1} \subseteq W$, dakle,

$$x \in \overline{U_1}, \overline{U_1} \subseteq W.$$

S druge strane, također slijedi da je $\overline{U_1} \subseteq V$ pa zbog $V \subseteq K$ imamo $\overline{U_1} \subseteq K$. Skup $\overline{U_1}$ je zatvoren, a K je kompaktan, pa iz propozicije 1.7.7 slijedi da je $\overline{U_1}$ kompaktan skup.

Dakle, $x \in U_1$, U_1 je otvoren skup, $\overline{U_1}$ je kompaktan skup i $\overline{U_1} \subseteq W$. Stoga je lema dokazana. □

Teorem 4.5.4. *Neka su X i Y topološki prostori pri čemu je X lokalno kompaktan T_3 prostor. Neka je $\Phi : C(X,Y) \times X \to Y$ funkcija definirana sa $\Phi(f,x) = f(x)$. Tada je Φ neprekidna funkcija. Pritom na $C(X,Y)$ promatramo kompaktno otvorenu topologiju, a na $C(X,Y) \times X$ produktnu topologiju.*

Dokaz. Neka su $f \in C(X,Y)$ i $x \in X$ proizvoljni. Dokažimo da je funkcija Φ neprekidna u točki (f,x).

Pretpostavimo da je V otvoren skup u Y takav da je $\Phi(f,x) \in V$. Tada je $f(x) \in V$. Kako je f neprekidna, slijedi da je $f^{\leftarrow}(V)$ otvoren u X, te očito $f^{\leftarrow}(V)$ sadrži x.

Kako je X lokalno kompaktan, prema prethodnoj lemi postoji otvoreni skup U u X takav da je $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq f^{\leftarrow}(V)$ te takav da je $\overline{U}$ kompaktan skup u X.

Neka je $A = S(\overline{U}, V) \cap C(X,Y)$. Tada je $A \times U$ otvoren skup u produktnoj topologiji na $C(X,Y) \times X$ te očito sadrži (f,x). Dakle, da bismo dokazali teorem, dovoljno je dokazati još da je $\Phi(A \times U) \subseteq V$.

Međutim, to se trivijalno pokaže. Naime, uzmimo $g \in A$ i $u \in U$ proizvoljne, tada je $\Phi(g,u) = g(u) \in g(\overline{U}) \subseteq V$.

Dakle, Φ je neprekidna. □

Definicija 4.5.5. *Za topološki prostor X kažemo da je strogo lokalno kompaktan ako za svaki $x \in X$ i svaki otvoren skup U u X takav da je $x \in U$ postoji otvoren skup V u X takav da je $x \in V$, $\overline{V} \subseteq U$ i $\overline{V}$ kompaktan.*

Propozicija 4.5.6. *Neka je X topološki prostor. Tada je X lokalno kompaktan T_3 prostor ako i samo ako je X strogo lokalno kompaktan prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X lokalno kompaktan T_3 prostor. Tada je X strogo lokalno kompaktan prema prethodnoj lemi.

Obratno, pretpostavimo da je X strogo lokalno kompaktan. Neka je $x \in X$. Skup X je otvoren u X i vrijedi $x \in X$ pa postoji otvoren skup V u X takav da je $x \in V$ i $\overline{V}$ je kompaktan skup. Prema tome, X je lokalno kompaktan jer je $x \in V \subseteq \overline{V}$, gdje je V otvoren skup, a $\overline{V}$ kompaktan. Dakle, X je lokalno kompaktan.

Dokažimo još da je X T_3 prostor. Neka je $x \in X$ i F zatvoren skup u X takav da $x \notin F$. Tada je $x \in F^{\complement}$, a $F^{\complement}$ je otvoren skup u X. Iz definicije stroge lokalne kompaktnosti slijedi da postoji otvoren skup H u X takav da je $x \in H$ i $\overline{H} \subseteq F^{\complement}$. Iz $\overline{H} \subseteq F^{\complement}$ slijedi da je $F \subseteq \overline{H}^{\complement}$. Očito je $\overline{H} \cap \overline{H}^{\complement} = \emptyset$, pa zbog $H \subseteq \overline{H}$ imamo $H \cap \overline{H}^{\complement} = \emptyset$.

Dakle, $x \in H$, $F \subseteq \overline{H}^{\complement}$, H i $\overline{H}^{\complement}$ su otvoreni skupovi i ta dva skupa su disjunktna. Dakle, x je T_3 prostor. □

4.6 Produkt dva topološka prostora i kompaktno otvorena topologija

Propozicija 4.6.1. *Neka su X i Y topološki prostori, neka je A kompaktan skup u X te B kompaktan skup u Y. Pretpostavimo da je W otvoren skup u $X \times Y$ takav da je $A \times B \subseteq W$. Tada postoji otvoren skup U u X takav da je $A \subseteq U$ te postoji otvoren skup V u Y takav da je $B \subseteq V$ te da je $U \times V \subseteq W$.*

Dokaz. Neka je $x \in A$. Za svaki $y \in B$ je $(x, y) \in A \times B$ pa je $(x, y) \in W$. W je otvoren skup u $X \times Y$, a znamo da je $\{U \times V : U$ otvoren u X, V otvoren u $Y\}$ baza produktne topologije na $X \times Y$. Stoga postoje otvoren skup U_y u X i otvoren skup V_y u Y takav da je $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq W$. Slijedi da je $x \in U_y$ i $y \in V_y$.

Familija $\{V_y : y \in B\}$ je otvoren pokrivač skupa B u Y. Budući da je B kompaktan u Y, postoje $y_1, ..., y_n \in B$ takvi da je $B \subseteq V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$. Definirajmo $C = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$, $D = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$.

Imamo da je C otvoren skup u X, te $x \in C$. Nadalje, D je otvoren skup u Y i $B \subseteq D$.

Imamo $C \times D = C \times (V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}) = (C \times V_{y_1}) \cup ... \cup (C \times V_{y_n}) \subseteq (U_{y_1} \times V_{y_1}) \cup ... \cup (U_{y_n} \times V_{y_n}) \subseteq W$. Prema tome, $C \times D \subseteq W$.

Dakle, za svaki $x \in A$ postoji otvoren skup C_x u X i otvoren skup D_x u Y takvi da je $x \in C_x$, $B \subseteq D_x$, i $C_x \times D_x \subseteq W$.

Familija $\{C_x : x \in A\}$ je otvoreni pokrivač od A u X pa kompaktnost od A povlači da postoje $x_1, ..., x_n \in A$ takvi da je $A \subseteq C_{x_1} \cup ... \cup C_{x_n}$. Skup $C_{x_1} \cup ... \cup C_{x_n}$ je otvoren u X, vrijedi $A \subseteq C_{x_1} \cup ... C_{x_n}$, skup $D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n}$ je otvoren u Y i vrijedi $B \subseteq D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n}$.

Imamo $(C_{x_1} \cup ... \cup C_{x_n}) \times (D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n}) = (C_{x_1} \times (D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n})) \cup ... \cup (C_{x_n} \times (D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n})) \subseteq (C_{x_1} \times D_{x_1}) \cup ... \cup (C_{x_n} \times D_{x_n}) \subseteq W$. (Zadnja inkluzija slijedi iz toga što je $C_x \times D_x \subseteq W$, za svaki $x \in A$.)

Dakle, $(C_{x_1} \cup ... \cup C_{x_n}) \times (D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n}) \subseteq W$, te, kako je $A \subseteq C_{x_1} \cup ... \cup C_{x_n}$ i $B \subseteq D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n}$, slijedi da su $C_{x_1} \cup ... \cup C_{x_n}$ i $D_{x_1} \cap ... \cap D_{x_n}$ skupovi koje smo htjeli naći. □

Lema 4.6.2. *Neka su X i Y topološki prostori. Neka je $f : X \to Y$ funkcija, neka je $\mathcal{P}$ podbaza topologije od Y te neka je $x \in X$. Pretpostavimo da za svaki $P \in \mathcal{P}$ takav da je $f(x) \in P$ postoji otvoren skup U u X takav da je $x \in U$ i $f(U) \subseteq P$. Tada je f neprekidna u točki x.*

Dokaz. Htjeli bismo pokazati da, za svaki otvoren skup A iz topologije na Y takav da je $f(x) \in A$ postoji okolina U od x takva da je $f(U) \subseteq A$.

Pokažimo prvo da to vrijedi za elemente baze $\mathcal{B}$ topologije na Y, gdje je $\mathcal{B} = \{P_1 \cap ... \cap P_n : P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$. Neka je $B \in \mathcal{B}$. Vrijedi $B = P_1 \cap ... \cap P_n$, za neke $P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$. Kako su $P_1, ..., P_n \in \mathcal{P}$, slijedi da za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ postoji otvoren skup U_i u topologiji na X takav da je $x \in U_i$ i $f(U_i) \subseteq P_i$. Očito je $U_1 \cap ... \cap U_n$ otvoren skup u topologiji na X te očito sadrži x, i također očito vrijedi $f(U_1 \cap ... \cap U_n) \subseteq P_1 \cap ... \cap P_n = B$. Dakle, pokazali smo da za svaki element $B \in \mathcal{B}$ takav da je $f(x) \in B$ postoji otvorena okolina U oko x takva da je $f(U) \subseteq B$.

Pokažimo to sada za proizvoljan element topologije na Y. Neka je A proizvoljan element topologije na Y. Tada se A može zapisati kao $\bigcup_{k \in K} B_k$ (Kje neki indeksni skup), gdje je $B_i \in \mathcal{B}$ za svaki $i \in K$. Ukoliko je $f(x) \in A$, slijedi da postoji element $j \in K$ takav da je $f(x) \in B_j$. Kako je $B_j \in \mathcal{B}$, prema već pokazanom slijedi da postoji otvoren skup L u X takav da je $x \in L$ i $f(L) \subseteq B_j \subseteq A$. Kako je sada A bio proizvoljan element topologije na Y, slijedi tvrdnja leme. □

Napomena 4.6.3. *Neka su X i Y topološki prostori te neka su $p_1 : X \times Y \to X$ i $p_2 : X \times Y \to Y$ projekcije (tj. funkcije definirane sa $p_1(x, y) = x$ i $p_2(x, y) = y$, za sve $x \in X$ i $y \in Y$). Neka je U otvoren u X. Tada je $p_1^{\leftarrow}(U) = U \times Y$, pa slijedi da je $p_1^{\leftarrow}(U)$ otvoren u $X \times Y$. Dakle, p_1 je neprekidna funkcija, a analogno vidimo i za p_2.*

Propozicija 4.6.4. *Neka su X, Y i Z topološki prostori te neka je $f : Z \to X \times Y$ funkcija. Neka je $p_1 : X \times Y \to X$ projekcija na prvu koordinatu te neka je $p_2 : X \times Y \to Y$ projekcija na drugu kooordinatu. Tada je f neprekidna ako i samo ako su funkcije $p_1 \circ f : Z \to X$ i $p_2 \circ f : Z \to Y$ neprekidne.*

Dokaz. Ako je f neprekidna, tada iz prethodne napomene odmah slijedi da su $p_1 \circ f$ i $p_2 \circ f$ neprekidne.

Pretpostavimo da su $p_1 \circ f$ i $p_2 \circ f$ neprekidne. Dokažimo da je f neprekidna. Neka je $\mathcal{B} = \{U \times V : U$ otvoren u X, V otvoren u $Y\}$. Želimo dokazati da je f neprekidna. Dovoljno je, prema propoziciji 1.6.7, pokazati da je $f^{\leftarrow}(B)$ otvoren u Z, za svaki $B \in \mathcal{B}$. Neka je U otvoren u X te V otvoren u Y. Imamo $f^{\leftarrow}(U \times V) = \{z \in Z : f(z) \in U \times V\} = \{z \in Z : (p_1(f(z)), p_2(f(z))) \in U \times V\} = \{z \in Z : p_1(f(z)) \in U$ i $p_2(f(z)) \in V\} = \{z \in Z : (p_1 \circ f)(z) \in U\} \cap \{z \in Z : p_2(f(z)) \in V\}$, a to je jednako $(p_1 \circ f)^{\leftarrow}(U) \cap (p_2 \circ f)^{\leftarrow}(V)$. Kako smo pretpostavili da su $p_1 \circ f$ i $p_2 \circ f$ neprekidne, slijedi da su $(p_1 \circ f)^{\leftarrow}(U)$ i $(p_2 \circ f)^{\leftarrow}(V)$ otvoreni u Z. Stoga je i $(p_1 \circ f)^{\leftarrow}(U) \cap (p_2 \circ f)^{\leftarrow}(V)$ otvoren u Z, odnosno $f^{\leftarrow}(U \times V)$ je otvoren u Z. Stoga slijedi da je f neprekidna. □

Teorem 4.6.5. *Neka su X, Y i Z topološki prostori. Neka je $f : X \times Y \to Z$ funkcija takva da je za svaki $x \in X$ $f_x : Y \to Z$, $f_x(y) = f(x, y)$ neprekidna. Neka je $f_* : X \to C(Y, Z)$ funkcija definirana sa $f_*(x) = f_x$ za svaki $x \in X$.*

1) Pretpostavimo da je f neprekidna. Tada je f_* neprekidna funkcija, pri čemu na $C(Y, Z)$ promatramo kompaktno otvorenu topologiju.

2) Pretpostavimo da je f_* neprekidna funkcija te da je Y strogo lokalno kompaktan. Tada je f neprekidna.

Dokaz. 1) Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je $x \in X$. Neka je A kompaktan skup u Y te V otvoren skup u Z. Pretpostavimo da je $f_*(x) \in S(A, V) \cap C(Y, Z)$. Želimo pokazati da postoji otvoren skup U u X takav da je $x \in U$ i $f_*(U) \subseteq S(A, V) \cap C(Y, Z)$. Očito je $f_*(U) \subseteq C(Y, Z)$, za svaki $U \subseteq X$. Još trebamo pokazati da je $f_*(U) \subseteq S(A, V)$, za neki otvoren skup U takav da je $x \in U$.

Za to je dovoljno naći otvoren skup U u X takav da je $x \in U$ i $(f_*(u))(A) \subseteq V$, za svaki $u \in U$. Zadnja inkluzija je ekvivalentna s tim da je $(f_*(u)(a)) \in V$, za svaki $a \in A$, za svaki $u \in U$, tj. $f_u(a) \in V$, tj. $f(u, a) \in V$, za svaki $u \in U$, za svaki $a \in A$. Stoga je dovoljno naći otvoren skup U u X takav da je $x \in U$ i $f(U \times A) \subseteq V$.

Iz $f_*(x) \in S(A, V)$ slijedi da je $f_*(x)(y) \in V$, za svaki $y \in A$. Dakle, $(x, y) \in f^{\leftarrow}(V)$, za svaki $y \in A$, tj. $\{x\} \times A \subseteq f^{\leftarrow}(V)$. Budući da je f neprekidna, $f^{\leftarrow}(V)$ je otvoren u $X \times Y$. Skup $\{x\}$ je očito kompaktan u X, a znamo da je A kompaktan skup u Y.

Iz propozicije 4.6.1 slijedi da postoji otvoren skup U u X takav da je $\{x\} \subseteq U$ i otvoren skup U' u Y takav da je $A \subseteq U'$ te takav da je $U \times U' \subseteq f^{\leftarrow}(V)$. Imamo da je $U \times A \subseteq U \times U' \subseteq f^{\leftarrow}(V)$, dakle, $U \times A \subseteq f^{\leftarrow}(V)$ pa je $f(U \times A) \subseteq V$.

Dakle, f_* je neprekidna po lemi 4.6.2.

2) Definirajmo funkciju $h : X \times Y \to C(Y,Z) \times Y$ sa $h(x,y) = (f_*(x), y)$. Neka je $\Phi : C(Y,Z) \times Y \to Z$ definirana sa $\Phi(g,y) = g(y)$. Tada je $(\Phi \circ h)(x,y) = \Phi(f_*(x), y) = (f_*(x))(y) = f(x,y)$, za svaki $x \in X$ i $y \in Y$. Dakle,$\Phi \circ h = f$. Prema tome, da bismo pokazali da je f neprekidna, dovoljno je pokazati da su h i Φ neprekidne. Kako je Y strogo lokalno kompaktan, iz teorema 4.5.4 odmah slijedi da je Φ neprekidna. Dakle, da bismo pokazali da je f neprekidna, moramo još pokazati da je h neprekidna. Prema prethodnoj propoziciji, za to je dovoljno pokazati da su $p_1 \circ h : X \times Y \to C(Y,Z)$ i $p_2 \circ h : X \times Y \to Y$ neprekidne. Kako je $p_2 \circ h : X \times Y \to Y$ definirana sa $(p_2 \circ h)(x,y) = y$, za svaki $x \in X, y \in Y$, slijedi da je $p_2 \circ h = p_2$, pa je po prethodnoj napomeni očito $p_2 \circ h$ neprekidna. Kako je $p_1 \circ h : X \times Y \to C(Y,Z)$ definirana sa $(p_1 \circ h)(x,y) = f_*(x)$, za svaki $x \in X, y \in Y$, a f_* je neprekidna po pretpostavci slijedi da je $p_1 \circ h$ neprekidna.

$\square$

Poglavlje 5

Hilbertovi prostori

5.1 Definicija Hilbertovog prostora

Propozicija 5.1.1. *(Cauchy-Schwarz-Bunjakowski nejednakost) Neka su* $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$*. Tada je* $|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

Dokaz. Tvrdnja je jasna ukoliko je $x_1 = ... = x_n = 0 i y_1 = ... = y_n = 0$.

Pretpostavimo da je $y_i \neq 0$, za neki $i \in \{1, ..., n\}$. Definirajmo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $f(t) = (x_1 + ty_1)^2 + ... + (x_n + ty_n)^2$, za svaki $t \in \mathbb{R}$. Očito je $f(t) \geq 0$, za svaki t. Za svaki $t \in \mathbb{R}$, vrijedi $f(t) = (x_1^2 + 2x_1ty_1 + t^2y_1^2) + ... + (x_n^2 + 2x_nty_n + t^2y_n^2) = (x_1^2 + ... + x_n^2) + 2(x_1y_1 + ... + x_ny_n)t + (y_1^2 + ... + y_n^2)t^2$. Stoga je f kvadratna funkcija po t, jer je očito $y_1^2 + ... + y_n^2 \neq 0$. Kako je $f(t) \geq 0$, za svaki $t \in \mathbb{R}$, slijedi da $f(t)$, kao kvadratna funkcija po t, može imati najviše jednu realnu nultočku, odnosno diskriminanta od f mora biti manja ili jednaka nuli. Dakle, $4(x_1y_1 + ...x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + ... + y_n^2) \leq 0$, odnosno $(x_1y_1 + ... + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + ...y_n^2)$. Korjenovanjem zadnjeg izraza dobivamo $| x_1y_1 + ... + x_ny_n |\leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}$, što je upravo tvrdnja propozicije. □

Neka je $\mathcal{H} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^2$ je konvergentan red $\}$.

Pokažimo da, ukoliko su $(x_i), (y_i) \in \mathcal{H}$, tada je $(x_i + y_i) \in \mathcal{H}$. Dakle, trebamo pokazati da je red $\sum_{i\in\mathbb{N}}(x_i + y_i)^2$ konvergentan.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo:

$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$,

što je

$$\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

a to je

$\leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2.$

Pretposljednja nejednakost slijedi iz prethodne propozicije (slijedi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \mid \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.)

Posljednja nejednakost slijedi iz toga što je $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2$ (jer je niz parcijalnih suma monoton strogo rastući niz, pa je ograničen odozgo sa limesom).

Dakle, dobili smo da je $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 + 2\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2.$

To znači da je niz $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ omeđen, a očito je da je ovaj niz rastući. Stoga je konvergentan.

Prema tome, red $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}(x_i + y_i)^2$ je konvergentan.

Dakle, $(x_i + y_i) \in \mathcal{H}$.

Također vrijedi sljedeće:

Ukoliko je $(x_i) \in \mathcal{H}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada je $(\lambda x_i) \in \mathcal{H}$.

Ta se tvrdnja može lako pokazati.

Dakle, $\mathcal{H}$ je zatvoren na zbrajanje i na množenje skalarom.

Stoga je $\mathcal{H}$ vektorski prostor, odnosno $\mathcal{H}$ je potprostor vektorskog prostora svih realnih nizova, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Neka je $\rho : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $\rho((x_i), (y_i)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$, za sve $(x_i), (y_i) \in \mathcal{H}$.

Uočimo da je ρ dobro definirana funkcija jer za $(x_i), (y_i) \in \mathcal{H}$ imamo da je $(x_i - y_i) \in \mathcal{H}$(slijedi iz toga što smo pokazali da je $\mathcal{H}$ vektorski prostor) pa je red $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}(x_i - y_i)^2$ konvergentan.

Tvrdimo da je ρ metrika na $\mathcal{H}$. Pokažimo da to zaista i vrijedi.

Neka su $(x_i), (y_i) \in \mathcal{H}$. Tada je očito $\rho((x_i), (y_i)) \geq 0$, za sve $(x_i), (y_i) \in \mathcal{H}$(vrijedi svojstvo $M1$) metrike).

Pokažimo da također vrijedi da je $\rho((x_i), (y_i)) = 0$ ako i samo ako je $(x_i) = (y_i)$, odnosno da vrijedi svojstvo $M2$). Ukoliko je $(x_i) = (y_i)$, tada je očito da vrijedi $\rho((x_i), (y_i)) = 0$.

Obratno, ukoliko je $\rho((x_i),(y_i)) = 0$, slijedi da je $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2 = 0$. Ukoliko red ima nenegativne članove i suma mu je nula, slijedi da su svi članovi jednaki nula. Stoga slijedi da je $(x_i) = (y_i)$.

Očito je da vrijedi $\rho((x_i),(y_i)) = \rho((y_i),(x_i))$ (svojstvo M3)).

Dokažimo još da vrijedi svojstvo M4) metrike(nejednakost trokuta).

Neka su $(x_i),(y_i),(z_i) \in \mathcal{H}$ tri niza.

Uzmimo $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} \qquad (*)$$

Naime, ako označimo $a = (x_1, ..., x_n), b = (y_1, ..., y_n), c = (z_1, ..., z_n)$, te ako je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$, tada je očito(jer je d metrika pa za nju vrijedi svojstvo nejednakosti trokuta) da vrijedi $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$, a to je ekvivalentno sa $(*)$.

Dalje očito vrijedi: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2}$.

Ukoliko ovo kvadriramo, dobivamo da je $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq (\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2})^2$.

Općenito vrijedi sljedeće: ukoliko je svaki član niza manji ili jednak od nekog realnog broja, tada je i limes niza manji ili jednak od njega. (Ova se tvrdnja lako može pokazati,a i poznato je s analize.)

Stoga, kako je $(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2})^2$ gornja međa za niz parcijalnih suma, slijedi da je i limes niza parcijalnih suma manji jednak od te gornje međe.

Odnosno, vrijedi $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2 \leq (\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2})^2$.

Ukoliko ovo korjenujemo, dobivamo da je $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2}$.

Odnosno, to je ekvivalentno s tim da je $\rho((x_i),(y_i)) \leq \rho((x_i),(z_i)) + \rho((z_i),(y_i))$, za svaki $(x_i),(y_i),(z_i) \in \mathcal{H}$. Dakle, za ρ vrijedi svojstvo $M4$), odnosno nejednakost trokuta.

Dakle, pokazali smo da je ρ metrika.

Za metrički prostor $\underline{(\mathcal{H},\rho)}$ kažemo da je **Hilbertov prostor**.

5.2 Separabilnost Hilbertovog prostora

Definicija 5.2.1. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Kažemo da je A gust skup u (X,d) ako je $\overline{A} = X$.*

Propozicija 5.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Tada je A gust u (X, d) ako i samo ako je za svaki neprazan otvoren skup U u (X, d) vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A gust u (X, d). Neka je U proizvoljan neprazan otvoren skup u (X, d). Pretpostavimo da je $U \cap A = \emptyset$. Tada je $A \subseteq U^{\complement}$. Kako je $U^{\complement}$ zatvoren skup, slijedi da je $\overline{A} \subseteq U^{\complement}$, što povlači da je $\overline{A} \cap U = \emptyset$, a to je kontradikcija, jer je $\overline{A} = X$, a U je neprazan otvoren podskup od X. Dakle, ukoliko je A gust u X, tada A mora sjeći svaki neprazan otvoren skup u X.

Obratno, pretpostavimo da svaki neprazan otvoren skup siječe A. Želimo pokazati da je A gust. Pretpostavimo da A nije gust u (X, d). Tada je $\overline{A} \neq X$ pa je $X \setminus \overline{A}$ neprazan. Očito je da je $X \setminus \overline{A}$ također i otvoren. Stoga po pretpostavci vrijedi da je $A \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$, što je očito kontradikcija, pa slijedi da je A gust. □

Propozicija 5.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Tada je A gust u (X, d) ako i samo ako za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon > 0$, $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Dokaz. Ukoliko je A gust u (X, d), tada je očito da vrijedi $A \cap K(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, za svaki $x \in X$, za svaki $\varepsilon > 0$, po prethodnoj propoziciji.

Obratno, pretpostavimo da je $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, za svaki $x \in X$, za svaki $\varepsilon > 0$. Želimo pokazati da je A gust. Koristit ćemo karakterizaciju iz prethodne propozicije. Neka je U neprazan otvoren skup u (X, d). Pokažimo da U siječe A. Odaberimo $x \in U$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x, \varepsilon) \subseteq U$. Iz $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, slijedi da je $U \cap A \neq \emptyset$, pa slijedi da je A gust u X. □

Definicija 5.2.4. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je separabilan ako postoji prebrojiv gust skup u (X, d).*

Napomena 5.2.5. *$\mathbb{Q}$ je prebrojiv (poznato sa teorije skupova-ekvipotentan sa $\mathbb{N}$).Pokažimo još da je $\mathbb{Q}^n$ prebrojiv. Kako je $\mathbb{Q}^n$ ekvipotentan sa $\mathbb{N}^n$, (očito), dovoljno je pokazati da je $\mathbb{N}^n$ prebrojiv, tj. da je ekvipotentan sa $\mathbb{N}$. Za to će biti dovoljno pokazati da postoji surjekcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}^n$(činjenica poznata iz teorije skupova, bit će dovoljno pokazati da postoji surjekcija, ne i bijekcija). Neka je $E : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}_0$, definirana tako da je za $n, i \in \mathbb{N}$ broj $E(n, i)$ eksponent kojim prost broj p_i ulazi u rastav od n na proste faktore. Pri tome su $p_1, p_2, p_3, ...$ svi prosti brojevi redom (Dakle, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ...$.)*

Neka je $n \in \mathbb{N}$ fiksiran. Definiramo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$, $f(x) = (E(x, 1) + 1, ..., E(x, n) + 1)$. Ovako definirana funkcija f je očito surjekcija. Naime, neka je $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$. Tada za $x = p_1^{a_1-1} ... p_n^{a_n-1}$ vrijedi $f(x) = (a_1, ..., a_n)$. Dakle, $\mathbb{N}^n$ je prebrojiv pa je stoga i $\mathbb{Q}^n$ prebrojiv.

Teorem 5.2.6. *Hilbertov prostor $(\mathcal{H}, \rho)$ je separabilan metrički prostor.*

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $D_n = \{(x_i) \in \mathcal{H} : x_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \{1, ..., n\}, x_i = 0, \forall i > n\}$. Nizovi (x_i) koji su definirani na ovaj način,tj. koji se nalaze u D_n, očito su u $\mathcal{H}$. Naime, kad promatramo niz parcijalnih suma reda $\sum x_i^2$, vrijedi da je za $k \geq n$, $S_k = x_1^2 + ... + x_n^2$, te je stoga niz parcijalnih suma očito omeđen odozgo sa $x_1^2 + ... + x_n^2$, pa je stoga konvergentan. Preslikavanje $\mathbb{Q}^n \longmapsto D_n$ definirano sa $(q_1, ..., q_n) \longmapsto (q_1, ..., q_n, 0, ...0, ...)$ je očito bijekcija.

Dakle, D_n je ekvipotentan sa $\mathbb{Q}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa je stoga dovoljno pokazati da je $\mathbb{Q}^n$ prebrojiv da bismo pokazali da je D_n prebrojiv. To slijedi iz prethodne napomene. Dakle, D_n je prebrojiv. Slijedi da je $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n$ prebrojiv skup (kao unija prebrojivih skupova, poznato iz teorije skupova).

Tvrdimo da je $\mathcal{D}$ gust skup u $(\mathcal{H}, \rho)$. Neka je $(x_i) \in \mathcal{H}$ te neka je $\varepsilon > 0$. Želimo pokazati da postoji $(r_i) = (r_1, r_2, r_3, ..., r_n, 0, ...0) \in \mathcal{D}$ takav da je $\rho((x_i), (r_i)) < \varepsilon$.

Znamo da je $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i^2$ konvergentan. Imamo $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \to \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ pa $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$.

Stoga $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \to 0$.

Stoga vidimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, odnosno svaki realan broj je dobro aproksimiran racionalnim,(tj. $(\mathbb{R}, d)$ je separabilan metrički prostor, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$,činjenica poznata iz analize), slijedi da za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ postoji $r_i \in \mathbb{Q}$ takav da je $| x_i - r_i |< \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$.

Neka je (y_i) niz definiran sa $(y_i) = \begin{cases} r_i, i \leq n \\ 0, i > n. \end{cases}$,

dakle,očito je $(y_i) \in D_n$, odnosno $(y_i) \in \mathcal{D}$.

Pokažimo da je $\rho((x_i), (y_i)) < \varepsilon$. Imamo

$$\rho((x_i), (y_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$$

$< \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{2n} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon$. Dakle, $\rho((x_i), (y_i)) < \varepsilon$ pa je $(y_i) \in K((x_i), \varepsilon)$.

Prema tome, $K((x_i), \varepsilon) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Stoga je po propoziciji 5.2.3 $\mathcal{D}$ gust u $\mathcal{H}$.

Dakle, kako je $\mathcal{D}$ prebrojiv i gust je u metričkom prostoru $(\mathcal{H}, \rho)$, slijedi da je Hilbertov prostor $(\mathcal{H}, \rho)$ separabilan metrički prostor. □

5.3 Potpunost Hilbertovog prostora

Napomena 5.3.1. *1) Neka su (x_n) i (y_n) nizovi u $\mathbb{R}$ takvi da vrijedi $(x_n) \to a$ i $(y_n) \to b$. Tada $(x_n + y_n) \to a + b$ te $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$. Ova je činjenica poznata iz analize.*

2) Neka je (a_n) konvergentan niz u $\mathbb{R}$,neka je njegov limes a, neka je $M \in \mathbb{R}$ i neka postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je za $m \geq r$ $a_m \leq M$. Tada je i $a \leq M$.

Teorem 5.3.2. *Hilbertov prostor $(\mathcal{H}, \rho)$ je potpun metrički prostor.*

Dokaz. Neka je $((x^n)_{n\in\mathbb{N}})$ Cauchyjev niz u $(\mathcal{H},\rho)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo da je $x^n = (x_1^n, x_2^n, ...)$, tj. $x^n = (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$.

Fiksirajmo $i \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je niz $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev u $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je (x^n) Cauchyjev niz u $(\mathcal{H},\rho)$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $\rho(x^m, x^n) < \varepsilon$. Neka su $m, n \geq n_0$. Pogledajmo $\mid x_i^m - x_i^n \mid \leq \sqrt{(x_i^m - x_i^n)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}(x_j^m - x_j^n)^2} = \rho((x^m),(x^n)) < \varepsilon$. Dakle, $\mid x_i^m - x_i^n \mid < \varepsilon$, za sve $m, n \geq n_0$.

Prema tome, niz $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev u $(\mathbb{R}, d)$. Stoga je niz $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan u $(\mathbb{R}, d)$, za svaki fiksirani $i \in \mathbb{N}$.(To slijedi iz činjenice da je $(\mathbb{R}, d)$ potpun metrički prostor, poznato iz analize.) Označimo njegov limes sa $y_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Neka je $y = (y_1, y_2, ..., y_j, ..)$. Pokazat ćemo da je $y \in \mathcal{H}$ i da niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k y.

$((x^n)_{n\in\mathbb{N}})$ je Cauchyjev niz u $(\mathcal{H},\rho)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je (x^n) Cauchyjev niz u $(\mathcal{H},\rho)$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $\rho(x^m, x^n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Neka je $n \geq n_0$(proizvoljan, ali fiksan $n \geq n_0$). Za svaki $m \geq n_0$ iz $\rho(x^m, x^n) < \frac{\varepsilon}{2}$ slijedi $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^m - x_i^n)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ pa slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^m - x_i^n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad (*)$$

Fiksirajmo sada prirodan broj $p \in \mathbb{N}$. Iz $(*)$ slijedi da je $\sum_{i=1}^{p}(x_i^m - x_i^n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Neka je $i \in \{1, ..., p\}$. Niz $(x_i^m - x_i^n)_{m\in\mathbb{N}}$ teži prema $y_i - x_i^n$. Stoga $((x_i^m - x_i^n)^2)_{m\in\mathbb{N}}$ teži prema $(y_i - x_i^n)^2$. (slijedi iz prethodne napomene [1)]) Slijedi,dakle,da

$$\left(\sum_{i=1}^{p}(x_i^m - x_i^n)^2\right)_{m\in\mathbb{N}} \to \sum_{i=1}^{p}(y_i - x_i^n)^2 \qquad (**)$$

(Slijedi također iz prethodne napomene [1)].)

Znamo da za svaki $m \geq n_0$ vrijedi da je $\sum_{i=1}^{p}(x_i^m - x_i^n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$, pa slijedi da je

$$\sum_{i=1}^{p}(y_i - x_i^n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad (***)$$

(slijedi iz prethodne napomene [2)].)

Dakle, $(***)$ vrijedi za svaki fiksirani $n \geq n_0$ i $p \in \mathbb{N}$.

Uzmimo sada posebno $\varepsilon = 1$. Tada posebno za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $(***)$ vrijedi za svaki $n \geq n_0$ i svaki $p \in \mathbb{N}$. Neka je $n = n_0$. Neka je $p \in \mathbb{N}$.

Iz nejednakosti trokuta za euklidsku metriku na $\mathbb{R}^p$ (primijenjene na $(y_1, ..., y_p), (0, ..., 0) i (x_1^p, ..., x_p^n)$) slijedi da je $\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(y_i - 0)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(y_i - x_i^n)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i^n - 0)^2}$. Stoga kvadriranjem slijedi da je $\sum_{i=1}^{p} y_i^2 \leq (\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(y_i - x_i^n)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{p}(x_i^n)^2})^2 \leq (\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n)^2})^2$. Kako je $x_{n \in \mathcal{H},}$ slijedi da je $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^n)^2 < \infty$.

Stoga je $(\sum_{i=1}^{p} y_i^2)_{p\in\mathbb{N}}$ omeđen. Stoga slijedi da je $\sum_{i\in\mathbb{N}} y_i^2$ konvergentan red, pa slijedi da je $(y_i) \in \mathcal{H}$.

Dokažimo sada još da $x^n \to (y_i)$ u $(\mathcal{H}, \rho)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $(***)$ za svaki fiksirani $n \geq n_0$ i $p \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo $n \geq n_0$,

Niz $\left(\sum_{i=1}^{p}(y_i - x_i^n)^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ teži prema $\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i^n)^2$ pa zaključujemo da je $\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i^n)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$(to slijedi iz prethodne napomene [2)]). Slijedi da je $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i - x_i^n)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, tj. $\rho((y_i), (x^n)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\rho((y_i), x^n) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Prema tome, $(x^n) \to (y_i)$.

Dakle, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan niz u $(\mathcal{H}, \rho)$ pa slijedi da je $(\mathcal{H}, \rho)$ potpun metrički prostor. □

5.4 Lokalna nekompaktnost Hilbertovog prostora

Definicija 5.4.1. *Neka je X topološki prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Kažemo da je a gomilište niza (x_n) u X ukoliko za svaki $N \in \mathbb{N}$ i za svaki otvoren skup U u X takav da je $a \in U$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in U$, odnosno, svakoj otvorenoj okolini oko a nalazi se beskonačno mnogo članova niza (x_n).*

Napomena 5.4.2. *U metričkim prostorima činjenica da niz (x_n) ima gomilište u a ekvivalentna je s time da niz (x_n) ima podniz kojem je a limes, dok u topološkim prostorima to općenito ne vrijedi.*

Lema 5.4.3. *Neka je X kompaktan topološki prostor i neka je K kompaktan skup u X.. Pretpostavimo da je (x_n) niz u X takav da je $x_n \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $a \in K$ takav da je a gomilište niza (x_n) u X.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno,tj. da niti jedan $a \in K$ nije gomilište niza (x_n) u X. Uzmimo neki $a \in K$(proizvoljan,ali fiksan). Tada a nije gomilište niza (x_n) pa postoji $N_a \in \mathbb{N}$ i otvoren skup U_a u X takav da je $a \in U_a$ te takav da je $x_n \notin U_a$, za svaki $n \geq N_a$.

Familija $\{U_a : a \in K\}$ je otvoren pokrivač od K u X. Kompaktnost skupa K u X povlači da postoje $a_1, ..., a_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_k}. \tag{$*$}$$

Definirajmo $n = max\{N_{a_1}, ..., N_{a_k}\}$. Imamo $n \geq N_{a_1}, ..., n \geq N_{a_k}$ pa slijedi da $x_n \notin U_{a_1}, ..., x_n \notin U_{a_k}$.

Prema tome, $x_n \notin U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_k}$. Prema pretpostavci leme, vrijedi $x_n \in K$, pa iz $(*)$ slijedi $x_n \in U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_k}$. Dakle, dobili smo kontradikciju.

Stoga zaključujemo da postoji $a \in K$ takav da je a gomilište niza (x_n) u X. □

Definicija 5.4.4. *Neka je $(X.d)$ metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Kažemo da je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru $(X.d)$ ako je a gomilište niza (x_n) u topološkom prostoru (X, τ_d).*

Definicija 5.4.5. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je lokalno kompaktan ako je topološki prostor (X, τ_d) lokalno kompaktan.*

Propozicija 5.4.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Tada je a gomilište niza u (X, d) ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) <$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n) u (X, d). Neka su $\varepsilon > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Znamo da je $K(a, \varepsilon)$ otvoren skup u (X, d), tj. $K(a, \varepsilon) \in \tau_d$, a imamo da je a gomilište niza (x_n) u (X, τ_d) pa postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in K(a, \varepsilon)$. Dakle, postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) < \varepsilon$. Neka su $U \in \tau_d$ i $N \in \mathbb{N}$ takvi da je $a \in U$. Imamo da je U otvoren akup u (X, d) pa postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(a, \varepsilon) \subseteq U$. Prema pretpostavci postoji $n \geq N$ takav da je $d(x_n, a) <$, tj. takav da je $x_n \in K(a, \varepsilon)$. Slijedi da je $x_n \in U$. Prema tome, za svaki $U \in \tau_d$ takav da je $a \in U$ i za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq N$ takav da je $x_n \in U$. Slijedi da je a gomilište niza (x_n) u topološkom prostoru (X, τ_d), odnosno da je gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d). □

Propozicija 5.4.7. *Neka su $x \in \mathcal{H}$ i $r > 0$. Tada $\overline{K}(x, r)$ nije kompaktan skup u metričkom prostoru $(\mathcal{H}, \rho)$.*

Dokaz. Imamo $x = (x_i)$. Neka je $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{H}$ definiran sa $y^n = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n + r, x_{n+1}, ...)$. Lako se vidi da je zaista $y^n \in \mathcal{H}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo $\rho(y^n, x) = \sqrt{(x_n + r - x_n)^2} = r$ pa je $y^n \in \overline{K}(x, r), \forall n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo sada suprotno, dakle, da je $\overline{K}(x, r)$ kompaktna u metričkom prostoru $(\mathcal{H}, \rho)$. Tada iz leme 5.4.3 slijedi da gomilište a niza (y^n) u $(\mathcal{H}, \tau_\rho)$. Stoga je a gomilište niza (y^n) u metričkom prostoru $(\mathcal{H}, \rho)$.

Prema prethodnoj propoziciji slijedi da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\rho(y^n, a) < \frac{r}{2}$. Nadalje, prema istoj propoziciji slijedi da postoji $m \geq n+1$ takav da je $\rho(y^m, a) < \frac{r}{2}$. Prema nejednakosti trokuta slijedi da vrijedi $\rho(y^n, y^m) \leq \rho(y^n, a) + \rho(a, y^m) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Dakle, dobivamo $\rho(y^m, y^n) < r$.

No iz definicije $\rho(y^m, y^n) = \sqrt{2}r > r$, pa dobivamo kontradikciju. Dakle, slijedi da $\overline{K}(x, r)$ nije kompaktan skup u metričkom prostoru $(\mathcal{H}, \rho)$. □

Korolar 5.4.8. *Hilbertov prostor $(\mathcal{H}, \rho)$ nije lokalno kompaktan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je $(\mathcal{H}, \tau_\rho)$ lokalno kompaktan topološki prostor. Odaberimo $x \in \mathcal{H}$. Tada postoje otvoren skup U u $(\mathcal{H}, \tau_\rho)$ i kompaktan skup K u $(\mathcal{H}, \tau_\rho)$ takvi da je $x \in U \subseteq K$.

Budući da je U otvoren skup u metričkom prostoru $(\mathcal{H}, \rho)$ i sadrži točku x, postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$. Očito je $\overline{K}(x, \frac{r}{2}) \subseteq U$ pa je $\overline{K}(x, \frac{r}{2}) \subseteq K$. Znamo da je $\overline{K}(x, \frac{r}{2})$ zatvoren skup u $(\mathcal{H}, \rho)$ pa je $\overline{K}(x, \frac{r}{2})$ zatvoren skup i u $(\mathcal{H}, \tau_\rho)$. Po propoziciji 1.7.7 slijedi da je $\overline{K}(x, \frac{r}{2})$ kompaktan skup u $(\mathcal{H}, \rho)$. No to je u kontradikciji s prethodnom propozicijom. Prema tome, metrički prostor $(\mathcal{H}, \rho)$ nije lokalno kompaktan. □

5.5 Konveksnost Hilbertovog prostora

Definicija 5.5.1. *Neka je (X, d) metricki prostor te neka su $x, y, p \in X$. Kažemo da je p polovište od x i y ako vrijedi $d(x, p) = d(p, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$.*

Definicija 5.5.2. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je konveksan ako za sve $x, y \in X$ postoji $p \in X$ tako da je p polovište od x i y u (X, d). Kazemo da je metrički prostor (X, d) strogo konveksan ako za sve $x, y \in X$ postoji točno jedno polovište od x i y.*

Definicija 5.5.3. *Za metrički prostor (X, d) kazemo da je bez grananja ako ne postoje $x, x', y, p \in X$ takvi da je $x \neq x'$ te p polovište od x i y i p polovište od x' i y.*

Teorem 5.5.4. *Hilbertov prostor $(\mathcal{H}, \rho)$ je strogo konveksan i bez grananja.*

Dokaz. Neka su $(x_i), (y_i) \in \mathcal{H}$, $x = (x_i), y = (y_i)$. Definiramo $p = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.

Tada je p ocito iz $\mathcal{H}$ te je $p = (\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}y_i)_i$. $\rho(x, p) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - (\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}y_i))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}y_i)^2} = \frac{1}{2}\rho(x, y) = \rho(y, p)$.(Sasvim analogno se pokaze da je $\rho(p, y) = \frac{1}{2}\rho(x, y)$.)

Dakle, p je poloviste od x i y u $(\mathcal{H},\rho)$. Pretpostavimo da je $q = (q_i)$ poloviste od x i y u $(\mathcal{H},\rho)$. Vrijedi $\rho(x,q) = \rho(q,y) = \frac{1}{2}\rho(x,y)$, tj. $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - q_i)^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(q_i - y_i)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$.

Slijedi da je

$$4\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - q_i)^2 = 4\sum_{i=1}^{\infty}(q_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2. \tag{$*$}$$

Sada imamo da je $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i - 2q_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(2(x_i - q_i)^2 + 2(y_i - q_i)^2 - (x_i - y_i)^2) = 2\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - q_i)^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{\infty}(y_i - q_i)^2 - \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2 = 0$. (Posljednja jednakost slijedi iz $(*)$)

Dakle, $x_i + y_i - 2q_i = 0$, za svaki $i \in \mathbb{N}$, pa je $q_i = \frac{x_i+y_i}{2}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Dakle, $q_i = p_i, \forall i \in \mathbb{N}$, pa slijedi da je $q = p$.

Slijedi da postoji jedinstveni p takav da je p polovište od x i y u $(\mathcal{H},\rho)$. Prema tome, $(\mathcal{H},\rho)$ je strogo konveksan metrički prostor.

Dokažimo da je $(\mathcal{H},\rho)$ bez grananja. Pretpostavimo da su $x, y, z, p \in \mathcal{H}$ takvi da je p polovište od x i y te p polovište od x i z u $(\mathcal{H},\rho)$. Prema dokazu prvog dijela teorema imamo da je $p = (\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}y_i)_i$ i $p = (\frac{1}{2}z_i + \frac{1}{2}x_i)_i$. Slijedi da je $\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}y_i = \frac{1}{2}z_i + \frac{1}{2}x_i, \forall i \in \mathbb{N}$, tj. $\frac{1}{2}y_i = \frac{1}{2}z_i$, tj. $\frac{1}{2}y_i = \frac{1}{2}z_i, \forall i \in \mathbb{N}$, pa slijedi da je $y = z$. Prema tome, metrički prostor $(\mathcal{H},\rho)$ je bez grananja. □

5.6 Hilbertova kocka

Definirajmo $\mathcal{H}_C$ tako da je $\mathcal{H}_C = \{(x_i) \in \mathcal{H} : 0 \leq x_i \leq \frac{1}{i}, \forall i \in \mathbb{N}\}$. Skup $\mathcal{H}_C$ nazivamo Hilbertova kocka. Na Hilbertovoj kocki promatramo restrikciju metrike $\rho, \rho\big|_{\mathcal{H}_C \times H_C}$.

Lema 5.6.1. *Red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan.*

Dokaz. Za $k \in \mathbb{N}$ neka je $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$. Imamo $S_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{k^2} \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(k-2)(k-1)} + \frac{1}{(k-1)k} = 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}) + (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$(jer je $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$). Sada je dalje $1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1})+(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}) = 2-\frac{1}{k} < 2$.

Dakle, vidimo da je $S_k < 2, \forall k \in \mathbb{N}$.

Stoga je S_k strogo rastući i omeđen niz, pa slijedi da je konvergentan. □

Napomena 5.6.2. *Dokaz prethodne leme pokazuje da vrijedi sljedeće:Ako je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ takav da je $| x_n | \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, tada je red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ konvergentan, tj. $(x_n) \in \mathcal{H}$. Slijedi iz toga* *što je , ako niz parcijlnih suma reda* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$, *označimo sa* $S'_k = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$, $S'_k \leq S_k, \forall k \in \mathbb{N}$, *gdje je* (S_k) *niz parcijalnih suma reda* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$, *tj. niz parcijalnih suma iz dokaza prethodne leme. Stoga je* $S'_k \leq S_k < 2, \forall k \in \mathbb{N}$, *pa je red* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ *konvergentan, tj. tada je niz* $(x_n) \in \mathcal{H}$. *Dakle, slijedi da u dwfiniciji* $\mathcal{H}_C$ *nismo morali zahtijevati* $x_i \in \mathcal{H}$.

Napomena 5.6.3. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori te neka je* $f : X \to Y$ *funkcija takva da je* $d'(f(x_1), f(x_2) \leq d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X$. *Tada je* f *neprekidna s obzirom na metrike* d *i* d'.

Naime, neka je $x_0 \in X$ *i* $\varepsilon > 0$. *Neka je* $\delta = \varepsilon$. *Tada za svaki* $x \in X$ *takav da je* $d(x, x_0) < \delta$ *vrijedi* $d(x.x_0) < \varepsilon$. *Kako je* $d'(f(x_0), f(x)) \leq d(x_0, x) < \varepsilon$, *slijedi da je* $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

Propozicija 5.6.4. *Neka je* $j \in \mathbb{N}$ *te neka je* $q_j : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa* $q_j((x_i)) = x_j$. *Tada je* q_j *neprekidna s obzirom na metrike* ρ *i euklidsku metriku* d *na* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Neka su $(x_i), (y_i) \in \mathcal{H}$. Imamo $d(q_j((x_i)), q_j((y_i))) = d(x_j, y_j) =| x_j - y_j |= \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} = \rho((x_i), (y_i))$.

Dakle, $d(q_j((x_i)), q_j((y_i))) \leq \rho((x_i), (y_i))$. Sada iz prethodne napomene slijedi tvrdnja propozicije. □

Napomena 5.6.5. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori te neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Tada je* f *neprekidna s obzirom na metrike* d *i* d' *ako i samo je* f *neprekidna s obzirom na topologije* τ_d *i* $\tau_{d'}$. *To lako slijedi iz propozicije 1.3.2*

Napomena 5.6.6. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori.*

1) *Neka je* $A \subseteq X, A \neq \emptyset$ *te neka je* $f : X \to Y$ *funkcija neprekidna s obzirom na* d *i* d'. *Tada je* $f\big|_A : A \to Y$ *neprekidna s obzirom na* $d\big|_{A\times A}$ *i* d'.

2) *Pretpostavimo daje* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna s obzirom na metrke* d *i* d_E, *gdje je* d_E *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$, *te da je* $k \in \mathbb{R}$. *Neka je* $g : X \to Y$ *definirana sa* $g(x) = k \cdot f(x), x \in X$. *Tada je* g *neprekidna s obzirom na* d *i* d_E.

3) *Neka je* $B \subseteq Y$. *Pretpostavimo da je* $f : X \to B$ *funkcija takva da je* f *neprekidna kao funkcija sa* X *u* Y, *s obzirom na* d *i* d'. *Tada je* $f : X \to B$ *neprekidna s obzirom na* d *i* $d'\big|_{B\times B}$.

Teorem 5.6.7. *Neka je* $(I_i)_{I\in\mathbb{N}}$ *indeksirana familija topoloških prostora definirana sa* $I_i = [0, 1], \forall i \in \mathbb{N}$, *pri čemu na* $[0, 1]$ *promatramo topologiju induciranu euklidskom metrikom* *na* $[0,1]$, *koju ćemo u dokazu teorema označavati sa d. Tada su topološki prostori* $\prod_{i\in I} I_i$ *i* $\mathcal{H}_C$ *homeomorfni (na* $\mathcal{H}_C$ *promatramo topologiju induciranu metrikom* $\rho\big|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}$*) homeomorfni.*

Dokaz. Uočimo da je $\prod_{i\in I} I_i$, kao skup, jednak skupu svih nizova u $[0,1]$.

Konstruirat ćemo funkciju $\Psi : \prod_{i\in I} I_i \to \mathcal{H}_C$ koja je homeomorfizam.

Definirajmo Ψ sa $\Psi(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...)$, tj. $\Psi((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = ((\frac{x_i}{i})_{i\in\mathbb{N}})$. Uočimo sljedeće: ako je $(x_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$, onda je $0 \le x_i \le 1, \forall i \in \mathbb{N}$, pa je $0 \le \frac{x_i}{i} \le \frac{1}{i}$. Iz napomene 5.6.2 slijedi da je $(\frac{x_i}{i})_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_C \subseteq \mathcal{H}$.. Prema tome, Ψ je dobro definirana funkcija.

Očito je Ψ injekcija. Pokažimo da je Ψ i surjekcija. Pretpostavimo da je $(y_i) \in \mathcal{H}_C$. Tada je $0 \le y_i \le \frac{1}{i}, \forall i \in \mathbb{N}$, pa je $0 \le i \cdot y_i \le 1, \forall i \in \mathbb{N}$. Neka je (x_i) niz u $[0,1]$ definiran s $x_i = i \cdot y_i$. Tada je $(x_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$, te je $\Psi((x_i)) = (y_i)$. Prema tome, Ψ je surjekcija.

Dakle, Ψ je bijekcija.

Dokažimo da je Ψ neprekidna funkcija. Neka je $(x_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Neka je V otvoren skup u $\mathcal{H}_C$ takav da je $\Psi((x_i)) \in V$. Želimo pokazati da postoji otvoren skup U u $\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$ takav da je $(x_i) \in U$ i $\Psi(U) \subseteq V$.

Imamo da je V element topologije $\tau_{\rho\big|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}}$ na $\mathcal{H}_C$. Stoga slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $K_{\rho\big|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}}(\Psi(x_i), r) \subseteq V$. Budući da je red $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i^2}$ konvergentan (prema lemi 5.6.1), slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{r^2}{4}$.

(Naime, kad je red konvergentan, niz ostataka teži u 0. Općenito vrijedi, ako $x_n \to a$, $a - x_n \to 0$. Imamo da $(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2})_{N\in\mathbb{N}} \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Stoga $(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2})_{N\in\mathbb{N}} \to 0$, tj. $(\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{i^2})_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, pa je jasno da navedeni N postoji.)

Neka je d euklidska metrika na $[0,1]$. Za $i \in \mathbb{N}$ neka je

$$U_i = \begin{cases} \mathrm{K}_d(x_i, \frac{r}{\sqrt{4\cdot N}}), \mathrm{i} \le N \\ [0,1],\ i > N. \end{cases}$$

Htjeli bismo pokazati da je skup $W = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$ otvoren u $\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$, da sadrži (x_i) te da je $\Psi(\prod_{i\in\mathbb{N}} U_i) \subseteq V$.

Uočimo da je U_i otvoren skup u I_i za svaki $i \in \mathbb{N}$ te da je $U_i = I_i$ za sve osim konačno mnogo $i \in \mathbb{N}$. Stoga za skup W definiran sa $W = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$ vrijedi da je otvoren u $\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$.

Želimo vidjeti da W sadrži (x_i). Za svaki $i \in \mathbb{N}$ očito vrijedi da je $x_i \in U_i$, pa je stoga $(x_i) \in W$.

Tvrdimo da je $\Psi(W) \subseteq V$. Neka je $(y_i) \in W = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Tada je $y_i \in U_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Ako je $i \le N$, onda je $y_i \in K_d(x_i, \frac{r}{\sqrt{4\cdot N}})$, pa je $d(y_i, x_i) < \frac{r}{\sqrt{4\cdot N}}$, tj. $\mid y_i - x_i \mid < \frac{r}{\sqrt{4\cdot N}}$. Stoga

vrijedi da je $\rho(\Psi((y_i), \Psi(x_i)) = \rho((\frac{y_i}{i}), (\frac{x_i}{i})) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{y_i - x_i}{i})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\frac{y_i - x_i}{i})^2 + \sum_{N+1}^{\infty}(\frac{y_i - x_i}{i})^2} \leq$
$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i)^2 + \sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}}$

$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\frac{r}{\sqrt{4N}})^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{N \cdot \frac{r^2}{4N} + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} < \sqrt{r^2} = r$. Dakle, $\rho\big|_{\mathcal{H}_C\mathcal{H}_C}(\Psi((x_i), \Psi(y_i)) <$ r.

Dakle, $\Psi((y_i)) \in K_{\rho|_{\mathcal{H}_C\mathcal{H}_C}}(\Psi((x_i), r) \subseteq V$ za svaki $(y_i) \in \mathcal{W}$.

Prema tome, $\Psi((y_i)) \in V$, za svaki $(y_i) \in W$. Prema tome, $\Psi(W) \subseteq V$.

Prema tome, zaključujemo da je funkcija Ψ neprekidna u točki (x_i)(koja je bila proizvoljna, ali fiksna točka iz $\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$.)

Prema propoziciji 1.6.2 slijedi da je Ψ neprekidna funkcija.

Pokažimo sada da je i $\Psi^{-1} : \mathcal{H}_C \to \prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$ neprekidna funkcija. Za svaki $(x_i) \in \mathcal{H}_C$ vrijedi $\Psi^{-1}((x_i)) = (i \cdot x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Za $j \in \mathbb{N}$ neka je $p_j : \prod_{i\in\mathbb{N}} I_i \to I_j$ funkcija definirana sa $p_j((x_i)) = x_j$. Da bismo pokazali da je Ψ^{-1} neprekidna funkcija, dvoljno je pokazati da je $p_j \circ \Psi^{-1} : \mathcal{H}_C \to I_j$ neprekidna, za svaki $j \in \mathbb{N}$ (prema propoziciji 3.1.7).

Neka je $j \in \mathbb{N}$. Za svaki $(x_i) \in \mathcal{H}_C$ vrijedi $(p_j \circ \Psi^{-1})((x_i)) = j \cdot x_j$.

Želimo pokazati da je $p_j \circ \Psi^{-1} : \mathcal{H}_C \to [0, 1]$, je neprekidna s obzirom na topologije $\tau_{\rho|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}}$ i $\tau\big|_d$. Prema napomeni 5.6.6 dovoljno je pokazati da je $p_j \circ \Psi^{-1}$ neprekidna s obzirom na metrike $\rho\big|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}$ i d.

Neka je $q_j : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana kao u propoziciji 5.6.4. Za svaki $((x_i)) \in \mathcal{H}_C$ vrijedi $(p_j \circ \Psi^{-1})((x_i)) = j \cdot x_j = j \cdot q_j((x_i))$. Funkcija $\mathcal{H}_C \longmapsto \mathbb{R}$, $((x_i) \longmapsto q_j((x_i))$ je neprekidna s obzirom na $\rho\big|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}$ i d, kao restrikcija neprekidne funkcije $q_j : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, prema napomeni 5.6.6 1).

Stoga je neprekidna i funkcija $\mathcal{H}_C \longmapsto \mathbb{R}$, $(x_i) \longmapsto j \cdot q_j((x_i))$, prema napomeni 5.6.6 2).

Sada iz napomene 5.6.6 3) slijedi da je i funkcija $\mathcal{H}_C \longmapsto [0, 1]$, $(x_i) \longmapsto j \cdot q_j((x_i))$, također neprekidna funkcija s obzirom na metrike $\rho\big|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}$ i d, odnosno topologije $\tau_{\rho|_{\mathcal{H}_C\times\mathcal{H}_C}}$ i $\tau\big|_d$.

Ovo posljednje preslikavanje je upravo jednako preslikavanju $p_j \circ \Psi^{-1} : \mathcal{H}_C \to [0, 1]$. Dakle, pokazali smo da je preslikavanje $p_j \circ \Psi^{-1}$ neprekidno, za svaki $j \in \mathbb{N}$.

Stoga slijedi da je funkcija Ψ^{-1} neprekidna.

Stoga je Ψ homeomorfizam. $\square$

Literatura

[1] Charles O. Christensen, William L.Voxman : *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, INC., 270 Madison Avenue,New York

[2] W. Sutherland: *Introduction to Metric And Topological Spaces*, Oxford University Press, 1975

[3] Sibe Mardešić : *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga , Zagreb, 1974, prvi dio - dijelovi koji se odnose na metričke prostore

[4] Boris Guljaš: *Matematička analiza I i II*, interna skripta, Zagreb , 2015

[5] Mladen Vuković: *Teorija skupova*, interna skripta, Zagreb , 2015 - dio o prebrojivosti i ekvipotentnosti skupova

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo prostore funkcija.U prvom uvodnom poglavlju podsjetli smo se osnovnih pojmova iz topologije. U drugom poglavlju bavili smo se prostorima omeđenih funkcija sa skupa A u metrički prostor (X, d). Definirali smo metriku d_∞ na $B(A, (X, d))$ i vidjeli da je metrički prostor $(B(A, (X, d)), d_\infty)$ potpun. Također smo promatrali skup neprekidnih funkcija kao podskup prostora omeđenih funkcija i pokazali da je on zatvoren skup u $(B(A, (X, d)), d_\infty)$ te da je skup neprekidnih funkcija zajedno sa metrikom d_∞ restringiranom na njega također potpun. U trećem poglavlju uveli smo produktnu topologiju na produktu indeksirane familije topoloških prostora. Zatim smo pokazali da su koordinatne projekcije p_β neprekidne funkcije te da su otvorena preslikavanja. Zatim smo promatrali podbazu produktne topologije. Dobili smo također karakterizaciju neprekidnosti funkcije sa topološkog prostora Y u produkt topoloških prostora preko koordinatnih projekcija. Zatim smo, za skup X i topološki prostor Y, definirali topologiju otvorenu po točkama na Y^X. Zatim smo promatrali podbazu te topologije na Y^X. Zatim smo promatrali konvergenciju u topologiji otvorenoj po točkama i vidjeli da je konvergencija niza funkcija (f_n) funkciji g u topologiji otvorenoj po točkama ekvivalentna konvergenciji po točkama. Nadalje, u četvrtom poglavlju promatrali smo kompaktno otvorenu topologiju na Y^X, za dva topološka prostora X i Y. Vidjeli smo kojeg je oblika podbaza te topologije te smo pokazali da je Y^X redom T_0, T_1 ili T_2 prostor ako i samo ako je Y redom T_0, T_1 ili T_2 prostor. Također smo pokazali da, ukoliko je Y regularan prostor, tada je $C(X, Y)$ s kompaktno otvorenom topologijom, regularan prostor. Zatim smo vidjeli da se, za topološki prostor X i metrički prostor Y kompaktno otvorena topologija na $C((X, \tau), (Y, d))$ i topologija inducirana restrikcijom metrike d_∞ podudaraju. Nakon toga smo promatrali izravni produkt dva topološka prostora, i pokazali da je homeomorfan produktu indeksirane familije topoloških prostora, za dva skupa, kakav je bio općenito defniran u trećem poglavlju. Zatim smo promatrali lokalnu kompaktnost i dobili neke zanimljive rezultate koji povezuju lokalnu kompaktnost sa aksiomima separacije i sa neprekidnošću. Zatim smo promatrali produkt dva topološka prostora i, pored još nekih pomoćnih rezultate, dobili zanimljive rezultate o neprekidnosti funkcije f sa produkta dva topološka prostora u topološki prostor. U zadnjem poglavlju proučavali smo Hilbertove prostore. Nakon definiranja Hilbertovog prostora, pokazali smo da je on separabilan metrički prostor. Također smo pokazali da je

potpun. Vidjeli smo također da Hilbertov prostor nema svojstvo lokalne kompatnosti, te da je strogo konveksan bez grananja. Zatim smo promotrili potprostor Hilbertovog prostora, Hilbertovu kocku, i dobili zanimljiv rezultat o njezinoj homeomorfnosti sa jednim produktom topoloških prostora.

Summary

In this diploma thesis we studied function spaces. In the first chapter we recalled some of the basic facts in topology. In the second chapter we were dealing with spaces of bounded functions from a set A to a metric space (X,d). We defined metric d_∞ on $B(A,(X,d))$ and we saw that the metric space $(B(A,(X,d)),d_\infty)$ is a complete metric space. We also observed the set of continuos functions as a subset of the space of bounded functions and we showed that it is a closed set in $(B(A,(X,d)),d_\infty)$ and that the set of continuos functions, together with the metrics d_∞ restricted to it, is also a complete metric space. In third chapter we introduced product topology on the product of indexed family of topological spaces. Then we showed that projection maps, p_β, are continuous functions and that they are open mappings. Then we observed the subbasis of product topology. We also saw a characterisation of continuity of a function from a topological space Y to a product of topological spaces, that uses coordinate projection maps. After that we defined product topology, or the point open topology, on Y^X , where X is a set and Y is a topological space. We showed what the subbasis of product topology on Y^X looks like. We then observed the convergence in point open topology and we saw that the convergence of a sequence of functions (f_n) to a function g in point open topology is equivalent to the point-wise convergence. Further, in the fourth chapter we watched the compact-open topology on Y^X, for two topological spaces X and Y. We saw what is the form of the subbasis of such topology, and we showed that Y^X is T_0, T_1 or T_2 space respectively if and only if Y is T_0, T_1 or T_2 space respectively. We also showed that, if Y is a regular space, then $C(X,Y)$ with compact-open topology is also a regular space. Then we saw that, for a topological space X and a metric space Y, compact-open topology on $C((X,\tau),(Y,d))$ coincides with the topology induced by the restriction of d_∞. After that we observed the direct product of two topological spaces, and we showed that it is homeomorphic to the product of indexed family of topological spaces, for two sets, like it was defined in third chapter in general case. Then we observed the local compactness and we got some interesting results which connect local compactness to separation axioms and continuity. Then we observed the product of two topological spaces, and beside some auxiliary results, we got some interesting results about continuity of a function f from a product of two topological spaces to a third topological space, in context of a compact-open topology. In the last chapter we studied Hilbert spaces. After defining

Hilbert space, we showed that it is a separable metric space. We also showed that it is a complete metric space. We also showed that Hilbert space doesn't have the property of local compactness, and that it is strictly convex without ramifications. Then we considered a subspace of Hilbert space, the Hilbert cube, and we showed an interesting result about homeomorphism from Hilbert cube to a product of topological spaces.

Životopis

Rođena sam 3. ožujka 1997. u Zadru. Tamo sam upisala osnovnu školu, te Gimnaziju Jurja Barakovića koju završavam 2015. godine. Zatim upisujem *Preddiplomski sveučilišni studij matematike*, inženjerski smjer, na PMF-u u Zagrebu, te ga završavam 2018. godine. Od 2018. godine studiram na diplomskom studiju Financijska i poslovna matematika, koji završavam ovim diplomskim radom.