

# Magnetske gigantske rezonancije u teoriji relativističkog energijskog funkcionala gustoće

---

**Kružić, Goran**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:918545>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-16**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Goran Kružić

**Magnetske gigantske rezonancije u  
teoriji relativističkog energijskog  
funkcionala gustoće**

DOKTORSKI RAD

Mentor:  
Prof.dr.sc. Nils Paar

Zagreb, 2021.



University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF PHYSICS

Goran Kružić

**Magnetic giant resonances in the  
relativistic energy density functional  
theory**

DOCTORAL THESIS

Supervisor:  
Prof.dr.sc. Nils Paar

Zagreb, 2021

# Informacije o mentoru

Nils Paar je diplomirao na istraživačkom smjeru studija fizike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu (PMF) Sveučilišta u Zagrebu 1998. Od 2000. do 2003. godine bio je doktorand na Physik Department, Technische Universität München, Njemačka, gdje je 2003. godine obranio doktorsku disertaciju iz teorijske nuklearne fizike i stekao akademski naziv Doctor rerum naturalium. Od 2003. do 2006. godine bio je na poslijedoktorskom usavršavanju na Institut für Kernphysik, Technische Universität Darmstadt, Njemačka. Nakon povratka u Hrvatsku, radi kao docent (do 2008.), izvanredni profesor (do 2013.) i redoviti profesor (do danas) na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Akademsku godinu 2014/2015. provodi kao Marie Curie research fellow na Departement Physik, Universität Basel, Švicarska. 2019. godine izabran je u znanstveno-nastavno zvanje redovitog profesora u trajnom zvanju. Većina dosadašnje znanstvene djelatnosti Prof. Paara jest iz područja prirodnih znanosti, polja fizike, grane nuklearne fizike, što uključuje razvoj i primjenu mikroskopskih teorijskih modela u rješavanju problema moderne nuklearne fizike, posebice (1) nelinearne pojave u vibracijama atomske jezgre, (2) egzotična pobuđenja u nestabilnim atomskim jezgrama, (3) nuklearnu strukturu zasnovanu na koreliranom nukleon-nukleon međudjelovanju, (4) procese slabog međudjelovanja u evoluciji supernove, (5) neutrino-jezgra međudjelovanje i (5) energiju simetrije i svojstva neutronske zvijezde. Autor je i koautor 76 publikacija objavljenih u međunarodnim recenziranim znanstvenim časopisima zastupljenim u WoSCC (Web of Science Core Collection), 40 publikacija u recenziranim zbornicima međunarodnih konferencija i jednog poglavlja u znanstvenoj knjizi. Objavljeni radovi citirani su više od 3200 puta prema bazi ISI Web of Science Core Collection. Aktivno je sudjelovao na međunarodnim znanstvenim konferencijama, radionicama i školama gdje je održao ukupno 62 predavanja, od toga 31 pozvano predavanje. Bio je voditelj niza kompetitivnih znanstveno-istraživačkih projekata, i suradnik je u okviru Znanstvenog centra izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri na Fizičkom odsjeku PMF-a. Dobitnik je državne nagrade za znanost za značajno znanstveno dostignuće iz fizike za 2017. godinu.

# Zahvala

Netko je jednom rekao "kada je učenik spreman učitelj će doći", u tom smislu učitelja može biti više a svaki od njih obogaćuje učenikov život na sebi svojstven i drugačiji način. Rad pred Vama nastoji obogatiti dugogodišnja istraživanja velikog broja prethodnika koje sam nastojao obuhvatiti navodeći njihove relevantne radove kao polazište, no bitno je istaći nekolicinu izravno involviranih. Koristim priliku zahvaliti uvaženom prof.dr.sc. Nilsu Paaru kao mentoru na zajedničkom odabiru teme, iznimno korisnim smjernicama, sugestijama i diskusijama tijekom samog rada i procesa pisanja doktorske disertacije. Vrlo sam zahvalan na sveobuhvatnoj suradnji i diskusijama dr.sc. 大石知広 (dr.sc. Tomohiru Oishiu). Osobitu zahvalnost dugujem užoj obitelji, roditeljima i prijateljima na kontinuiranoj podršci. Iznimnu zahvalnost dugujem supruzi Tei Borić Kružić bez čije podrške i ljubavi puni angažman na ovom radu u cjelini ne bi bio moguć.

# Sažetak

Magnetska pobuđenja predstavljaju fundamentalnu vrstu prijelaza u atomskim jezgrama bitnu i u modeliranju astrofizičkih procesa. U ovom radu istraženi su magnetski dipolni (M1) i kvadrupolni (M2) prijelazi u okviru relativističkog nuklearnog energijskog funkcionala gustoće (RNEDF) sa kontaktnim međudjelovanjem nukleona. Za opis M1 i M2 pobuđenja, uspostavljena je relativistička kvazičestična aproksimacija slučajnih faza (RQRPA) s uključenom izovektor-pseudovektor interakcijom i korelacijama sparivanja. Nakon provjere analitičkog pravila sume za M1 prijelaze, analizirana su M1 pobuđenja u jezgrama  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{208}\text{Pb}$ . Istražena je evolucija snage M1 prijelaza duž izotopnih lanaca  $^{36-64}\text{Ca}$ ,  $^{100-140}\text{Sn}$  i izotona  $Z=10-24$ ,  $N=20$ , koja varira ovisno o M1 aktivnim nukleonima i spin-orbit cijepanju relevantnih stanja. Nedavno izmjerene snage M1 prijelaza izotopa  $^{112-124}\text{Sn}$  kvalitativno se slažu sa teorijskim proračunom. Reproducirana je funkcija odziva eksperimentalnog spektra s dva vrha, a rezultati upućuju na potrebu manjeg gušenja žiromagnetskih faktora nukleona u jezgri u odnosu na prethodne teorijske rezultate. Razmatrana je uloga korelacija sparivanja u M1 prijelazima i pokazano je da su nužne za opis dva dominantna vrha iz eksperimentalnog spektra  $^{50}\text{Ti}$ . Raspodjela prijelazne snage kvadrupolnih (M2) prijelaza pokazuje znatno fragmentiraniji spektar u odnosu na M1, dok analiza parcijalnih snaga prijelaza omogućava uvid u kolektivnost M2 pobuđenja.

# Abstract

Electromagnetic excitations in finite nuclei represent one of the most important probes of relevance in nuclear structure and dynamics, as well as in nuclear astrophysics. In particular, various aspects of magnetic dipole (M1) mode have been considered both in experimental and theoretical studies [1–8] due to its relevance for diverse nuclear properties associated e.g., to unnatural-parity states, spin-orbit splittings and tensor force effects. Specifically, M1 spin-flip excitations are analog of Gamow-Teller (GT) transitions, meaning that, at the operator level, the dominant M1 isovector component is the synonym to the zeroth component of GT transitions, and can serve as probe for calculations of inelastic neutrino-nucleus cross section [9, 10]. This process is hard to measure but it is essential in supernova physics, as well as in the r-process nucleosynthesis calculations [7, 8, 11, 12]. The isovector spin-flip M1 response is also relevant for applications related to the design of nuclear reactors [13], for the understanding of single-particle properties, spin-orbit interaction, and shell closures from stable nuclei toward limits of stability [14–18], as well as for the resolving the problem of quenching of the spin-isospin response in nuclei that is necessary for reliable description of double beta decay matrix elements [19]. In deformed nuclei, another type of M1 excitations has been extensively studied, known as scissors mode, where the orbital part of M1 operator plays a dominant role in a way that protons and neutrons oscillate with opposite phase around the core [3, 20–28].

In any nuclei undergoing experimental investigation, there are simultaneously present  $E\lambda$  and  $M\lambda$  multipole excitations, where the electric dipole (E1) and electric quadrupole (E2) responses [29–34] dominate over M1 response [35–43]. Thus, it is a rather challenging task to measure M1-related observables in a whole energy range. Even for the nuclides accessible by experiments, their full information on the M1 response has not been complete.

The M1 transitions have been studied in various theoretical approaches. Various aspects of the M1 mode have been investigated in the shell model [9, 12, 14, 15, 22, 44, 45], including, e.g., scissors and unique-parity modes [22], tensor-force effect [14], low-energy enhancement of radiation [44], and the analogy with neutrino-nucleus scattering [9, 12]. The M1 energy-weighted sum rule has been discussed from a perspective of the spin-orbit energy [46]. The Landau-Migdal interaction has been one of the relevant topics in studies of M1 excitations [47, 48]. In order to reproduce a large fragmentation of the experimental M1 strength, the importance of including complex couplings going beyond the RPA level has also been addressed [26, 47–50].

---

Recently, the M1 excitation has been investigated in the framework based on the Skyrme functionals [16–18], also extended to include tensor effects [51]. It has been shown that the results for the spin-flip resonance obtained by using different parameterizations do not appear as convincing interpretation of the experimental results. Additional effects have been explored in order to resolve this issue, e.g., the isovector-M1 response versus isospin-mixed responses, and the role of tensor and vector spin-orbit interactions [16, 17]. In recent analysis in Ref. [52], based on the Skyrme functionals, it has been shown that while modern Skyrme parameterizations successfully reproduce electric excitations, there are difficulties to describe magnetic transitions. In addition, some Skyrme sets result in the ambiguity that, by the same parameterization, the model cannot simultaneously describe one-peak and two-peak data for closed and open shell nuclei [16]. Thus, further developments of the Skyrme functional in the spin channel are called for [52]. Simultaneously, it is essential to explore the M1 response from different theoretical approaches to achieve a complete understanding of their properties, as well as to assess the respective systematic uncertainties.

In this work we have introduced a novel approach to describe M1,  $0^+$  ground state to  $1^+$  excited state, transitions in even-even nuclei, based on the RHB + RQRPA framework with the relativistic point-coupling interaction, supplemented with the pairing correlations described by the pairing part of the Gogny force. In addition to the standard terms of the point coupling model with the DD-PC1 parameterization, the residual R(Q)RPA interaction has been extended by the isovector-pseudovector (IV-PV) contact type of interaction that contributes to unnatural parity transitions. This pseudovector type of interaction has been modeled as a scalar product of two pseudovectors. The strength parameter for this channel,  $\alpha_{IV-PV}$ , is considered as a parameter, which is constrained by the experimental data on M1 transitions of selected nuclei. We note that the IV-PV term does not contribute in the RHB calculation of the ground state, thus its strength parameter cannot be constrained together with other model parameters on the bulk properties of nuclear ground state. The pseudovector type of interaction would lead to the parity-violating mean-field at the Hartree level for the description of the  $0^+$  nuclear ground state, and it contributes only to the RQRPA equations for unnatural parity transitions, i.e.  $1^+$  excitation of M1 type. The coupling strength parameter  $\alpha_{IV-PV}$  is determined by minimizing the standard deviation  $\sigma_{\Delta}(\alpha_{IV-PV})$ , where  $\Delta$  is the gap between the theoretically calculated centroid energy and experimentally determined dominant peak position of measured M1 transition strength in  $^{208}\text{Pb}$  [38] and  $^{48}\text{Ca}$  [37] nuclei. It turns out that the optimal parameter value is  $\alpha_{IV-PV} = 0.53 \text{ MeVfm}^3$  and in this case the energy gap  $\Delta$  is less than 1 MeV both for  $^{208}\text{Pb}$  and  $^{48}\text{Ca}$ . In this way all the parameters employed in the present analysis are constrained and further employed in the analysis of the properties of M1 excitations. A recently developed non-pairing M1 sum rule in core-plus-two-nucleon systems [29] has



---

been used as a consistency check of the present theory framework. In Ref. [29], the non-energy weighted sum ( $m_{k=0}$ ) of the M1 excitation was evaluated for some specific systems, which consist of the core with shell-closure and additional two valence neutrons or protons, e.g.,  $^{18}\text{O}$  and  $^{42}\text{Ca}$ . If the pairing correlations between the valence nucleons are neglected, one advantage of that sum rule is that its non-energy weighted sum-rule value (SRV) is determined analytically for the corresponding system of interest. The sum of the M1-transition strength for  $^{18}\text{O}$  and  $^{42}\text{Ca}$  accurately reproduced the sum rule value (SRV), thus validating the introduced formalism and its numerical implementation for further exploration of M1 transitions.

The present framework is firstly benchmarked on M1 transitions for two magic nuclei,  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{208}\text{Pb}$ . The response functions  $R_{M1}(E)$  have been explored in details, including their isoscalar and isovector components, that relate to the electromagnetic probe, as well as contributions of the spin and orbital components of the M1 transition operator. It is confirmed that, in nuclei without deformation, the spin component of the M1 transition strength dominates over the orbital one. Due to the differences in the gyromagnetic ratios, the isovector M1 transition strength is significantly larger than the isoscalar one, and they interfere destructively. It is shown that the major peaks of isovector spin-M1 transitions are dominated mainly by a single  $ph$  configuration composed of spin-orbit partner states.

One of our interests was to investigate the role of the pairing correlations on the properties of M1 response functions in open shell nuclei, that has been addressed in the study of  $^{42}\text{Ca}$  and  $^{50}\text{Ti}$ . The RQRPA calculations show a significant impact of pairing correlations on the major peak by shifting it to the higher energies, and at the same time, by reducing the transition strength. In the  $^{50}\text{Ti}$  case, this effect is essential to reproduce the two-peak structure measured in the experiment [53]. The main effect of the pairing correlations is observed at the level of the ground state calculation, while it is rather small in the particle-particle channel of the residual RQRPA interaction.

The M1 transition strengths from the present study appear larger than the values obtained from the experimental data. Therefore, it remains open question whether some additional effects should be included at the theory side, or some strength may be missing in the experimental data. In addition, the M1-excitation energies of light systems, e.g.  $^{48}\text{Ca}$  still have some deviation from the reference data.

Recently, an experimental study based on the inelastic proton scattering provided novel data on E1 and M1 strength distributions along the even-even  $^{112-124}\text{Sn}$  isotope chain [54]. The resulting photoabsorption cross sections derived from the E1 and M1 strength distributions showed significant differences when compared to those from previous  $(\gamma, xn)$  experiments [55, 56]. This new experimental research enables us to explore the properties on M1 excitations in a broad range of even-even Sn nuclides, and examine the model calculations in a view of the mentioned experimental data from Ref. [54].

---

The quenching factors can be obtained by normalizing the calculations on M1 transitions to the experimental data. Accordingly, the free value of the g-factor ( $g_{free}$ ) is often considerably quenched, leading to its effective value that was previously reported mainly as  $g_{eff}/g_{free} \approx 0.6-0.75$  [16, 17, 55, 57–59]. Therefore, in view of the quenching of the g-factors in finite nuclei it is interesting to explore how the novel inelastic proton scattering data [54] compare to the results on M1 transitions in the framework of the relativistic energy density functional. As previously discussed, one of the most important mechanisms responsible for the quenching is mixing with higher order configurations [48, 57, 59–62]. Additional effects have been suggested to arise from the core excitation [63], and the meson-exchange current effect [64, 65]. However, in our recent work [66] is shown that the M1 transition strength distribution is characterized by an interplay between single and double-peak structures, which can be understood from the evolution of single-particle states, their occupations governed by the pairing correlations, and two-quasiparticle transitions involved. Comparison with available experimental data shows that independent neutron and proton spin-flip spectra are correctly identified, single and double-peaked distribution of response function  $R_{M1}(E)$  is reasonably well reproduced. The calculated peak positions  $E_{peak}^{th.}$  show 1-2 MeV discrepancy, that could be further fine-tuned through additional adjustments of the strength parameter in the isovector-pseudovector channel,  $\alpha_{IV-PV}$ . In addition, it is shown that strength is considerably reduced than previously known, the quenching of the g-factors for the free nucleons needed to reproduce the experimental data on M1 transition strength amounts  $g_{eff}/g_{free}=0.80-0.93$ . Since some of the B(M1) strength above the neutron threshold may be missing in the inelastic proton scattering measurement, further experimental studies are required to confirm if only small modifications of the bare g-factors are actually needed when applied in finite nuclei. These data could allow us to establish an essential link between the M1 observables and theoretical models and improve our understanding of the role of M1 transitions in modeling radiative neutron capture cross sections of relevance for nucleosynthesis.

A major interest in magnetic transitions is strongly focused on dipole (M1) excitations which was subject of our interest as well in our earlier work [66] and references therein. However, higher multipole, particularly  $0^+$  ground state to  $2^-$  excited state transitions known as giant-quadrupole resonances (GQR), denoted as M2, are almost uncharted area of both theoretical and experimental research. Several available experimental references [67–78] have elaborated highly fragmented M2 structure whose strength  $\sum_E B_{M2}(E)$  is strongly suppressed compared to the few theoretical results [68, 73, 79–86] provided either in shell model or random-phase approximation (RPA) framework [87]. M2 quenching/suppression has been considered as a very important component in heavy stars modeling at later stage and before supernova collapse [88, 89] and nucleosynthesis processes [90]. Theoretical models which investigate nuclear dynamics with their basis in fluid-dynamics [91–94] predic

---

activation of so called "twist mode" also experimentally explored in Ref. [95] where  $2^-$  excitation in spherical nuclei is attributed to the orbital transitions caused by an effective rotation operator around  $z$  axis, rotation angle " $z\alpha$ " is proportional to the  $z$  axis itself. In such picture one can imagine nucleon orbitals as different fluid layers which rotate in opposite directions, namely for  $z > 0$  layers rotate counterclockwise while for  $z < 0$  layers rotate clockwise. Consistency check and comparison between different theoretical models can be done by usage, as analytical tool, several sum-rule approaches developed in Refs. [96–100]. Apart of M2, higher multipoles  $\lambda > 2$  [101] like M8 [102] or even higher spin states like M12 and M14 in Refs. [103, 104] have been part of experimental investigation. Exploration of M2 excitations showed consistent results when compared with earlier RPA and shell-model theoretical research, in particular for  $^{16}\text{O}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ , and  $^{208}\text{Pb}$  systems where strength values  $\sum_E B_{M2}(E)$  are higher compared with the recent measurements. However, systematic partial strength analysis of complicated M2 fragmentation structure, in particular for  $^{16}\text{O}$  and  $^{208}\text{Pb}$ , showed very good agreement with the data. Pairing effects, modelled by the Gogny interaction with finite range, have shown tremendous impact on spectra for open-shell nuclei by reducing the strength and shifting the centroid energy to higher values. This evidence convinced us that the model introduced in this work can be used for further thorough studies of M2 and higher multipole excitations. However, very fragmented structure of M2 transitions can not be explained without introducing a more sophisticated and technically demanding 2p2h excitations.

In order to resolve still open questions, further theoretical and experimental developments, are needed, e.g., resolving the quenching effects in  $g$  factors, meson exchange effects, couplings with complex configurations, etc. Due to its relation to the spin-orbit interaction, M1 excitations could also provide a guidance toward more advanced RNEDFs. Recently, a new relativistic energy density functional has been constrained not only by the ground state properties of nuclei, but also by using the E1 excitation properties (i.e. dipole polarizability) and giant monopole resonance energy in  $^{208}\text{Pb}$  [105]. Similarly, M1 excitation properties in selected nuclei could also be exploited in the future studies to improve the RNEDFs. While in the previous studies the calculated  $\sum_E B_{M1}(E)$  transition strengths considerably overestimated the experimental values, comparison of the RQRPA results for the total  $\sum_E B_{M1}(E)$  strength with the new data on  $^{112-124}\text{Sn}$  isotopes from inelastic proton scattering [54] shows that differences are smaller than previously understood. Our analysis showed that discrepancy between model calculations and experiment are considerably reduced, i.e., the quenching of the  $g$ -factors for the free nucleons needed to reproduce the experimental data amount  $g_{eff}/g_{free}=0.80-0.93$ . Considering the fact that some of the  $\sum_E B_{M1}(E)$  strength above the neutron threshold may be missing in the proton scattering experiment due to the reported limitations in accuracy [54], our analysis

---

provides an indication that future experimental studies could confirm that actually very small modifications of the  $g_{free}$  factor are needed when applied in the nuclear medium in finite nuclei. Therefore, it is expected that this work can serve as guidance and motivation for the experimental community to systematically explore M1 resonant excitations, and in particular to reduce the uncertainties above the neutron threshold. Finally, complete understanding of M1 transitions within the framework used in this study, will also allow systematic large-scale calculations for the radiative neutron capture cross sections of relevance for the nucleosynthesis.

# Ključne riječi

**BCS** Bardeen–Cooper–Schrieffer

**ChPT** Kiralna teorija smetnje (*engl. Chiral Perturbation Theory*)

**DFT** Teorija funkcionala gustoće (*engl. Density Functional Theory*)

**EDFT** Teorija energijskog funkcionala gustoće (*engl. Energy DFT*)

$E\lambda^{2\lambda}$  - polni električni prijelazi

**OME** Jednomezonska izmjena (*engl. One Meson Exchange*)

**OBE** Jednobozonska izmjena (*engl. One Boson Exchange*)

**RBHF** Relativistički Brueckner-Hartree-Fock model  
(*engl. Relativistic Brueckner-Hartree-Fock model*)

**RHB** Relativistički Hartree-Bogoliubov model  
(*engl. Relativistic Hartree-Bogoliubov model*)

**RH** Relativistički Hartree model (*engl. Relativistic Hartree model*)

**RHF** Relativistički Hartree-Fock model (*engl. Relativistic Hartree-Fock model*)

**RMF** Relativističko srednje polje (*engl. Relativistic Mean Field*)

**RSM** Relativistički model ljusaka (*engl. Relativistic Shell Model*)

**RQRPA** Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajnih faza  
(*engl. Relativistic Quasiparticle Random Phase Approximation*)

**NDA** Jednostavna dimenzionalna analiza (*engl. Naive Dimensional Analysis*)

**NN** Nukleon-nukleon (potencijal)

**M $\lambda$  2 $^\lambda$**  - polni magnetski prijelazi

**QCD** Kvantna kromodinamika (*engl. Quantum Chromodynamics*)

**QHD** Kvantna hadronska dinamika (*engl. Quantum Hadron Dynamics*)

**B<sub>M1</sub>(E)** Parcijalna snaga prijelaza na energiji E, uključuje protonske i neutronske doprinose

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Relativistička teorija atomske jezgre</b>	<b>10</b>
1.1 Nerelativistički Hartree-Fock-Bogoliubov model (HFB)	13
1.2 Relativistički Hartree-Bogoliubov model (RHB)	18
1.2.1 Relativistički model sa kontaktnom interakcijom	22
1.3 Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajnih faza (RQRPA)	27
<b>2 Magnetski prijelazi u jezgrama</b>	<b>34</b>
2.1 Operatori prijelaza i prijelazni matrični elementi	34
2.2 Momenti distribucije snage prijelaza	39
<b>3 Rezultati</b>	<b>41</b>
3.1 Magnetski dipolni prijelazi (M1)	41
3.1.1 Snaga prijelaza M1 pobuđenja u jezgri $^{208}\text{Pb}$	41
3.1.2 Snaga prijelaza M1 pobuđenja u jezgri $^{48}\text{Ca}$	46
3.1.3 Pravilo sume za M1 prijelaze	48
3.1.4 Ovisnost M1 pobuđenja o izotopnoj i izotonskoj strukturi	50
3.1.5 Učinci korelacija sparivanja na M1 prijelaze	65
3.1.6 Spin-orbit interakcija i M1 prijelazi	71
3.2 Magnetski kvadrupolni prijelazi (M2)	76
3.2.1 M2 prijelazi u jezgri $^{48}\text{Ca}$	79
3.2.2 M2 prijelazi u jezgri $^{208}\text{Pb}$	81
3.2.3 Analiza dominantnih M2 prijelaza u jezgrama $^{16}\text{O}$ , $^{48}\text{Ca}$ i $^{208}\text{Pb}$	85
3.2.4 Učinci korelacija sparivanja na M2 prijelaze	91
<b>Zaključak</b>	<b>97</b>
<b>4 Dodatak</b>	<b>101</b>
<b>A Detalji nerelativističkog Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) formalizma</b>	<b>102</b>

<b>B</b>	<b>EksPLICITNO SLAMANJE SIMETRIJE SAČUVANJA BROJA ČESTICA U HFB APROKSIMACIJI</b>	<b>113</b>
<b>C</b>	<b>Matrični elementi kontaktnih međudjelovanja</b>	<b>115</b>
C.1	Izoskalar-skalar . . . . .	115
C.2	Izoskalar-vektor . . . . .	117
C.3	Izovektor-vektor . . . . .	122
C.4	Izovektor-pseudovektor . . . . .	123
C.4.1	Dimenzionalna analiza koeficijenta vezanja $\alpha_{IV-PV}$ u izovektor-pseudovektor kontaktnoj interakciji . . . . .	128
C.4.2	Metoda određivanja numeričke vrijednosti koeficijenta vezanja $\alpha_{IV-PV}$ u izovektor-pseudovektor kontaktnoj interakciji . . . . .	129
C.5	Derivativni član Lagranžijana, skalarno vezanje . . . . .	131
C.6	Coulombov član . . . . .	141
C.7	Matrični element u izospinskom prostoru . . . . .	144
<b>D</b>	<b>Jedinični vektor u sfernoj bazi</b>	<b>147</b>
<b>E</b>	<b>M1 operator</b>	<b>149</b>
E.1	Nerelativistička forma M1 operatora . . . . .	149
E.2	Relativistička forma M1 operatora . . . . .	151
<b>F</b>	<b>Generalizacija formalizma, relativistički operator <math>M\lambda</math></b>	<b>153</b>
F.1	Proračun reduciranog matričnog elementa nerelativističkog magnetskog operatora $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$ . . . . .	153
F.2	Proračun gradijenta $\nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]$ . . . . .	154
F.3	Proračun reduciranog matričnog elementa dijagonalnog relativističkog operatora $\hat{M}_{JM}^{TM_T}$ u bazi ukupnog spina . . . . .	158
F.4	Proračun reduciranog matričnog elementa dijagonalnog relativističkog operatora $\hat{M}_{JM}^{TM_T}$ u miješanoj spin-izospin bazi . . . . .	160
<b>G</b>	<b>Izborna pravila relativističkog magnetskog operatora <math>\hat{\mu}_{\lambda\nu}</math></b>	<b>161</b>
<b>H</b>	<b>Operatori izmjene</b>	<b>164</b>
<b>I</b>	<b>Reducirani matrični elementi i relacije simetrije</b>	<b>167</b>
I.1	Reducirani matrični elementi . . . . .	167
I.2	Relacije simetrija reduciranog matričnog elementa $\langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f    [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J    (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle$	169
<b>J</b>	<b>Definicije skalara i vektora s obzirom na infinitezimalne rotacije</b>	<b>171</b>
<b>K</b>	<b>Faktor gušenja spinskog žiromagnetskog omjera slobodnog nukleona</b>	<b>174</b>



---

L Dimenzionalna analiza magnetske snage prijelaza $B_{M\lambda}$ ranga $\lambda$	177
Bibliografija	179
Popis slika	196
Životopis	199

# Uvod

U primjeni kvantne fizike na atomske i molekularne sustave, atomska jezgra promatrana je kao točkasti izvor Coulombovog potencijala. Rutherfordovo otkriće protona iz godine 1918. te neutrona (J. Chadwick [106] godine 1932.) na prirodan način uvodi strukturu atomske jezgre kao zasebno područje od interesa koje se, u užem smislu, bavi proučavanjem međudjelovanja protona i neutrona. Za razliku, na primjer, od Coulombove i gravitacijske sile ne postoji jednostavan analitički izraz za nuklearnu silu u tom smislu, a promatrajući nuklearnu jezgru kao statičku distribuciju pozitivnog naboja, možemo reći da je nuklearna sila u parovima proton-proton, proton-neutron, neutron-neutron dominantno privlačna. Također danas znamo da na izrazito malim udaljenostima nuklearna sila postaje odbojna (inkompresibilnost nuklearne materije). Sljedeći korak u nerelativističkom kontekstu bio je, teorijski objasniti eksperimentalno utvrđenu strukturu ljusaka jednočestičnog spektra atomske jezgre. Posebno se uspješan pokazao model-ljusaka Marie Göppert-Mayer [107] i Hansa Jensena iz godine 1931. gdje potencijal Woods-Saxonovog tipa sa spin-orbit vezanjem uspješno reproducira magične brojeve predviđene u eksperimentalnim istraživanjima.

Uzevši u obzir razvoj specijalne teorije relativnosti i rad A. Einsteina godine 1905. [108] i ujedinjavanju kvantne mehanike i teorije relativnosti radom P. A. M. Diraca godine 1928. [109] a koja rezultira predikcijom pozitrona eksperimentalno potvrđenog od strane C. D. Andersona 1933. godine [110], postavlja se pitanje opravdanosti razmatranja atomske jezgre kao relativističkog sistema znajući pri tome da je prosječna kinetička energija nukleona u jezgri znatno manja od relativističke energije mirovanja nukleona.

S druge strane, japanski fizičar H. Yukawa godine 1935. [111] teorijskim razmatranjem i primjenom upravo relativističke kvantne mehanike, a znajući dimenzije jezgre, dolazi do zanimljivog zaključka da je nuklearna sila posljedica izmjene čestica, koje naziva mezonima, te predviđa masu tih čestica od oko  $m_\pi \approx 100$  MeV. Eksperimentalna potvrda Yukawine pretpostavke dogodila se identifikacijom mezona (piona) u gornjim slojevima atmosfere godine 1947. eksperimentom C. F. Powela [112], detekcijom kozmičkog zračenja. Posljedično, otvoren je put za jednu novu mikroskopsku sliku atomske jezgre u kojoj je nukleon-nukleon (NN) interakcija opisana izmjenom jednog mezona, OME model. Slijedi razvoj "pionskih teorija" [113], pedesetih godina prošlog stoljeća, koje uzimaju u obzir jedno i više-pionske izmjene no zbog nejednoznačne interpretacije smatraju se neuspjelima, a tada nije bila poznata činjenica da je pionska dinamika uvjetovana kiralnom simetrijom.

Daljnji napredak omogućen je eksperimentalnim otkrićem teških  $\rho$ ,  $\omega$  mezona početkom 60-tih godina prošlog stoljeća čime je potaknut razvoj modela s izmjenom jednog bozona (OBE) [114]. U tom smislu atomsku jezgru promatramo kao višečestični jako međudjelujući sustav nukleona. U okviru OBE modela ostaje dvojbena  $\sigma$  polje odnosno sigma bozon čije postojanje empirijski nikad nije dokazano a koji je uveden da bi opisao korelirane  $2\pi$ -dvpionske izmjene, odnosno privlačnu komponentu NN potencijala srednjeg dosega. Sustavno istraživanje relativističkih modela temeljenih na NN potencijalu poput relativističkog modela ljsaka (RSM), relativističkog Hartree (RH) modela, relativističkog Hartree-Fock (RHF) modela, relativističkog Brueckner-Hartree-Fock (RBHF) modela pokazalo je opravdanost relativističkog pristupa naizgled nerelativističkoj problematici. Naime, pokazano je da su spin-orbit separacija i pripadajući predznak prirodna posljedica relativističkog formalizma gdje je  $V_{LS}$  spin-orbit vezanje proporcionalno gradijentu razlike skalarnog i vektorskog potencijala [115] a koji su po apsolutnoj vrijednosti približno jednakih vrijednosti. Razvoj teorijskih istraživanja NN potencijala, od kojih su najviše spominjani Stony Brook, Paris, Bonn potencijali [116], potrajao je gotovo desetljeće.

W. Kohn i L. J. Sham [117] godine 1965. temeljem prethodnih P. Hohenberg-W. Kohn [118] istraživanja, promatraju nehomogeni višečestični sustav elektrona, s dobro poznatom elektromagnetskom interakcijom, te razvijaju samosuglasnu aproksimativnu metodu koja je egzaktna u slučaju sporo-varirajućih ili visokih gustoća. U slučaju kada je takav sustav u osnovnom stanju, pokazuje se da su dobivene jednadžbe analogon Hartree i Hartree-Fockovim jednadžbama. Riječ je o posve novom pristupu problemu mnoštva čestica poznatom kao teorija funkcionala gustoće (DFT). Bilo je za očekivati primjenu Kohn-Shamovog formalizma i na istraživanja drugih višečestičnih sustava u konkretnom slučaju atomske jezgre. Pa tako, J. D Walecka godine 1974. [119] predlaže elegantan način relativističke formulacije kvantne hadronske dinamike (QHD) preko teorije polja koristeći efektivni Lagranžijan umjesto NN potencijala, što je ekvivalentno formalizmu energijskog funkcionala gustoće (EDFT). Waleckin  $\sigma - \omega$  model temeljen je na efektivnom Lagranžijanu koji sadrži slobodna nukleonska,  $\sigma$  i  $\omega$  polja te linearnu interakciju između polja, bez članova višeg reda. Pokazalo se da je to vrlo elegantan pristup kojim je moguće uzeti u obzir relativističku prirodu nuklearne sile kao posljedicu izmjene minimalnog skupa efektivnih mezona s točkastim nukleonima, protonima i neutronima, kao izvorom mezon-skih polja. Tim teorijskim pristupom objašnjeni su (a) saturacija, (b) ultra-relativistički limes jednadžbe stanja u aproksimaciji visoke gustoće, (c) spin-orbit međudjelovanje i (d) ovisnost realnog dijela optičkog potencijala o gustoći [115]. Riječ je o teoriji srednjeg polja gdje mezonska polja nisu kvantizirana već koristimo prosječne vrijednosti operatora polja kao c-broj odnosno relativističke valne funkcije koje individualno, svaka za sebe, zadovoljavaju Klein-Gordonove jednadžbe dok protoni odnosno neutroni s obzirom na fermionsku prirodu zadovoljavaju Diracove jednadžbe. Dakle, rješavaju se sustavi vezanih

diferencijalnih jednadžbi iterativnom metodom dok se ne postigne samosuglasno rješenje do na zadanu numeričku preciznost bilo u energijama bilo u valnim funkcijama.

J. Boguta i A. R. Bodmer godine 1977. [120] proširuju Waleckin model dodavanjem nelinearnih, kvadratičnih i kubnih, članova samodjelujućeg skalarnog  $\sigma$  polja u efektivni Lagranžijan. Riječ je relativističkom Hartree (RH) i Thomas-Fermi (TF) tipu modela za beskonačnu simetričnu nuklearnu materiju koji rezultira realističnijim modulom kompresibilnosti  $K = 150$  MeV za razliku od Waleckine vrijednosti  $K = 500$  MeV. Nelinearni članovi efektivnog Lagranžijana mogu se interpretirati kao više-bozonske izmjene. Tek godine 1992. R. Brockmann and H. Toki [121] pokazuju da je QHD formulacija efektivnim Lagranžijanom s nelinearnim članovima ekvivalentna formulaciji efektivnog Lagranžijana s koeficijentima vezanja ovisnima o barionskoj gustoći. Iste godine B. A. Nikolaus, T. Hoch, i D. G. Madland [122] dolaze do zaključka, nastavno na Brockmanov i Tokijev rad, da se mezonska interakcija konačnog dosega može opisati efektivnim Lagranžijanom koji sadrži samo kontaktno nukleon-nukleon međudjelovanje s koeficijentima vezanja ovisnima o gustoći ali bez mezonskih polja. Time su iz razmatranja eksplicitno isključeni (fiktivno)  $\sigma$  polje i rješavanje Klein-Gordonovih jednadžbi dok su, po pretpostavci, procesi višeg reda poput više-bozonske izmjene i polarizacije vakuuma [123] implicitno uključeni kroz funkcionalnu ovisnost koeficijenata vezanja o gustoći. Benefit takvog pristupa u odnosu na ME model je fizikalno ekvivalentan i jednako uspješan, no u smislu računalnih resursa i vremena izvršenja manje zahtjevan, model sa kontaktnim međudjelovanjem (PC).

Ako se nakratko vratimo u 60-te godine prošlog stoljeća, tadašnji zamah eksperimentalnih istraživanja gdje se javlja produkcija velikog broja novih čestica zahtijevala je novi teorijski pristup i klasifikacijski okvir koji može ponuditi razumijevanje interakcije novootkrivenih čestica. M. Gell-Mann [124] i nezavisno Y. Neeman [125] godine 1961. predlažu teoriju jakih interakcija kojom uvode, kao novi koncept nedjeljivih cjelina, kvarkove. Riječ je o kvantnoj kromodinamici (QCD), teoriji kojom se problem NN interakcije činio riješen. Iako uspješna u smislu da hadronsku strukturu i međudjelovanje hadrona razmatra istim formalizmom teorije grupa, ostaje problem neperturbativnosti na niskim energijama a što je režim energija na kojem proučavamo strukturu atomske jezgre. Koncept asimptotske slobode otkriven godine 1973. u teorijskim razmatranjima D. Grossa i F. Wilczeka [126, 127] kojim je pokazano da QCD predviđa sve slabiju jaku interakciju na visokim energijama, na visokim energijama QCD je perturbativna i u suglasju je s eksperimentom, naizgled nas udaljava od rješenja problema NN interakcije. Značajan proboj na tom polju događa se uvođenjem koncepta efektivne teorije polja (EFT) primijenjene na sustave opisane QCD-om na niskim energijama. Naime, godine 1979. S. Weinberg [128, 129] predlaže proceduru, na razini matematičke slutnje, da u okviru EFT-a generalni Lagranžijan treba sadržavati sve članove koji zadovoljavaju nametnute principe simetrije osobito (slomljenu) QCD kiralnu simetriju. U nerelativističkoj fizici postojale su već ra-

zvijena kvazičestična metoda kojom opisujemo raspršenje čestica na potencijalima koji su jaki i nije moguće primjeniti perturbativnu teoriju. Po Weinbergu [130], uvođenjem kvazičestica, koje su vezana stanja originalne teorije a sada predstavljaju efektivne elementarne čestice, da bi zadržali istu fiziku potrebno je istovremeno modificirati i potencijal i to tako da modificirani potencijal ne proizvodi kvazičestice kao vezana stanja nekih elementarnijih čestica. Rezultat je slabiji modificirani potencijal i moguća primjena perturbativnog računa. U tom smislu na niskim energijama kao efektivni stupnjevi slobode identificirani su pioni (Goldstonovi bozoni slomljene kiralne simetrije) i nukleoni umjesto kvarkova i gluona dok su teški mezoni i rezonancije "uključeni" u efektivni Lagranžijan. Ponovno smo se vratili na Yukawinu teoriju bozonske (pionske) izmjene sada kao efektivnim stupnjevima slobode i sa slomljenom kiralnom simetrijom kao formalnom vezom prema temeljnoj QCD teoriji. Navedimo da su nedavno, 2018. godine, u okviru EFT-a A. Schwenk i suradnici razmatrali kiralne efektivne interakcije u modelu ljsaka [131, 132].

Elektromagnetska pobuđenja atomskih jezgara predstavljaju jedan od najvažnijih alata u istraživanju nuklearne strukture, nuklearnih reakcija kao i nuklearne astrofizike. Mikroskopski modeli, poput modela ljsaka, pobuđena stanja razmatraju kao prijelaz valentnog nukleona u energetska stanja koja su slobodna ili djelomično zauzeta. S druge strane, u atomskoj jezgri moguća su i kompleksnija, kolektivna pobuđenja, takozvane gigantske rezonancije koje mogu biti električnog ili magnetskog tipa. Gigantske rezonancije uključuju velik broj jednočestičnih prijelaza, što vidimo kao fragmentaciju snage prijelaza, i nije ih moguće opisati jednostavnim modelom ljsaka. Osobito su zanimljiva kolektivna pobuđenja, gigantske rezonancije, u kojima dolazi do promjene oblika ili gustoće atomske jezgre. Prva indikacija rezonancija uočena je godine 1937. u foto-apsorpcijskom eksperimentu Bothea i Gertnera [133], gdje su u raspršenju 17 MeV-skih fotona na raznim metama, za neke slučajeve, izmjereni dva puta veći udarni presjeci od prosječnih teorijskih vrijednosti što je indikacija rezonantne apsorpcije na tim jezgrama. A. B. Migdal godine 1944. [134], po prvi puta, teorijski predviđa postojanje rezonanci a koje eksperimentalno potvrđuju Baldwin i Klaiber godine 1947. [135] u foto-apsorpcijskom eksperimentu na visokim energijama. Eksperimenti S. C. Fultza iz godine 1962. [136], B. L. Bermana i Fultza iz godine 1975. [137] te nešto kasnije Berengèrea primjer su kontinuiranog prikupljanja znanja o rezonantnim pobuđenjima atomskih jezgara, koja danas, s obzirom na vrstu projektila i odgovarajuće pobude, možemo podijeliti na hadronske ( $\alpha, \alpha'$ ), ( $p, p'$ ) i leptonske ( $e, e'$ ) probe.

S druge strane, teorijska istraživanja kolektivnih pobuđenja atomske jezgre možemo podijeliti na modele s kolektivnim stupnjevima slobode i mikroskopske modele. Od modela s kolektivnim stupnjevima slobode, osim već spomenutog Migdalovog, značajan je rad M. Goldhabera i E. Tellera godine 1948. [138] koji eksperimentalne rezultate interpretira kao kolektivne oscilacije neutrona spram protona, a gdje energija asimetrije iz semiempirijske

Bethe–Weizsäcker masene formule ima ulogu povratne sile. Goldhaber i Teller razvili su nekoliko verzija modela između ostalog i hidrodinamički model (model III) koji je pripisan Steiwedelu i Jensenu [139]. Okamoto [140] i Danos [141] razmatraju kako svojstva gigantskih dipolnih rezonantnih (GDR) pobuđenja ovise o obliku jezgre dok Rainwater [142] uvodi oscilacije površine jezgre koje naknadno istražuju Bohr i Mottelson [143]. Konačno 60-tih imamo kompletan dinamički model vezanja dipola i oscilacija površine jezgre, W. Greiner i Danos [144].

Razvoj mikroskopskih modela počeo je gotovo istovremeno s razvojem modela nezavisnih čestica (IPM) u kojem se svaki pojedini nukleon giba u srednjem potencijalu svih preostalih nukleona. Postavljaju se dva pitanja, prvo, problem interpretacije GDR u okviru jednočestičnih stupnjeva slobode i drugo, postoji li formalna veza između kolektivnih i jednočestičnih stupnjeva slobode? D. H. Wilkinson [145] godine 1956. istražuje GDR pobuđenja u okviru IPM modela i pronalazi da su dipolni prijelazi grupirani u intervalima energija koji su jednaki prosječnom razmaku energija među ljuskama. Drugim riječima efekt dipolnih pobuđenja u IPM modelu je moguć ali su teorijske vrijednosti rezonantnih energija oko dva puta manje od eksperimentalnih. Naime, pomalo zaboravljeni rad A. Riefmana [146] iz godine 1953. pokazuje da IPM modeli mogu objasniti dipolna pobuđenja ako uzmemo u obzir i rezidualnu interakciju.

Konačno J. P. Elliott i B. H. Flowers [147] godine 1957. te u velikoj mjeri G. E. Brown i M. Bosterli [148] godine 1959. eksplicitno demonstriraju važnost i značenje čestično-šupljinskih korelacijskih mehanizama u IPM modelu za GDR pobuđenja. Matematički aparat kojim se objašnjavaju takvi čestično-šupljinski mehanizmi poznat je pod nazivom aproksimacija-slučajnih-faza (RPA). U suštini svaka RPA metoda polazi od pretpostavke da generalizirane matrice gustoće možemo razviti oko osnovnog stanja jezgre u limesu linearnog odziva, pretpostavljajući pri tome da je varijacija u odnosu na osnovno stanje oscilatornog karaktera a rezultat su poznate RPA jednadžbe [149–151].

Do sada spomenuta rezonantna pobuđenja atomske jezgre uglavnom su električnog dipolnog (E1) tipa i ta vrsta pobuđenja je izrazito kolektivnog karaktera. Kvadrupolna električna pobuđenja (E2), zbog gotovo dva reda veličine manjeg udarnog presjeka u odnosu na E1, doprinose značajno manje u ukupnoj snazi prijelaza [29–34]. Naime, elektromagnetska pobuđenja mogu biti električnog  $E\lambda$  i magnetskog tipa  $M\lambda$  multipolariteta  $2^\lambda$ . U eksperimentu su istovremeno aktivirana i električna i magnetska pobuđenja različitih multipolariteta gdje E1 i E2 dominiraju u odnosu na magnetska dipolna (M1) pobuđenja pa je izrazito složeno ekstrahirati komponentu M1 pobuđenja [35–42, 152], koje zapravo želimo proučavati, u razmatranom intervalu energija. Kako je već prethodno spomenuto, kolektivna stanja fenomenološki možemo opisati ili kao fluktuacije gustoće i oblika jezgre oko osnovnog stanja kod električnih ili kao prijelazi s izmjenom spina (*engl. spin-flip*) kod M1 prijelaza. Od osobitog su značaja M1 pobuđenja, naime, M1 pobuđenja relevantna su

u teorijskim istraživanjima stanja neprirodnog pariteta, spin-orbit cijepanja i tenzorskih efekata nuklearne interakcije [14]. Zbog potpunijeg razumijevanja, M1 pobuđenja razmatrana su u okviru različitih teorijskih pristupa poput modela ljusaka (SM) (*engl. shell model*) [9, 12, 14, 15, 22, 44, 45] gdje su razmatrani modovi škara (*engl. scissor*) koji se javljaju kod deformiranih jezgara te tenzorski efekti nuklearne sile [14]. U konkretnom slučaju, M1 pobuđenja sa izmjenom spina su na razini jednočestičnog operatora analogon Gamow-Teller (GT) prijelaza [9, 12], ili drugim riječima dominantna izovektorska komponenta M1 prijelaza proporcionalna je nultoj komponenti GT prijelaza koju primjerice koristimo kod proračuna udarnog presjeka neelastičnog raspršenja neutrina na atomskoj jezgri [9, 10]. Mjerenje neutrinških udarnih presjeka izrazito je zahtjevan problem za eksperimentalna istraživanja a dobivene vrijednosti su osobito značajne u fizici supernova te r-procesu (*engl. rapid neutron capture process*) ključnom za razumijevanje procesa nukleosinteze [7, 8, 11, 12]. S druge strane u proučavanju strukture atomske jezgre izovektorska komponenta M1 rezonancija s izmjenom spina bitna je za razumijevanje jednočestičnih pobuđenja atomske jezgre, spin-orbit interakcije, strukture ljusaka od doline stabilnosti prema nestabilnim jezgrama u mapi nuklida [14–18] te u rješavanju efekta gušenja (*engl. quenching*) spin-izospin odziva atomske jezgre koji je bitan u teorijskom opisu matričnog elementa dvostrukog beta raspada [19].

Prema dosadašnjim istraživanjima M1 rezonancije imaju snagu prijelaza koncentriranu u jednom vrhu kod dvostruko magičnih jezgara [17], dva istaknuta vrha kod jezgara sa otvorenim ljuskama kao kod  $^{50}\text{Ti}$  [53] te dva istaknuta vrha kod teških deformiranih jezgara [17]. Teorijska istraživanja većinom su zasnovana na nerelativističkim Skyrme efektivnim interakcijama [16–18], proširena s interakcijama koje uključuju tenzorske efekte nuklearne sile [51]. Međutim, ne postoji jedinstvena Skyrme parametrizacija koja objašnjava sve eksperimentalne slučajeve odnosno teorijska istraživanja su zasnovana na primjenama različitih efektivnih interakcija. Dodatno, fiksnim točno određenim skupom Skyrme parametara, model nije u mogućnosti opisati spektar snage prijelaza s jednim i dva dominantna vrha u jezgrama sa zatvorenim i otvorenim ljuskama i [16]. Da bi se riješila dvojba implementacije različitih Skyrme parametrizacija uključeni su i dodatni efekti poput izovektor-M1 odziva naspram izospin-miješanog odziva te tenzorska i spin-orbit interakcija [16, 17]. Nedavna analiza ref. [52], temeljena na Skyrme tipu funkcionala, pokazala je da su Skyrme parametrizacije uspješne kod reprodukcije električnih pobuđenja dok postoje poteškoće kod opisa magnetskih prijelaza.

S druge strane, teorijska istraživanja u okviru relativističkog formalizma, do sada su razmatrala uglavnom mod škara (*engl. scissors mode*) za deformirane lakše i srednje teške jezgre [3, 20–28]. Kao dobar analitički alat koji koristimo za usporedbu različitih teorijskih pristupa razmatrano je M1 EWSR pravilo sume [29, 46]. Gledajući s aspekta eksperimentalnih istraživanja ostaje otvoreno pitanje fragmentiranosti M1 gigantskih rezonancija a



tek jedna publikacija [38] tvrdi da je spektar izovektorske snage prijelaza za jezgru  $^{208}\text{Pb}$  olova u potpunosti poznat. Da bismo u teorijskim istraživanjima reproducirali fragmentirani eksperimentalni spektar M1 snage prijelaza pokazalo se nužnim uključiti kompleksnija  $2p2h$  i  $npnh$  vezanja koja nisu uključena na razini RPA formalizma [26, 47–50].

Do sada je teorijsko razmatranje relativističkog nuklearnog energijskog funkcionala gustoće (RNEDF) uspješno korišteno kod opisa raznih svojstava jezgara kao i kod astrofizički relevantnih procesa [105, 153–164]. U ovom radu su, po prvi put u okviru RNEDF-a, teorijski istraženi magnetski prijelazi  $M\lambda$  ranga  $\lambda$  s fokusom na M1, te magnetska kvadrupolna (M2) pobuđenja. Osnovno stanje sferičnih parno-parnih jezgara na temperaturi apsolutne nule ( $T=0\text{K}$ ) razmatrano je samosuglasnim relativističkim Hartree-Bogoliubovljevim (RHB) modelom s kontaktnim interakcijama (PC) model (*engl. point-coupling model*). Pobuđena stanja jezgre razmatramo u okviru relativističke kvazičestične aproksimacije slučajnih faza (RQRPA) [149], koja je dodatno proširena efektivnom kontaktnom interakcijom izovektor-pseudovektorskog tipa koja, zbog sačuvanja pariteta, ne postoji u osnovnom stanju jezgre na Hartree razini. U konkretnom slučaju riječ je o primjeni relativističke kvantne fizike na konačne jako korelirane sisteme kao što su atomske jezgre.

Efektivni QHD Lagranžijani koji su osnova RHB modela sastoje se od poznatih interakcija dugog doseg ograničenih simetrijama i skupom generičkih interakcija kratkog doseg. QHD modeli temeljeni su na simetrijama sustava QCD: Lorentzovoj invarijantnosti, invarijantnosti na transformacije pariteta, elektromagnetskom baždarnom invarijantnosti, izospinskom i kiralnom simetrijom. Međutim, samosuglasni relativistički proračuni srednjeg polja ne uključuju eksplicitno pione. Učinci korelirane razmjene dva piona obrađuju se implicitno kroz fenomenološki skalar, izoskalarno srednje polje. RMF modeli nuklearne strukture su fenomenološki, s parametrima prilagođenim za reprodukciju jednadžbe stanja nuklearne materije i skupa globalnih svojstava sfernih jezgara sa zatvorenim ljuskama. Dok QCD simetrije ograničavaju QHD Lagranžijane ograničavanjem forme mogućih članova interakcije, empirijski skup podataka o kolektivnim i jednočestičnim svojstvima konačnih jezgara može odrediti samo šest ili sedam parametara u općenitom razvoju efektivnog Lagranžijana po redovima potencija polja i njihovih derivacija. Uspjeh relativističke nuklearne fenomenologije srednjeg polja pripisuje se velikim vrijednostima Lorentzovog skalarnog polja i četverovektora nukleonske samoenergije, koji su u osnovi svih QHD modela. Detalje je moguće pronaći u cjelovitom pregledu RHB modela primijenjenom na sustave atomskih jezgara iz 2005. godine, D. Vretenar i dr. [153].

Efekt sparivanja nukleona, koji do sada nije spomenut, iznimno je bitan za opis atomskih jezgara s otvorenim ljuskama. U teorijskim istraživanjima vrlo često se za opis nukleon-nukleon korelacija u jezgrama u osnovnom stanju koristi Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [165] formalizam preuzet iz teorije supravodljivosti u fizici čvrstog stanja. Formalni pro-



blem kod tog pristupa je da BCS stanja nisu svojstvena stanja operatora broja čestica odnosno broja nukleona koji je za danu atomsku jezgru fiksiran. Standardno rješenje je metoda Lagrangeovih multiplikatora gdje je kao dodatni uvjet uveden fiksiran broj nukleona. BCS problem moguće je izbjeći tako da za opis korelacija sparivanja eksplicitno koristimo efektivno međudjelovanje kao u aktualnom relativističkom Hartree-Bogoliubov (RHB) [166] modelu. U nerelativističkom slučaju su najčešće korištene Skyrme [167] i Gogny [168] efektivne interakcije. Prednost Gogny interakcije je konačan doseg u koordinatnom prostoru čime je automatski osiguran rez (*engl. cutt-off*) u impulsnom prostoru kojim se eliminiraju nefizikalna čestično-šupljinska pobuđenja jezgara za velike vrijednosti prijenosa količine gibanja [169]. Kada govorimo o problemu korelacija sparivanja nukleona u relativističkom slučaju [170, 171], pokazano je da miješanje velikih i malih komponenata valnih funkcija u Dirac-Hartree-Bogoliubovljevima jednadžbama može biti zanemareno. Ili drugačije rečeno, korelacije sparivanje nukleona u relativističkom formalizmu mogu biti aproksimirane nerelativističkim efektivnim interakcijama a kao rezultat imamo svojevrsni hibridni RHB model.

Do sada smo razmatrali atomske jezgre u osnovnom stanju, no istraživanje pobuđenih stanja takvih višestrukih kvantnomehaničkih sustava od posebnog je interesa kako za teoriju tako i za eksperiment. Prijelazom iz RPA na formalizam koji uključuje kolektivne stupnjeve slobode vidimo eksplicitnu vezu između jednočestičnih i kolektivnih stupnjeva slobode. Formalno, RPA aproksimaciju na temperaturi apsolutne nule možemo izvesti iz vremenski ovisne HF metode [172]. Da bi s mikroskopskog opisa prešli na kolektivne varijable zahtijevamo da matricu gustoće u vremenski ovisnoj HF metodi zamijenimo Wignerovom transformacijom [173] kao u [174] a rezultat je nerelativistička Vlasovljeva jednadžba [175]. Formuliranjem mikroskopske RPA metode preko funkcije distribucije iz Vlasovljeve jednadžbe možemo odrediti ovisnost lokalne gustoće nukleona o vremenu. Znajući da Vlasovljeva jednadžba opisuje oscilacije elektrona (elektronskog plina) u plazmi, primjenom na više-nukleonske sustave zapravo gledamo oscilacije gustoće nukleona u vremenu a što je kolektivna varijabla. Rješavanjem RPA jednadžbi dobiva se diskretan spektar energija pa širinu raspada rezonantnog stanja uvodimo fenomenološki. Nemogućnost proračuna širine raspada jedan je od glavnih nedostataka RPA metode. Da bi omogućili proračun širine raspada rezonantnih pobuđenja atomske jezgre slijedila su proširenja RPA formalizma poput, druga-RPA (SRPA) koja uzima u obzir vezanja na kompleksnija 2p2h pobuđenja te kontinuum-RPA (CRPA) koja uzima u obzir i emisiju nukleona u energetski kontinuum ako je energija separacije vezanog nukleona dovoljno mala [176, 177]. Nedavno je predložena nova metoda za rješavanje RPA problema, metoda konačnih amplituda (FAM) [178, 179], koja se temelji na numeričkoj procjeni rezidualne interakcije koristeći konačne amplitude jednočestičnih valnih funkcija. U okviru ovog rada, kako smo već istakli, pobuđeno stanje jezgre razmatramo u okviru R(Q)RPA [149] s dodatno uključuje-

nom izovektor-pseudovektorskom kontaktnom interakcijom, dok je za korelacije sparivanja korištena ista Gogny [168] parametrizacija kao i u osnovnom stanju. Osim RPA baziranih modela postoje i druge metode kojima se mogu razmatrati pobuđena stanja jezgara poput fononskih pobuđenja, J. Ponomarev i dr. iz 1983.[180], ili RPA plus fononsko vezanje, E. Litvinova i dr. iz 2007. godine [181].

Ovaj rad je organiziran na sljedeći način. Nakon opsežnog uvoda slijedi osvrt na relativističku teoriju srednjeg polja s fokusom na RHB model (1.1) te R(Q)RPA aproksimaciju (1.3). U poglavlju (1.3) je uveden izovektorski-pseudovektorski član u efektivni Lagranžijan da bi kompletno opisali pobuđenja magnetskog tipa te odgovarajući kvantno-mehanički operator i proračun reducirane snage prijelaza kao relevantnu opservablu. Dobiveni rezultati za reduciranu snagu M1 prijelaza, ovisnost snage prijelaza o izotopnoj strukturi te veza između M1 prijelaza i spin-orbit interakcije kao i snaga M2 prijelaza obrazloženi su u poglavlju (2). Konačno poglavlje (4) obuhvaća formalizam potreban za razumijevanje prethodnih poglavlja.

## POGLAVLJE 1

# Relativistička teorija atomske jezgre

Osnovni element bilo koje teorije srednjeg polja je skup jednonukleonskih valnih funkcija [182],

$$\{\psi_i(\vec{x}), i = 1, \dots, N_d\}, \quad \vec{x} = (\vec{r}, \sigma, \tau), \quad (1.1)$$

pri tome broj jednočestičnih valnih funkcija  $N_d$ , zbog Paulijevog principa isključenja za fermionske sisteme, mora biti veći od ukupnog broja nukleona  $A = Z + N$ . Kontinuirana varijabla  $\vec{r}$  označava koordinatu u koordinatnom prostoru dok su  $\sigma = \pm 1/2$  i  $\tau = \pm 1/2$  diskretne vrijednosti projekcija spina i izospina. Najjednostavniji model baziran na jednonukleonskim stanjima je model nezavisnih čestica (IPM) gdje je osnovno stanje jezgre opisano Slaterovom determinantom. Osnovno stanje višenukleonskog IPM sustava možemo opisati formalizmom druge kvantizacije  $|\Phi_0\rangle = \hat{a}_{\pi_1}^\dagger \dots \hat{a}_{\pi_Z}^\dagger \hat{a}_{\nu_1}^\dagger \dots \hat{a}_{\nu_N}^\dagger |0\rangle$  pri tome vrijedi  $\hat{a}_i^\dagger |\Phi_0\rangle = 0$  za popunjena stanja ( $1 \leq i \leq A$ ) odnosno  $\hat{a}_i |\Phi_0\rangle = 0$  za nepopunjena stanja ( $i > A$ ). Riječ je o fermionskom sistemu gdje vrijedi Paulijev princip isključenja za skup nukleona iste vrste, zasebno za protone,

$$\{\hat{a}_{\pi_i}, \hat{a}_{\pi_j}^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{a}_{\pi_i}, \hat{a}_{\pi_j}\} = 0, \quad \{\hat{a}_{\pi_i}^\dagger, \hat{a}_{\pi_j}^\dagger\} = 0 \quad (1 \leq i, j \leq Z), \quad (1.2)$$

i zasebno za neutrone,

$$\{\hat{a}_{\nu_k}, \hat{a}_{\nu_l}^\dagger\} = \delta_{kl}, \quad \{\hat{a}_{\nu_k}, \hat{a}_{\nu_l}\} = 0, \quad \{\hat{a}_{\nu_k}^\dagger, \hat{a}_{\nu_l}^\dagger\} = 0 \quad (1 \leq k, l \leq N), \quad (1.3)$$

mješovite komutacijske relacije mogu biti komutator ili antikomutator, izbor je pitanje konvencije koji želimo usvojiti<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Mješovite komutacijske relacije između protonskih i neutronske operatore stvaranja i poništenja mogu biti ili antikomutatori,

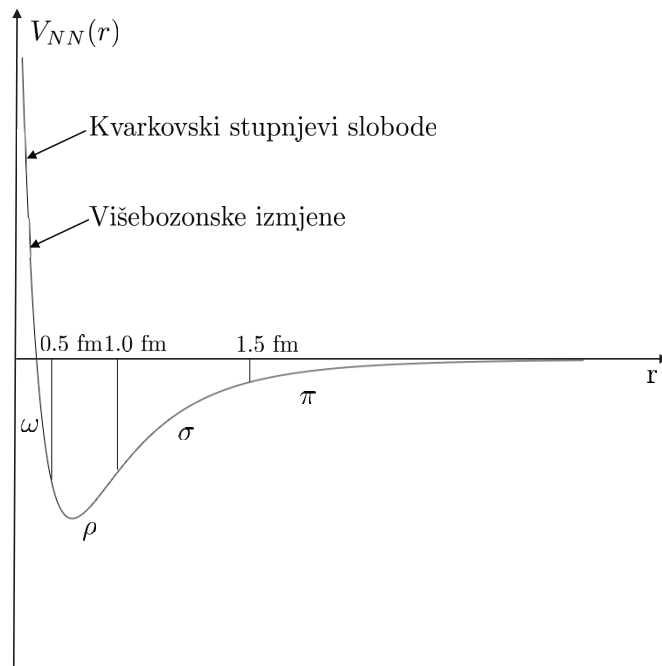
$$\{\hat{a}_{\pi_i}, \hat{a}_{\nu_k}^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{a}_{\pi_i}, \hat{a}_{\nu_k}\} = 0, \quad \{\hat{a}_{\pi_i}^\dagger, \hat{a}_{\nu_k}^\dagger\} = 0 \quad (1 \leq i \leq Z), \quad (1 \leq k \leq N), \quad (1.4)$$

ili komutatori,

$$[\hat{a}_{\pi_i}, \hat{a}_{\nu_k}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_{\pi_i}, \hat{a}_{\nu_k}] = 0, \quad [\hat{a}_{\pi_i}^\dagger, \hat{a}_{\nu_k}^\dagger] = 0 \quad (1 \leq i \leq Z), \quad (1 \leq k \leq N), \quad (1.5)$$

izbor ne mijenja krajni rezultat. Alternativno, ako u obzir uzmemo i izospinske stupnjeve slobode,

U relativističkim modelima srednjeg polja, gdje koncept trenutačnih međudjelovanja nije moguć (zbog konačne brzine svjetlosti), interakcije opisujemo poljima kao nezavisnim stupnjevima slobode. Relativistička generalizacija nerelativističkih Hartree-Fockovih modela temelji se na efektivnim gustoćama Lagranžijana primjenjivih u okviru samosuglasnih fenomenoloških modela na niskim energijama. S obzirom na to da analitički izraz za nuklearnu silu nije poznat, efektivnu gustoću Lagranžijana formiramo slijedeći Weinbergov pristup [128] tako da koristimo simetrije polja, ponašanje pojedinih članova Lagranžijana s obzirom na transformacije rotacije u izospinskom prostoru i na Lorentzove transformacije, kao mehanizme klasifikacije polja. Naime, kako je prikazano u tablici 1.1, mezone klasificiramo na izoskalarne ( $T = 0$ ) i izovektorske ( $T = 1$ ) s obzirom na izospin te skalare ( $J = 0$ ) i vektore ( $J = 1$ ) s obzirom na spin. Ako kao klasifikacijski kriterij uključimo i paritet tada s obzirom na spin i paritet govorimo o skalarima ( $J^\pi = 0^+$ ), vektorima ( $J^\pi = 1^-$ ), pseudoskalarima ( $J^\pi = 0^-$ ) i pseudovektorima ( $J^\pi = 1^-$ ). Na slici 1.1 prikazan je shematski prikaz izmjene mezona u ovisnosti o dosegu nukleon-nukleon potencijala, a u tablici 1.1 su prikazane mezonske mase te klasifikacija s obzirom na paritet i izospin.



**Slika 1.1:** Shematski prikaz  $V_{NN}(r)$  nukleon-nukleon potencijala s izmjenom mezona u ovisnosti o udaljenosti [183].

vrijedi generalizirani Paulijev princip i zadržavamo fermionske antikomutacijske relacije. Naime, protoni i neutroni su, gledajući samo s aspekta nuklearne sile koja ne ovisi o električnom naboju, iste čestice.

**Tablica 1.1:** Tablični prikaz mezona, mezonskih masa, pripadajućeg spina i izospina te standardne notacije mezonskih polja [183].

Mezon	$m_0$ [MeV/c <sup>2</sup> ]	$I^G, J^\pi$	Tip mezonskog polja
$\pi^{(\pm)}, \pi^0$ izovektor-pseudoskalar	139,135	$1^-, 0^-$	$\vec{\pi}(x^\mu)$
$\sigma$ izoskalar-skalar	400 - 1200	$0^+, 0^+$	$\sigma(x^\mu)$
$\omega$ izoskalar-vektor	782	$0^-, 1^-$	$\omega(x^\mu)$
$\rho^{(\pm)}, \rho^0$ izovektor-vektor	770	$1^+, 1^-$	$\vec{R}^{\mu\nu}(x^\mu)$
$\gamma$ (ne osjeća nuklearnu silu) - vektor	0	$0, 1^-$	$\vec{A}^\nu(x^\mu)$

Efektivnu gustoću Lagranžijana,

$$\mathcal{L}_{RMF} = \mathcal{L}_N^{(0)} + \mathcal{L}_{mezoni}^{(0)} + \mathcal{L}_{N,mezoni}^{(int.)}, \quad (1.6)$$

koja sadrži slobodna nukleonska  $\mathcal{L}_N^{(0)}$  i slobodna mezonska  $\mathcal{L}_{mezoni}^{(0)}$  polja te interakciju polja  $\mathcal{L}_{N,mezoni}^{(int.)}$  interpretiramo kao kombinaciju nukleonskih i mezonskih polja čiji operatori stvaranja i poništenja zadovoljavaju kanonske komutacijske relacije. U aproksimaciji srednjeg polja mezonska i nukleonska polja tretiramo kao klasične c-brojeve, formalno možemo pisati,

$$\hat{\Phi} \rightarrow \Phi(x^\mu) = \langle \hat{\Phi} \rangle, \quad (1.7)$$

da su polja reprezentirana njihovim prosječnim vrijednostima. Tom pretpostavkom eliminirane su fluktuacije mezonskih polja i sada se pojedini nukleon giba u srednjem polju svih mezona čiji su izvor svi preostali nukleoni.

Relativistička teorija srednjeg polja slama nekoliko simetrija od kojih je posebno bitno slamanje translacijske simetrije<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Neka je  $\phi(\vec{r})$  skalarno polje, tako definirano lokalno polje nije invarijantno s obzirom na operator translacije. Kao konkretnan primjer polje  $\phi(\vec{r})$  razvijemo oko centra mase u Taylorov red do prvog člana,

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{R}_{cm} + \vec{u}) \approx \phi(\vec{R}_{cm}) + \frac{i}{\hbar} \vec{u} \cdot \hat{P}_{cm} [\phi(\vec{R}_{cm})], \quad (1.8)$$

gdje je  $\hat{P}_{cm} = -i\hbar \nabla_{\vec{R}_{cm}}$  operator impulsa centra mase. Uvjet translacijske simetrije  $\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{R}_{cm})$  ekvivalentan je zahtjevu  $\hat{P}_{cm} [\phi(\vec{R}_{cm})] = 0$  projekcije polja na stanje dobrog impulsa centra mase. Ili drugim riječima, nametanjem uvjeta translacijske simetrije zahtijevamo prelazak u sustav centra mase atomske jezgre.

# 1.1 Nerelativistički Hartree-Fock-Bogoliubov model (HFB)

Atomska jezgra promatrana u okviru IPM modela ne uključuje korelacije sparivanja nukleona a koje su eksperimentalno dokazane u takvim sustavima. Detalji nerelativističkog HFB modela pokazani su u dodatku (A) a u ovom poglavlju navodimo temeljni formalizam. Elegantan način uključivanja korelacija sparivanja u teorijska razmatranja su Bogoliubov-Valatin transformacije [184],

$$\hat{\beta}_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \hat{a}_i + V_{\alpha i} \hat{a}_i^\dagger, \quad \hat{\beta}_\alpha^\dagger = \sum_i U_{\alpha i}^* \hat{a}_i^\dagger + V_{\alpha i}^* \hat{a}_i, \quad (1.9)$$

gdje su  $\hat{\beta}_\alpha^\dagger$  i  $\hat{\beta}_\alpha$  kvazičestični operatori stvaranja i poništenja definirani kao linearna kombinacija čestičnih operatora stvaranja i poništenja  $\hat{a}_i^\dagger$  i  $\hat{a}_i$ . Antikomutacijske relacije čestičnih operatora i dalje vrijede,

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0, \quad \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0. \quad (1.10)$$

Zahtijevamo da antikomutacijske relacije vrijede i za kvazičestične operatore,

$$\{\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j\} = 0, \quad \{\hat{\beta}_i^\dagger, \hat{\beta}_j^\dagger\} = 0, \quad (1.11)$$

a to je ujedno i uvjet na U i V matrice,

$$U^\dagger U + V^\dagger V = 1, \quad UU^\dagger + V^* V^T = 1, \quad U^T V + V^\dagger U = 0, \quad UV^\dagger + V^* U^T = 0. \quad (1.12)$$

Linearnu transformaciju čestičnih u kvazičestične operatore možemo kompaktnije napisati u matričnoj formi pomoću matrice transformacije  $\mathcal{W}$ ,

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\beta}^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{W}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}^\dagger = \begin{pmatrix} U & V^* \\ V & U^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}^\dagger \mathcal{W} = \mathcal{W} \mathcal{W}^\dagger = 1, \quad (1.13)$$

pri tome je matrica transformacije unitarna.

Vakuu u teoriji polja definiramo s obzirom na pripadajući operator pa je tako  $|0\rangle$  čestični vakuum,

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0, \quad (1.14)$$

s obzirom na čestični operator poništenja  $\hat{a}_i$ . Slično kvazičestični vakuum  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$ , s obzirom na operator  $\hat{\beta}_\alpha$ , definiramo kao Slaterovu determinantu,

$$|\tilde{\Phi}_0\rangle = \prod_{E_\alpha > 0} \hat{\beta}_\alpha |0\rangle, \quad (1.15)$$

dakle sigurno vrijedi,

$$\hat{\beta}_{\alpha'} |\tilde{\Phi}_0\rangle = 0, \quad \text{za } E_{\alpha'} > 0, \quad (1.16)$$

jer je  $\hat{\beta}_\alpha^2 = 0$ . U takvoj formulaciji kvazičestični vakuum  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  reprezentira višenuklearni korelirani sustav u osnovnom stanju koji ne sadrži kvazičestice.

Inverznom transformacijom izrazili smo čestične operatore stvaranja  $\hat{a}_i^\dagger$  i poništenja  $\hat{a}_i$  preko kvazičestičnih operatora stvaranja  $\hat{\beta}_\alpha^\dagger$  i  $\hat{\beta}_\alpha$  poništenja kako slijedi,

$$\hat{a}_i = \sum_\alpha U_{i\alpha} \hat{\beta}_\alpha + V_{i\alpha}^* \hat{\beta}_\alpha^\dagger, \quad (1.17)$$

$$\hat{a}_i^\dagger = \sum_\alpha U_{i\alpha}^* \hat{\beta}_\alpha^\dagger + V_{i\alpha} \hat{\beta}_\alpha. \quad (1.18)$$

Definiramo matrični element jednočestične gustoće,

$$\rho_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_\alpha V_{i\alpha}^* V_{\alpha j}^T = (V^* V^T)_{ij}, \quad (1.19)$$

i matrični element anomalne gustoće,

$$\kappa_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_\alpha V_{i\alpha} U_{\alpha j}^\dagger = (V U^\dagger)_{ij}, \quad (1.20)$$

te generaliziranu matricu gustoće,

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle & \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle & \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{ij} & \kappa_{ij} \\ -\kappa_{ij}^* & \delta_{ij} - \rho_{ij}^* \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Jednadžba gibanja za matrični element jednočestične gustoće dana je sa,

$$i\hbar \frac{d\rho_{ji}}{dt} = [h(\rho), \rho]_{ji} - (\Delta \cdot \kappa^*)_{ji} + (\kappa \cdot \Delta^*)_{ji}, \quad (1.22)$$

a jednadžba gibanja za matrični element anomalne gustoće dana je sa,

$$i\hbar \frac{d\kappa_{ji}}{dt} = (h(\rho) \cdot \kappa)_{ji} + (\kappa \cdot h^*(\rho))_{ji} - (\Delta \cdot \rho^*)_{ji} - (\rho \cdot \Delta)_{ji} + \Delta_{ji}. \quad (1.23)$$

Ako definiramo generalizirani Hamiltonijan kao,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_{ij} & \Delta_{ij} \\ -\Delta_{ij}^* & -h_{ij}^* \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

gdje je,

$$h_{ij}(\rho) = t_{ij} + \sum_{k,l} \bar{v}_{ij,kl} \rho_{kl}, \quad (1.25)$$

Hamiltonijan srednjeg polja a,

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \bar{v}_{ij,kl} \kappa_{kl}, \quad (1.26)$$

Hamiltonijan sparivanja, jednadžbu gibanja generalizirane matrice gustoće možemo kompaktnije zapisati kao,

$$i\hbar \frac{d\mathcal{R}_0}{dt} = [\mathcal{H}, \mathcal{R}_0]. \quad (1.27)$$

Za konkretan slučaj osnovno stanje atomske jezgre  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  u Hartree-Bogoliubov (HB) modelu dobiveno je minimiziranjem energije osnovnog stanja,

$$E = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{H} | \tilde{\Phi}_0 \rangle = E[\rho, \kappa, \kappa^*], \quad (1.28)$$

koje je funkcional gustoće i tenzora sparivanja. Naime, u primjeni HB koristimo efektivne energijske funkcionalne gustoće bez da znamo konkretan Hamiltonijan sustava  $\hat{H}$ . Korelacije sparivanja nukleona u jezgri u osnovnom stanju uvedene Bogliubov-Valatin transformacijom kao posljedicu povlači da takvo  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  osnovno stanje jezgre nije svojstveno stanje operatora broja čestica  $\hat{N} = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  kako je pokazano u dodatku (B). No, u sustavima kao što su atomske jezgre, broj nukleona, protona i neutrona, točno je određen. Sada smo problem sveli na traženje minimuma funkcije više varijabli, u konkretnom slučaju energijskog funkcionala gustoće  $E[\rho, \kappa, \kappa^*]$ , sa dodatnim zahtjevom da broj nukleona  $N_q = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}_q | \tilde{\Phi}_0 \rangle$ , zasebno protona i neutrona  $N_q$  ( $q = \pi, \nu$ ), moraju biti točno određene konstante. Matematički gledano takvu vrstu problema rješavamo metodom Lagrangeovih



multiplikatora gdje sada minimiziramo funkcional,

$$E^\lambda[\rho, \kappa, \kappa^*] = E[\rho, \kappa, \kappa^*] - \sum_{q=\pi, \nu} \lambda_q \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}_q | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (1.29)$$

pri tome su  $\lambda_q$  ( $q = \pi, \nu$ ) za sada nepoznati, protonski odnosno neutronske, Lagrangeovi multiplikatori. Rezultat procedure minimizacije, sada modificiranog energijskog funkcionala gustoće, su Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) jednadžbe,

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

HFB jednadžbe možemo izraziti preko matrica transformacije U i V gdje je  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h - \lambda & \Delta \\ -\Delta^* & -h^* + \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

generalizirani Hamiltonijan i vrijedi,

$$h_{ij} = \frac{\delta E[\rho, \kappa, \kappa^*]}{\delta \rho_{ji}} = h_{ji}^*, \quad \Delta_{ij} = \frac{\delta E[\rho, \kappa, \kappa^*]}{\delta \kappa_{ij}^*} = -\Delta_{ji}. \quad (1.32)$$

Pri tome su  $E_n$  kvazičestične energije a  $\lambda_\pi$  i  $\lambda_\nu$  protonski i neutronske Lagrangeovi multiplikatori koji su posljedica nametnutog dodatnog uvjeta na fiksni broj nukleona, zasebno broj protona odnosno neutrona, sada ih interpretiramo kao protonske odnosno neutronske energije Fermijevog nivoa. Spektar kvazičestičnih energija  $\{E_n\}$  nije omeđen odozgo niti je omeđen odozdo. Svojstvene vrijednosti kvazičestičnih energija se javljaju u parovima. Za svaki svojstveni vektor  $(U_n, V_n)$  sa pozitivnom svojstvenom vrijednosti  $E_n > 0$  postoji vektor  $(V_n^*, U_n^*)$  sa negativnom svojstvenom vrijednosti  $E_n < 0$  kvazičestične energije. S obzirom da kvazičestični operatori zadovoljavaju fermionske komutacijske relacije, kvantnomehnička stanja  $E_n$  i  $-E_n$  ne mogu biti istovremeno zauzeta pa moramo izabrati ili pozitivne ili negativne svojstvene vrijednosti i odgovarajući svojstveni vektor kao relevantnu kvantnomehničku reprezentaciju stanja. Konvencijom u okviru nerelativističkog HFB formalizma izabiremo svojstvene vektore  $(U_n, V_n)$  pozitivnih  $E_n > 0$  svojstvenih kvazičestičnih energija kao kvantnomehničku reprezentaciju stanja. Naime, u HF slučaju za osnovno stanje jezgre  $|\Phi_0\rangle$  imamo oštru Fermijevu plohu  $E_F$  i stanja ispod Fermijeve plohe  $E_n < E_F$  su popunjena a iznad  $E_n > E_F$  prazna. U slučaju nerelativističke HFB teorije osnovno stanje atomske jezgre  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  predstavlja minimum energijskog funkcionala gustoće  $E^\lambda[\rho, \kappa, \kappa^*]$  i formira vakuum s obzirom na sve kvazičestice. S obzirom da  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  osnovno HFB stanje ima minimalnu energiju sva kvazičestična pobuđena stanja imaju veću, sada konvencijom izabranu  $E_n > 0$ , pozitivnu energiju.

Rješenja HFB jednadžbi možemo izraziti u nekoliko kompletnih skupova individualnih stanja. Svaki od tih baza odgovara dijagonalizaciji drugog operatora,

- kvazičestična baza  $\{\chi_n\}$  u kojoj je generalizirana matrica gustoće  $\mathcal{R}_0$  dijagonalna,
- kanonska baza  $\{\phi_n\}$  u kojoj je jednočestična matrica gustoće  $\rho_{ij}$  dijagonalna,
- Hartree-Fockova baza  $\{\psi_n\}$  u kojoj je Hamiltonijan srednjeg polja  $h_{ij}$  dijagonalan.

Osim simetrije sačuvanja broja čestica postoje još dvije vrste simetrija koje je, ovisno o atomskoj jezgri koju studiramo, potrebno uvesti a to su koordinatne simetrije vezane uz oblik jezgre te simetrija vremenskog obrata. Pretpostavimo da je  $\hat{Q}_\alpha$  operator u koordinatnom prostoru kojim opisujemo deformaciju jezgre. Tada opservablu generiranu operatorom  $\hat{Q}_\alpha$  uvodimo kao dodatni uvjet na energijski funkcional gustoće,

$$E^\lambda[\rho, \kappa, \kappa^*] = E[\rho, \kappa, \kappa^*] - \sum_{q=\pi, \nu} \lambda_q \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}_q | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{Q}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (1.33)$$

čiji je minimum osnovno stanje deformirane jezgre. Matematički gledano opet tražimo minimum  $E^\lambda[\rho, \kappa, \kappa^*]$  energijskog funkcionala gustoće metodom Lagrangeovih multiplikatora. Svaka dodatna opservabla u koordinatnom prostoru  $\hat{Q}_\alpha$  zahtijeva dodatni Lagrangeov multiplikator  $\lambda_\alpha$  čiju fizikalnu interpretaciju znamo nakon minimiziranja energijskog funkcionala gustoće.

Simetrija vremenskog obrata limitira atomske jezgre koje možemo proučavati, to su parno-parne nerotirajuće jezgre gdje su kvazičestice parovi nukleona u vremenski obrnutim [185], Kramer degeneriranim, orbitalama. U slučaju vremenski invarijantnih sistema često se koristi BCS<sup>3</sup> aproksimacija kao pojednostavljenje HFB aproksimacije.

<sup>3</sup>Umjesto rješavanja kompliciranog sustava vezanih RHB jednadžbi Bloch-Messiah-Zumino [184, 186] teorem nam omogućava bitno pojednostavljenje za slučaj parno-parnih jezgara tako da osnovno višenukleonsko korelirano stanje jezgre možemo reprezentirati BCS stanjem,

$$|\tilde{\Phi}_0\rangle = \prod_{\nu>0} (u_\nu + v_\nu \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_{\bar{\nu}}^\dagger) |0\rangle, \quad (1.34)$$

gdje je  $|0\rangle$  čestični vakuum i vrijedi  $\hat{a}_\nu |0\rangle = 0$ . Kvadrati amplitude zauzeća dani su izrazima,

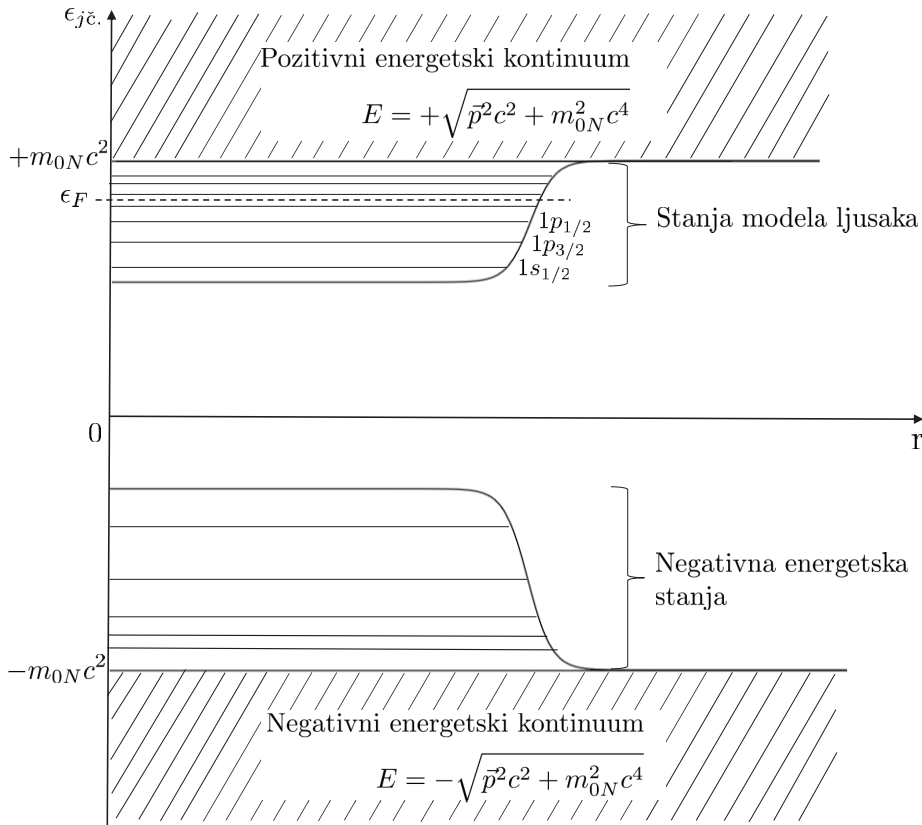
$$v_\nu^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right), \quad u_\nu^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right), \quad (1.35)$$

pri tome  $v_\nu^2$  interpretiramo kao vjerojatnost da je par stanja  $(\nu, \bar{\nu})$  prazan a  $u_\nu^2$  kao vjerojatnost da je par popunjen. Problem sparivanja sveden je na određivanje amplituda zauzeća  $(u_\nu, v_\nu)$  rješavanjem jednadžbe rascjepa [187] (*engl. gap equation*),

$$(\epsilon_\nu - \lambda)(u_\nu^2 - v_\nu^2) + 2\Delta_{\nu\bar{\nu}} u_\nu v_\nu = 0. \quad (1.36)$$

## 1.2 Relativistički Hartree-Bogoliubov model (RHB)

Razmatranje u prethodnom poglavlju možemo proširiti na relativistički slučaj u kojem su nukleoni razmatrani kao Diracove čestice koje međudjeluju izmjenom ili virtualnih mezona ili kontaktnom interakcijom. U tom slučaju javljaju se rješenja negativnih energija u Diracovom moru i rješenja sa energijama iznad Diracovog mora koja nazivamo Fermijevo more.



**Slika 1.2:** Shematski prikaz spektra rješenja Diracove jednadžbe u centralnom potencijalu. Pri tome je  $\epsilon_F$  energija Fermijeve plohe,  $m_{0N}$  masa nukleona, a  $\epsilon_{jč.}$  jednočestična energija nukleona u centralnom potencijalu.

Na slici 1.2 shematski je prikazan jednočestični spektar rješenja Diracove jednadžbe u centralnom potencijalu. U slučaju RHB jednadžbi imamo razmak između Diracovog i Fermijevog mora oko 1200 MeV. Razlikujemo negativne energije u Diracovom moru  $|E_\alpha| > 1200$  MeV od pozitivnih energija iznad Diracovog mora. U praksi se obično primjenjuje aproksimacija bez mora (*engl. no-sea approximation*) što znači da za sve kvazičestične energije iznad Diracovog mora  $E_k > 0$  uzimamo u razmatranje pozitivno-energetska rješenja, kao i u nerelativističkom slučaju, a doprinosi negativnih kvazičestičnih energija u Diracovom moru se zanemaruju u izračunu matrice gustoće. Stoga je osnovno

RHB stanje dano sa,

$$|\tilde{\Phi}_0\rangle = \prod_{E_k>0} \hat{\beta}_k \prod_{E_\alpha<0} \hat{\beta}_\alpha |0\rangle. \quad (1.37)$$

Sada matrični element jednočestične matrice gustoće glasi,

$$\rho_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{E_k>0} V_{ik}^* V_{kj}^T + \sum_{E_\alpha<0} V_{i\alpha}^* V_{\alpha j}^T \approx \sum_{E_k>0} V_{ik}^* V_{kj}^T, \quad (1.38)$$

i matrični element anomalne gustoće,

$$\kappa_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{E_k>0} V_{ik} U_{kj}^\dagger + \sum_{E_\alpha<0} V_{i\alpha} U_{\alpha j}^\dagger \approx \sum_{E_k>0} V_{ik} U_{kj}^\dagger. \quad (1.39)$$

Dakle, stanja negativnih energija iz Diracovog mora ne doprinose. Potrebno je naglasiti da su koeficijenti  $V_{i\alpha}$  zanemarivo mali zbog velikog Dirackovog razmaka te stoga drugi član u jednadžbama može biti zanemaren.

Za poznatu efektivnu gustoću Lagranžijana  $\mathcal{L}$  kojom opisujemo vezani sustav nukleona i mezona možemo izračunati gustoću Hamiltonijana  $\mathcal{H} = T^{00}$  kao nultu komponentu tenzora gustoće,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_N)} (\partial^\nu \Psi_N) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.40)$$

čime smo zapravo izračunali RHB energijski funkcional gustoće,

$$E_{RHB}[\rho, \kappa, \kappa^*] = \int d^3\vec{r} \mathcal{H}(\vec{r}) = E_{RMF}[\rho] + E_{PAIR}[\kappa, \kappa^*]. \quad (1.41)$$

RHB energijski funkcional gustoće je suma  $E_{RMF}$  funkcionala gustoće srednjeg polja i

$$E_{PAIR}[\kappa, \kappa^*] = \frac{1}{4} \sum_{i,j} \sum_{k,l} \kappa_{ij}^* \bar{v}_{ij,kl}^{pp} \kappa_{kl}, \quad (1.42)$$

funkcionala gustoće korelacija sparivanja  $E_{PAIR}$  u čestično-čestičnom kanalu.

Korelacije sparivanja u jezgri značajno doprinose u području od nekoliko MeV-a oko Fermijeve plohe što je vrlo dobro razdvajanje u odnosu na skalu energije vezanja čiji je red veličine od nekoliko stotina do nekoliko tisuća MeV-a. S obzirom na to da ne postoji eksperimentalna potvrda relativističkog efekta u korelacijama sparivanja, koristimo nerenlativističku aproksimaciju u čestično-čestičnom kanalu [170, 171].

Kao i u nerelativističkom slučaju slomljena je simetrija sačuvanja broja čestica pa energiju osnovnog stanja jezgre tražimo kao minimum energijskog funkcionala gustoće,

$$E_{RHB}^\lambda[\rho, \kappa, \kappa^*] = E_{RHB}[\rho, \kappa, \kappa^*] - \sum_{q=\pi,\nu} \lambda_q \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}_q | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (1.43)$$

pri tome su  $\lambda_q$  ( $q = \pi, \nu$ ) za sada nepoznati protonski odnosno neutronske Lagrangeovi multiplikatori. Pokazati će se, nakon što riješimo RHB jednadžbe, da su Lagrangeovi multiplikatori zapravo Fermijeve plohe protona odnosno neutrona.

Rezultat određivanja minimuma energijskog funkcionala gustoće, s fiksnim brojem nukleona kao dodatnim uvjetom, su RHB jednadžbe koje možemo izraziti preko U i V matrica transformacije,

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

gdje je  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_D - \lambda & \Delta \\ -\Delta^* & -h_D^* + \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

generalizirani Hamiltonijan i vrijedi,

$$(h_D)_{ij} = \frac{\delta E[\rho, \kappa]}{\delta \rho_{ji}}, \quad \Delta_{ij} = \frac{\delta E[\rho, \kappa]}{\delta \kappa_{ij}}. \quad (1.46)$$

Eksplicitno pisano u operatorskoj formi,

$$\hat{h}_D = \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta(m_{0N} + S(x^\mu)) + V^0(x^\mu), \quad \hat{\Delta}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \bar{v}_{ik,jl}^{pp} \hat{\kappa}_{kl}, \quad (1.47)$$

gdje je  $\hat{h}_D$  Hamiltonijan Diracovog tipa,  $S(\vec{x})$  je skalarno polje,  $V^0(\vec{x})$  nulta komponenta vektorskog polja, izraz  $m_N^*(\vec{x}) = m_{0N} + S(\vec{x})$  interpretiramo kao efektivnu masu nukleona u jezgri, dok je  $\hat{\Delta}_{ij}$  nerelativistički tenzor operatora sparivanja u čestično-čestičnom kanalu.

Rješenja tako dobivenih RHB jednadžbi su kvazičestične energije,

$$E_n = \sqrt{(\epsilon_n - \lambda)^2 + \Delta_n^2}, \quad (1.48)$$

pri čemu su  $\epsilon_n$ -jednočestična energija nukleona efektivne mase  $m_N^*(\vec{x})$ ,  $\lambda$ -Fermijeva ploha bilo neutronska bilo protonska i  $\Delta_n$ -energija sparivanja. Svojevite vektore možemo izraziti preko Hartree-Bogoljubovljevihi bi-spinora,

$$\Phi_n(\vec{r}) = \begin{pmatrix} U_n(\vec{r}) \\ V_n(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Za slučaj centralno simetričnog potencijala koeficijenti  $U_n$  i  $V_n$  su Diracove valne

funkcije u centralnom potencijalu i možemo ih napisati u matričnoj formi kao,

$$U_\kappa(V_\kappa)(\vec{r}, j, t_3) = \begin{pmatrix} f_\kappa^{U(V)}(r)\Omega_{j(\frac{1}{2},\ell)}(\theta, \phi) \\ ig_\kappa^{U(V)}(r)\Omega_{j(\frac{1}{2},\tilde{\ell})}(\theta, \phi) \end{pmatrix} \otimes \eta_{\frac{1}{2}t_3}, \quad (1.50)$$

gdje je  $\eta_{\frac{1}{2}t_3}$  svojstveni vektor u izospinskom prostoru.

Kutni dio velike komponente dan je sa,

$$\Omega_{j(\frac{1}{2},\ell)} = \sum_{m_s, m_\ell} \langle \frac{1}{2}m_s; \ell m_\ell | jm \rangle \chi_{\frac{1}{2}m_s} \otimes Y_{\ell m_\ell}, \quad (1.51)$$

a kutni dio male komponente,

$$\Omega_{j(\frac{1}{2},\tilde{\ell})} = \sum_{m_s, m_{\tilde{\ell}}} \langle \frac{1}{2}m_s; \tilde{\ell} m_{\tilde{\ell}} | jm \rangle \chi_{\frac{1}{2}m_s} \otimes Y_{\tilde{\ell} m_{\tilde{\ell}}}, \quad (1.52)$$

gdje je,  $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  ( $\kappa \neq 0$ ),

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2}. \quad (1.53)$$

Orbitalni kvantni broj velike komponente Diracove valne funkcije je  $\ell$  za fiksnu vrijednost  $\kappa$ ,

$$\ell = \begin{cases} \kappa, & \kappa > 0, \\ -\kappa - 1, & \kappa < 0, \end{cases} \quad (1.54)$$

i orbitalni broj male komponente Diracove valne funkcije,

$$\tilde{\ell} = \ell \pm 1. \quad (1.55)$$

Kompaktnije pisano za fiksni  $j$  i paritet stanja  $\pi$ ,

$$\ell = \begin{cases} j + 1/2, & \text{za } \pi = (-1)^{j+1/2}, \\ j - 1/2, & \text{za } \pi = (-1)^{j-1/2}, \end{cases} \quad (1.56)$$

i

$$\tilde{\ell} = \begin{cases} j - 1/2, & \text{za } \pi = (-1)^{j+1/2}, \\ j + 1/2, & \text{za } \pi = (-1)^{j-1/2}. \end{cases} \quad (1.57)$$

## 1.2.1 Relativistički model sa kontaktnom interakcijom

U ovom radu, osnovno stanje jezgre razmatramo u samosuglasnom RHB modelu. Osnovni gradivni elementi relativističkog energijskog funkcionala gustoće su gustoće i struje bilinearne u smislu Diracovih polja  $\psi(\vec{r})$  nukleona,

$$\bar{\psi}(\vec{r})\mathcal{O}_\tau\Gamma\psi(\vec{r}), \quad \mathcal{O}_\tau \in \{1_\tau, \hat{\tau}_i\}, \quad \Gamma \in \{1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\} \quad (1.58)$$

gdje su  $\hat{\tau}_i$  Paulijeve izospinske matrice a  $\Gamma$  je generalna oznaka za Diracove matrice. Općenito, Lagranžijan može biti napisan kao red potencija struja  $\bar{\psi}(\vec{r})\mathcal{O}_\tau\Gamma\psi(\vec{r})$  i njihovih derivacija. Članove Lagranžijana višeg reda, nelinearne članove, moguće je ugraditi u teorijska razmatranja tako da sada koeficijenti vezanja efektivnog Lagranžijana eksplicitno ovise o barionskoj gustoći [121]. Nadalje, mezonsku interakciju konačnog dosega možemo opisati efektivnim Lagranžijanom koji sadrži samo nukleonsku kontaktnu interakciju s koeficijentima vezanja ovisnima o gustoći ali bez mezonskih polja [122]. U tom smislu su, model kontaktnom interakcijom (PC) i model s izmjenom mezona (ME) ekvivalentni a u slučaju modela s kontaktnim interakcijama iz razmatranja su eksplicitno isključeni svi mezoni pa i rješavanje pripadajućih Klein-Gordonovih jednažbi. Istodobno su, po pretpostavci, procesi višeg reda poput više-bozonske izmjene i polarizacije vakuuma [123] implicitno uključeni kroz funkcionalnu ovisnost koeficijenata vezanja o gustoći.

Jedna od mogućih formulacija relativističkog samosuglasnog modela srednjeg polja sa kontaktnim tipom interakcije opisana je u [164] gdje je,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{RMF} = & \bar{\Psi}_N(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{0N})\Psi_N \\ & - \frac{1}{2}\alpha_S(\rho)(\bar{\Psi}_N\Psi_N)(\bar{\Psi}_N\Psi_N) \\ & - \frac{1}{2}\alpha_V(\rho)(\bar{\Psi}_N\gamma^\nu\Psi_N)(\bar{\Psi}_N\gamma_\nu\Psi_N) \\ & - \frac{1}{2}\alpha_{TV}(\rho)(\bar{\Psi}_N\vec{\tau}\gamma^\nu\Psi_N) \cdot (\bar{\Psi}_N\vec{\tau}\gamma_\nu\Psi_N) \\ & - \frac{1}{2}\delta_S(\partial_\nu\bar{\Psi}_N\Psi_N)(\partial^\nu\bar{\Psi}_N\Psi_N) \\ & - e\bar{\Psi}_N(\gamma^\nu A_\nu(\vec{x}))\frac{1 - \hat{\tau}_3}{2}\Psi_N. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Gustoća Lagranžijana srednjeg polja  $\mathcal{L}_{RMF}$  uključuje minimalni skup efektivnih interakcija IS-V-izovektor-vektor ( $J^\pi = 1^-$ ), IS-V-izoskalar-vektor ( $J^\pi = 1^-$ ), IS-S-izoskalar-skalar ( $J^\pi = 0^+$ ) i foton koji su nužni da bi reproducirali opservable osnovnog stanja jezgre kao što su energija vezanja [188] i polumjer naboja.

Pri tome je  $\mathcal{L}_N$  gustoća Lagranžijana slobodnog nukleona,

$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi}_N(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_{0N})\Psi_N. \quad (1.60)$$

Članovi kontaktne interakcije sadrže koeficijente vezanja ovisne o gustoći: izoskalar-skalar  $\alpha_S(\rho)$ , izoskalar-vektor  $\alpha_V(\rho)$  i izovektor-vektor  $\alpha_{TV}(\rho)$  koji su modelirani funkcionalom,

$$\alpha_i(\rho) = a_i + (b_i + c_i x)e^{-d_i x}, \quad (1.61)$$

gdje je  $x = \frac{\rho}{\rho_{sat}}$  i  $\rho_{sat}$  označava barionsku gustoću saturacije za slučaj simetrične nuklearne materije. Koeficijenti  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  i  $s_i$ ,  $i = S$ - izoskalar-skalar,  $V$ -izoskalar-vektor,  $TV$ -izovektor-vektor nisu nezavisni [164]. Konačno,  $\delta_S$  je jačina izoskalar-skalar derivativnog člana koji ne ovisi o gustoći ali je nužan zbog opisa interakcija konačnog doseg a odnosno proračuna polumjera naboja jezgre. U načelu bismo mogli uključiti derivativni član za svaki spin-izospin kanal no pokazuje se da osnovno stanje jezgre možemo dobro opisati samo sa jednim derivativnim članom.

Parametrizacija koeficijenata vezanja ovisnim o gustoći za svaki pojedini kanal glasi [189],

$$\begin{aligned} \alpha_s(\rho) &= a_s + (b_s + c_s x)e^{-d_s x}, \\ \alpha_v(\rho) &= a_v + b_v e^{-d_v x}, \\ \alpha_{tv}(\rho) &= b_{tv} e^{-d_{tv} x}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Skup od 10 parametara modela određen je prilagodбом na eksperimentalne mase 64 , aksijalno deformiranih jezgara u intervalu masenih brojeva  $A \approx 150 - 180$  i  $A \approx 230 - 250$  ref. [161]. Znamo da masa jezgre nije jednaka sumi masa pojedinačnih nukleona u jezgri zbog energije vezanja definirane izrazom,

$$B(E) = M_A c^2 - A m_0 N c^2, \quad (1.63)$$

pri tome su  $M_A$ -eksperimentalno određena masa jezgre,  $m_0 N$ -masa pojedinog nukleona,  $A = Z + N$ - maseni broj odnosno suma broja protona i neutrona te  $c$ -brzina svjetlosti u vakuumu. Direktna veza između eksperimentalno izmjerene mase i teorijskih modela dana je relacijom [190],

$$M_A c^2 = E_{MF} + E_{PAIR} - E_{CM}, \quad (1.64)$$

pri tome je  $E_{MF}$ -energija srednjeg polja,  $E_{PAIR}$ -energija korelacija sparivanja,  $E_{CM}$ -korekcija zbog gibanja centra mase čitave jezgre. Korekcija zbog gibanja centra mase (CM) potrebna je zbog prijelaza u sustav CM jezgre,

$$E_{CM} = \frac{\langle \hat{P}_{CM}^2 \rangle}{2m_0 N A} = \frac{3}{4} 41 A^{-1/3} \text{ [MeV]} \quad (1.65)$$

gdje je  $\langle \hat{P}_{CM}^2 \rangle$  prosječna vrijednost kvadrata impulsa centra mase procijenjena u aproksimaciji harmoničkog oscilatora. Iz jednadžbe (1.64) vidimo da su vrijednosti parametara modela jezgre u osnovnom stanju koje određuju vrijednosti energija  $E_{MF}$  i  $E_{PAIR}$  za-



pravo strogo ograničene, eksperimentalno mjerenom, lijevom stranom jednadžbe odnosno fiksnom vrijednosti mase jezgre  $M_A$ . Rezultat je DD-PC1 parametrizacija funkcionala, testirana u proračunima energija vezanja, polumjera naboja jezgre, parametara deformacije, gigantskih E0 i E1 rezonanci, itd. [161]. Numeričke vrijednost parametara navedene su u tablici 1.2.

**Tablica 1.2:** Parametri relativističkog DD-PC1 energijskog funkcionala gustoće iz ref. [161]. Masa nukleona je  $m_{0N} = 939$  MeV.

Parametar	Numerička vrijednost
$a_s [fm^2]$	-10.0462
$b_s [fm^2]$	-9.1504
$c_s [fm^2]$	-6.4273
$d_s$	1.3724
$a_v [fm^2]$	5.9195
$b_v [fm^2]$	8.8637
$d_v$	0.6584
$b_{tv} [fm^2]$	1.8360
$d_{tv}$	0.6403
$\delta_s [fm^4]$	-0.8149

Za poznatu gustoću efektivnog Lagranžijana  $\mathcal{L}_{RMF}$  kojom opisujemo vezani sustav nukleona i mezona možemo izračunati gustoću Hamiltonijana  $\mathcal{H} = T^{00}$  kao nultu komponentu tenzora gustoće, odnosno odrediti pripadajući energijski funkcional gustoće,

$$E_{RMF}[\psi(\vec{r}), \bar{\psi}(\vec{r}), A_\mu(\vec{r})] = \int d^3\vec{r} \mathcal{H}(\vec{r}), \quad (1.66)$$

čijom varijacijom s obzirom na  $\bar{\psi}(\vec{r})$  slijede Diracove jednadžbe koje rješavamo iterativno a rezultat su valne funkcije i diskretan spektar energija,

$$\left[ -i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta M^*(\vec{r}) + V(\vec{r}) \right] \psi_i(\vec{r}) = \epsilon_i \psi_i(\vec{r}). \quad (1.67)$$

Kao direktna posljedica relativističkog pristupa masa slobodnog nukleona  $m_{0N}$  u atomskoj jezgri je modificirana i sada ovisi o skalarnoj barionskoj gustoći,

$$M^*(\vec{r}) = m_{0N} + \Sigma_s = m_{0N} + \alpha_S \rho_s + \delta_S \rho_s \Delta \rho_s, \quad (1.68)$$

također efektivni potencijal ovisi o gustoći,

$$V(\vec{r}) = \alpha_V \rho_v + \alpha_{TV} \hat{\tau}_3 \rho_{tv} + eA_0(\vec{r}) + \Sigma_0^R. \quad (1.69)$$

Pri tome su,

- $\rho_s = \sum_{i=1} v_i^2 \bar{\psi}_i(\vec{r}) \psi_i(\vec{r})$ -skalarna gustoća,
- $\rho_v^2 = j_\mu j^\mu$ -kvadrat vektorske gustoće sa pripadajućim četvervektorom struje  $j_\mu(\vec{r}) = \sum_{i=1} v_i^2 \bar{\psi}_i(\vec{r}) \gamma_\mu \psi_i(\vec{r})$ ,
- $\rho_{tv}^2 = \vec{j}_\mu \cdot \vec{j}^\mu$ -kvadrat izovektor-vektorske gustoće gdje je  $\vec{j}_\mu(\vec{r}) = \sum_{i=1} v_i^2 \bar{\psi}_i(\vec{r}) \vec{\tau} \gamma_\mu \psi_i(\vec{r})$  izovektor-vektor tip četvervektora struje.

Nadalje, s obzirom da su koeficijenti vezanja kontaktne interakcije funkcionali gustoće, u izrazu (1.69) se pojavljuje član preraspodjele (*engl. rearrangement*),

$$\Sigma_0^R = \frac{\partial \alpha_S(\rho_v)}{\partial \rho_v} \rho_s^2 + \frac{\partial \alpha_V(\rho_v)}{\partial \rho_v} \rho_v^2 + \frac{\partial \alpha_{TV}(\rho_v)}{\partial \rho_v} \rho_{tv}^2. \quad (1.70)$$

kao derivacija koeficijenata vezanja s obzirom na vektorsku gustoću  $\rho_v$ .

Dugodosežne  $V^{ph}$  čestično-šupljinske korelacije računamo efektivnim Lagranžijanom iz jednadžbe (1.59). No, kada govorimo o problemu korelacija sparivanja nukleona u relativističkom slučaju [170, 171], pokazano je da miješanje velikih i malih komponenti valnih funkcija u Dirac-Hartree-Bogoljubovljevim jednadžbama može biti zanemareno. Dakle, korelacije sparivanja nukleona u relativističkom formalizmu mogu biti aproksimirane nerelativističkim efektivnim interakcijama a kao rezultat imamo svojevrsni hibridni RHB model. Naime, po prethodnom razmatranju,  $V^{pp}$  čestično-čestične korelacije konačnog doseg iz polja sparivanja  $\Delta_{\kappa\lambda}$  su parametrizirane centralnom komponentom fenomenološke nerelativističke Gogny interakcije [169],

$$\hat{V}^{pp}(1, 2) = \sum_{i=1,2} e^{[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/\mu_i]^2} (W_i + B_i \hat{P}^\sigma - H_i \hat{P}^\tau - M_i \hat{P}^\sigma \hat{P}^\tau). \quad (1.71)$$

Pri tome su parametri  $\mu_i$ ,  $W_i$ ,  $B_i$ ,  $H_i$  and  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) prilagođen na eksperimentalne podatke osnovnog stanja jezgre, čime je određen D1S skup parametara [191]. Prednost Gogny interakcije je konačan doseg u koordinatnom prostoru čime je automatski osiguran rez (*engl. cutt-off*) u impulsnom prostoru kojim su eliminirana nefizikalna čestično-šupljinska pobuđenja jezgara za velike vrijednosti prijenosa količine gibanja [169]. Pri tome je,

$$\hat{P}_{12}^\sigma = \frac{1}{2}(1_\sigma + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2), \quad (1.72)$$

operator izmjene u spinskom a,

$$\hat{P}_{12}^{\tau} = \frac{1}{2}(1_{\tau} + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2), \quad (1.73)$$

operator izmjene u izospinskom prostoru. Više pojedinosti o operatorima izmjene objašnjeno je u dodatku (H). U konkretnoj implementaciji za sferične jezgre, RHB jednadžbe su riješene u dobro poznatoj bazi harmoničkog oscilatora [192] gdje je prostor modela ograničen na 20 ljusaka harmoničkog oscilatora.

**Tablica 1.3:** Parametri Gogny-D1S [191] i S1P interakcija [193]. Za formalizam pogledati tablicu II u ref. [169].

		$i = 1$	$i = 2$	jedinice
D1S	$\mu_i$	0.7	1.2	fm
	$W_i$	-1720.30	+103.64	MeV
	$B_i$	+1300.00	-163.48	MeV
	$H_i$	-1813.53	+162.81	MeV
	$M_i$	+1397.60	-223.93	MeV
S1P	$\mu_i$	0.82006	1.4665	fm
	$W_i$	-1144.0	+68.920	MeV
	$B_i$	+864.5	-108.716	MeV
	$H_i$	-1277.0	+158.645	MeV
	$M_i$	+864.5	-80.071	MeV

## 1.3 Relativistička kvazičestična aproksimacija slučajnih faza (RQRPA)

Da bismo izračunali pobuđenja atomske jezgre koristimo R(Q)RPA metodu koju je moguće izvesti iz vremenski ovisnog RHB modela [149] gdje u limesu linearnog odziva matricu generalizirane gustoće razvijemo kao,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \delta\mathcal{R}(t), \quad (1.74)$$

gdje je  $\mathcal{R}_0$  stacionarna generalizirana matrica gustoće osnovnog stanja jezgre (1.21). Zahitijevamo da je generalizirana matrica gustoće projektor  $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ . Računamo kvadrat generalizirane matrice gustoće,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 &= (\mathcal{R}_0 + \delta\mathcal{R}(t))(\mathcal{R}_0 + \delta\mathcal{R}(t)) \\ &= \mathcal{R}_0^2 + \delta\mathcal{R}(t)\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_0\delta\mathcal{R}(t) + \delta\mathcal{R}^2(t) \\ &\approx \mathcal{R}_0^2 + \delta\mathcal{R}(t)\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_0\delta\mathcal{R}(t) \end{aligned} \quad (1.75)$$

gdje smo u aproksimaciji linearnog odziva zanemarili kvadratični doprinos varijacije  $\delta\mathcal{R}^2(t)$ . Iz zahtjeva da je  $\mathcal{R}$  projektor slijedi,

$$\mathcal{R}_0 + \delta\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0^2 + \delta\mathcal{R}(t)\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_0\delta\mathcal{R}(t). \quad (1.76)$$

Konačno, znamo da je stacionarna generalizirana matrica gustoće projektor  $\mathcal{R}_0^2 = \mathcal{R}_0$  pa u linearnom odzivu vrijedi matična jednadžba,

$$\mathcal{R}_0\delta\mathcal{R}(t) + \delta\mathcal{R}(t)\mathcal{R}_0 = \delta\mathcal{R}(t). \quad (1.77)$$

U kvazičestičnoj bazi stacionarna generalizirana matrica Hamiltonijana  $\mathcal{H}_0$  i gustoće  $\mathcal{R}_0$  su dijagonalne,

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

Iz jednadžbe (1.77) slijedi<sup>4</sup>,

$$\delta\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \delta\mathcal{R} \\ -\delta\mathcal{R}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

Jednadžba gibanja generalizirane matrice gustoće u linearnom režimu glasi,

$$i\hbar\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial t} = [\mathcal{H}_0, \delta\mathcal{R}(t)] + \left[ \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathcal{R}} \delta\mathcal{R}(t), \mathcal{R}_0 \right]. \quad (1.84)$$

Ako pretpostavimo oscilatorno rješenje varijacije generalizirane gustoće,

$$\delta\mathcal{R}(t) = \sum_{\nu} \mathcal{R}^{(\nu)} e^{i\omega_{\nu}t} + \mathcal{R}^{\dagger(\nu)} e^{-i\omega_{\nu}t}, \quad (1.85)$$

slijede RQRPA matrice jednadžbe,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu} \\ Y^{\nu} \end{pmatrix} = \hbar\omega_{\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu} \\ Y^{\nu} \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

Matrični elementi glase,

$$A_{kk',ll'} = (E_k + E_{k'})\delta_{kl}\delta_{k'l'} + \frac{\delta^2 E}{\delta\mathcal{R}_{kk'}^* \delta\mathcal{R}_{ll'}}, \quad (1.87)$$

odnosno,

$$B_{kk',ll'} = \frac{\delta^2 E}{\delta\mathcal{R}_{kk'}^* \delta\mathcal{R}_{ll'}}, \quad (1.88)$$

---

<sup>4</sup>Pretpostavimo da je generalna forma fluktuacije generalizirane matrice gustoće dana sa,

$$\delta\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} \delta\mathcal{R}_1 & \delta\mathcal{R}_2 \\ \delta\mathcal{R}_3 & \delta\mathcal{R}_4 \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

Vrijedi,

$$\mathcal{R}_0 \delta\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta\mathcal{R}_3 & \delta\mathcal{R}_4 \end{pmatrix}, \quad \delta\mathcal{R}(t) \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta\mathcal{R}_2 \\ 0 & \delta\mathcal{R}_4 \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

odnosno,

$$\begin{pmatrix} \delta\mathcal{R}_1 & \delta\mathcal{R}_2 \\ \delta\mathcal{R}_3 & \delta\mathcal{R}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta\mathcal{R}_2 \\ \delta\mathcal{R}_3 & 2\delta\mathcal{R}_4 \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

Slijedi da su  $\delta\mathcal{R}_1 = 0$  i  $\delta\mathcal{R}_4 = 0$ , usporedbom s jednadžbom (1.21) vidimo da mora biti  $\delta\mathcal{R}_3 = -\delta\mathcal{R}_2^*$ . Konačno možemo pisati,

$$\delta\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \delta\mathcal{R} \\ -\delta\mathcal{R}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

gdje vrijede nejednakosti  $k < k'$  i  $l < l'$ .

Alternativno način izvoda R(Q)RPA matičnih jednadžbi vezanih u dobar angularni moment  $J$  možemo izvesti pod pretpostavkom poznatog Hamiltonijana [151] preko jednadžbi gibanja,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{rez.}, \quad (1.89)$$

pri tome je,

$$\hat{H}_0 = \sum_{\nu} E_{\nu} \hat{\beta}_{\nu}^{\dagger} \hat{\beta}_{\nu}, \quad (1.90)$$

jedno-kvazičestični operator sa svojstvenim vrijednostima kvazičestičnih energija  $E_{\nu}$ ,

$$\hat{V}_{rez.} = \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} \bar{v}_{\mu\nu,\mu'\nu'} : \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu'} \hat{a}_{\mu'} :, \quad (1.91)$$

dvočestična rezidualna interakcija gdje je normalni poredak s obzirom na kvazičestični vakuum  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  definiran relacijom,

$$\hat{O}^{\nu, JM} |\tilde{\Phi}_0\rangle = 0. \quad (1.92)$$

Operator stvaranja vezan u dobar  $J$  definiran je relacijom,

$$\hat{O}^{\dagger\nu, JM} = \sum_{\alpha \geq \beta} X_{\alpha\beta}^{\nu J} \hat{A}_{\alpha\beta}^{\dagger JM} - Y_{\alpha\beta}^{\nu J} \hat{A}_{\alpha\beta}^{JM}, \quad (1.93)$$

pri tome je operator stvaranja vezan u dobar  $J$  dan relacijom,

$$\hat{A}_{\alpha\beta}^{\dagger JM} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{\alpha\beta}}} \sum_{m_{\alpha} m_{\beta}} \langle j_{\alpha} m_{\alpha}; j_{\beta} m_{\beta} | JM \rangle \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} \hat{\beta}_{\beta}^{\dagger}. \quad (1.94)$$

Pobuđeno stanje jezgre definiramo djelovanjem operatora  $\hat{O}^{\dagger\nu, JM}$ ,

$$|\nu, JM\rangle = \hat{O}^{\dagger\nu, JM} |\tilde{\Phi}_0\rangle, \quad (1.95)$$

na kvazičestični vakuum. Varijacijom po čitavom Hilbertovom prostoru matični elementi R(Q)RPA jednadžbi glase,

$$A_{mi,nj} = \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{A}_{mi}^{JM}, [\hat{H}, \hat{A}_{nj}^{\dagger JM}]] | \tilde{\Phi}_0 \rangle \text{ i } B_{mi,nj} = - \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{A}_{mi}^{JM}, [\hat{H}, \hat{A}_{nj}^{JM}]] | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (1.96)$$

čije eksplicitne izraze možemo naći u literaturi [151]. Da bismo detaljnije proučili specifična

svojstva matričnih R(Q)RPA jednadžbi (1.86) možemo ih napisati kao,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \tilde{E}_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{\nu*} \\ X^{\nu*} \end{pmatrix} = -\tilde{E}_\nu \begin{pmatrix} Y^{\nu*} \\ -X^{\nu*} \end{pmatrix}, \quad (1.97)$$

pri tome je  $\tilde{E}_\nu = \hbar\omega_\nu = E_\nu - E_0$ , gdje su  $\tilde{E}_\nu$  R(Q)RPA svojstvena vrijednost energije,  $E_0$  energija osnovnog stanja,  $E_\nu$  energija pobuđenog stanja jezgre, blok matrica  $A^\dagger = A$  je hermitska a  $B^T = B$  simetrična. Uočimo da se kao rješenja R(Q)RPA jednadžbi simetrično javljaju pozitivno-energetska  $\tilde{E}_\nu > 0$  i negativno energetska kvazičestična rješenja  $\tilde{E}_\nu < 0$ . Negativno-energetska rješenja nemaju fizikalnog značenja, opisuju ista pobuđena stanja kao i pozitivno-energetska rješenja R(Q)RPA jednadžbi pa konvencijom u opisu sistema uzimamo u obzir  $\tilde{E}_\nu > 0$  samo pozitivno-energetska rješenja dok su negativno-energetska  $\tilde{E}_\nu < 0$  zanemarena [194]. Također vrijedi da je,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \text{ hermitska, dok } \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix}^\dagger \neq \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \text{ nije hermitska.} \quad (1.98)$$

Hermitske matrice, matematički gledano, imaju dva bitna svojstva,

- svojstvene vrijednosti su realne,
- svojstveni vektori različitih svojstvenih vrijednosti su ortogonalni.

Matričnu formu R(Q)RPA jednadžbi možemo napisati u matematičkoj formi problema svojstvene vrijednosti,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \tilde{E}'_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix}, \quad (1.99)$$

no sada, s obzirom na to da R(Q)RPA matrica u ovoj formi nije hermitska, svojstvene vrijednosti  $\tilde{E}'_\nu$  mogu biti kompleksni brojevi. Kompleksne svojstvene vrijednosti  $\tilde{E}'_\nu \in \mathbb{C}$  indikacija su nestabilnog, fizikalno neodrživog, načina vibracije nuklearnog sistema [194]. Potreban nam je uvjet numeričke stabilnosti rješenja R(Q)RPA jednadžbi [195] koji glasi,

$$\begin{pmatrix} X^{\nu\dagger} & Y^{\nu\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \tilde{E}_\nu (X^{\nu\dagger} X^\nu - Y^{\nu\dagger} Y^\nu) > 0, \quad (1.100)$$

da sve svojstvene vrijednosti R(Q)RPA jednadžbi (1.97) moraju biti pozitivne [194, 196]. Taj zahtjev implicira da  $\tilde{E}_\nu > 0$  mora biti pozitivan kao i  $(X^{\nu\dagger} X^\nu - Y^{\nu\dagger} Y^\nu) > 0$  što vodi

na uvjet normalizacije R(Q)RPA amplituda,

$$X^{\mu\dagger}X^\nu - Y^{\mu\dagger}Y^\nu = \delta^{\mu\nu}. \quad (1.101)$$

Dodavanjem 1p1h kanala rezidualne interakcije modificiramo  $A$  i  $B$  blok matrice pa ako je privlačna interakcija previše jaka slama se uvjet numeričke stabilnosti (1.100) R(Q)RPA jednadžbi a kao rezultat imamo imaginarne svojstvene vrijednosti [194]. Generalno, nije moguće višečestičnu valnu funkciju koreliranog sistema koji uzima u obzir i korelacije nukleona i zakon sačuvanja impulsa [197] pa dobivenu energiju korigiramo s obzirom na procjenu energije gibanja centra mase u aproksimaciji harmoničkog oscilatora. Algoritam rješavanja R(Q)RPA jednadžbi moguće je pronaći u literaturi [87].

Jednostavniji pristup, objašnjen u [149], je riješiti matrične R(Q)RPA jednadžbe u kanonskoj bazi, u kojoj su jedinične matrice gustoće  $\rho_{ij}$  dijagonalne, i u kojoj RHB valne funkcije mogu biti reprezentirane u formi Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) valnih funkcija. U tom slučaju su nam jedino potrebni matrični elementi  $V_{\kappa\lambda'\kappa'\lambda}^{ph}$  dugodosežne čestično-šupljinske rezidualne interakcije i matrični elementi  $V_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}^{pp}$  čestično-čestične interakcije korelacija sparivanja te kombinacija koeficijenata zauzeća  $u_\kappa$  i  $v_\kappa$ . Za rotaciono invarijantne nuklearne sustave kvazičestični parovi mogu biti vezani u dobar angularni moment  $J$  pa u tom slučaju vezane R(Q)RPA matrične jednadžbe glase,

$$\begin{pmatrix} A^J & B^J \\ B^{*J} & A^{*J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu, JM} \\ Y^{\nu, JM} \end{pmatrix} = \hbar\omega_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu, JM} \\ Y^{\nu, JM} \end{pmatrix}. \quad (1.102)$$

Pri tome su  $\hbar\omega_\nu = E_\nu - E_0$  R(Q)RPA svojstvena vrijednost energije,  $E_0$  energija osnovnog stanja a  $E_\nu$  energija pobuđenog stanja jezgre,  $X^\nu$  i  $Y^\nu$  su kvazičestične R(Q)RPA amplitude. Matrični elementi vezanih R(Q)RPA matrica u kanonskoj bazi dani su izrazima [149],

$$\begin{aligned} A_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}^J &= H_{\kappa\lambda}^{11(J)}\delta_{\kappa'\lambda'} - H_{\kappa'\lambda}^{11(J)}\delta_{\kappa\lambda'} \\ &\quad - H_{\kappa\lambda'}^{11(J)}\delta_{\kappa'\lambda} + H_{\kappa'\lambda'}^{11(J)}\delta_{\kappa\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\xi_{\kappa\kappa'}^+\xi_{\lambda\lambda'}^+ + \xi_{\kappa\kappa'}^-\xi_{\lambda\lambda'}^-)V_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}^{ppJ} \\ &\quad + \zeta_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}V_{\kappa\lambda'\kappa'\lambda}^{phJ}, \end{aligned} \quad (1.103)$$

i,

$$\begin{aligned} B_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}^J &= \frac{1}{2}(\xi_{\kappa\kappa'}^+\xi_{\lambda\lambda'}^+ - \xi_{\kappa\kappa'}^-\xi_{\lambda\lambda'}^-)V_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}^{ppJ} \\ &\quad + (-1)^{j_\lambda - j_{\lambda'} + J}\zeta_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}V_{\kappa\lambda'\kappa'\lambda}^{phJ}. \end{aligned} \quad (1.104)$$



gdje je  $H^{11}$  jedno-kvazičestični član,

$$H_{\kappa\lambda}^{11} = (u_\kappa u_\lambda - v_\kappa v_\lambda) h_{\kappa\lambda} - (u_\kappa v_\lambda + v_\kappa u_\lambda) \Delta_{\kappa\lambda}, \quad (1.105)$$

sa  $h_{\kappa\lambda}$  matričnim elementom Hamiltonijana srednjeg polja i  $\Delta_{\kappa\lambda}$  Hamiltonijana korelacija sparivanja. Matrični elementi rezidualne čestično-čestične  $V_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}^{ppJ}$  i čestično-šupljinske  $V_{\kappa\lambda'\kappa'\lambda}^{phJ}$  rezidualne interakcije su pomnoženi s faktorima,  $\xi_{\kappa\kappa'}^\pm$  i  $\zeta_{\kappa\kappa'\lambda\lambda'}$  koji sadrže koeficijente zauzeća stanja  $u_\kappa$  i  $v_\kappa$ . Pri tome su koeficijenti definirani jednakostima,

$$\eta_{\kappa\kappa'}^\pm = u_\kappa v_{\kappa'} \pm v_\kappa u_{\kappa'} \quad \text{i} \quad \zeta_{\kappa\kappa'}^\pm = u_\kappa v_{\kappa'} \pm v_\kappa u_{\kappa'}, \quad (1.106)$$

takve da za koeficijente zauzeća vrijedi relacija,

$$u_\kappa^2 + v_\kappa^2 = 1, \quad (1.107)$$

koje proizlazi iz uvjeta normalizacije stanja a opravdava interpretaciju kvadrata koeficijenata zauzeća kao vjerojatnosti zauzeća kvantnomehantičkog stanja  $|\kappa\rangle$ .

Rezidualne dugodosežne  $V^{ph}$  čestično-šupljinske korelacije računamo, kao i u slučaju RHB modela, iz izovektor-vektor, izoskalar-vektor, izoskalar-skalar i Coulombovog člana efektivnog Lagranžijana iz jednadžbe (1.59). U konkretnom slučaju  $V^{ph}$  matrični elementi navedeni su u dodatcima; za izovektor-vektor u (C.3), izoskalar-vektor u (C.2), izoskalar-skalar u (C.1), derivativni izoskalar-skalar član u (C.5) i Coulombov član u (C.6). Da bismo izračunali pobuđenja  $M\lambda$  magnetskog tipa dodatno uključujemo  $V^{ph}$  čestično-šupljinsku izovektor-pseudovektorsku rezidualnu interakciju reprezentiranu efektivnom gustoćom Lagranžijana,

$$\mathcal{L}_{IV-PV} = -\frac{1}{2} \alpha_{IV-PV} [\bar{\Psi}_N \gamma^5 \gamma^\mu \vec{\tau} \Psi_N] \cdot [\bar{\Psi}_N \gamma^5 \gamma_\mu \vec{\tau} \Psi_N]. \quad (1.108)$$

Izovektorsko-pseudovektorski tip interakcije<sup>5</sup> modeliran je kao skalarni produkt dva pseudovektora s obzirom na paritetnu transformaciju, čiji je četverovektorski produkt invari-

<sup>5</sup>Izovektor-pseudovektorskom interakcijom u suštini reprezentiramo efektivni pion no s druge strane pion je izovektor-pseudoskalarni tip čestice koju je u modelu kontaktnom interakcijom moguće modelirati i izovektor-pseudoskalarnom interakcijom,

$$\mathcal{L}_{IV-PS} = -\frac{1}{2} \alpha_{IV-PS} [\bar{\Psi}_N \gamma^5 \vec{\tau} \Psi_N] \cdot [\bar{\Psi}_N \gamma^5 \vec{\tau} \Psi_N]. \quad (1.109)$$

Naime, u modelu s izmjenom mezona (*engl. meson-exchange model*), dvije različite interakcije izovektor-pseudovektor i izovektor-pseudoskalar u nerelativističkom limesu rezultiraju identičnim izrazom za jedno-mezonski (jedno-pionski) potencijal izmjene [198]. Pokazano je da izovektor-pseudovektorski tip interakcije bolje reproducira eksperimentalne podatke  $\pi N$  raspršenja piona na nukleonu [198] a koji zbog toga koristimo i u ovom istraživanju. Pojedina teorijska istraživanja u modelu izmjene mezona poput [199–201] koriste mješovitu, izovektor-pseudoskalar i izovektor-pseudovektor, interakciju reprezentiranu linearnom

jantan s obzirom na Lorentzove transformacije i skalarni produkt u izospinskom prostoru invarijantan na rotacije u prostoru izospina odnosno drugim riječima neovisan o naboju nukleona. Matrični elementi pseudovektorske rezidualne interakcije nalaze se u dodatku (C.4).

Pripadajući parametar  $\alpha_{IV-PV}$  izovektor-pseudovektorske interakcije ne ovisi o gustoći i tretiran je kao slobodni parametar prilagođen na način da minimizira standardnu devijaciju  $\sigma_{\Delta}(\alpha_{IV-PV})$  kao funkciju slobodnog parametra  $\alpha_{IV-PV}$  gdje je  $\Delta$  definiran kao  $\Delta = |\bar{E}^{teor.} - E_{vrh}^{eksp.}|$ , tj. razlika između teorijske vrijednosti centroida energije i eksperimentalno mjerene energije dominantnog vrha u eksperimentalnom spektru  $B_{M1}$  snage prijelaza jezgara  $^{208}\text{Pb}$  [38] i  $^{48}\text{Ca}$  [37]. Proizlazi da je optimalna vrijednosti parametra  $\alpha_{IV-PV} = 0.53 \text{ MeVfm}^3$  za koju je  $\Delta$  manji od 1 MeV za obje jezgre  $^{208}\text{Pb}$  i  $^{48}\text{Ca}$ . Dimenziionalna analiza i analiza određivanja vrijednosti parametra  $\alpha_{IV-PV}$  nalaze se u dodatcima (C.4.1) i (C.4.2).

S druge strane  $V^{pp}$  čestično-čestične korelacije u RQRPA rezidualnoj interakciji imaju istu fenomenološku Gogny parametrizaciju danu jednadžbom (1.71) kao i u osnovnom stanju u izotriplet (T=1) kanalu. Aktualni model razmatra proton-proton i neutron-neutron parove nukleona, dakle T=1 kanal, dok proton-neutron izosingletni (T=0) kanal nije razmatran. Osim dvo-kvazičestičnih stanja pozitivne energije iz konfiguracijskog prostora RHB rješenja, konfiguracijski prostor RQRPA jednadžbi mora sadržavati parove konfiguracija koji sadrže potpuno ili djelomično zauzeta stanja pozitivne energije i prazna negativno energetska stanja iz Diracovog mora. Uključivanje konfiguracija sa zauzetim pozitivno energetske stanja i praznim negativno energetske stanja nužno je za očuvanje struja i razdvajanje stanja gibanja centra mase (*engl. spurious* stanja) od pobuđenog stanja jezgre [202]. U primjeni RRPA jednadžbi na konkretne nuklearne sustave pokazuje sa da je konzistentno uključivanje Diracovog mora negativno energetskih stanja u konfiguracijski RRPA prostor nužno za kvantitativnu usporedbu sa eksperimentalnim energijama pobude gigantskih rezonanci [203, 204]. Međutim, u slučaju M1 prijelaza, doprinos Diracovog mora je zanemariv.

---

kombinacijom gustoća Lagranžijana,

$$\mathcal{L}_{\pi N} = x_{\pi} \mathcal{L}_{IV-PV} + (1 - x_{\pi}) \mathcal{L}_{IV-PS}, \quad (1.110)$$

gdje je  $0 \leq x_{\pi} \leq 1$  parametar miješanja izovektor-pseudoskalar i izovektor-pseudovektor interakcija. Takva kombinacija u modelu s kontaktnom interakcijom znači uvođenje tri nezavisna parametra  $\alpha_{IV-PV}$ ,  $\alpha_{IV-PS}$  i  $x_{\pi}$  koje bi trebalo prilagoditi na eksperimentalne podatke čime uvodimo dodatnu neodređenost u model. U konkretnom slučaju za parametar miješanja  $x_{\pi} = 1$  imamo izovektor-pseudovektorski tip interakcije, za  $x_{\pi} = 0$  izovektor-pseudoskalarni tip interakcije a inače linearnu kombinaciju obje interakcije.

# Magnetski prijelazi u jezgrama

## 2.1 Operatori prijelaza i prijelazni matrični elementi

Kompletan izraz za  $M\lambda$  relativistički magnetski operator ranga  $\lambda^1$  koji djeluje na Hilbertovom prostoru s miješanom spin-izospin bazom dan je u blok dijagonalnoj formi,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\lambda\nu} = & \sum_{k=1}^A \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS)}(11)_k & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS)}(22)_k \end{pmatrix} \otimes 1_\tau \\ & - \sum_{k=1}^A \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IV)}(11)_k & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IV)}(22)_k \end{pmatrix} \otimes \hat{\tau}_3, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdje su  $1_\tau$  i  $\hat{\tau}_3$  jedinična i Paulijeva  $2 \times 2$  matrica u izospinskom prostoru,  $A = N + Z$  - broj nukleona gdje N i Z označavaju broj neutrona i protona. Operatori  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS)}$  i  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IV)}$  odgovaraju izoskalarnoj i izovektorskoj komponenti  $M\lambda$  operatora k-tog nukleona danog izrazom (F.1) za nerelativistički slučaj, a prelazak na relativistički formalizam opisan je u

<sup>1</sup>Uočimo konvencionalni faktor  $\sqrt{\frac{3}{4\pi}}$  u nerelativističkoj formi M1 ( $\lambda = 1$ ) operatora u miješanoj spin-izospin bazi iz dodatka E.1,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} = & \frac{\mu_N}{\hbar} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^A (g_\ell^{IS} \hat{\ell}_k + g_s^{IS} \hat{s}_k) \otimes 1_\tau \\ & - \frac{\mu_N}{\hbar} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^A (g_\ell^{IV} \hat{\ell}_k + g_s^{IV} \hat{s}_k) \otimes \hat{\tau}_3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Razlog takve konvencije leži u činjenici da je jedinični vektor u sfernoj bazi iz dodatka (D) dan sa,

$$\hat{e}_\nu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \nabla [r Y_{1\nu}(\theta, \phi)]. \quad (2.2)$$

Naime, Wigner-Eckartov teorem primjenjujemo na skalarni produkt  $\hat{\mu}_{1\nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{e}_\nu$  gdje se konvencionalno uvedeni faktor pokradi. To je ujedno i razlog zašto sličan konvencionalni faktor ne postoji za multipole višeg reda.

dodatcima (E.2) za M1 odnosno (F) za generalizirani  $M\lambda$  slučaj<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS,IV)}(11)_k &= \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS,IV)}(22)_k \\
 &= \frac{\mu_N}{\hbar} \left( \frac{2}{\lambda+1} g_\ell^{(IS,IV)} \hat{\ell}_k + g_s^{(IS,IV)} \hat{s}_k \right) \cdot \nabla \left[ r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\Omega_k) \right].
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Empirijski žiromagnetski omjer slobodnog protona ( $\pi$ ) i neutrona ( $\nu$ ) su dani sa  $g_\ell^{\pi(\nu)} = 1$  (0) a  $g_s^{\pi(\nu)} = 5.8$  (-3.5) izražene u jedinicama nuklearnog  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N}$ . S obzirom na to da računamo u miješanoj spin-izospin bazi izoskalarne i izovektorski žiromagnetski omjeri dani su zasebno za orbitalnu i spinsku komponentu,

$$g_\ell^{IS} = \frac{g_\ell^\pi + g_\ell^\nu}{2} = 0.5, \quad g_s^{IS} = \frac{g_s^\pi + g_s^\nu}{2} = 0.880, \tag{2.7}$$

$$g_\ell^{IV} = \frac{g_\ell^\pi - g_\ell^\nu}{2} = 0.5, \quad g_s^{IV} = \frac{g_s^\pi - g_s^\nu}{2} = 4.706. \tag{2.8}$$

Da bismo usporedili teorijske proračune s eksperimentalnim rezultatima pokazalo se korisnim definirati pojam reducirane snage prijelaza  $B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu)$  gdje u literaturi razlikujemo  $B_{M\lambda}^{(IS)}(\lambda, \omega_\nu)$  - izoskalarne i  $B_{M\lambda}^{(IV)}(\lambda, \omega_\nu)$  - izovektorsku snagu prijelaza te  $B_{M\lambda}^\sigma(\lambda, \omega_\nu)$  - spinsku i  $B_{M\lambda}^\ell(\lambda, \omega_\nu)$  - orbitalnu snagu prijelaza, funkciju odziva  $R(\lambda, E)$ , momente distribucije  $m_k$  i energiju centroida  $\bar{E}$  koji su detaljnije objašnjeni u ovom poglavlju.

U okviru R(Q)RPA teorije reducirana snaga prijelaza  $B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu)$  pokazuje diskretan spektar, odnosno ne daje informaciju o parcijalnoj širini raspada  $\Gamma$ . Stoga definiramo funkciju odziva  $R(\lambda, E)$  [149] kao,

$$R(\lambda, E) = \sum_\nu B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu) \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(E - \hbar\omega_\nu)^2 + (\Gamma/2)^2}, \tag{2.9}$$

<sup>2</sup>Definicija **izoskalara**: Izoskalar je operator  $\hat{O}_i^\tau$  koji komutira sa svim infinitezimalnim generatorima rotacije u izospinskom prostoru,

$$[\hat{O}_i^\tau, \hat{t}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{2.4}$$

Definicija **izovektora**: Izovektor je operator  $\hat{O}_i^\tau$  za koji vrijede slijedeće komutacijske relacije s obzirom na generatore rotacije u izospinskom prostoru,

$$[\hat{O}_i^\tau, \hat{t}_j] = -i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{O}_k^\tau, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Pri tome su  $\hat{t}_j = \frac{1}{2}\hat{\tau}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  infinitezimalni generatori rotacije u izospinskom prostoru gdje su  $\hat{\tau}_j$  Paulijeve matrice u izospinskom prostoru. Detalji su pokazani u dodatku (J).

S obzirom na to da jedinična matrica u izospinskom prostoru  $1_\tau$  iz jednadžbe (2.1) komutira sa svim generatorima rotacije govorimo o izoskalaru dok za  $\hat{\tau}_3$  Paulijeve matricu u izospinskom prostoru iz iste jednadžbe (2.1) vrijede komutacijske relacije (2.5) pa govorimo o izovektoru.

konvoluciju reducirane snage prijelaza i Lorentzove težinske funkcije gdje je širina Lorentziana proizvoljno odabrana kao  $\Gamma = 1.0 \text{ MeV}^3$ ,  $E$  - energija pobuđenja sustava te  $\hbar\omega_\nu = E_\nu - E_0$  razlika energija jezgre u pobuđenom  $E_\nu$  i osnovnom  $E_0$  stanju.

Reduciranu snagu prijelaza  $B(\lambda, \omega_\nu)$  [149] u R(Q)RPA formalizmu magnetskog operatora  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$  ranga  $\lambda$  računamo sljedećim izrazom,

$$B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu) = \left| \sum_{\kappa\kappa'} \left( X_{\kappa\kappa'}^{\nu, \lambda 0} \langle \kappa | \hat{\mu}_\lambda | \kappa' \rangle + (-1)^{j_\kappa - j_{\kappa'} + \lambda} Y_{\kappa\kappa'}^{\nu, \lambda 0} \langle \kappa' | \hat{\mu}_\lambda | \kappa \rangle \right) \times \left( u_\kappa v_{\kappa'} + (-1)^\lambda v_\kappa u_{\kappa'} \right) \right|^2, \quad (2.12)$$

gdje su  $\kappa$  and  $\kappa'$  kvantni brojevi koji označavaju jednočestična stanja,  $X_{\kappa\kappa'}^{\nu, \lambda 0}$  i  $Y_{\kappa\kappa'}^{\nu, \lambda 0}$  su R(Q)RPA amplitude,  $u_\kappa$  i  $v_\kappa$  su koeficijenti zauzeća.

Preostaje izračunati reducirane matrične elemente,  $2^\lambda$  multipolnih prijelaza induciranih operatorom magnetskih prijelaza  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$  ranga  $\lambda$  u miješanoj spin-izospin bazi,

$$\langle j_f; t_f, t_{zf} | \hat{\mu}_\lambda | j_i; t_i, t_{zi} \rangle = \left( \langle j_f | \hat{\mu}_\lambda^{(IS)} | j_i \rangle \langle t_f | 1_\tau | t_i \rangle - \frac{C_{M1}}{\sqrt{2t_f + 1}} \langle j_f | \hat{\mu}_\lambda^{(IV)} | j_i \rangle \langle t_f | \hat{\tau} | t_i \rangle \right), \quad (2.13)$$

gdje je  $C_{M1} = \langle \frac{1}{2} t_z; 10 | \frac{1}{2} t_z \rangle$  Clebsch - Gordan koeficijent u izospinskom prostoru gdje je konvencijom  $t_z = \frac{1}{2}$  neutron ( $C_{M1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ) a  $t_z = -\frac{1}{2}$  proton ( $C_{M1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ).

S obzirom da su  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS)}$  i  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IV)}$  relativistički operatori u blok dijagonalnoj formi, možemo koristiti sljedeće izraze za proračun reduciranih matričnih elemenata, izoskalarne

$$\begin{aligned} \langle j_f | \hat{\mu}_\lambda^{(IS)} | j_i \rangle &= I_{velika}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | \hat{\mu}_\lambda^{(IS)}(11) | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \\ &+ \\ &I_{mala}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f | \hat{\mu}_\lambda^{(IS)}(22) | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i \rangle, \end{aligned} \quad (2.14)$$

<sup>3</sup>Gigantske rezonancije kao kolektivna rezonantna pobuđenja atomske jezgre raspadaju se protekom vremena,

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}, \quad (2.10)$$

pri tome je  $\Gamma$  širina raspada. Generalno je prihvaćeno da formiranju širine raspada  $\Gamma$  [205], doprinose tri mehanizma:

$$\Gamma = \Gamma^\uparrow + \Gamma^\downarrow + \Delta\Gamma, \quad (2.11)$$

Fragmentacija jednočestičnog-jednošupljinskog (1p1h) pobuđenja (Landauovo gušenje  $\Delta\Gamma$ ), direktna emisija čestice koji reprezentiramo širinom bijega  $\Gamma^\uparrow$  (*engl. escape width*) i evolucija 1p1h konfiguracija u kompliciranije dvočestične dvošupljinske (2p2h) te mnogo-čestične-mnogo-šupljinske (nph) konfiguracije reprezentirane sa  $\Gamma^\downarrow$  (*engl. spreading width*).

i izovektorske,

$$\begin{aligned} \langle j_f || \hat{\mu}_\lambda^{(IV)} || j_i \rangle &= I_{velika}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || \hat{\mu}_\lambda^{(IV)}(11) || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \\ &+ \\ &I_{mala}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f || \hat{\mu}_\lambda^{(IV)}(22) || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

komponente gdje su radijalni faktori matrice elemenata definirani integralima,

$$I_{velika}^{(\lambda)} = \int_0^\infty f_{n_f j_f}^*(r) f_{n_i j_i}(r) r^{\lambda-1} r^2 dr, \quad (2.16)$$

$$I_{mala}^{(\lambda)} = \int_0^\infty g_{n_f j_f}^*(r) g_{n_i j_i}(r) r^{\lambda-1} r^2 dr, \quad (2.17)$$

gdje su  $f_{n_j}(r)$  velika i  $g_{n_j}(r)$  mala komponenta Diracove valne funkcije određene u RHB modelu.

Konačno, uzevši u obzir, da su reducirani matrice elementi  $\langle \kappa || \hat{\mu}_\lambda || \kappa' \rangle^\dagger = \langle \kappa || \hat{\mu}_\lambda || \kappa' \rangle$  realni brojevi, slijedi rezultat za snagu prijelaza  $B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu)$  magnetskog tipa u R(Q)RPA aproksimaciji. Standardno razmatramo  $B_{M\lambda}^{(IV)}(\lambda, \omega_\nu)$  izovektorsku snagu prijelaza definiranu izrazom,

$$\begin{aligned} B_{M\lambda}^{(IV)}(\lambda, \omega_\nu) &= \left| -\frac{C_{M1}}{\sqrt{2t_f+1}} \sum_{j_\kappa j_{\kappa'}} \left( X_{j_\kappa j_{\kappa'}}^{\nu, 10} + (-1)^{j_\kappa - j_{\kappa'} + \lambda} Y_{j_\kappa j_{\kappa'}}^{\nu, \lambda 0} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left( u_\kappa v_{\kappa'} + (-1)^\lambda v_\kappa u_{\kappa'} \right) \langle j_{\kappa'} || \hat{\mu}_\lambda^{(IV)} || j_\kappa \rangle \left\langle \frac{1}{2} || \hat{\tau} || \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

i odgovarajuću  $B_{M\lambda}^{(IS)}(\lambda, \omega_\nu)$  izoskalaru snagu prijelaza,

$$\begin{aligned} B_{M\lambda}^{(IS)}(\lambda, \omega_\nu) &= \left| \sum_{j_\kappa j_{\kappa'}} \left( X_{j_\kappa j_{\kappa'}}^{\nu, \lambda 0} + (-1)^{j_\kappa - j_{\kappa'} + \lambda} Y_{j_\kappa j_{\kappa'}}^{\nu, \lambda 0} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left( u_\kappa v_{\kappa'} + (-1)^\lambda v_\kappa u_{\kappa'} \right) \langle j_{\kappa'} || \hat{\mu}_\lambda^{(IS)} || j_\kappa \rangle \left\langle \frac{1}{2} || 1_\tau || \frac{1}{2} \right\rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Relacija između ukupne, izoskalarne i izovektorske snage prijelaza dana je sa,

$$B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu) = \left| \sqrt{B_{M\lambda}^{(IV)}(\lambda, \omega_\nu)} \pm \sqrt{B_{M\lambda}^{(IS)}(\lambda, \omega_\nu)} \right|^2, \quad (2.20)$$

pri tome ako je relativan predznak plus (+) govorimo o konstruktivnoj a ako je minus (-) o destruktivnoj interferenciji izovektorske i izoskalarne snage prijelaza.

Znamo da je:

- $B_{M\lambda}^{(IV)}(\lambda, \omega_\nu) \propto (g^{IV})^2$ , izovektorska snaga prijelaza proporcionalna kvadratu izovektorskog žiromagnetskog omjera,
- $B_{M\lambda}^{(IS)}(\lambda, \omega_\nu) \propto (g^{IS})^2$ , izoskalarna snaga prijelaza proporcionalna kvadratu izoskalarnog žiromagnetskog omjera,
- te da je  $g_s^{IV} \gg g_s^{IS}$  spinski izovektorski žiromagnetski omjer puno veći od izoskalarnog,

slijedi,

$$B_{M\lambda}^{(IV)}(\lambda, \omega_\nu) \gg B_{M\lambda}^{(IS)}(\lambda, \omega_\nu), \quad (2.21)$$

tj. da je izovektorska snaga prijelaza značajno veća od izoskalarne.

Spinska reducirana snaga prijelaza  $B_{M\lambda}^\sigma(\lambda, \omega_\nu)$  po definiciji je,

$$B_{M\lambda}^\sigma(\lambda, \omega_\nu) = B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu)|_{g_\ell=0}, \quad (2.22)$$

ukupna snaga prijelaza u kojoj su orbitalni žiromagnetski faktori, protonski i neutronski,  $g_\ell^\pi = g_\ell^\nu = 0$ .

Slično, orbitalna reducirana snaga prijelaza  $B_{M\lambda}^\ell(\lambda, \omega_\nu)$  je po definiciji,

$$B_{M\lambda}^\ell(\lambda, \omega_\nu) = B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu)|_{g_s=0}, \quad (2.23)$$

ukupna snaga prijelaza gdje su spinski žiromagnetski faktori, protonski i neutronski,  $g_s^\pi = g_s^\nu = 0$ .

Relacija između ukupne, spinske i orbitalne snage prijelaza, dana je izrazom,

$$B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu) = \left| \sqrt{B_{M\lambda}^\sigma(\lambda, \omega_\nu)} \pm \sqrt{B_{M\lambda}^\ell(\lambda, \omega_\nu)} \right|^2, \quad (2.24)$$

pa ako je relativan predznak plus (+) govorimo o konstruktivnoj a ako je minus (-) o destruktivnoj interferenciji spinske i orbitalne snage prijelaza.

Također znamo da je:

- $B_{M\lambda}^\sigma(\lambda, \omega_\nu) \propto (g_s^{\pi(\nu)})^2$ , spinska snaga prijelaza proporcionalna kvadratu protonskog (neutronskog) spinskog žiromagnetskog faktora,
- $B_{M\lambda}^\ell(\lambda, \omega_\nu) \propto (g_\ell^{\pi(\nu)})^2$ , orbitalna snaga prijelaza proporcionalna kvadratu protonskog (neutronskog) orbitalnog žiromagnetskog faktora,

- te da je  $g_s^{\pi(\nu)} \gg g_\ell^{\pi(\nu)}$  spinski žiromagnetski faktor puno veći od orbitalnog,

$$B_{M\lambda}^\sigma(\lambda, \omega_\nu) \gg B_{M\lambda}^\ell(\lambda, \omega_\nu), \quad (2.25)$$

pa je je spinska snaga prijelaza parno-parnih sferičnih jezgara značajno veća od orbitalne. Dimenzionalne analize snage prijelaza i funkcije odziva nalaze se u poglavlju (L).

## 2.2 Momenti distribucije snage prijelaza

Momenti diskretne funkcije odziva  $m_k$  [149] definirani su sljedećim izrazom,

$$m_k = \sum_{\nu} B_{M\lambda}(\lambda, \omega_\nu) (E_\nu - E_0)^k. \quad (2.26)$$

Često koristimo dva momenta,  $m_0$  što je NEWSR (*engl. non-energy-weighted*) pravilo sume koje reprezentira ukupnu snagu prijelaza  $B_{M\lambda}(E)$  i  $m_1$  EWSR (*engl. energy-weighted*) pravilo sume. Kvocijent  $m_1$  i  $m_0$  momenta funkcije odziva,

$$\bar{E} = \frac{m_1}{m_0}, \quad (2.27)$$

je energija centroida koja reprezentira prosječnu energiju ukupne snage prijelaza.

Da bismo detaljnije proučili svojstva jednadžbe (2.26) definiramo  $k$ -ti moment distribucije snage prijelaza inducirane jednočestičnim hermitskim operatorom  $\hat{O}_\lambda$  izrazom,

$$m_k = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{O}_\lambda (\hat{H} - E_0)^k \hat{O}_\lambda | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (2.28)$$

pri tome je  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$  osnovno stanje jezgre, po pretpostavci s korelacijama, a  $E_0$  energija osnovnog stanja. Po pretpostavci, Hamiltonijan višestetičnog sustava  $\hat{H}$  je poznat i vrijedi  $\hat{H} |\nu\rangle = E_\nu |\nu\rangle$  a skup stanja baze je kompletan  $\sum_{\nu \in S} |\nu\rangle \langle \nu| = \hat{1}$ , slijedi,

$$m_k = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{O}_\lambda \left( \sum_{\nu'} |\nu'\rangle \langle \nu'| \right) (\hat{H} - E_0)^k \left( \sum_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu| \right) \hat{O}_\lambda | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{\nu \in S} (E_\nu - E_0)^k |\langle \nu | \hat{O}_\lambda | \tilde{\Phi}_0 \rangle|^2 \quad (2.29)$$

Određivanjem momenta  $m_0$  ( $k = 0$ ) jednadžbom (2.28) vidimo da izraz za taj specifičan izbor ne ovisi o Hamiltonijanu već samo o osnovnom stanju jezgre i jednočestičnom operatoru. Očekujemo isti rezultat ako moment  $m_0$  računamo jednadžbom (2.29). Pri tome je potrebno uzeti u obzir:

- Rezanje (*engl. cutt-off*): numerički proračuni neizbježno vode na "rezanje" beskonačne sume na konačan broj članova  $\nu_{maks}$ . i time je automatski osigurana konvergencija reda u smislu konačnog broja sumiranih članova,



$$\hat{1} = \sum_{\nu \in S} |\nu\rangle \langle \nu| \rightarrow \sum_{\nu \leq \nu_{maks.}} |\nu\rangle \langle \nu|. \quad (2.30)$$

- Paulijevo blokiranje: za višfermionske susutave u kojima vrijedi Paulijev princip, pa neka od konačnih stanja mogu biti zauzeta. Zbog Paulijevog principa populacija takvih stanja inducirana operatorom  $\hat{O}_\lambda$  nije moguća. Naime kompletan skup stanja (S), sortiramo na podskup dopuštenih (A) prijelaza i podskup Pauli-blokiranih nedopuštenih (F) prijelaza.

$$\hat{1} = \sum_{\nu \in S} |\nu\rangle \langle \nu| = \sum_{k \in A} |k\rangle \langle k| + \sum_{j \in F} |j\rangle \langle j|. \quad (2.31)$$

U tom smislu, čak i ako je matrični element prijelaza  $\langle j \in F | \hat{O}_\lambda | i \rangle \neq 0$  biti izuzet u sumi jednadžbe (2.29).

- Aproksimacija *bez mora*: Relativistički formalizam, zbog potpunosti stanja baze, dopušta klasifikaciju skupa stanja S na pozitivno energetska čestična (P) i negativno energetska stanja iz Diracovog mora (D),

$$\hat{1} = \sum_{\nu \in S} |\nu\rangle \langle \nu| = \sum_{k \in P} |k\rangle \langle k| + \sum_{j \in D} |j\rangle \langle j|. \quad (2.32)$$

Kod RHB tipa proračuna jezgre u osnovnom stanju upravo radimo u aproksimaciji bez mora i doprinos  $\sum_{j \in D} |j\rangle \langle j|$  članova iz Diracovog mora je zanemaren.

Zbog navedenih efekata rezultat tako proračunatog aktualnog momenta  $m_0^{akt.}$  manji ili jednak ukupnom momentu  $m_0$  iz relacije (2.29),

$$m_0^{akt.} = \sum_{\nu \in A, P, \leq \nu_{maks.}} |\langle \nu | \hat{O}_\lambda | \tilde{\Phi}_0 \rangle|^2 \leq m_0. \quad (2.33)$$

Ovisno o izbornim pravilima za dani operator  $\hat{O}_\lambda$  pojedini matrični elementi su  $\langle \nu | \hat{O}_\lambda | \tilde{\Phi}_0 \rangle = 0$ , pa ne doprinose u sumaciji.

# Rezultati

## 3.1 Magnetski dipolni prijelazi (M1)

### 3.1.1 Snaga prijelaza M1 pobuđenja u jezgri $^{208}\text{Pb}$

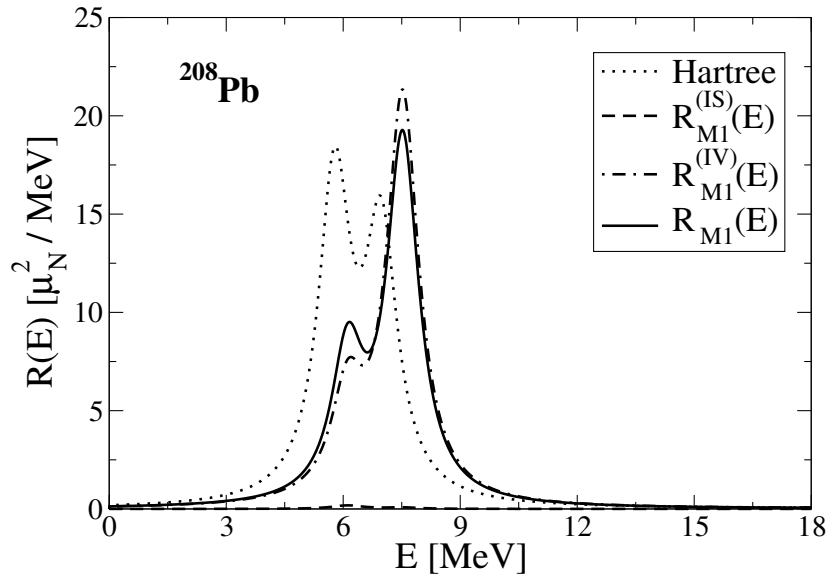
Kao prvi slučaj detaljne analize M1 prijelaza u okviru relativističkog energijskog funkcionala gustoće razmatramo jezgri  $^{208}\text{Pb}$ . Za izotop olova  $^{208}\text{Pb}$  postoje eksperimentalni podatci [37–39, 41, 42, 152] i u tom smislu je pogodna jezgra za teorijska istraživanja.

Slika 3.1 pokazuje M1-funkciju odziva  $R_{M1}(E)$  za jezgri  $^{208}\text{Pb}$ . S obzirom da je riječ o magičnoj jezgri, korelacije sparivanja ne doprinose energiji osnovnog stanja jezgre, i RHB+RQRPA model je reduciran na relativistički Hartree+RRPA model. Dodatno su prikazane ukupna  $R_{M1}(E)$ , izoskalarna  $R_{M1}^{(IS)}(E)$  te izovektorska  $R_{M1}^{(IV)}(E)$  funkcija odziva zasebno. Za usporedbu je prikazan i, neperturbirani Hartree odziv koji odgovara slučaju kada je rezidualna IV-PV interakcija postavljena na nulu. Primijetimo da je IV-PV interakcija, koja određuje svojstva M1 pobuđenja, opisana jednostavnom konstantom vezanja  $\alpha_{IV-PV}$  koja nije funkcional gustoće i određena je minimiziranjem standardne devijacije  $\sigma_{\Delta}(\alpha_{IV-PV})$  kako je pokazano u dodatku (C.4.2), gdje je  $\Delta$  razlika teorijski proračunatih energija centroida i eksperimentalno određenih dominantnih vrhova mjerene snage prijelaza dvije referentne jezgre  $^{208}\text{Pb}$  [38] and  $^{48}\text{Ca}$  [37]. Proizlazi, da je numerička vrijednost konstante vezanja  $\alpha_{IV-PV} = 0.53 \text{ MeVfm}^3$ , i u tom slučaju  $\Delta$  je manja od 1 MeV za obje referentne jezgre  $^{208}\text{Pb}$  i  $^{48}\text{Ca}$ . Na slici 3.1, puni M1 odziv se sastoji od dva dominantna vrha na 6.11 MeV i 7.51 MeV. Dva dominantna vrha gotovo u potpunosti iscrpe ukupnu M1 snagu odziva unutar raspona energije do 50 MeV. U eksperimentalnim istraživanjima u ref. [37, 38] izmjereni položaj dominantnog vrha M1-funkcije odziva nalazi se na 7.3 MeV dok se drugi vrh u funkciji odziva nalazi na oko 7.46 MeV [37, 38]. Međutim, eksperimentalni podatci pokazuju fragmentiraniju strukturu M1 snage prijelaza u  $^{208}\text{Pb}$  [37, 38]. Da bismo opisali fragmentaciju eksperimentalnog spektra snage prijelaza potrebno je postojeći RRPA formalizam proširiti sa dvočestičnim-dvošupljinskim (2p2h) pobuđenjima [64], koji nisu uključeni u trenutačnu razinu teorijskih istraživanja. Čak i bez te razine detalja trenutačna RRPA reproducira glavnu strukturu M1-distribucije u

spektru snage prijelaza jezgre  $^{208}\text{Pb}$  osobito u dominantnom vrhu odziva.

Na slici 3.1 usporedbom punog M1 odziva sa neperturbiranim Hartree odzivom možemo uočiti pomak punog odziva prema višim energijama. Time smo pokazali da je učinak IV-PV rezidualne interakcije značajan za opis M1 prijelaza kao pobuđenja atomskih jezgara. Pomak funkcije odziva u energiji je konzistentan s izbornim pravilom za M1 prijelaze, jer IV-PV interakcija utječe na  $J^\pi = 1^+$  pobuđena stanja neprirodnog pariteta.

Slika 3.1 također pokazuje da je izovektorski M1 odziv značajno veći od izoskalar-nog i oba odziva interferiraju destruktivno, odnosno parcijalne komponente se poništavaju. Naime, puna funkcija odziva je manja od izovektorske funkcije odziva. Efekti su jasno vidljivi iz M1 snage prijelaza proračunate do 50 MeV; puna snaga prijelaza iznosi  $\sum_E B_{M1}(E) = 41.99 \mu_N^2$ , dok su izoskalar-na snaga prijelaza  $\sum_E B_{M1}^{(IS)}(E) = 0.43 \mu_N^2$  i izovektorska snaga prijelaza  $\sum_E B_{M1}^{(IV)}(E) = 42.33 \mu_N^2$ . Glavni razlog da je izovektorska komponenta M1 snage prijelaza veća od izoskalarne je velika razlika u žiromagnetskim omjerima  $g_s^{IS}$  i  $g_s^{IV}$  iz jednadžbi (2.7) i (2.8). Naime, snaga prijelaza proporcionalna je kvadratu žiromagnetskog omjera  $g_s^{IS}$  izoskalar-nog odnosno  $g_s^{IV}$  izovektorskog ovisno koju komponentu snage prijelaza računamo, pri čemu je spinska komponenta dominantna.



**Slika 3.1:** M1 funkcija odziva za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ . Rezultat je dobiven u okviru RRPA parametrizirane DD-PC1 funkcionalom za:  $R_{M1}(E)$ -ukupnu,  $R_{M1}^{(IS)}(E)$ -izoskalar-nu i  $R_{M1}^{(IV)}(E)$ -izovektorsku funkciju odziva. Neperturbirani odziv na Hartree razini također je prikazan.

**Tablica 3.1:** Parcijalni neutronske i protonske doprinose ( $b_{ph}^{\nu,\pi}$ ) M1 snazi prijelaza za dva dominantna vrha ( $E_{vrh}$ ), i ukupna snaga prijelaza  $B_{M1}$  za  $^{208}\text{Pb}$ . Detalji o konfiguraciji prijelaza dani su u tekstu.

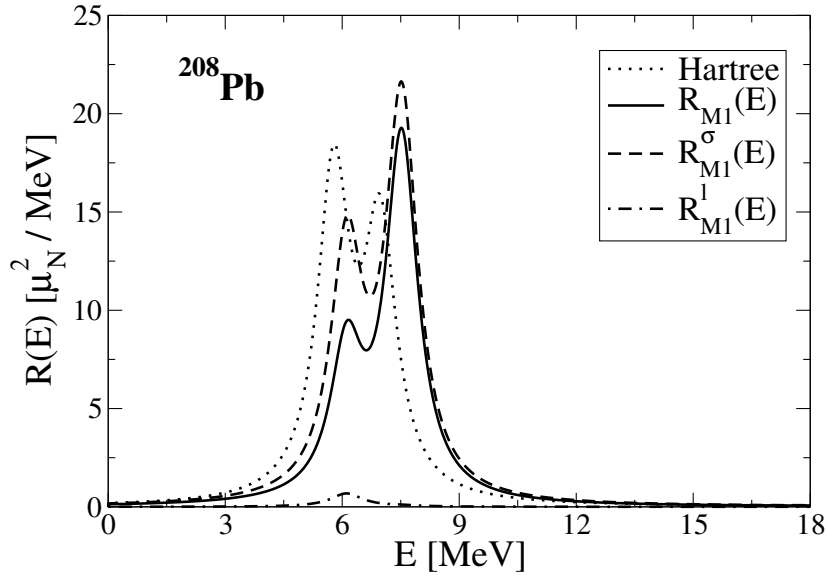
$E_{vrh}^{teor.}$ [MeV]	$b_{ph}^{\nu}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$b_{ph}^{\pi}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$B_{M1}(E)$ [ $\mu_N^2$ ]
6.11	-1.33	4.74	11.6
7.51	4.22	1.15	28.96

Nadalje detaljnije analiziramo strukturu dva izražena vrha u spektru M1 snage prijelaza. Tablica 3.1 pokazuje parcijalni doprinose snazi prijelaza  $B_{M1}$  dominantnih protonskih i neutronskih čestično-šupljinskih konfiguracija koje označavamo sa  $b_{ph}$ , (potpuni član za  $\kappa\kappa'$  konfiguraciju dan je izrazom (2.12)). U slučaju kada jedno-protonska ( $p_1h_1$ ) i neutronska ( $p_2h_2$ ) konfiguracija doprinose M1 prijelazima na energiji  $E$  tada vrijedi,

$$B_{M1}(E) = \left| b_{p_1h_1}^{\nu}(E) + b_{p_2h_2}^{\pi}(E) \right|^2. \quad (3.1)$$

Za stanje na 6.11 MeV, dominantni doprinos dolazi od prijelaza između neutronskih spin-orbit partnera, ( $\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1i_{11/2}$ ) i manjeg parcijalnog doprinosa protonskog prijelaza, ( $\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1h_{9/2}$ ). Kako je pokazano u tablici 3.1, parcijalni protonski i neutronske spin-flip prijelazi interferiraju destruktivno. Za slučaj stanja na 7.51 MeV, glavni prijelazi su ( $\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1i_{11/2}$ ) i ( $\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1h_{9/2}$ ) i koherentno doprinose ukupnoj snazi prijelaza  $B_{M1}$ , upravo kako je pokazano u tablici 3.1.

Slika 3.2 prikazuje separaciju punog M1 odziva u jezgri  $^{208}\text{Pb}$  na spinsku i orbitalnu funkciju odziva  $R_{M1}^{\sigma}(E)$  i  $R_{M1}^{\ell}(E)$  koje računamo jednadžbama (2.22) and (2.23). Odmah je moguće uočiti, usporedbom spinskog i orbitalnog odziva, da je ukupna snaga prijelaza  $B(M1)$  usporediva sa spinskom komponentom snage prijelaza dok je orbitalni doprinos gotovo zanemariv. Orbitalni-M1 doprinos u snazi prijelaza uglavnom je posljedica deformacije jezgre i gotovo iščezava u jezgrama sa zatvorenim ljuskama [3]. Spinski i orbitalni odzivi interferiraju destruktivno, odnosno puna funkcija odziva je manja od spinskog doprinosa. Odgovarajuće numeričke vrijednosti iznose  $53.14 \mu_N^2$  za spinsku,  $1.19 \mu_N^2$  za orbitalnu i  $41.99 \mu_N^2$  za ukupnu snagu M1 prijelaza. Teorijska razmatranja M1 prijelaza za  $^{208}\text{Pb}$  jezgri u okviru RRPA modela pokazuju da je snaga prijelaza u potpunosti iscrpljena u dva dominantna vrha,  $B_{M1}(E = 6.11 \text{ MeV}) = 11.6 \mu_N^2$  i  $B_{M1}(E = 7.51 \text{ MeV}) = 28.96 \mu_N^2$ .



**Slika 3.2:** Isto kao na slici 3.1, ali sa  $R_{M1}(E)$ -ukupnom,  $R_{M1}^{\sigma}(E)$ -spinskom i  $R_{M1}^l(E)$ -orbitalnom funkcijom odziva. Neperturbirani Hartree odziv je također prikazan.

Proteklih godina provedeno je nekoliko eksperimentalnih istraživanja M1 prijelaza jezgre  $^{208}\text{Pb}$ . Nekoliko eksperimentalnih rezultata je kronološki prezentirano u tablici 3.13. Proizlazi da ukupna snaga prijelaza leži u rasponu  $\sum_E B_{M1}(E) \cong (35.0 - 47.5) \mu_N^2$  što je u slaganju je sa teorijskim rezultatima ove studije. Međutim, nedavni eksperimenti [37–39] pokazuju znatno niže vrijednosti M1 snage prijelaza. Navedena razlika je posljedica zabune u starijim eksperimentima koji su električne-dipolne komponente odziva identificirali kao M1 prijelaze. Aktualne eksperimentalne vrijednosti  $\sum_E B_{M1}(E)$  do sada su sustavno manje od teorijski izračunate ukupne snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$ . To je dobro poznati problem nedostatka snage prijelaza (*engl. missing strength problem*). Potencijalno rješenje razmatrano je uvođenjem efekta gušenja (*engl. quenching effect*) spinskih žiromagnetskih faktora  $g_s \rightarrow \zeta_s g_s$  ( $B_{M1}^{\sigma} \rightarrow \zeta_s^2 B_{M1}^{\sigma}$ ) gdje je  $0 \leq \zeta_s \leq 1$  faktor gušenja, detalji formalizma objašnjeni su u dodatku (K). Efekt gušenja, u okviru ovog rada, nismo uključivali u računima. Tek nedavna teorijska razmatranja temeljena na Skyrme funkcionalu [18] rezultiraju čak i s manjim vrijednostima  $B_{M1}$  snage prijelaza u usporedbi sa nedavnim eksperimentalnim rezultatima. Stoga, kvantitativni opis snage prijelaza dipolnih magnetskih M1 pobuđenja ostaje i dalje otvoreno pitanje.

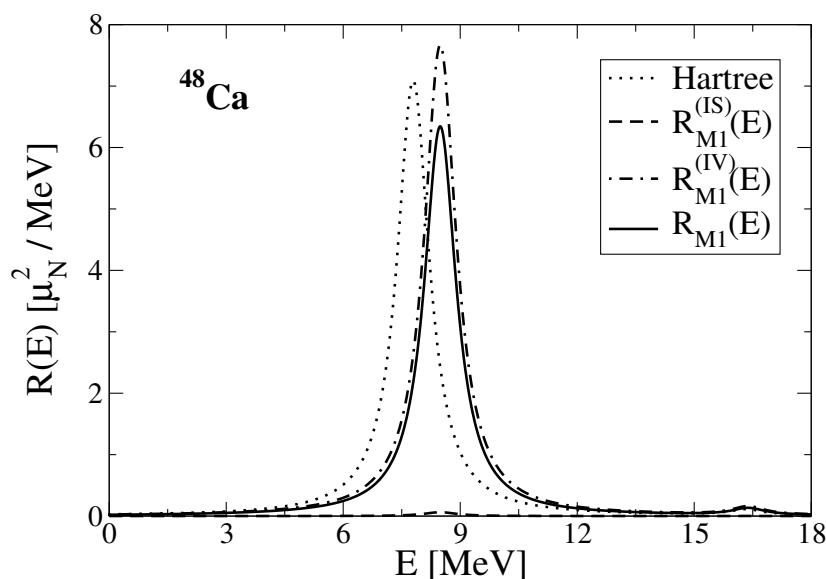
Za usporedbu, Bohrov i Mottelsonov model nezavisnih čestica (IPM), rezultira procjenom  $B_{M1}(E) = 36 \mu_N^2$  iz ref. [40], i usporediv je sa RRPA rezultatima, što je nešto veće od vrijednosti koje su prezentirane u referencama [16–18]. Slični proračuni zasnovani na Skyrme tipu funkcionala rezultiraju neodređenošću, naime jedna parametrizacija ne može opisati istovremeno eksperimentalne spektre snage prijelaza koji sadrže jedan i dva dominantna vrha za jezgre sa zatvorenim i otvorenim ljuskama [16].

**Tablica 3.2:** Eksperimentalne vrijednosti M1 energija pobuđenja i reduciranih snaga prijelaza u jezgri  $^{208}\text{Pb}$ . U ref. [42], simbol (\*) označava eksperimentalnu neodređenost u pridruživanju pariteta kvantnomehaničkog stanja s obzirom na M1 prijelaze.

$(^{208}\text{Pb})$	$E_x[\text{MeV}]$	$B_{M1, \uparrow}[\mu_N^2]$
Ref. [152] (1977)	(suma)	35.0
Ref. [41] (1977)	(suma)	46.5
Ref. [42] (1979)	4.843	5.8*
	7.061	17.7*
	7.249	0.5
	7.37 – 7.82	7.9
	7.98	7.1*
	8.20 – 9.50	8.5
	4.843 – 9.50	$\sum B_{M1}(E)_{\uparrow}$ = 47.5 (30.6*)
Ref. [39] (1985)	5.8 – 7.4	10.7
	$\leq 6.4$	1.9
	7.3	15.6
Ref. [38] (1988)	6.7 – 8.1	19.0
Ref. [37] (2016)	7.0 – 9.0	20.5

### 3.1.2 Snaga prijelaza M1 pobuđenja u jezgri $^{48}\text{Ca}$

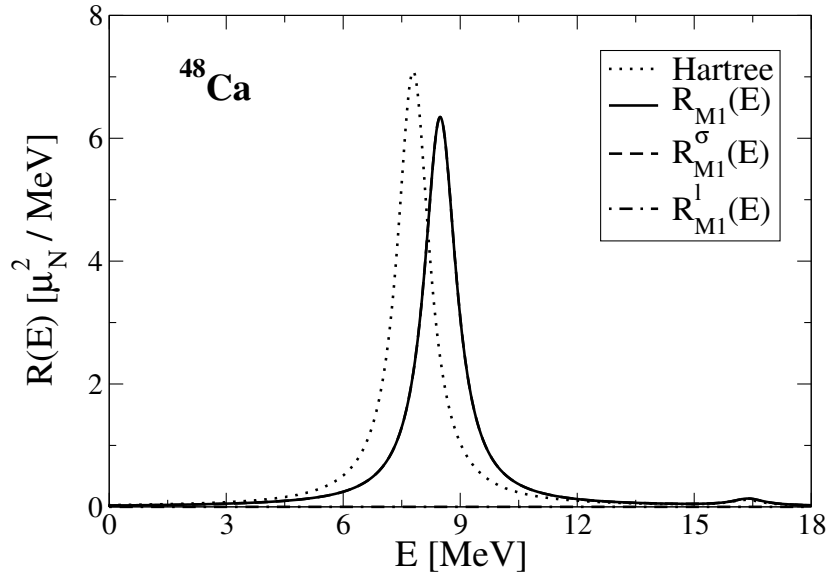
U ovom poglavlju proširujemo razmatranja na lakši sustav, jezgru  $^{48}\text{Ca}$ , gdje je također dostupno nekoliko eksperimentalnih istraživanja [37, 206, 207]. Na slici 3.3, su prikazane RRPА distribucije snage prijeleza, ukupna, izoskalarna i izovektorska za jezgru  $^{48}\text{Ca}$ . Suma diskretnih vrijednosti  $\sum_E B_{M1}(E)$  snage prijelaza do 50 MeV rezultira; ukupnom  $\sum_E B_{M1}(E) = 10.38 \mu_N^2$ , izoskalarnom  $\sum_E B_{M1}^{(IS)}(E) = 0.11 \mu_N^2$  i izovektorskom  $\sum_E B_{M1}^{(IV)}(E) = 12.52 \mu_N^2$  snagom prijelaza. Slično kao i u slučaju  $^{208}\text{Pb}$ , izovektorska snaga prijelaza je znatno veća od izoskalarne. Energije centroida i dominantnog vrha u spektru snage prijelaza su  $\bar{E}^{teor.} = 9.37$  MeV i  $E_{vrh}^{teor.} = 8.48$  MeV. S druge strane, u eksperimentalnim istraživanjima M1 spin-flip rezonanci dobivenim neelastičnim raspršenjem protona na  $^{48}\text{Ca}$  [37], dominantni vrh se nalazi na  $E_{vrh}^{eksp.} = 10.22$  MeV. Dakle, teorijska predikcija RRPА računa odstupa  $\simeq 2$  MeV od empirijske energije pobude. Navedimo da je IV-PV interakcija, kojom su određena svojstva M1 pobuđenja, opisana jednostavnom konstantom vezanja  $\alpha_{IV-PV}$  koja nije funkcional gustoće, kao i za već opisani slučaj  $^{208}\text{Pb}$ , kako je pokazano u dodatku (C.4.2) a čija je numerička vrijednost  $\alpha_{IV-PV} = 0.53$  MeVfm<sup>3</sup>.



**Slika 3.3:** Isto kao na slici 3.1, ali za  $^{48}\text{Ca}$ .

Na slici 3.3, usporedbom ukupne i nepreturbirane funkcije odziva može se zaključiti da, RRPА rezidualna interakcija pomiče dominantan vrh na više energije. To je identičan zaključak kao i za slučaj  $^{208}\text{Pb}$  jezgre.

Slika 3.4 pokazuje punu, spinsku i orbitalnu M1 funkciju odziva za jezgru  $^{48}\text{Ca}$ . Odgovarajuće sume diskretnog spektra snage prijelaza  $\sum_E B(M1)(E)$  su  $10.38 \mu_N^2$ ,  $10.40 \mu_N^2$ , i  $5.35 \times 10^{-3} \mu_N^2$ . Slično kao i u jezgri sa većim masenim brojem,  $^{208}\text{Pb}$ , spinska snaga prijelaza je znatno veća, odnosno četiri reda veličine veća od orbitalne  $\sum_E B_{M1}^\sigma(E) \gg \sum_E B_{M1}^\ell(E)$ .



**Slika 3.4:** Isto kao na slici 3.2, ali za  $^{48}\text{Ca}$ . Spinska i ukupna funkcija odziva koincidiraju.

Iz analize dominantnog vrha spektra M1 snage prijelaza na 8.48 MeV, nalazimo da se sastoji od neutronske, spin-flip, prijelaza ( $\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ ). Dominantni neutronske i protonski doprinosi  $B_{M1}$  snazi prijelaza nalaze se u tablici 3.3 i upravo pokazuju da je neutronska komponenta spin-flip prijelaza znatno veća u odnosu na protonsku.

**Tablica 3.3:** Parcijalni neutronske i protonski doprinosi ( $b_{ph}^{\nu,\pi}$ ) M1 snazi prijelaza i puna snaga prijelaza  $B_{M1}$  za dominantni vrh na 8.48 MeV jezgre  $^{48}\text{Ca}$ .

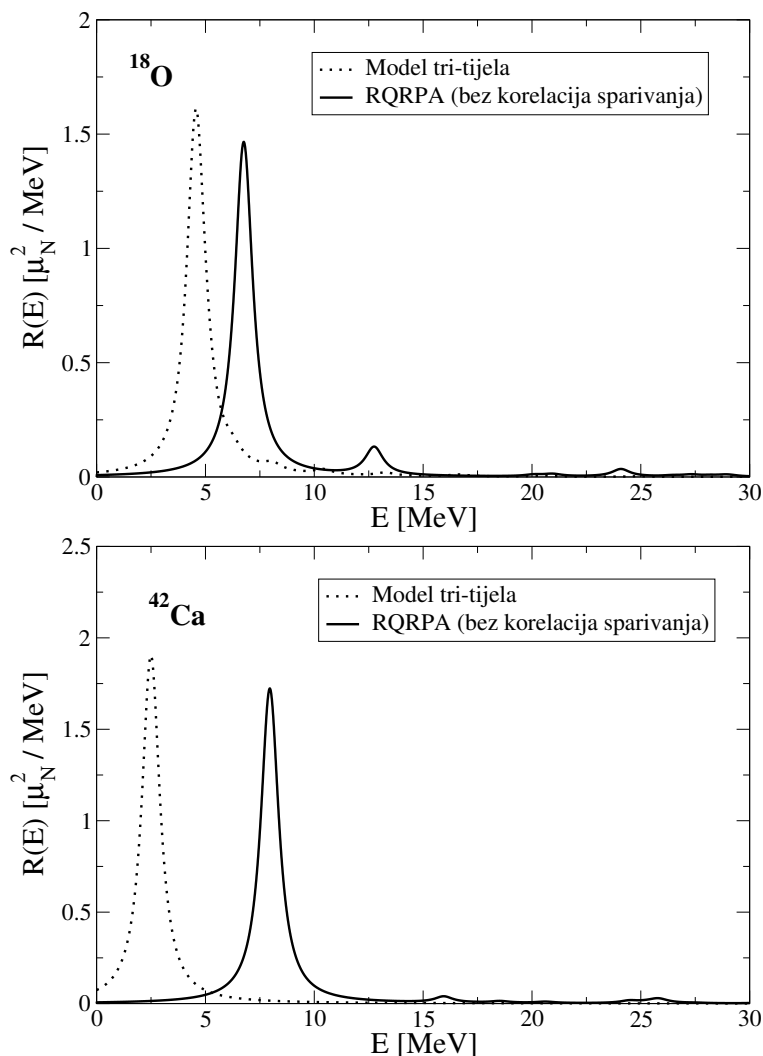
$E_{vrh}^{teor.}$ [MeV]	$b_{ph}^{\nu}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$b_{ph}^{\pi}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$B_{M1}(E)$ [ $\mu_N^2$ ]
8.48	3.18	$4.04 \times 10^{-4}$	9.96

U eksperimentalnim istraživanjima M1 spin-flip rezonanci neelastičnim raspršenjem protona na  $^{48}\text{Ca}$  [37], dominantan rezonantni vrh se nalazi na  $E_{vrh}^{eksp.} = 10.22$  MeV, to je neutronske ( $\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ ) prijelaz. Mjerena snaga prijelaza je  $\sum_E B_{M1}(E) = 3.85-4.63 \mu_N^2$  [37]. U referenci [37] su također analizirani podatci reakcije  $^{48}\text{Ca}(p, n)$  iz ref. [206], a rezultat je vrijednost u intervalu  $\sum_E B_{M1}(E) = 3.45-4.10 \mu_N^2$ . Usporedba teorijskih RRPA rezultata aktualne analize  $\sum_E B_{M1}(E) = 10.38, \mu_N^2$  pokazuje da su dobivene vrijednosti pune snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  veće od eksperimentalnih. Primjećujemo da u drugoj vrsti eksperimentalnih istraživanja ( $\gamma, n$ ) reakcijom [207], rezultati su dva puta veći nego u eksperimentima sa ( $p, p'$ ) reakcijom [37],  $\sum_E B_{M1}(E) = 6.8 \pm 0.5 \mu_N^2$ , što ukazuje da s eksperimentalne strane pitanje M1 prijelaza još nije razriješeno u potpunosti. Iako znatno veći, ti rezultati su i dalje ispod numeričkih vrijednosti dobivenih aktualnim teorijskim istraživanjem.



### 3.1.3 Pravilo sume za M1 prijelaze

Za provjeru konzistentnosti numeričkih proračuna nuklearnih pobuđenja, kao što su gigantske rezonancije, koristimo pravila sume koja zapravo ne ovise o teorijskom modelu kao što se može vidjeti u [87, 177, 208–211]. Analitička pravila sume dobro su poznata za električne prijelaze dok za magnetske prijelaze ne postoje osim u, nedavno razvijenom, posebnom slučaju [29] koji koristimo kao analitički test naših R(Q)RPA proračuna. Za M1 pobuđenja u ref. [29] razvijeno je pravilo sume bez usrednjavanja po energiji (NEWSR) ( $m_{k=0}$ ) za točno određene sustave koji se sastoje od jezgre sa zatvorenim ljuskama plus dva valentna nukleona bilo protona bilo neutrona kao npr. jezgre  $^{18}\text{O}$  i  $^{42}\text{Ca}$ . Ako zanemarimo korelacije sparivanja između valentnih nukleona pokazano je da, za određene sustave u modelu tri-tijela, postoji analitičko NEWSR pravilo sume za M1 tip pobuđenja.



**Slika 3.5:** Distribucija M1 snage prijelaza za  $^{18}\text{O}$  (gornji panel) i  $^{42}\text{Ca}$  (donji panel) u okviru RRPA proračuna sa DD-PC1 parametrizacijom. Za usporedbu su prikazani rezultati u modelu tri-tijela bez korelacija sparivanja iz ref. [29].

**Tablica 3.4:** NEWSR ( $m_{k=0}$ ) za M1-funkciju odziva u jezgrama  $^{18}\text{O}$  i  $^{42}\text{Ca}$  u okviru RRPA proračuna. Za usporedbu je prikazan analitički rezultat iz ref. [29].

Jezgra	$\sum_E B_{M1}(E) [\mu_N^2]$ ( $m_0$ , ovaj rad)	NEWSR ( $m_0$ ) [ $\mu_N^2$ ] iz [29]
$^{18}\text{O}$	2.73	2.79
$^{42}\text{Ca}$	2.91	2.99

Na slici 3.5 prikazana je funkcija odziva  $R(E)$  2.9 za jezgre  $^{18}\text{O}$  i  $^{42}\text{Ca}$ , rezultati pokazuju dominantan vrh za svaki od referentnih sistema. Tablica 3.4 pokazuje sumu snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  i pravila sume NEWSR za M1 prijelaze u jezgrama  $^{18}\text{O}$  i  $^{42}\text{Ca}$  dobivene u okviru RRPA proračuna. Vrijednosti  $m_0$  su proračunate jednadžbom (2.26), što uključuje M1-snagu prijelaza do 50 MeV. Za usporedbu, navedeni su numerički NEWSR rezultati iz ref. [29]. Aktualni RRPA proračun reproducira NEWSR vrijednosti za jezgre  $^{18}\text{O}$  i  $^{42}\text{Ca}$ . Naime, relativistički RRPA proračun, u kojem su zanemarene korelacije sparivanja, pokazuje identične rezultate kao i model tri-tijela za koje vrijedi analitičko pravilo sume. Time smo zapravo pokazali da identični NEWSR rezultati u modelu tri-tijela i Hartree+RRPA modelu, za nuklearne sustave kada analitičko pravilo sume vrijedi, implicira da novorazvijeni Hartree+RRPA model daje korektne rezultate M1-snage prijelaza i u slučajevima kada analitičko pravilo sume ne vrijedi, odnosno kada atomsku jezgru kao nuklearni sustav ne možemo svesti na model tri-tijela. Malo odstupanje u numeričkim vrijednostima RRPA u odnosu na analitički NEWSR rezultat modela tri-tijela pripisujemo rezanju konfiguracijskog prostora modela i drugim numeričkim nepreciznostima.

Kao što je pokazano na slici 3.5, RRPA energija M1 pobuđenja nije identična kao u slučaju modela tri-tijela iz ref. [29]. Ta razlika je posljedica različite strukture otvorenih ljusaka reproduciranih dvama modelima. Međutim, s obzirom na to da pravilo sume ne ovisi o energiji pobuđenja<sup>1</sup>, analize oba modela potvrđuju očekivane vrijednosti M1 snage prijelaza i time opravdavaju rezultate mikroskopskog Hartree+RRPA modela.

<sup>1</sup>Izraz za k-ti moment distribucije snage prijelaza inducirane jednočestičnim hermitskim operatorom  $\hat{O}_\lambda$ , kako je već ranije pokazano, dan je izrazom,

$$m_k = \sum_\nu (E_\nu - E_0)^k |\langle \nu | \hat{O}_\lambda | \tilde{\Phi}_0 \rangle|^2. \quad (3.2)$$

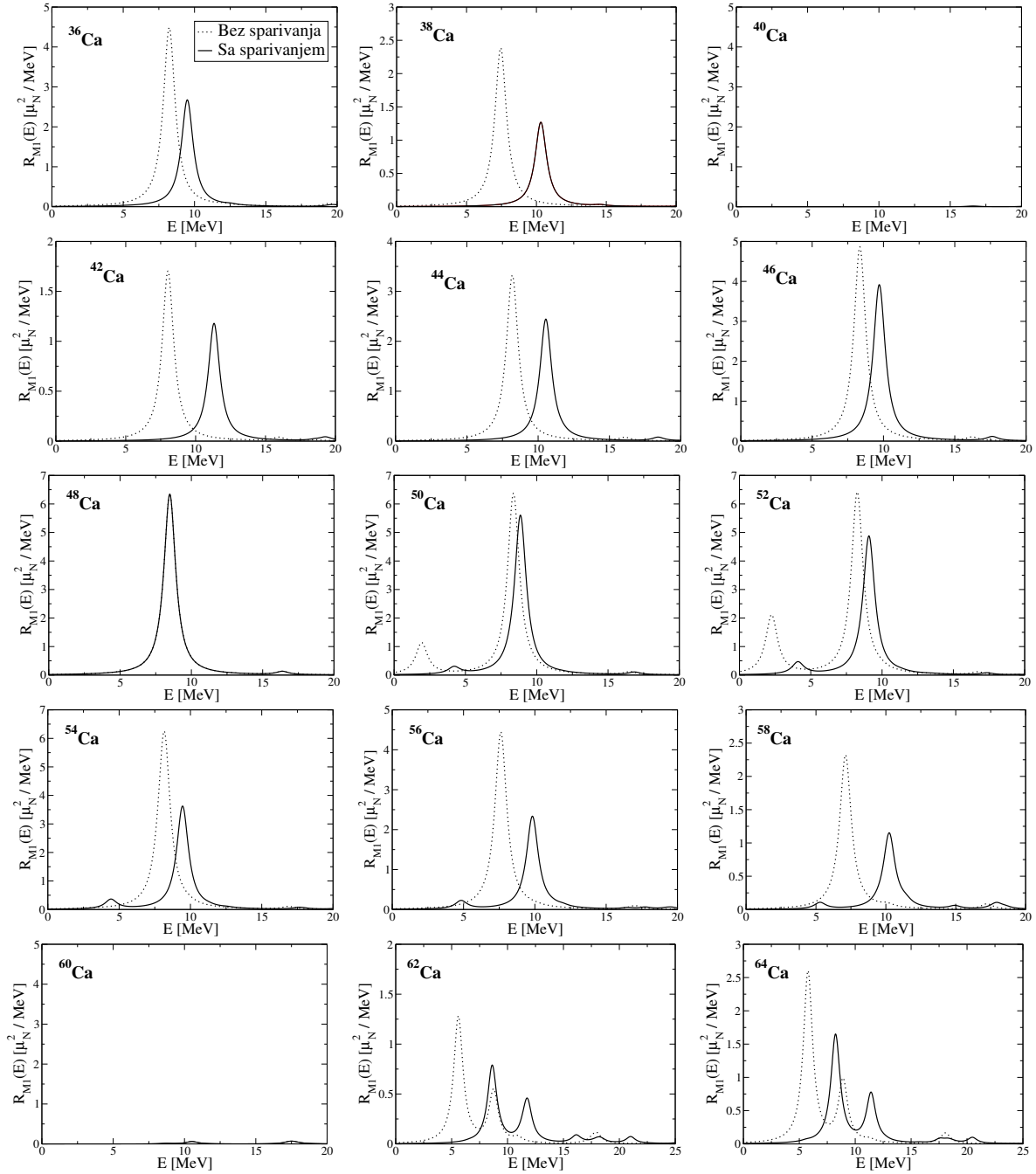
S obzirom na to da multi moment ( $k = 0$ ) osnovnog stanja jezgre  $|\Phi\rangle_0$  i pobuđenog stanja jezgre  $|\nu\rangle$  bez korelacija sparivanja,

$$m_0 = \sum_\nu |\langle \nu | \hat{O}_\lambda | \Phi_0 \rangle|^2, \quad (3.3)$$

ne ovisi o energiji pobuđenja, ili drugim riječima ne ovisi o razlici energija ( $E_\nu - E_0$ ) osnovnog i pobuđenog stanja, konačni rezultat ne ovisi o relativnom položaju dominantnog vrha u funkciji odziva  $R(E)$ .

### 3.1.4 Ovisnost M1 pobuđenja o izotopnoj i izotonskoj strukturi

U ovom poglavlju su istraženi M1 prijelazi iz  $0^+$ - osnovnog stanja na  $1^+$  - pobuđeno stanje jezgre za parno-parne  $Z = 20$  (Ca) i  $Z = 50$  (Sn) izotope te  $N = 20$  izotone u okviru RHB+RQRPA modela. Razmatrani su višestruki vezani sustavi nukleona, odnosno atomskih jezgara, u osnovnom stanju za izotope kalcija ( $N = 16-44$ ) i kositra ( $N = 50-90$ ) kao i izotone  $N=20$ ,  $Z = 10-24$ .

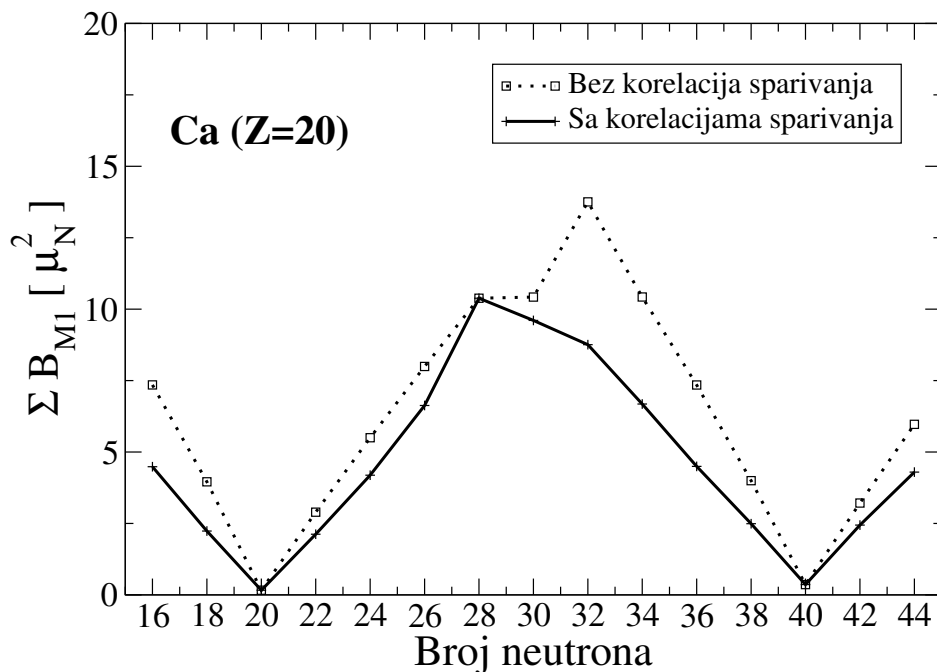


**Slika 3.6:** M1 ( $0^+ \rightarrow 1^+$ ) funkcija odziva  $R_{M1}(E)$  za izotope  $^{36-64}\text{Ca}$ . Rezultati sa DD-PC1 parametrizacijom RNEDF funkcionala i Gogny-D1S parametrizacijom čestično-čestičnih korelacija sparivanja (puna linija) i bez korelacija sparivanja (isprekidana linija).

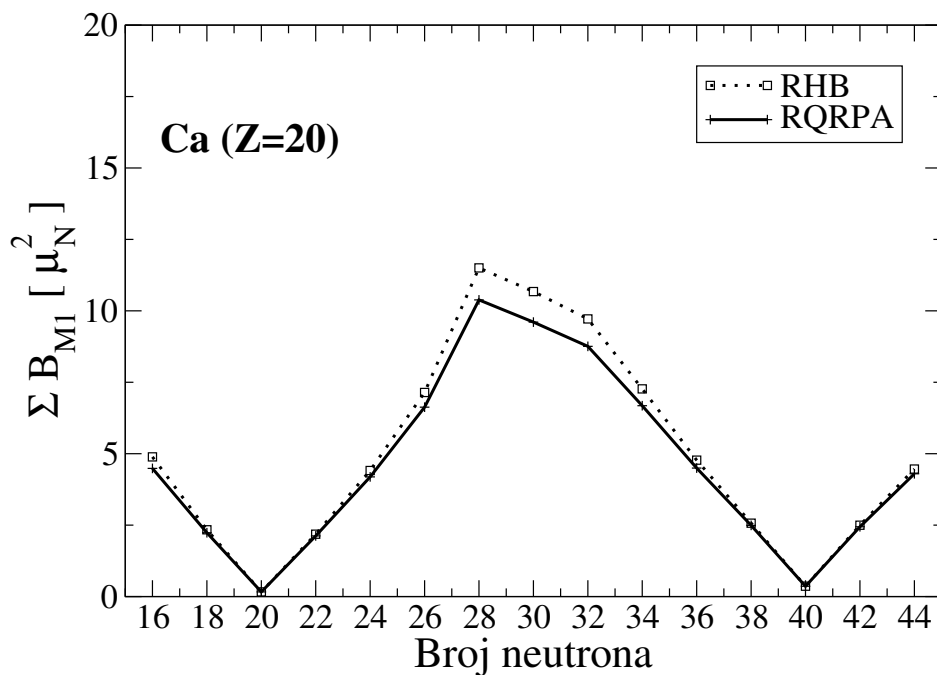
Izračuni su zasnovani na DD-PC1 funkcionalu, a korelacije sparivanja opisane Gogny-D1S interakcijom. Slika 3.6 prikazuje funkcije odziva M1 prijelaza za izotope  $^{36-64}\text{Ca}$  konvoluirane Lorentzianom širine 1.0 MeV. U slučaju jezgre  $^{40}\text{Ca}$ , M1 funkcija odziva u potpunosti iščezava. To se događa jer ne postoje spin-orbit (SO) partneri dostupni za M1 prijelaze: u osnovnom stanju jezgre  $^{40}\text{Ca}$ , sva ( $1p_{3/2}$  &  $1p_{1/2}$ ) i ( $1d_{5/2}$  &  $1d_{3/2}$ ) stanja su potpuno zauzeta i stoga M1 prijelazi nisu dopušteni. Dopušteni prijelazi iz vezanog  $1d_{5/2}$  stanja na  $d_{3/2}$  stanje u kontinuumu su potisnuti zbog toga što je preklapanje radijalnih dijelova valnih funkcija malo. Isto ponašanje možemo uočiti za jezgru  $^{60}\text{Ca}$  s 40 neutrona, gdje su sva neutronska stanja do  $2p_{1/2}$  i  $1f_{5/2}$  stanja zauzeta. Konačno, pokazano je da su izotopi kalcija s brojem neutrona 20 i 40 primjeri u izotopnom lancu gdje nema M1 prijelaza [8]. Potisnuće M1 prijelaza potvrđeno je i u slučaju kada zanemarimo korelacije sparivanja.

Na slici 3.6 možemo pratiti evoluciju M1 odziva preko izotopnog lanca jezgara  $^{36-64}\text{Ca}$ , s dominantnim vrhom u spektru funkcije odziva. Dominantan vrh posljedica je M1 pobuđenja valentnih neutrona dok je 20 protona neaktivno u smislu M1 pobuđenja. Isti zaključak možemo primijeniti i na  $N = 20$  izotonsku strukturu pokazanu na slici 3.9 ali su sada uloge protona i neutrona zamijenjene.

Također je bitno istaknuti slučaj kada korelacije sparivanja nisu uzete u obzir, kako je prikazano na slici 3.6. Naime, za  $^{36-38}\text{Ca}$ ,  $^{42-58}\text{Ca}$ , i  $^{62-64}\text{Ca}$  izotopne lance ne postoji miješanje konfiguracija, odnosno M1 prijelaze možemo objasniti dominantnim neutronske konfiguracije ( $\nu 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{3/2}$ ), ( $\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ ) i ( $\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2}$ ). Takvo ponašanje upravo očekujemo iz strukture navedenih jezgara u modelu ljusaka. Za izotope  $^{50-52}\text{Ca}$ , drugi vrh na nižim energijama se javlja zbog ( $\nu 2p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{1/2}$ ) prijelaza. S obzirom na to da su stanja SO-partnera  $1f_{5/2}$  i/ili  $2p_{1/2}$  zauzeta, za jezgre  $^{54-60}\text{Ca}$ , takvi blokirani neutronske konfiguracije značajno reduciraju M1 pobuđenja.



**Slika 3.7:** Suma M1-snage prijelaza za lanac izotopa Ca sa (puna linija) i bez (isprekidana linija) korelacija sparivanja.



**Slika 3.8:** Suma M1-snage prijelaza za izotopni lanac Ca. Razlika M1 snage prijelaza RHB odziva i punog RQRPA računa posljedica je rezidualne interakcije.

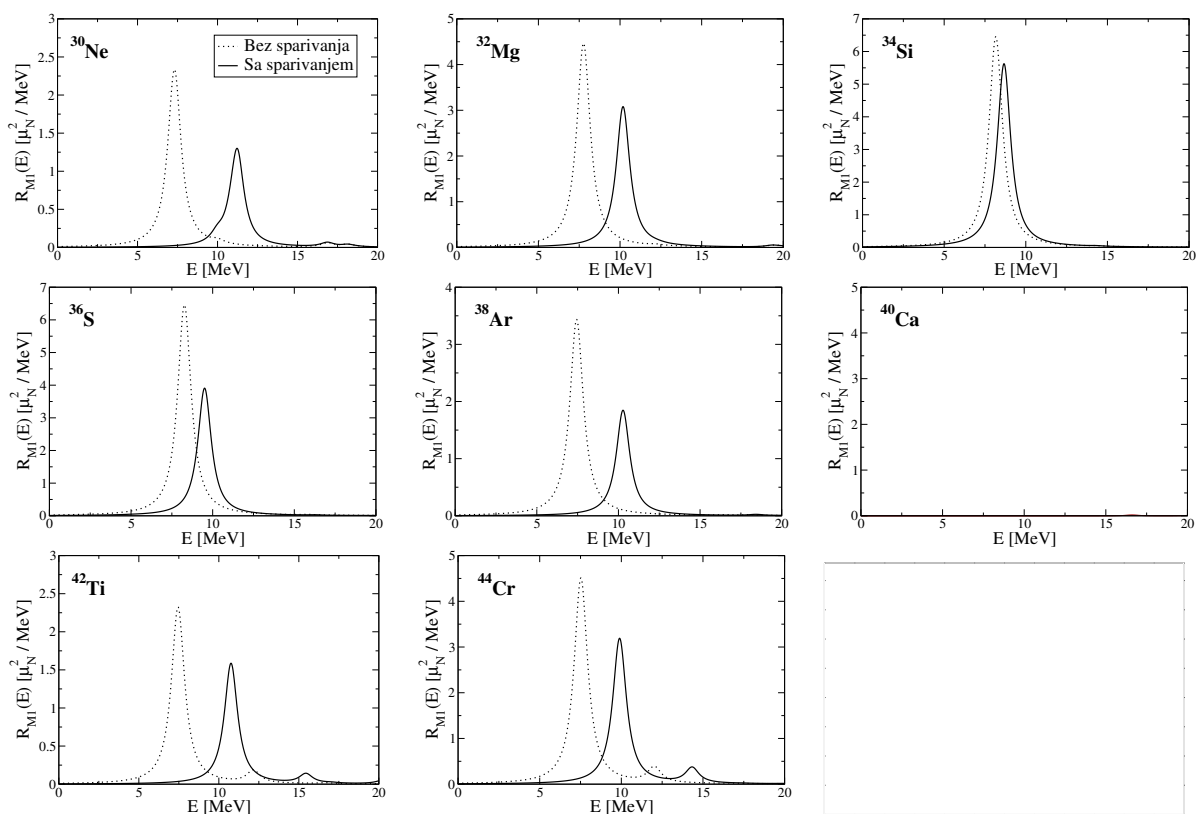
Slika 3.7 prikazuje sumu diskretnog spektra M1 snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  (odnosno  $m_0$ ) za izotopni lanac kalcija. Rezultati pokazuju snažnu ovisnost ukupne snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  o M1-aktivnim nukleonima, a što se može objasniti analizom dvo-kvazičestičnih konfiguracija u dominantnom M1 vrhu. Prvi slučaj je razmatranje bez korelacija spari-

vanja. Za  $^{40-60}\text{Ca}$ , dominantna M1 pobuđenja su neutronske prijelazi ( $\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ ) i ( $\nu 2p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{1/2}$ ). Vrijednost ukupne snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  varira, povećava se ili smanjuje, ovisno o jezgri u izotopnom lancu odnosno ovisno o aktivnim i blokiranim neutronske orbitalama. U drugom slučaju, kada su korelacije sparivanja uključene u razmatranje, vrijednost ukupne snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  je manja u usporedbi sa slučajem bez korelacija sparivanja. Opisana svojstva sa i bez korelacija sparivanja jasno su vidljiva i na slici 3.6.

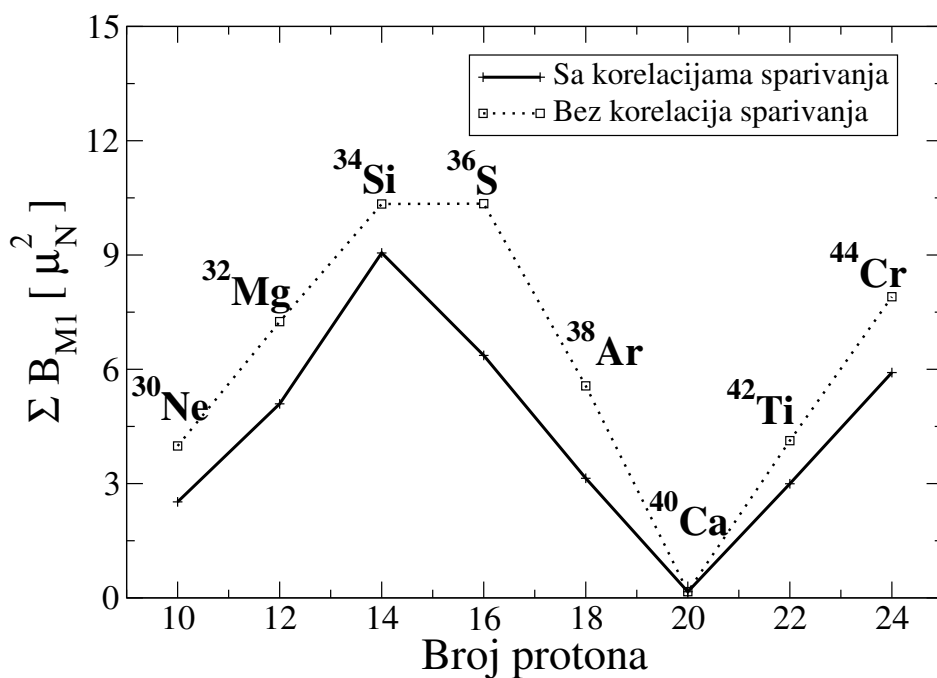
Kada je D1S interakcija sparivanja u čestično-čestičnom kanalu uključena u proračun, M1 snaga prijelaza je djelomično reducirana kako je pokazano na slici 3.7. To možemo razumjeti iz S0-spin singlet sparivanja gdje D1S korelacija sparivanja, kada je S0 komponenta nukleonskog kvazičestičnog para u osnovnom stanju dominantna njegov M1 odziv je potisnut [29]. Također korelacije sparivanja mogu inducirati različita miješanja konfiguracija, na primjer za  $^{42-46}\text{Ca}$  smo potvrdili da je dominantna komponenta ( $\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ ) ali istovremeno i ( $\nu 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{3/2}$ ) prijelaz također doprinosi u dominantnom vrhu spektra M1 snage prijelaza. Taj efekt uzrokovan je razmazivanjem Fermijeve plohe u RHB rješenju zbog korelacija sparivanja i stoga je  $1d_{3/2}$  stanje djelomično zauzeto. Kao generalno pravilo, korelacije sparivanja pomiču energiju pobuđenja M1 prijelaza prema višim energijama. Treba istaknuti da su moguća određena odstupanja ovisno o izabranom modelu korelacija sparivanja kao u [29].

Ista svojstva možemo identificirati i u  $N = 20$  izotonskom lancu kao što je pokazano na slikama 3.9, 3.10 i 3.11. Sada promatramo izotonski lanac ( $N = 20$ ) jezgara  $^{30}\text{Ne}$ ,  $^{32}\text{Mg}$ ,  $^{34}\text{Si}$ ,  $^{36}\text{Si}$ ,  $^{38}\text{Ar}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{42}\text{Ti}$  i  $^{44}\text{Cr}$  pri tome su jezgre izotonskog lanca  $^{36}\text{Si}$ ,  $^{38}\text{Ar}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{42}\text{Ti}$  i  $^{44}\text{Cr}$  zrcalne jezgre, zrcalne u smislu zamjene protona neutronima i obrnuto, (*engl. mirror nuclei*) parno-parnih jezgara izotopnog lanca  $^{36-44}\text{Ca}$ . Eksperimentalna istraživanja su pokazala da su proton-proton i neutron-neutron interakcija identične ako zanemarimo Coulombovu interakciju između dva protona. To svojstvo nazivamo nabojnom simetrijom (*engl. charge symmetry*). Također je pokazano da proton-proton, neutron-neutron i proton-neutron interakcije možemo smatrati identičnima što je svojstvo neovisnosti nuklearne interakcije o električnom naboju (*engl. charge independence*) [212, 213]. Dakle, zamjenom neutrona protonima i obrnuto ne očekujemo značajnije promjene u energijskom spektru zrcalne jezgre izotonskog lanca, odnosno u konkretnom slučaju snage prijelaza, u odnosu na jezgru istog masenog broja u izotopnom lancu. Približna neovisnost nuklearne sile o električnom naboju još se naziva i izospinska simetrija, u teorijskim istraživanjima ekvivalentna je zahtjevu da Hamiltonijan nuklearne interakcije komutira sa svim generatorima infinitezimalnih rotacija u izospinskom prostoru. Dakle, riječ je o približnoj simetriji nuklearnog Hamiltonijana koja je slomljena zbog elektromagnetske interakcije. Dominantni uzrok slamanja izospinske simetrije je Coulombova interakcija između protona jer Hamiltonijan koji sadrži Coulombovu interakciju, reprezentiranu u

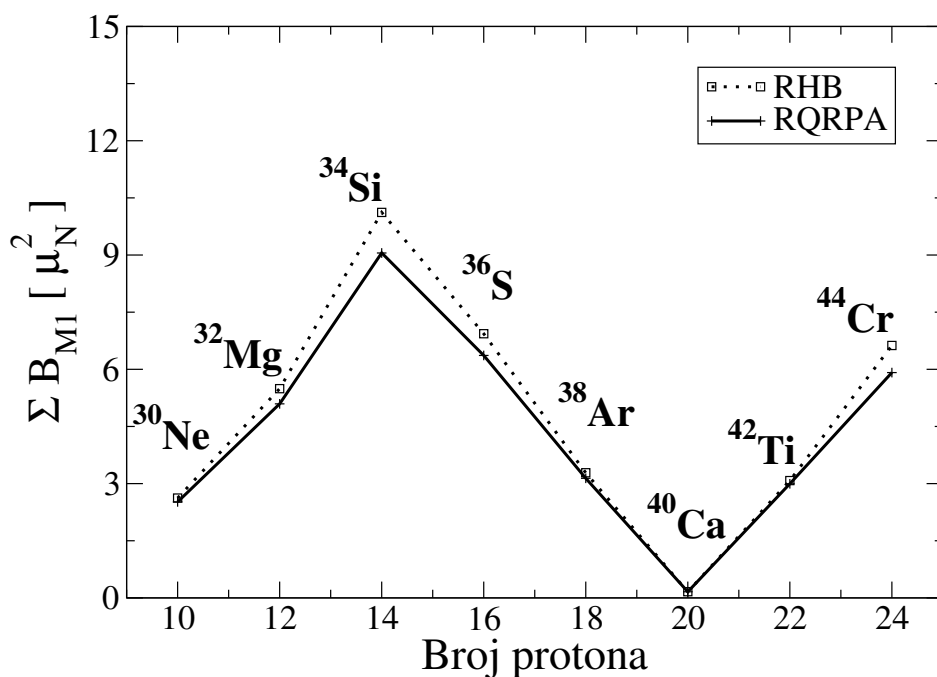
izospinskom prostoru, ne komutira sa svim generatorima rotacije u izospinskom prostoru [214]. Kao drugi, manje izražen, izvor slamanja izospinske simetrije je razlika u masama protona i neutrona. Naime, da bi simetrija bila egzaktna svi članovi izo-multiplleta moraju imati ista intrinzična svojstva; masu, spin, naboj itd. S obzirom na to da za nuklearnu interakciju možemo reći da ne ovisi o električnom naboju, jedini preostali izvor slamanja izospinske simetrije je razlika u masama izo-dupleta odnosno protona i neutrona. Na slici 3.9 istražen je utjecaj korelacija sparivanja na spektar snage prijelaza izotonskog ( $N = 20$ ) lanca, gdje korelacije sparivanja pomiču dominantni vrh u funkciji odziva  $R_{M1}(E)$  prema višim energijama. S druge strane na slici 3.10 istog izotonskog ( $N = 20$ ) lanca jasno je prikazana redukcija ukupne snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  uzrokovana korelacijama sparivanja. Konačno, na slici 3.11 prikazan je utjecaj rezidualnih interakcija, sva tri efekta prisutna u izotonskom ( $N = 20$ ) lancu već smo prethodno uočili u izotopnom Ca lancu kao što je, zbog izospinske simetrije, i očekivano.



**Slika 3.9:** M1 ( $0^+ \rightarrow 1^+$ ) funkcija odziva  $R_{M1}(E)$  za  $N = 20$  izotonski lanac. Rezultati s DD-PC1 parametrizacijom RNEDF funkcionala i Gogny-D1S parametrizacijom korelacija sparivanja (puna linija) i bez korelacija sparivanja (isprekidana linija).



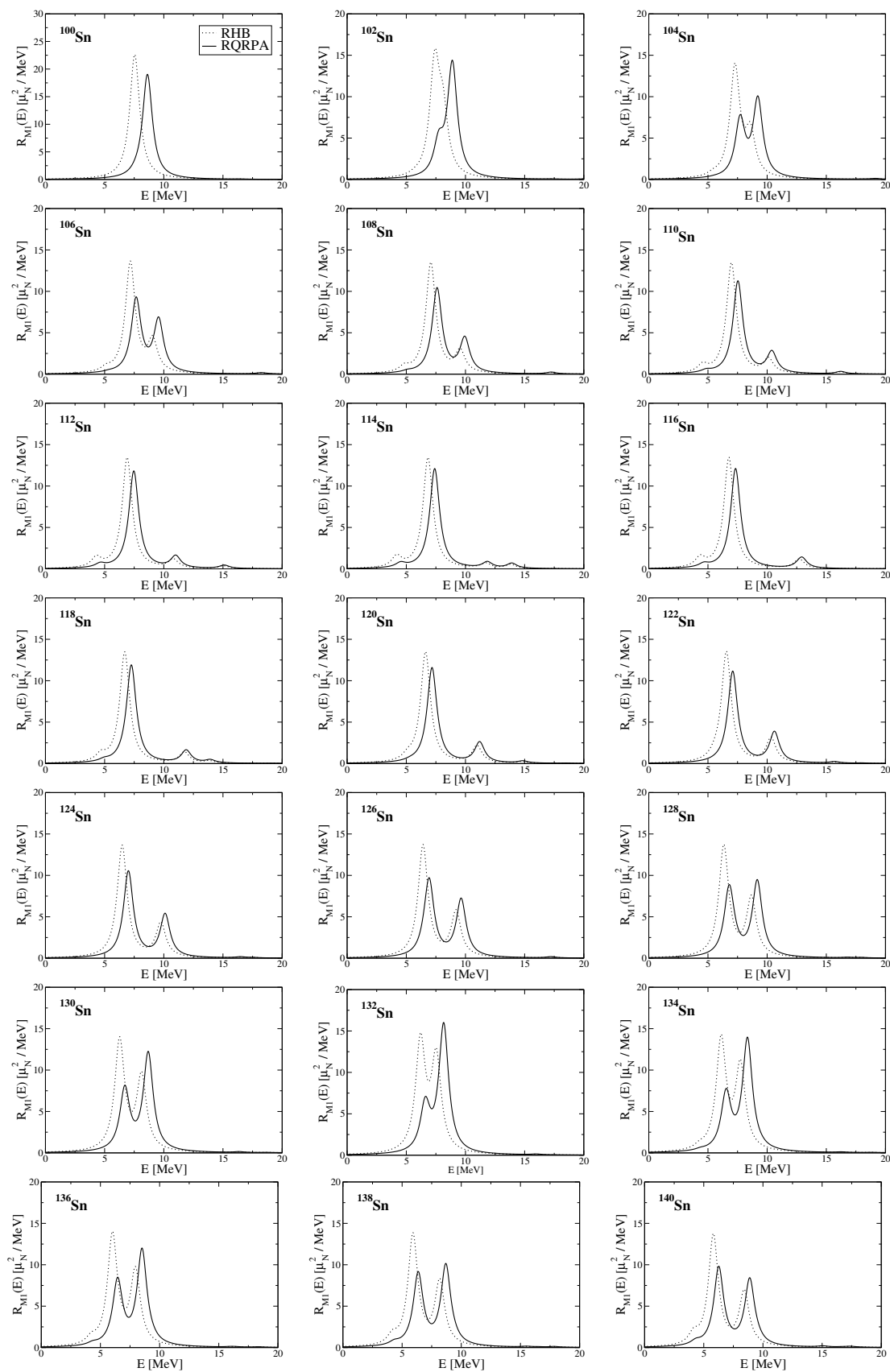
**Slika 3.10:** Suma M1-snage prijelaza izotonskog lanca ( $Z = 20$ ), sa i bez korelacija sparivanja.



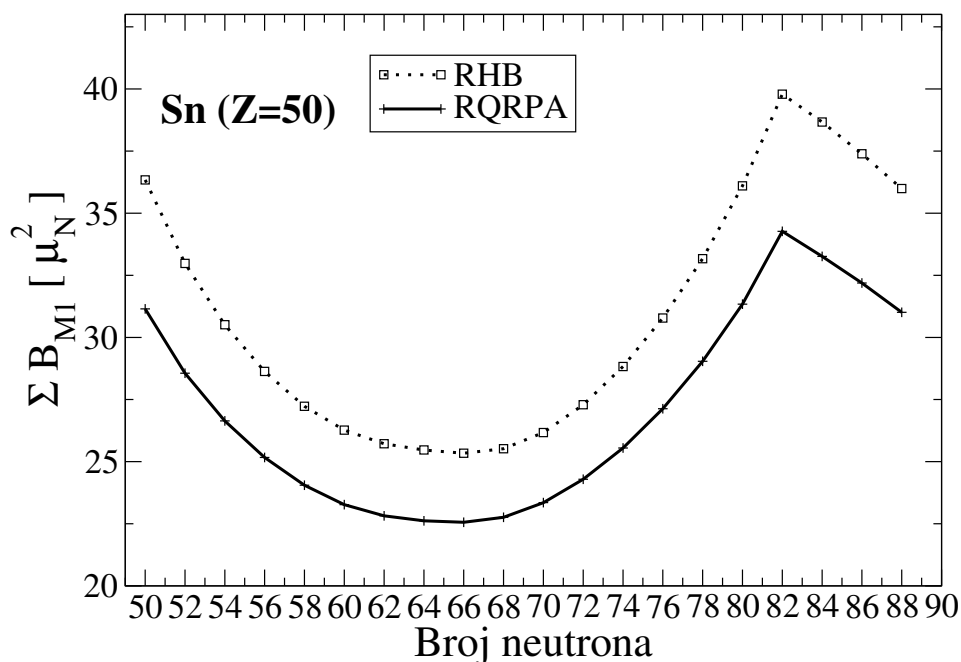
**Slika 3.11:** Suma M1-snage prijelaza izotonskog lanca ( $Z = 20$ ), za RHB odziv i puni RQRPA izračun.

Drugačija izotopna ovisnost  $\sum_E B_{M1}(E)$  snage prijelaza parno-parnih jezgara kositra Sn, iako su mehanizmi redukcije snage prijelaza slični kao i u slučaju izotopnog lanca Ca, pokazana je na slici 3.13. Minimum snage prijelaza na jezgri  $^{116}\text{Sn}$  jasno je vidljiv i na funkciji odziva na slikama 3.12.



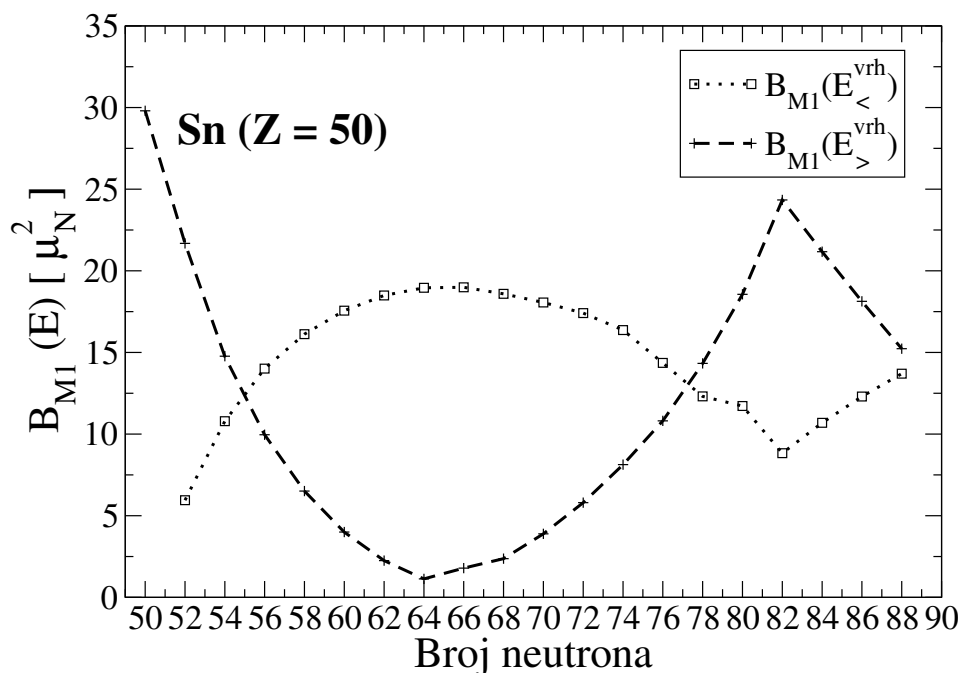


**Slika 3.12:** M1 ( $0^+ \rightarrow 1^+$ ) funkcija odziva za izotope  $^{100-140}\text{Sn}$ ,  $R_{M1}(E)$ . Rezultati s DD-PC1 parametrizacijom RNEDF funkcionala i Gogny-D1S parametrizacijom korelacija sparivanja.

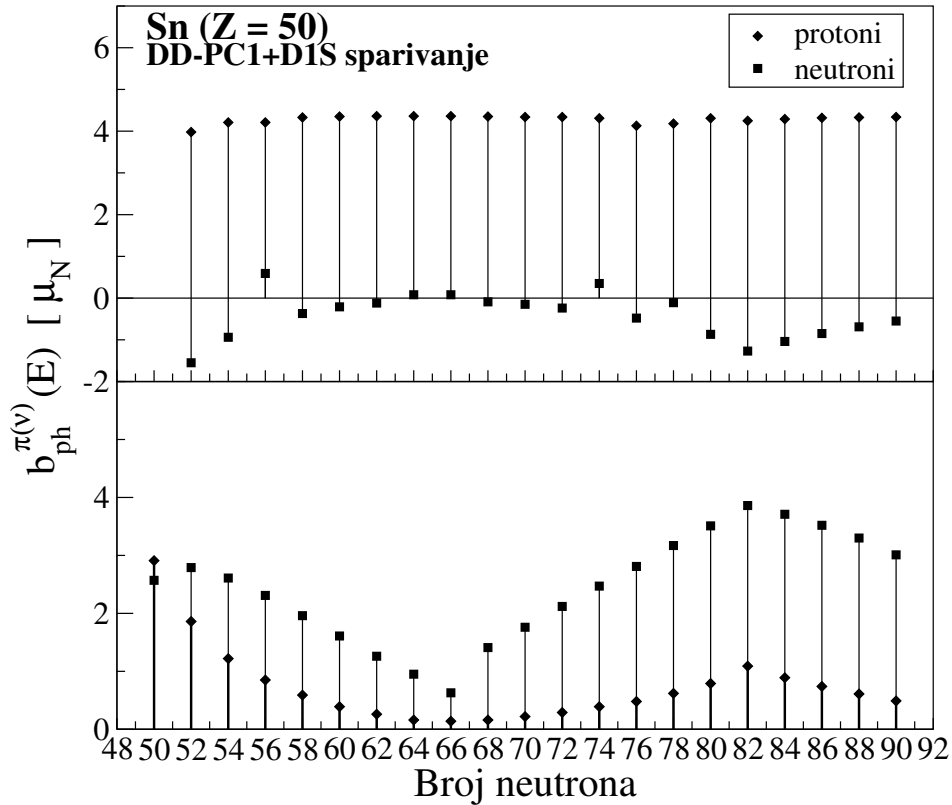


**Slika 3.13:** Suma M1-snage prijelaza za  $^{100-140}\text{Sn}$  izotopni lanac.

Na slikama 3.12 prikazani su spektri funkcije odziva  $R_{M1}(E)$  izotopnog lanca Sn gdje su istaknuta se dva vrha, na nižoj  $E_{<}^{vrh}$  i na višoj  $E_{>}^{vrh}$  energiji. Analiza parcijalnih snaga prijelaza u dominantnim vrhovima funkcije odziva prikazana je na slici 3.14 a detalji su dani tablicom 3.7. U okviru ovog rada razmatrani su nezavisni protonski i neutronski kvazičestični parovi, drugim riječima zanemarene su proton-neutron interakcije.



**Slika 3.14:** Parcijalne snage prijelaza  $B_{M1}(E)$  na dominantnim vrhovima funkcije odziva  $R_{M1}(E)$  prikazanim na slikama 3.12 na nižoj  $E_{<}^{vrh}$  odnosno višoj  $E_{>}^{vrh}$  energiji u izotopnom lancu  $^{100-140}\text{Sn}$ .



**Slika 3.15:** Doprinosi parcijalnoj snazi prijelaza  $b_{ph}^{\pi(\nu)}(E)$  za protone ( $\pi$ ) i neutrone ( $\nu$ ) na dominantnim vrhovima funkcije odziva  $R_{M1}(E)$  sa slike 3.12 na vrhovima niže  $E_{<}^{vrh}$  (panel gore) odnosno više  $E_{>}^{vrh}$  (panel dolje) energije u izotopnom lancu  $^{100-140}\text{Sn}$ .

Pokazalo se korisnim analizu parcijalne snage prijelaza na dominantnim vrhovima na nižoj  $E_{<}^{vrh}$  odnosno višoj  $E_{>}^{vrh}$  energiji sa slike 3.14 separirati na protonsku i neutronska komponentu parcijalne snage prijelaza kako je pokazano na slici 3.15. Parcijalnu snagu prijelaza  $B_{M1}(E)$  računamo, kako smo već pokazali, sljedećom relacijom,

$$B_{M1}(E) = \left| b_{ph}^{\pi}(E) + b_{ph}^{\nu}(E) \right|^2, \quad (3.4)$$

pri tome su  $b_{ph}^{\pi(\nu)}(E)$  protonski ( $\pi$ ) odnosno neutronska ( $\nu$ ) doprinosi parcijalnoj snazi prijelaza na energiji  $E$ . Struktura prijelaza dvostruko magične jezgre  $^{100}\text{Sn}$  pokazuje podjednake parcijalne snage prijelaza ( $\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2}$ ) neutronske i ( $\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2}$ ) protonskog dijela spektra. Na slici 3.14 jasno je uočljivo prelijevanje snage prijelaza između dva dominantna vrha u spektru funkcije odziva. Spektar analiziramo upravo s obzirom na energije pobuđenja na nižoj ( $E_{<}^{vrh}$ ) odnosno višoj energiji ( $E_{>}^{vrh}$ ). Za dio izotopnog lanca  $^{100-116}\text{Sn}$  i vrhove spektra na nižoj energiji ( $E_{<}^{vrh}$ ) imamo dominantne protonske prijelaze ( $\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2}$ ), dok neutroni čija stanja leže dublje u potencijalu srednjeg polja a koja su popunjena iznad zatvorene neutronske ljuske ( $N = 50$ ) pokazuju gotovo zanemariv odziv. Stanja na višim energijama ( $E_{>}^{vrh}$ ), za isti dio izotopnog lanca, pokazuju aktivaciju neutrona na dominantnim prijelazima ( $\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2}$ ) dok je protonski doprinos vrlo

mali. Minimum ukupne snage prijelaza sa slike 3.13 nalazi se na  $N = 66$ , izotopu  $^{116}\text{Sn}$ , gdje dominira parcijalna snaga protonskog prijelaza ( $\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2}$ ) dok je doprinos neutronskog prijelaza ( $\nu 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{3/2}$ ) zanemariv. Proračunata snaga prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  varira u iznosu  $\approx 22 - 34 \mu_N^2$  duž izotopnog Sn lanca. S druge strane za dio izotopnog lanca  $^{118-132}\text{Sn}$  kao što i očekujemo, za konstantan broj protona, i dalje su aktivni protonski prijelazi ( $\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2}$ ) na nižoj energiji pobude ( $E_{<}^{vrh}$ ). Dok se na višoj energiji ( $E_{>}^{vrh}$ ) aktiviraju neutronske ( $\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 8h_{9/2}$ ) i ( $\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2}$ ) orbitale čije parcijalne snage prijelaza  $b_{ph}^{\nu}(E)$  rastu, i uzrok su porasta ukupne snage prijelaza na slici 3.13, sve do zatvorene neutronske ljuske ( $N = 82$ ) jezgre  $^{132}\text{Sn}$ . Pad ukupne snage prijelaza u dijelu izotopnog lanca  $^{132-140}\text{Sn}$  jasno je izražen na slici 3.13. Posljedica je popunjavanja neutronske orbitale ( $\nu 1h_{9/2}$ ) za izotope s brojem neutrona većim od ( $N > 82$ ) pa su prijelazi ( $\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2}$ ) manje vjerojatni.

Ako pogledamo gornji panel slike 3.15 koji pokazuje protonske i neutronske doprinose parcijalnoj snazi prijelaza dominantnog vrha funkcije odziva  $R_{M1}(E)$  na  $E_{<}^{vrh}$  nižoj energiji, vidimo da, ovisno o jezgri, relativan predznak  $b_{ph}^{\pi}(E)$  protonskog odnosno  $b_{ph}^{\nu}(E)$  neutronskog doprinosa može biti negativan pa govorimo o destruktivnoj interferenciji protona i neutrona u parcijalnoj snazi prijelaza. Protonska komponenta, na nižim energijama, je gotovo konstantna dok neutronska ovisno o izotopu mijenja iznos i predznak tako da parcijalna snaga prijelaza varira kako je pokazano na slici 3.14.

S druge strane na višim energijama  $E_{>}^{vrh}$ , relativan predznak protonskog i neutronskog doprinosa je pozitivan, pa govorimo o konstruktivnoj interferenciji protonskog i neutronskog doprinosa u parcijalnoj snazi prijelaza  $B_{M1}(E)$ . Parcijalna snaga prijelaza varira po izotopnom lancu ovisno o popunjenosti neutronske odnosno protonske orbitale. Detaljna analiza teorijski proračunate parcijalne snage prijelaza  $B_{M1}(E)$  za jezgre izotopa kositra  $^{100-140}\text{Sn}$  na nižim  $E_{<}^{vrh}$  odnosno višim  $E_{>}^{vrh}$  energijama dominantnih vrhova spektra reducirane snage prijelaza sa slike 3.12 odnosno slike 3.14 nalazi se u tablicama 3.7, 3.8 i 3.9. Istaknute su neutronske odnosno protonske parcijalne snage prijelaza  $b_{ph}^{\nu}(E)$  i  $b_{ph}^{\pi}(E)$  s izmjenom spina  $j_{>} = \ell + 1/2 \leftrightarrow j_{<} = \ell - 1/2$  (*engl. spin-flip*) i odgovarajući prijelazi.

U tablici 3.5 uspoređujemo izračunate energije M1 pobuđenja i snage prijelaza za jezgre  $^{116,120,124}\text{Sn}$  s podacima dostupnim iz istraživanja s polariziranim fotonima [55] i nuklearnom rezonantnom fluorescencijom (NRF)[56]. U jezgri  $^{116}\text{Sn}$ , R(Q)RPA raspodjelom snage prijelaza dominira M1 vrh na 7.33 MeV, koji je vrlo blizu izmjerene pobuđenja na 7.92 MeV, iako sa znatno manjom vrijednosti snage prijelaza  $B_{M1}(E)$ . Za jezgre  $^{120}\text{Sn}$  i  $^{124}\text{Sn}$ , dobije se funkcija odziva s dva vrha, što rezultira razumnim slaganjem s dostupnim eksperimentalni podacima (tablica 3.5). Međutim, vrijednost snage prijelaza  $B_{M1}(E)$  za niskoenergijsko stanje u jezgri  $^{120}\text{Sn}$  čini se znatno većim od eksperimentalnog. Primjećujemo da u našim proračunima nije uključeno gušenje (*engl. quenching*) spinskih žiromagnetskih faktora  $g$  protona i neutrona, kao što je predloženo u prethodnim istra-

živanjima [55]. Kao što je istaknuto u ref. [56], nedostatak snage prijelaza M1 u NRF mjerenjima pokazatelj je značajne fragmentacije M1 snage prijelaza velikog broja relativno slabih pojedinačni prijelaza koji se nisu mogli otkriti aktualnom rezolucijom detektora.

**Tablica 3.5:** M1 energije pobuđenja  $E_{vrh}^{teor.}$  (u MeV-ima) i odgovarajuće snage prijelaza  $B_{M1}^{teor.}$  (u  $\mu_N^2$  jedinicama) za jezgre  $^{116}\text{Sn}$ ,  $^{120}\text{Sn}$  i  $^{124}\text{Sn}$ , proračunate koristeći R(Q)RPA sa DD-PC1 parametrizacijom funkcionala. Eksperimentalni podatci za jezgre  $^{116}\text{Sn}$  i  $^{124}\text{Sn}$  su preuzeti iz ref. [56] dok su za  $^{120}\text{Sn}$  iz ref. [55].

	$E_{vrh}^{teor.}$	$B_{M1}^{teor.}$	$E_{vrh}^{eksp.}$	$B_{M1}^{eksp.}$
$^{116}\text{Sn}$	7.33	18.99	7.92	0.28
	12.94	1.79	*	*
$^{120}\text{Sn}$	7.17	18.06	7.3 - 9.3	8.8
	11.18	3.89	*	*
$^{124}\text{Sn}$	7.01	16.70	6.80	*
	10.10	8.13	8.25	*

$$\sum_E B_{M1}^{eksp.}(E) = 0.61$$

\* Ne postoje dostupni podatci za individualni rezonantni vrh.

U novom eksperimentalnom istraživanju s neelastičnim raspršenjem protona, podatci o M1 prijelazima dostupni su za jezgre  $^{112,114,116,118,120,124}\text{Sn}$  [54]. Iako mjerenja rezultiraju prilično širokom raspodjelom snage prijelaza jasno je prikazana struktura s dva rezonantna vrha za jezgre  $^{120,124}\text{Sn}$ , rezultati se kvalitativno slažu s rezultatima R(Q)RPA proračuna. Za jezgre  $^{112,114,116,118}\text{Sn}$ , rezultati eksperimenta pokazuju jedan široki rezonantni vrh u spektru snage prijelaza, što je u skladu s jednim dominantnim M1 vrhom R(Q)RPA proračuna. Za kvantitativnu usporedbu, tablica 3.6 prikazuje ukupnu snagu M1 prijelaza u jezgrama  $^{112-124}\text{Sn}$  (također vidjeti sliku 3.13), zajedno s eksperimentalnim podacima neelastičnog raspršenja protona [54]. Zaključujemo da se je ukupna proračunata snaga prijelaza  $B_{M1}$  veća od eksperimentalnih vrijednosti i nema sustavne ovisnosti o broju neutrona.

Ova usporedba pokazuje da u eksperimentu možda nedostaje dio M1 spektra snage prijelaza. Zapravo, kako je objašnjeno u ref. [54], eksperimentalni rezultati iznad energija odvajanja neutrona imaju ograničenu točnost zbog sličnosti M1 i fenomenološkog kontinuuma kutne raspodjele u analizi dekompozicije multipola (MDA). Sadašnji teorijski rezultati istraživanja M1 prijelaza, zajedno s novim eksperimentalnim podacima [54] predstavljaju značajan napredak u odnosu na prethodna istraživanja gušenja (*engl. quenching*) žiromagnetskog faktora i nedostatka M1 snage prijelaza (*engl. missing strength problem*),

jer se nesklad između teorije i eksperimenta značajno smanjuje, npr. za jezgru  $^{114}\text{Sn}$ , omjer ukupnih vrijednosti  $B_{M1}$  iznosi samo 1.15, a za jezgru  $^{118}\text{Sn}$  je 1.23 itd. (vidi tablicu 3.6). Na primjer, za prethodno sustavno istraživanje temeljeno na Gogny interakciji taj faktor je 2, potreban za reprodukciju eksperimentalnih podataka [8]. Tablica 3.6 također prikazuje omjer efektivnog  $g^\sigma$ -spinskog faktora uključujući gušenje ( $g_{ef.}^\sigma$ ) s obzirom na  $g^\sigma$ -spinski faktor za slobodne nukleone ( $g_{slob.}^\sigma$ ), gdje se faktor gušenja određuje na način da reproduciramo eksperimentalne podatke snage M1 prijelaza svake parno-parne jezgre izotopnog lanca  $^{112-124}\text{Sn}$ . Pod pretpostavkom da se gušenje odnosi na spinske protonske i neutronske žiromagnetske faktore, kako je objašnjeno u dodatku (K), koji su uključeni u operator M1 prijelaza, rezultati pokazuju  $g_{ef.}^\sigma/g_{slob.}^\sigma = 0.80-0.93$ , tj. veće vrijednosti od vrijednosti korištenih u prethodnim istraživanjima  $g_{ef.}^\sigma/g_{slob.}^\sigma \approx 0.6-0.75$  [16, 17, 55, 57–59], tj. gušenje  $g_{slob.}^\sigma$  spinskog faktora potrebno za reprodukciju snage M1 prijelaza je manje. Kao što je već spomenuto, budući da dio eksperimentalnih podataka iznad neutronskog praga možda nedostaje, rezultati ovog istraživanja pokazuju da stvarno gušenje g-faktora u nuklearnom mediju može biti vrlo malo u usporedbi s g-faktorima slobodnih nukleona. Naravno, potrebna su dodatna eksperimentalna istraživanja da bismo imali konačnu potvrdu. Kako smo već naveli, globalni faktor gušenja  $\zeta_s$  protonskih ( $\pi$ ) i neutronskih ( $\nu$ ) spinskih žiromagnetzskih faktora objašnjen je u poglavlju dodatka (K), i vrijedi,

$$\zeta_s = \frac{g_{ef.}^{\sigma \pi(\nu)}}{g_{slob.}^{\sigma \pi(\nu)}} = \sqrt{\frac{B_{M1}^{eksp.}(E)}{B_{M1}^{teor.}(E)}}. \quad (3.5)$$

**Tablica 3.6:** Ukupna R(Q)RPA (DD-PC1) snaga prijelaza  $\sum_E B_{M1}^{teor.}(E)$  (u  $\mu_N^2$  jedinicama) za jezgre  $^{112-124}\text{Sn}$  u usporedbi sa eksperimentalnim podacima neelastičnog raspršenja protona iz ref. [54]. Zadnji stupac ( $g_{ef.}^\sigma/g_{slob.}^\sigma$ ) je globalni faktor gušenja  $\zeta_s$  slobodnih nukleona protona i neutrona, nužan da bi reproducirali eksperimentalne M1 snage prijelaza.

	$\sum_E B_{M1}^{teor.}(E)$	$\sum_E B_{M1}^{eksp.}(E)$	$\zeta_s = g_{ef.}^\sigma/g_{slob.}^\sigma$
$^{112}\text{Sn}$	22.81	14.7(1.4)	0.80
$^{114}\text{Sn}$	22.61	19.6(1.9)	0.93
$^{116}\text{Sn}$	22.56	15.6(1.3)	0.83
$^{118}\text{Sn}$	22.76	18.4(2.4)	0.89
$^{120}\text{Sn}$	23.34	15.4(1.4)	0.81
$^{124}\text{Sn}$	25.55	19.1(1.7)	0.86

**Tablica 3.7:** Teorijski proračun parcijalne snage prijelaza  $B_{M1}(E) = \left| \sum_{ph} b_{ph}^\nu(E) + \sum_{ph} b_{ph}^\pi(E) \right|^2$  za jezgre izotopa kositra (Sn) na nižim  $E_{<}^{vrh}$  odnosno višim  $E_{>}^{vrh}$  energijama dominantnih vrhova spektra reducirane snage prikazanih na slici 3.12. Pri tome su  $b_{ph}^\nu(E)$  i  $b_{ph}^\pi(E)$  neutronske odnosno protonske parcijalne snage prijelaza s izmjenom spina (*engl. spin-flip*,  $j_{>} = \ell + 1/2 \leftrightarrow j_{<} = \ell - 1/2$ ).

Broj neutrona	$E_{<}^{vrh} (>) [\text{MeV}]$	$B_{M1}(E) [\mu_N^2]$	$b_{ph}^\nu(E) [\mu_N]$	$b_{ph}^\pi(E) [\mu_N]$	$j_{>} \leftrightarrow j_{<}$
N = 50	8.62	29.81	2.57	2.91	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 52	7.74	5.94	-1.55	3.98	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 54	8.89	21.69	-2.79	-1.86	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 56	7.71	10.79	0.94	-4.21	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 58	9.21	14.79	2.61	1.23	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 60	7.66	13.99	0.59	-4.29	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 62	9.56	9.96	-2.31	-0.85	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 64	7.59	16.12	0.37	-4.33	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 66	9.93	6.51	1.96	0.59	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 68	7.53	17.57	-0.21	4.35	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 70	10.39	4.00	-1.61	-0.39	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 72	7.47	18.49	0.12	-4.36	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 74	10.99	2.25	-1.26	-0.26	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$

**Tablica 3.8:** Nastavak tablice 3.7 za interval broja neutrona  $N = 64 - 76$  parno-parnih Sn izotopa.

Broj neutrona	$E_{<(>)}^{vrh}$ [MeV]	$B_{M1}(E)$ [ $\mu_N^2$ ]	$b_{ph}^{\nu}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$b_{ph}^{\pi}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$j_{>} \leftrightarrow j_{<}$
N = 64	7.40	18.97	-0.08	-4.36	$(\nu 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{3/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
					$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
	11.83	1.14	-0.95	-0.16	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
					$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 66	7.33	18.99	0.08	4.36	$(\nu 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{3/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
					$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
	12.94	1.79	0.63	0.14	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 68	7.26	18.59	-0.09	4.35	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
					$(\nu 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{3/2})$
	11.88	2.38	1.41	0.16	$(\nu 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{7/2})$
					$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 70	7.17	18.06	0.15	-4.34	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	11.18	3.89	1.76	0.22	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
N = 72	7.09	17.41	-0.24	4.34	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	10.61	5.80	2.12	0.29	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
N = 74	7.01	16.38	0.35	-4.31	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	10.10	8.13	2.47	0.39	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
N = 76	6.93	14.36	-0.48	4.13	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
					$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	9.63	10.82	2.81	0.48	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$
				$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$	

\* Neutronske parcijalne snage prijelaza istog reda veličine, dok je red veličine protonskih parcijalnih snaga prijelaza dva i više redova veličina manji od dominantnog protonskog doprinosa pa ih ne navodimo.



**Tablica 3.9:** Nastavak tablice 3.7 za interval broja neutrona  $N = 78 - 90$  parno-parnih Sn izotopa.

Broj neutrona	$E_{<(>)}^{vrh}$ [MeV]	$B_{M1}(E)$ [ $\mu_N^2$ ]	$b_{ph}^{\nu}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$b_{ph}^{\pi}(E)$ [ $\mu_N$ ]	$j_{>} \leftrightarrow j_{<}$
N = 78	6.78	12.31	-0.56	4.18	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	9.16	14.33	-0.11	*	$(\nu 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{3/2})$ $(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 80	6.71	11.72	0.87	-4.31	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	8.68	18.56	-3.51	-0.79	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 82	6.60	8.83	-1.27	4.25	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	8.16	24.34	3.86	1.09	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 84	6.53	10.69	1.04	-4.29	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	8.34	21.17	3.71	0.89	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 86	6.45	12.30	-0.85	4.32	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	8.51	18.14	-3.52	-0.74	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 88	6.36	13.71	0.69	-4.33	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	8.69	15.23	3.30	0.61	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
N = 90	6.26	14.92	0.55	-4.34	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$
	8.88	12.25	-3.01	-0.49	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1h_{9/2})$ $(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1g_{7/2})$

\* Neutronske parcijalne snage prijelaza istog reda veličine, dok je red veličine protonskih parcijalnih snaga prijelaza dva i više redova veličina manji od dominantnog protonskog doprinosa pa ih ne navodimo.

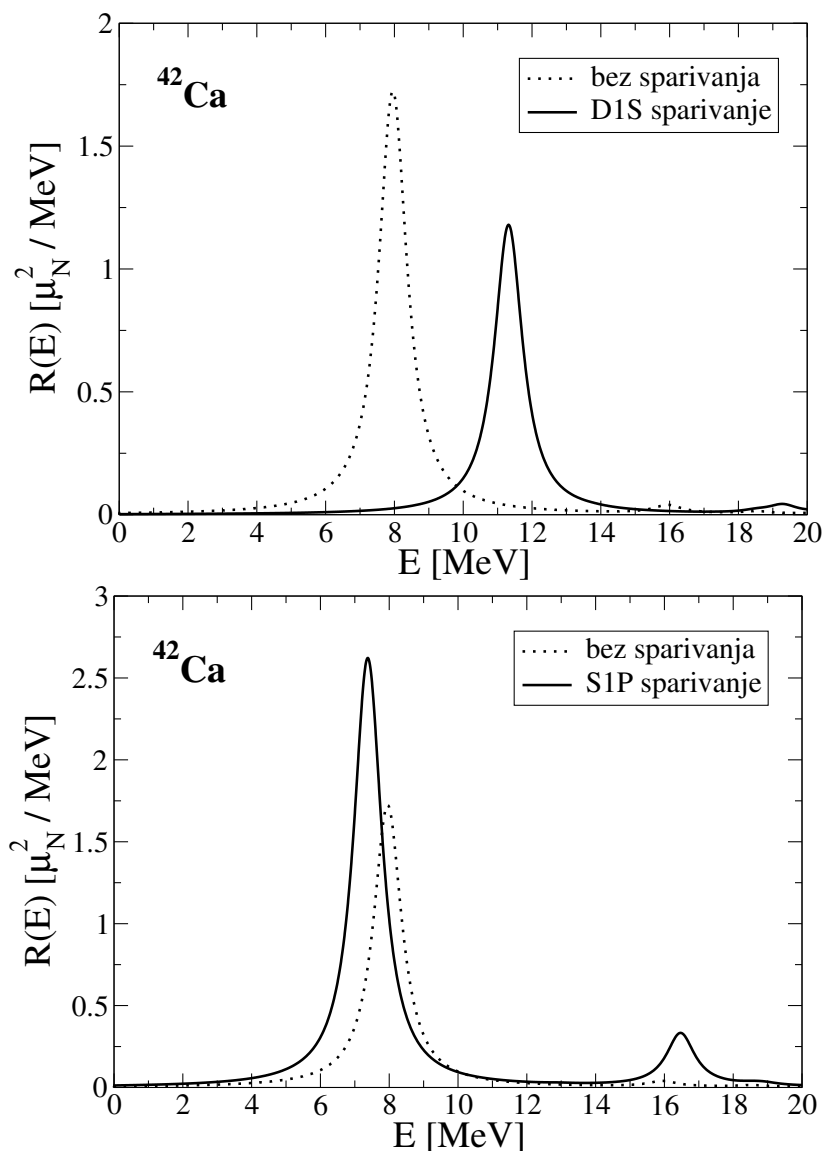
### 3.1.5 Učinci korelacija sparivanja na M1 prijelaze

U ovom poglavlju primijenjujemo RHB+RQRPA model u opisu M1 pobuđenja jezgara sa otvorenim ljuskama, s posebnim osvrtom na učinke korelacija sparivanja nukleona. U ovom modelu su korelacije sparivanja uključene konzistentno u osnovnom stanju atomske jezgre i u RQRPA rezidualnoj interakciji. Osnovni cilj je istražiti, u kvantitativnom smislu, utjecaj korelacija sparivanja na M1 pobuđenja. Osjetljivost M1 prijelaza na korelacije sparivanja po prvi puta je razmatrana u okviru modela tri-tijela ref. [29], dok u ovom poglavlju razmatramo iste aspekte ali temeljem mikroskopskog modela zasnovanog na RNEDF-u. Da bismo istražili osjetljivost M1 snage prijelaza na različite parametrizacije Gogny korelacija sparivanja, osim D1S [215] primijenjena je i S1P parametrizacija. S1P parametrizacija promovira spin-triplet ( $S_{12} = 1$ ) konfiguraciju kvazičestičnih parova nukleona. Spin-triplet član S1P parametrizacije prilagođen je da simulira tzv. *Minnesota* potencijal koji rezultira privlačnom silom u oba, spin-triplet ( $S_{12} = 1$ ) i spin-singlet ( $S_{12} = 0$ ), kanala [216–219]. S druge strane  $S_{12} = 0$  kanal S1P parametrizacije prilagođen je da reproducira istu dvo-neutronska ( $S_{2n}$ ) energiju separacije izotopa  $^{42}\text{Ca}$  proračunatu D1S parametrizacijom.

Kao prvi primjer razmatramo jezgru  $^{42}\text{Ca}$ , sustav s otvorenom neutronska ljuskom koji je također prethodno proučavan u okviru modela tri-tijela [29] bez korelacija sparivanja. Na slici 3.16 prikazani su rezultati RHB+RQRPA snage M1 prijelaza u usporedbi sa graničnim slučajem bez korelacija sparivanja. Korelacije sparivanje uključujemo/isključujemo istovremeno u osnovnom stanju i rezidualnoj R(Q)RPA interakciji. Puni RQRPA odziv pokazuje jedan dominantan vrh na 11.32 MeV čija je struktura prijelaza uglavnom jedan neutronska prijelaz ( $\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ ). Ako usporedimo sa vrhom dobivenim RRPA proračunom, bez korelacija sparivanja, uočavamo da korelacije sparivanja pomiču rezonantni vrh prema višim energijama pobuđenja za nekoliko MeV-a i istovremeno uzrokuju redukciju snage prijelaza. Pomak energija pobuđenja rezonantnog vrha prema višim energijama uslijed korelacija sparivanja u kvantitativnom smislu je vidljiv u tablici 3.10. Napomenimo da su u oba slučaja, RRPA i RQRPA, sve kontaktne interakcije pa i izovektorska-pseudovektorska uključene a modificiramo energiju tenzora korelacija sparivanja  $\Delta_n$  na način da je  $\Delta_n = 0$  (RRPA) odnosno  $\Delta_n \neq 0$  (RQRPA) svakog kvazičestičnog para nukleona.

**Tablica 3.10:** Energija dominantnih vrhova  $E_{vrh}^{teor.}$  i odgovarajućih vrijednosti parcijalne snage prijelaza  $B_{M1}(E)$  za jezgre  $^{42}\text{Ca}$  i  $^{50}\text{Ti}$ , izračunati sa (RQRPA) i bez (RRPA) korelacija sparivanja za dvije različite parametrizacije, D1S [215] i S1P [193].

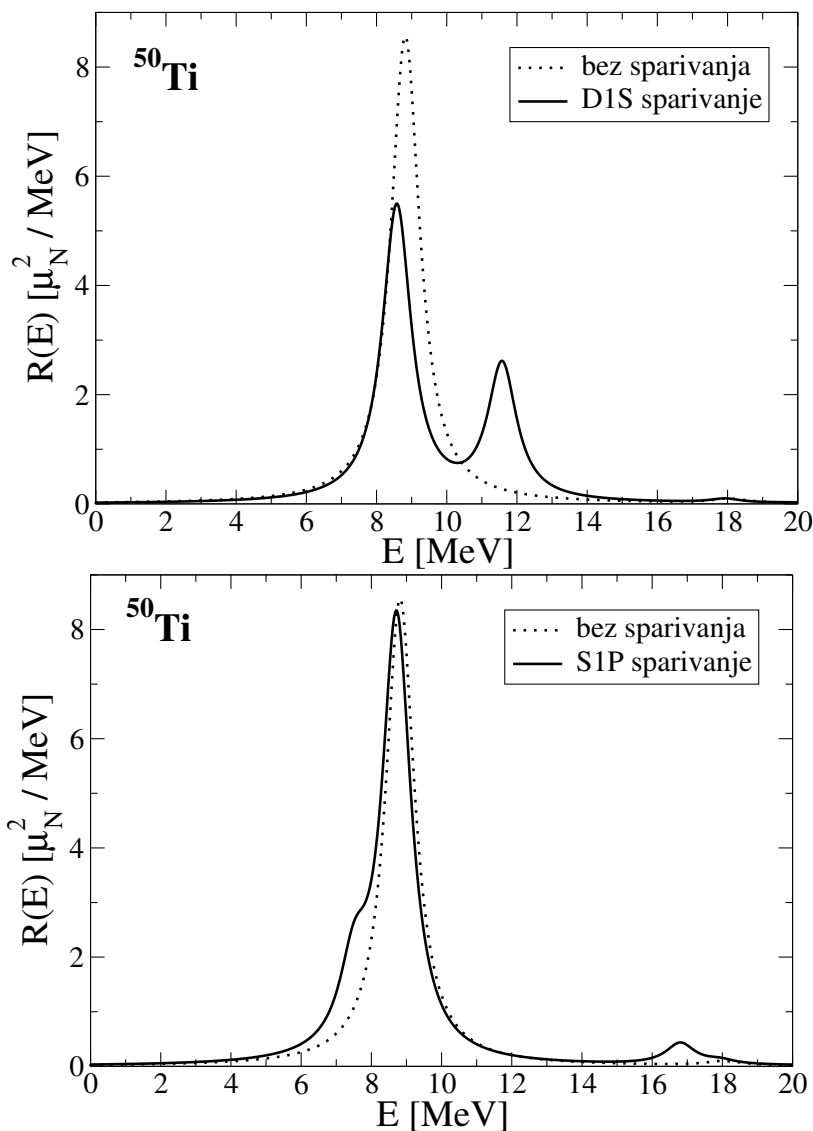
Jezgra	Metoda	$E_{vrh}^{teor.}$ [MeV]	$B_{M1}(E)$ [ $\mu_N^2$ ]
<b>D1S</b>			
$^{42}\text{Ca}$	RRPA	7.95	2.92
	RQRPA	11.32	2.12
$^{50}\text{Ti}$	RRPA	8.82	13.86
	RQRPA	8.58	8.53
		11.57	3.88
<b>S1P</b>			
$^{42}\text{Ca}$	RQRPA	7.38	4.11
		16.47	0.51
$^{50}\text{Ti}$	RQRPA	8.71	12.76
		16.81	0.61



**Slika 3.16:** RHB+RQRPA odziv jezgre  $^{42}\text{Ca}$  za M1 prijelaze s DD-PC1 parametrizacijom energijskog funkcionala gustoće i Gogny interakcijom sparivanja. Funkcija odziva bez (RRPA) i sa (RQRPA) korelacijama sparivanja pokazane su zasebno, kao i rezultati za dvije varijante interakcije sparivanja, D1S i S1P.

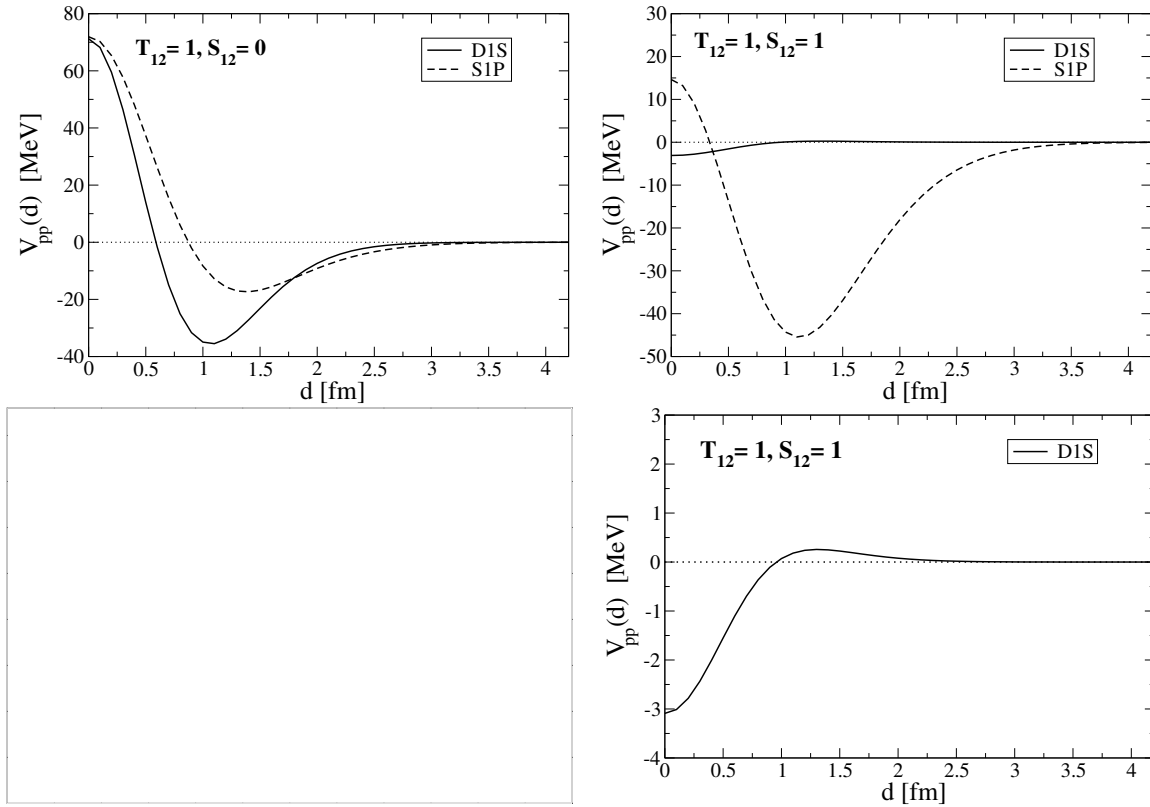
Sljedeći sustav od interesa je jezgra  $^{50}\text{Ti}$ , gdje su M1 pobuđenja eksperimentalno istražena [220]. Možemo iskoristiti te podatke kao referentnu točku na osnovu koje možemo zaključiti o razini preciznosti, značaju korelacija sparivanja i potencijalnim poboljšanjima aktualnih RQRPA proračuna. Na slici 3.17, prikazani su aktualni rezultati sa i bez korelacija sparivanja. Odgovarajuća svojstva M1 prijelaza u kvantitativnom smislu su prikazana u tablici 3.10. U jezgri  $^{50}\text{Ti}$ , korelacije sparivanja uzrokuju razdvajanje jednog vrha na dva:  $E_{vrh}^{teor.} = 8.58$  i  $11.57$  MeV. Takva struktura sa dva vrha potvrđena je i u eksperimentu na  $E_{vrh}^{eksp.} \cong 8.7$  i  $10.2$  MeV [220]. Stoga vidimo da aktualni RQRPA proračun kvalitativno reproducira generalnu strukturu. Također je evidentno manje odstupanje proračunatih energija pobuđenja od empirijskih vrijednosti i u tom smislu možemo razmišljati o daljnjem

razvoju ili optimizaciji u okviru postojećeg RNEDF formalizma. Istaknimo još jednom, da eksperimentalni podatci sadrže znatno više fragmenata u strukturi snage prijelaza, i stoga teorijska istraživanja sugeriraju uzimanje u razmatranje kompleksnijih konfiguracija, npr.  $2p2h$ . RQRPA proračun pokazuje da struktura dva dominantna M1 vrha jezgre  $^{50}\text{Ti}$  uglavnom proizlazi iz protonskih ( $\pi 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{5/2}$ ) i neutronskih ( $\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2}$ ) prijelaza. Naime, zbog zatvorenih ljusaka na  $Z = N = 20$ , dominantne komponente M1 prijelaza posljedica su pobuđenja valentnih nukleona, dva protona i osam neutrona u  $1f_{7/2}$  orbitali.



Slika 3.17: Isto kao na slici 3.16 ali za  $^{50}\text{Ti}$ .

Na slici 3.18 prikazan je  $V_{pp}(d)$  čestično-čestični potencijal u ovisnosti o udaljenosti dva nukleona  $d$  za izotriplet ( $T_{12} = 1$ ), spin-singlet ( $S_{12} = 0$ ) i spin-triplet ( $S_{12} = 1$ ) kombinacije te dvije različite Gogny parametrizacije korelacija sparivanja u čestično-čestičnom kanalu D1S [215] i S1P [193]. Pri tome je S1P novouvedena parametrizacija koja promovira spin-triplet ( $S_{12} = 1$ ) konfiguraciju kvazičestičnih parova nukleona.



**Slika 3.18:** Gogny  $V_{pp}(d)$  čestično-čestični potencijal sparivanja za dvije različite, D1S [215] i S1P [193] parametrizacije, u ovisnosti o udaljenosti između nukleona  $d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ . Prikazane su konfiguracije izo-triplet ( $T_{12} = 1$ ) u izospinskom te spin-singlet ( $S_{12} = 0$ ) i spin-triplet ( $S_{12} = 1$ ) u prostoru spina dva nukleona.

Primijetimo da su doprinosi korelacija sparivanja u čestično-čestičnom kanalu rezidualne RQRPA interakcije, opisane D1S-Gogny interakcijom, konačni ali vrlo mali za M1 prijelaze iz  $0^+$ -osnovnog na  $1^+$ -pobuđeno stanje. Glavnina doprinosa korelacija sparivanja posljedica je svojstava osnovnog stanja atomske jezgre gdje je, zbog populacije koeficijenata zauzeća  $u_\kappa$  i  $v_\kappa$ , energija sparivanja  $\Delta_n \neq 0$  za jezgre s otvorenim ljuskama različita od nule. Isti efekt teorijski je opažen implementacijom  $\delta$  rezidualne interakcije u čestično-čestičnom kanalu [221]. Rezultat ovog rada konzistentan je sa rezultatima u ref. [29] gdje korelacije sparivanja:

- favoriziraju spin-singlet S0 sparivanje ( $S_{12} = 0$ ) između valentnih nukleona,
- potiskuju spin-triplet S1 sparivanje ( $S_{12} = 1$ ) između valentnih nukleona,
- pomiču M1-energije pobude prema većim vrijednostima,
- reduciraju snagu prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  u usporedbi sa slučajem bez korelacija sparivanja.

D1S (S1P) parametrizacije korelacija sparivanja rezultiraju višim(nižim) M1 energijama pobuđenja kao i manjom(većom) snagom prijelaza  $B_{M1}(E)$  u odnosu na slučaj bez korelacija

sparivanja. Osjetljivost proračunate snage prijelaza  $B_{M1}(E)$  pripisujemo utjecaju  $S_{12} = 0$  i/ili  $S_{12} = 1$  komponenta korelacija sparivanja. S obzirom da S1P parametrizacija promovira  $S_{12} = 1$ , u tom slučaju snaga prijelaza može biti veća u odnosu na D1S parametrizaciju koja promovira  $S_{12} = 0$  korelacije sparivanja. Iako su oba D1S i S1P modela korelacija sparivanja prilagođena na ista svojstva osnovnog stanja, to ne garantira isti rezultat za M1 snagu prijelaza. S druge strane za jezgru  $^{50}\text{Ti}$  na slici 3.17 jasno su prikazana, eksperimentalno potvrđena, dva vrha M1 funkcije odziva  $R_{M1}(E)$  dobivena D1S skupom parametara koje nije moguće reproducirati S1P parametrizacijom korelacija sparivanja. Dakle, upravo ta eksperimentalna potvrda na primjeru jezgre  $^{50}\text{Ti}$ , pokazuje zašto korelacije sparivanja čestično-čestičnog kanala u ovm radu treba parametrizirati D1S skupom parametara.

### 3.1.6 Spin-orbit interakcija i M1 prijelazi

U modernoj nuklearnoj fizici jedno od otvorenih pitanja je kako spin-orbit (SO) vezanje i odgovarajući efekti ljusaka evoluiraju od doline stabilnosti prema egzotičnim jezgrama s velikim omjerom broja neutrona u odnosu na broj protona [7, 222]. Također SO-vezanje je bitno u opisu nuklearnih procesa koji uključuju nestabilne jezgre bitne u nuklearnoj astrofizici, odnosno u modeliranju eksplozija supernova i spajanja neutronske zvijezde, uključujući r-proces i nukleosintezu odgovornu za stvaranje otprilike pola kemijskih elemenata težih od željeza [223, 224]. U slabo vezanim jezgrama slabljenje efekata ljusaka i SO-vezanja posljedica je difuzne površine jezgre [225, 226]. Porijeklo SO-vezanja na mikroskopskoj razini bilo je predmetom mnogih istraživanja uključujući različite efekte kao što su interakcija tri-nukleona, tenzorska komponenta nuklearne interakcije i nukleon-nukleon interakcija temeljena na izmjeni mezona [14, 227–229]. Mjerenje efekta SO-rascjepa u nuklearnoj fizici izazovan je zadatak i s aspekta eksperimentalnih istraživanja, uključuje reakcije protonskog rezonantnog raspršenja, reakcije prijenosa nukleona (*engl. transfer reactions*) te reakcije izbačenog nukleona (*engl. knockout reactions*) [230–232]. Međutim, ostaju neke neodređenosti uslijed analize eksperimentalnih podataka temeljene na određenom teorijskom modelu. Pri tome mislimo na ekstrakciju informacije iz bilo posrednih bilo neposrednih mjerenih veličina formalizmom koji vrijedi uz točno određene teorijske pretpostavke [233]. Stoga je vrlo bitno razmotriti problem SO-rascjepa različitim modelima kako bismo stekli potpunu sliku i razumijevanje prirode tog fenomena. Jedan od pristupa kojim možemo odrediti SO-rascjep u atomskim jezgrama su i magnetska dipolna pobuđenja (M1) intenzivno studirana u [37, 38, 57, 234]. U teorijskom smislu relevantnost SO-rascjepa za konačan spektar M1 pobuđenja proučavana je u okviru nerelativističkih Skyrme funkcionala [16, 17].

Relativistička teorija energijskog funkcionala gustoće kao metodologija istraživanja, primijenjena u ovom radu, invarijantna je na Lorentzove transformacije, zadovoljava princip kauzalnosti i implicitno uključuje mezonske stupnjeve slobode. Varijacionim postupkom dobijemo jednadžbe Diracovog tipa (1.67) u kojima se pojedini nukleon giba u efektivnom potencijalu koji može biti skalarnog i vektorskog tipa i koje rezultira snažnim spin-orbit cijepanjem. S obzirom na to da relativistička teorija zbog svoje Dirac-Lorentzove strukture na prirodan način objašnjava spin-orbit rascjep posebno je prikladna za teorijska istraživanja fenomena te vrste. Osim SO-cijepanja, relativistička dinamika na niskim energijama uključuje i druge efekte poput izospinske ovisnosti, relativističkog mehanizma kojim opisujemo saturaciju, pseudo-spinsku simetriju i nuklearni magnetizam u rotirajućim jezgrama [153, 235–237]. M1 prijelazi kao dominantan tip magnetskih prijelaza blisko su povezani



sa SO cijepanjem. Reducirani matrični element M1 operatora,

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}, \ell_f\right) j_f \left\| \hat{\mu} \right\| \left(\frac{1}{2}, \ell_i\right) j_i \right\rangle \propto \delta_{\ell_f \ell_i}, \quad (3.6)$$

gdje su  $\ell$  i  $j$  kvantni brojevi orbitalnog i ukupnog angularnog momenta, različit je od nule samo ako su orbitalni kvantni brojevi spin-orbit partnera isti,  $\ell_i = \ell_f^2$ .

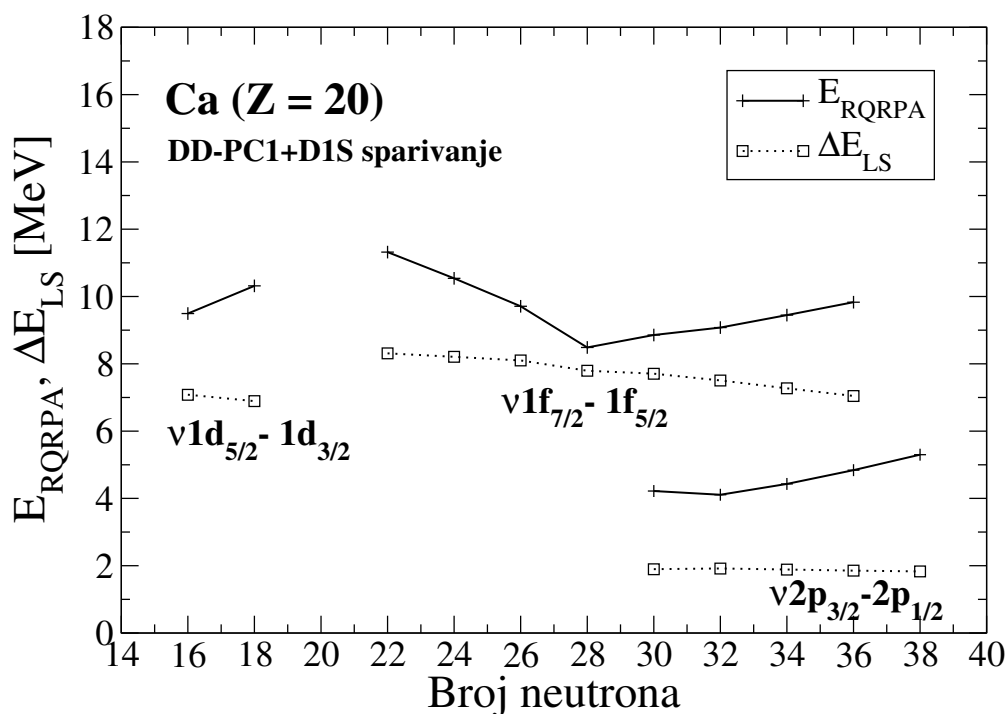
Dakle, M1 pobuđenja reflektiraju strukturu SO-rascjepa, odnosno ako izostaje efekt SO-cijepanja, M1 odziv jezgre se također rijetko javlja. Ako uzmemo u obzir da RNEDF zbog svoje relativističke prirode vrlo lako objašnjava pojavu SO-rascjepa, sustavna primjena te razine razmatranja na nuklearne sustave može dati značajniji kvantitativni uvid u strukturu SO-rascjepa za određenu atomsku jezgru. S druge strane eksperimentalna mjerenja M1 pobuđenja zahtijevaju specifične tehnike ekstrakcije podataka koji su zasjenjeni snažnijim električnim pobuđenjima atomske jezgre [238]. M1 odziv jezgre moguće je eksperimentalno istraživati različitim probama, elektronima, fotonima i hadronima ovisno o tome koje stupnjeve slobode u atomskoj jezgri se želi aktivirati [57, 239].

U razmatranjima u ovom radu korelacije sparivanja su modelirane komponentom sparivanja u Gogny-D1S interakciji [191] tako da parametrizacijom reproduciramo različite empirijske vrijednosti procjepa sparivanja (*engl. pairing gap*) za različite jezgre. Primitimo da, kako je definirana u originalnom članku [191], D1S parametrizacija interakcije djeluje privlačnom silom ako su protonski ili neutronski parovi vezani u spin singlet  $S_{12} = 0$  (S0 nukleonski par). U tom smislu D1S korelacija sparivanja preferira par nukleona bilo protona bilo neutrona vezanih u spin singlet S0 kanal dok je spin-triplet  $S_{12} = 1$  (S1) sparivanje nukleona potisnuto.

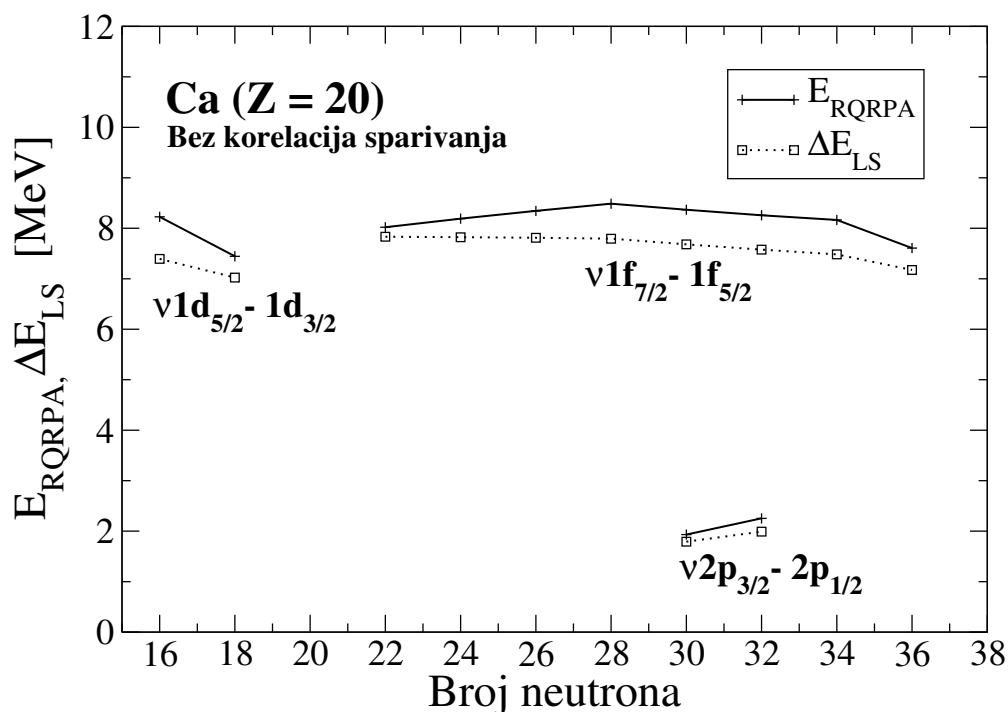
<sup>2</sup>Da bismo izračunali reducirani matrični element magnetskog operatora ranga  $\lambda$  primijenjujemo Wigner-Eckartov teorem na projekciju operatora  $\hat{\mu}_{\lambda\nu} = \hat{\mu} \cdot \nabla [r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]$ . Iz dodatka (F.1) znamo da vrijedi relacija proporcionalnosti,

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}, \ell_f\right) j_f \left\| \hat{\mu}_\lambda \right\| \left(\frac{1}{2}, \ell_i\right) j_i \right\rangle \propto \left\langle \left(\frac{1}{2}, \ell_f\right) j_f \left\| \left[\vec{\sigma} \otimes Y_{\lambda-1}\right]_\lambda \right\| \left(\frac{1}{2}, \ell_i\right) j_i \right\rangle \propto \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_f & j_f \\ \frac{1}{2} & \ell_i & j_i \\ 1 & \lambda-1 & \lambda \end{Bmatrix}. \quad (3.7)$$

9j simbol je različit od nule ako vrijedi pravilo trokuta po stupcima i po retcima. Jedno od tih pravila je i  $\Delta(\ell_f; \ell_i; \lambda-1)$  odnosno  $|\ell_i - (\lambda-1)| \leq \ell_f \leq \ell_i + (\lambda-1)$ . Za slučaj magnetskih dipolnih prijelaza (M1) ( $\lambda = 1$ ) zbog navedenog pravila zbrajanja angularnog momenta mora biti  $\ell_f = \ell_i$ .



**Slika 3.19:** M1-energije pobuđenja izotopa Ca i odgovarajući spin-orbit rascjep. Proračun je temeljen na RHB+RQRPA modelu s DD-PC1 parametrizacijom energijskog funkcionala i D1S interakcijom sparivanja nukleona. Kvantni brojevi ( $nlj$ ) spin-orbit partnera označeni su na svakom grafu.



**Slika 3.20:** Isto kao i slika 3.19 ali bez korelacija sparivanja uključenih u modelu.

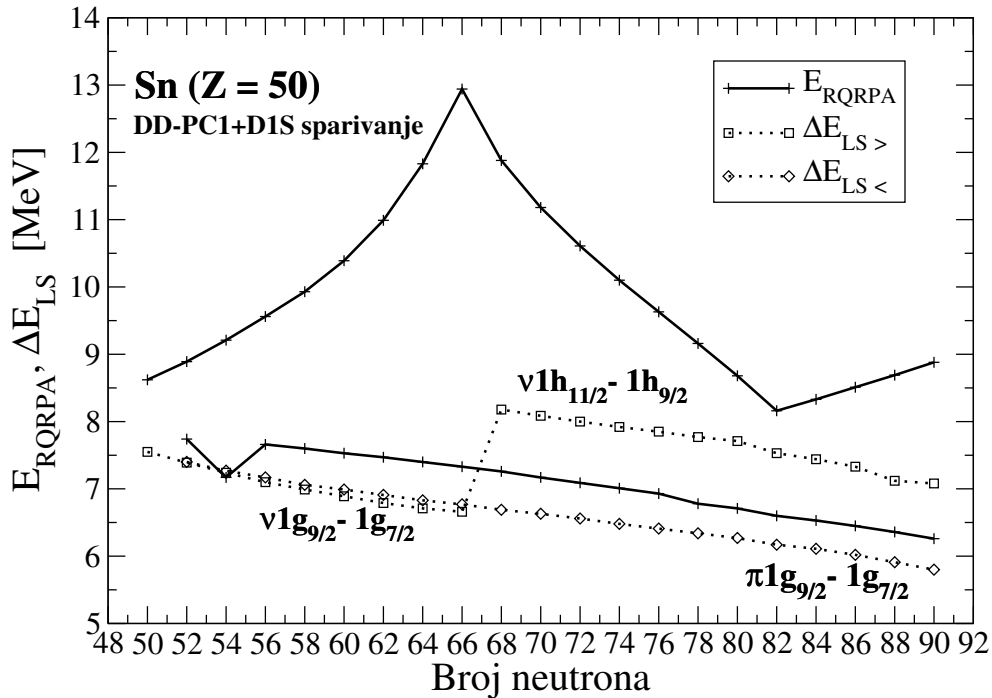
Na slici 3.19 su prikazane vrijednosti energije pobuđenog dominantnog vrha u spektru M1 snage prijelaza ( $E_{\text{RQRPA}}$ ) a to su svojstvene vrijednosti R(Q)RPA jednadžbi i energije

intrinzičnog SO rascjepa ( $\Delta E_{LS}$ ) za lanac izotopa Ca. Pri tome je su energije,

$$\Delta E_{LS} = E_{nlj_{<}} - E_{nlj_{>}}, \quad (3.8)$$

definirane kao razlika energija spin-orbit partnera RHB kvazičestičnih stanja kanonske baze koji su korišteni da bismo konstruirali dvo-kvazičestični R(Q)RPA konfiguracijski prostor [149]. Veći  $j_{>} = \ell + 1/2$  nalazi se na nižim energijama u odnosu na manji  $j_{<} = \ell - 1/2$  kao i u modelu ljusaka. Analiza strukture M1 stanja identificira dominantne jednočestične prijelaze na različitim masenim brojevima izotopnog lanca Ca kako je označeno na slici. Odstupanje između M1 energija i odgovarajućih SO energija cijepanja posljedica je rezidualnih R(Q)RPA interakcija, uglavnom IV-PV rezidualne interakcije i korelacija sparivanja. Na slici 3.20 vidimo da, eksplicitno isključivanje korelacija sparivanja u teorijskom razmatranju, vodi na smanjenje razlike između M1 i SO energija. U slučaju neperturbiranog RHB odziva, kada je rezidualna interakcija postavljena na nulu, M1 energija pobuđenja koincidira s energijom SO rascjepa. Posljedično, teorijski model, koji precizno reproducira eksperimentalne M1-energije pobuđenja također daje jasniji uvid u SO cijepanje koje na već opisani način omogućava M1 prijelaze između spin-orbit partnera.

Jedan odnosno dva inducirana vrha u spektru snage prijelaza duž izotopnog lanca  $^{100-140}\text{Sn}$  impliciraju i kompleksnu strukturu M1 prijelaza koju je vrijedno istražiti.



Slika 3.21: Isto kao na slici 3.19 ali za izotopni lanac  $^{100-140}\text{Sn}$ .

Na razini razmatranog jednočestičnog relativističkog magnetskog operatora možemo

uvesti generalno pravilo,

$$\min. |E_{RPA} - \Delta E_{LS}|, \quad (3.9)$$

ako je razlika energije  $E_{RPA}$  pobuđenja i energije  $\Delta E_{LS}$  spin-orbit rascjepa minimalna tada je ukupna snaga prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  maksimalna, vrijedi i obrnuto.

Za slučaj izotopnog lanca kositra  $^{100-140}\text{Sn}$ , kao što je prikazano na slici 3.21, niža energija M1 prijelaza vrlo je blizu protonskom SO rascjepu ( $1g_{9/2} - 1g_{7/2}$ ), a rezidualna R(Q)RPA interakcija neznatno reducira M1 energije pobuđenja u odnosu na energiju SO rascjepa. U slučaju M1 prijelaza na višim energijama dominiraju konfiguracije  $\nu(1g_{9/2} - 1g_{7/2})$  do  $^{116}\text{Sn}$  i  $\nu(1h_{11/2} - 1h_{9/2})$  konfiguracije s većim masenim brojem u izotopnom lancu kositra. Međutim, R(Q)RPA energije su značajno drugačije u odnosu na neutronske energije SO rascjepa. Rezultat demonstrira značajnu ulogu R(Q)RPA rezidualnih interakcija, naime IV-PV i interakcije sparivanja, koje značajno povećavaju M1 energije pobuđenja.

Da bismo mogli zaključiti više o SO strukturi iz referentnih mjerenja M1 prijelaza, interesantne su dvostruko magične jezgre u kojima zbog strukture zatvorenih ljusaka nema korelacija sparivanja. Naime, koeficijenti zauzeća u magičnim jezgrama su  $u_\kappa = 1$  i  $v_\kappa = 0$ , stoga je energija korelacije sparivanja  $\Delta_n = 0$  u jednadžbi (1.48) i preostaje fina prilagodba  $\alpha_{IV-PV}$  parametra u IV-PV rezidualnoj interakciji na energije dominantnog vrha u spektru M1 snage prijelaza. S druge strane, istovremeno su omogućena teorijska istraživanja jezgara s otvorenim ljuskama u okviru istog RHB+RQRPA modela gdje korelacije sparivanja imaju značajnu ulogu. U tom smislu rezultati ovog istraživanja su motivacijski faktor potencijalnih eksperimentalnih mjerenja M1 pobuđenja u izotopnim lancima atomskih jezgara.

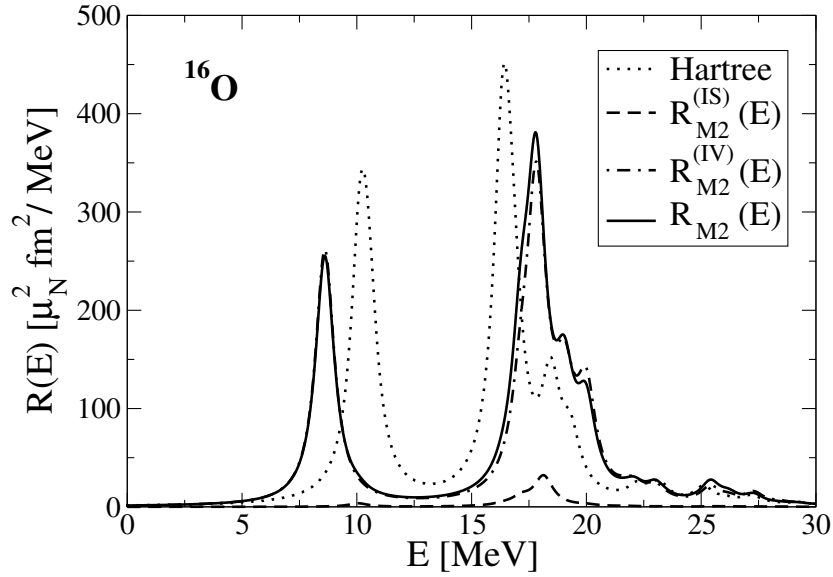
## 3.2 Magnetski kvadrupolni prijelazi (M2)

Glavnina interesa, kod proučavanja magnetskih prijelaza, snažno je fokusirana na dipolna M1 pobuđenja. Međutim, multipoli višeg reda, na primjer gigantske-kvadrupolne rezonancije M2 su gotovo neistraženo područje kako u teorijskim tako i u eksperimentalnim istraživanjima. Nekoliko dostupnih eksperimentalnih istraživanja [67, 68, 70–78, 240] sugerirala su značajno fragmentiranu M2 strukturu spektra čija je snaga prijelaza  $\sum B_{M2}$  potisnuta u usporedbi s teorijski dobivenim rezultatima [68, 73, 79–86] uglavnom razmatranima u okviru modela ljusaka i aproksimacije slučajnih faza [87]. M2 gušenje/potisnuće smatra se vrlo bitnom komponentom u modeliranju zvijezda velike mase u fazi prije sažimanja koje prethodi eksploziji supernove [88, 89] te u procesu nukleosinteze [90]. S druge strane teorijski modeli koji nuklearnu dinamiku proučavaju formalizmom temeljenim na dinamici fluida [91–94] predviđaju aktivaciju *engl. twist* načina pobuđenja atomske jezgre s pokušajem eksperimentalnog uvida u [95]. Radi se o  $0^+ \rightarrow 2^-$  pobuđenjima sfernih jezgara koja su interpretirana kao orbitalna pobuđenja efektivnim operatorom rotacije oko  $z$  osi,

$$\hat{T} = e^{-i\alpha z \hat{L}_z} = e^{\alpha \vec{u} \cdot \nabla} \quad (3.10)$$

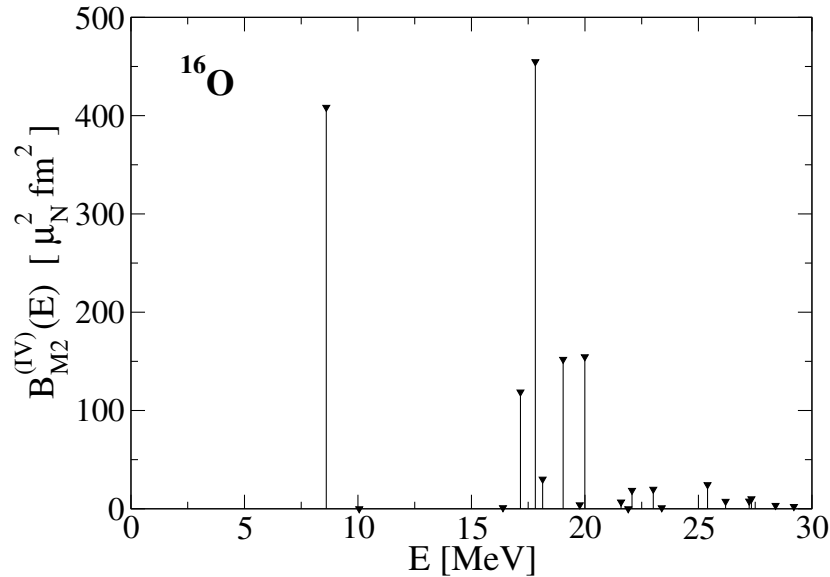
gdje je  $\vec{u} = (yz, -xz, 0)$  a kut rotacije " $z\alpha$ " je proporcionalan koordinati  $z$ . U takvoj slici možemo zamisliti nukleonske orbitale kao slojeve fluida koji rotiraju u suprotnim smjerovima, naime za  $z < 0$  slojevi rotiraju u matematički definirano pozitivnom smjeru dok za  $z > 0$  rotiraju u suprotnom smjeru. Konzistentnost između različitih teorijskih modela možemo provjeriti s nekoliko varijanti pravila sume razvijenih i elaboriranih u [96–100]. Osim kvadrupolnih M2 pobuđenja čak su eksperimentalno razmatrana pobuđenja tipa M12 i M14 do stanja visokih spinova [103, 104].

U ovom poglavlju smo fokusirani na M2 elektromagnetska  $1p1h$  pobuđenja iz  $0^+$  osnovnog na  $2^-$  pobuđeno stanje parno-parnih jezgara. Pri tome je primijenjen RNEDF formalizam objašnjen u poglavlju 1.3 te generalni izrazi za  $M\lambda$  ( $\lambda = 2$ ) prijelaze elaborirani u poglavlju 2. Da bismo istražili strukturu ukupne, izoskalarne i izovektorske funkcija odziva  $R_{M2}(E)$ , izračunate koristeći RHB+RQRPA model, na slici 3.22 prikazane su za jezgru  $^{16}\text{O}$  odgovarajuće vrijednosti snage prijelaza do energija pobuđenja 50 MeV. Pripadajuće snage prijelaza iznose;  $\sum_E B_{M2}(E) = 1534.58 \mu_N^2 fm^2$  ukupna,  $\sum_E B_{M2}^{(IV)}(E) = 1453.83 \mu_N^2 fm^2$ -izovektorska,  $\sum_E B_{M2}^{(IS)}(E) = 73.59 \mu_N^2 fm^2$ -izoskalarne. Destruktivna interferencija izoskalarne i izovektorske komponente snage prijelaza rezultiraju time da je konačna puna reducirana snaga prijelaza manja od dominantne izovektorske komponente.



**Slika 3.22:** M2 funkcija odziva za jezgru  $^{16}\text{O}$  temeljena na RRPA proračunu s DD-PC1 parametrizacijom funkcionala:  $R_{M1}(E)$ -ukupna,  $R_{M1}^{(IS)}(E)$ - izoskalarna i  $R_{M1}^{(IV)}(E)$ - izovektorska funkcija odziva sa energijom centroida pune funkcije odziva  $\bar{E}^{teor.} = 16.55$  MeV. Hartree razina odziva također je prikazana.

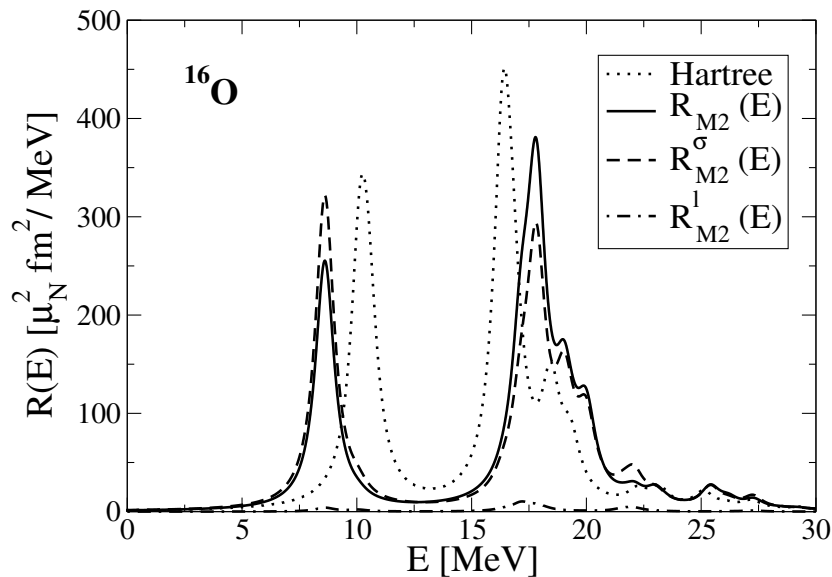
Diskretan spektar izovektorske komponente M2 pobuđenja sa izraženom fragmentiranim strukturom prikazan je na slici 3.23.



**Slika 3.23:**  $B_{M2}^{(IV)}(E)$  - izovektorska snaga prijelaza za jezgru  $^{16}\text{O}$  s centroidom  $\bar{E}^{teor.} = 16.46$  MeV dobivena RRPA proračunom s DD-PC1 parametrizacijom funkcionala.

Drugi aspekt je promatrati punu funkciju odziva  $R_{M2}(E)$  kako je prikazano na slici 3.24, kao i kod M1 prijelaza, odvojeno za spinski i orbitalni kanal s vrijednostima energije pobuđenja do maksimalno 50 MeV. Pojedinačne snage prijelaza iznose;  $\sum_E B_{M2}(E) = 1534.58 \mu_N^2 fm^2$ -ukupna,  $\sum_E B_{M2}^\sigma(E) = 1492.23 \mu_N^2 fm^2$ -spinska,  $\sum_E B_{M2}^\ell(E) = 44.34 \mu_N^2 fm^2$ -

orbitalna. Izražen je dominantan odziv u spinskom kanalu i konstruktivna spin-orbit intereferencija.



**Slika 3.24:** Isto kao slika 3.22 ali sa  $R_{M2}(E)$  - ukupnom,  $R_{M2}^{\sigma}(E)$ -spinskom i  $R_{M2}^{\ell}(E)$ -orbitalnom funkcijom odziva za jezgru  $^{16}\text{O}$ . Neperturbirani odziv na Hartree razini također je prikazan.

Ekperimentalni podatci za energije pobuđenja i snage M2 prijelaza prikazani su u tablici 3.11.

**Tablica 3.11:** Ekperimentalni podatci za energije M2 pobuđenja i odgovarajuće snage prijelaza za jezgru  $^{16}\text{O}$ .

$E_x[\text{MeV}]$	$B_{M2}(E) [\mu_N^2 \cdot \text{fm}^2]$
12.93	$(38 \pm 9)^a$
12.96	$(121 \pm 24)^a$
16.82	$(19 \pm 2)^b$
17.78	$(13 \pm 2)^b$
18.50	$(59 \pm 7)^b$
19.00	$(341 \pm 51)^b$
20.30	$(461 \pm 162)^a$
$\sum_E B_{M2}(E) = (1052 \pm 257) \mu_N^2 \text{fm}^2$	

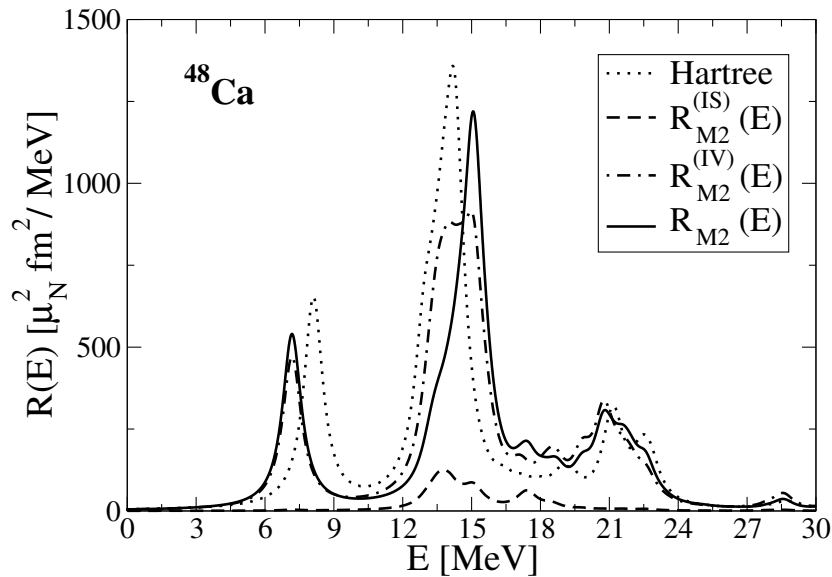
a) podatci iz ref. [71, 72].

b) podatci iz ref. [69].

Teorijski predviđena suma RRPA snage M2 prijelaza  $\sum_E B_{M2}(E) = 1534.58 \mu_N^2 fm^2$  usporediva je sa eksperimentalnim rezultatima iz tablice 3.11. Detaljna analiza prijelaza i parcijalnih snaga prijelaza prikazane su i raspravljene u poglavlju (3.2.3).

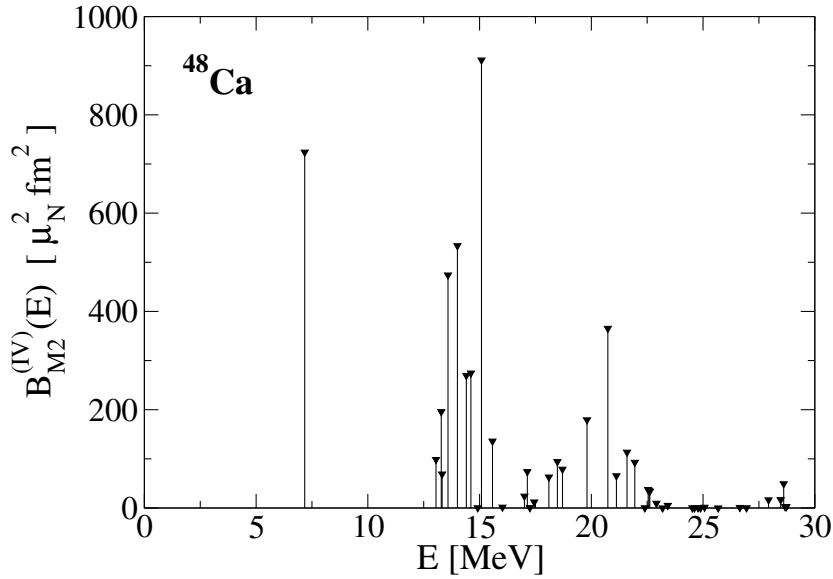
### 3.2.1 M2 prijelazi u jezgri $^{48}\text{Ca}$

Na slici 3.25 su prikazane funkcije odziva  $R_{M2}(E)$  za  $^{48}\text{Ca}$ ; ukupna, izoskalarna i izovektorska te su, izračunate odgovarajuće reducirane snage prijelaza,  $\sum_E B_{M2}(E) = 4915.46 \mu_N^2 fm^2$ - ukupna,  $\sum_E B_{M2}^{(IV)}(E) = 5136.38 \mu_N^2 fm^2$ - izovektorska i  $\sum_E B_{M2}^{(IS)}(E) = 494.19 \mu_N^2 fm^2$ - izoskalarna. Dominantna izovektorska komponenta interferira destruktivno s izoskalarnom i konačan efekt je umanjena puna snaga prijelaza. Teorijski proračunata snaga M2 prijelaza usrednjena po energiji (EWSR) za  $^{48}\text{Ca}$  iznosi  $m_1^{teor.} = 76.11046 \times 10^3 \text{MeV} \mu_N^2 fm^2$ . Ovaj rezultat usporediv je sa drugim RRPA rezultatima za EWSR,  $m_1^{teor.} = 52.4 \times 10^3 \text{MeV} \mu_N^2 fm^2$  iz ref. [73] gdje je analiza do oko 15 MeV maksimalne energije pobuđenja. Isto istraživanje ref. [73] navodi prilično nisku eksperimentalnu EWSR vrijednost  $m_1^{eksp.} = 25.0 \times 10^3 \text{MeV} \mu_N^2 fm^2$ . Opaženo odstupanje kao i u slučaju dipolnih pobuđenja identificiramo kao problem nedostatka snage prijelaza (*engl. missing strength problem*).



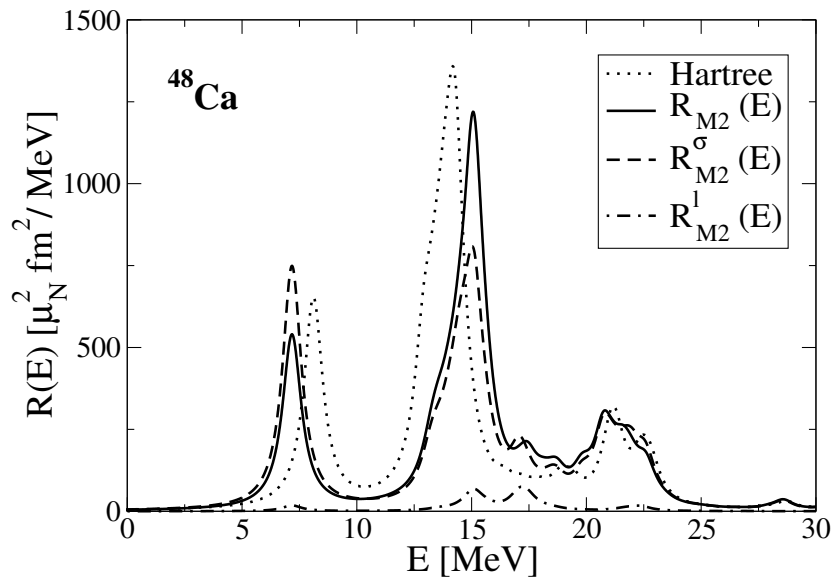
**Slika 3.25:** Isto kao na slici 3.22 ali za jezgru  $^{48}\text{Ca}$ . Centroid energije iznosi  $\bar{E}^{teor.} = 15.48 \text{ MeV}$ .





**Slika 3.26:** Isto kao na slici 3.23 ali za jezgru  $^{48}\text{Ca}$  sa centroidom energije  $\bar{E}^{teor.} = 15.44$  MeV.

S druge strane ukupna, spinska i orbitalna funkcija odziva  $R_{M2}(E)$  prikazane su na slici 3.27. Numeričke vrijednosti reducirane snage prijelaza u rasponu energije pobuđenja do 50 MeV iznose;  $\sum_E B_{M2}(E) = 4915.46 \mu_N^2 fm^2$ -ukupna,  $\sum_E B_{M2}^\sigma(E) = 4575.60 \mu_N^2 fm^2$ -spinska i  $\sum_E B_{M2}^\ell(E) = 319.1 \mu_N^2 fm^2$ -orbitalna. Značajna spinska snaga prijelaza konstruktivno interferira s orbitalnom.

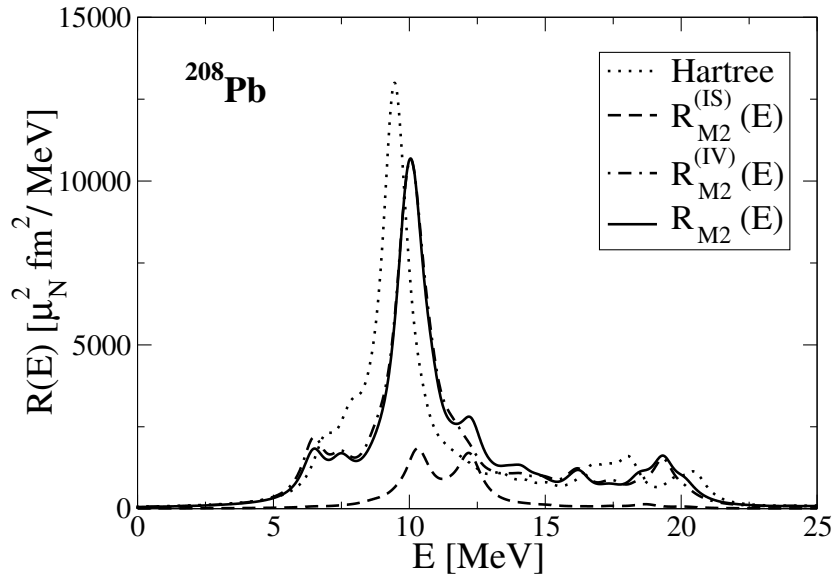


**Slika 3.27:** Isto kao na slici 3.24 ali za jezgru  $^{48}\text{Ca}$ .

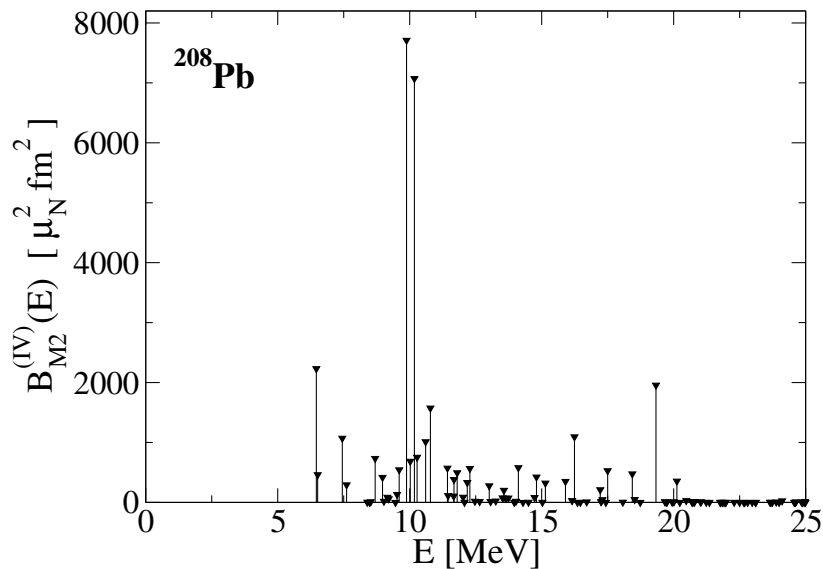
Detaljna analiza prijelaza i parcijalnih snaga prijelaza po pojedinom rezonantnom vrhu prikazane su u poglavlju (3.2.3).

### 3.2.2 M2 prijelazi u jezgri $^{208}\text{Pb}$

Da bismo istražili strukturu magnetskih kvadrupolnih prijelaza višfermionskih sustava sa većim brojem nukleona provedeno je istraživanje jezgre  $^{208}\text{Pb}$ . Na slici 3.28 su prikazani teorijski izračunate snage M2 prijelaza za  $^{208}\text{Pb}$  koje iznose;  $\sum_E B_{M2}(E) = 35.64755 \times 10^3 \mu_N^2 \text{fm}^2$ -ukupna,  $\sum_E B_{M2}^{(IV)}(E) = 35.45891 \times 10^3 \mu_N^2 \text{fm}^2$ -izovektorska i  $\sum_E B_{M2}^{(IS)}(E) = 6.357794 \times 10^3 \mu_N^2 \text{fm}^2$ -izoskalarna snaga prijelaza. Konstruktivna izoskalar-izovektor interferencija u konačnici rezultira time da je ukupna snaga prijelaza nešto veća od izovektorske.

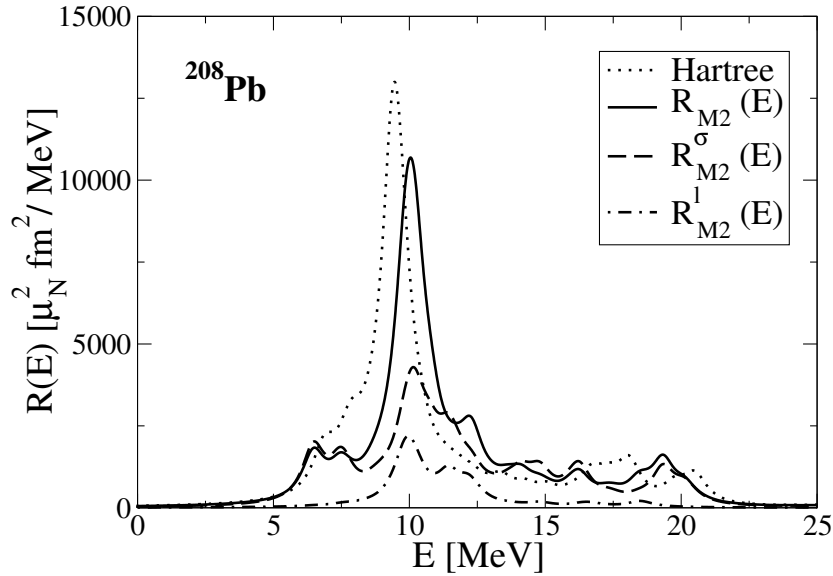


**Slika 3.28:** Isto kao na slici 3.22 ali za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ . Energija centroida iznosi  $\bar{E}^{teor.} = 11.87 \text{ MeV}$ .



**Slika 3.29:** Isto kao na slici 3.23 ali za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ . Energija centroida iznosi  $\bar{E}^{teor.} = 11.63 \text{ MeV}$ .

S druge strane ukupna, spinska i orbitalna funkcija odziva  $R_{M2}(E)$ , prikazane na slici 3.30, rezultiraju s kvantitativnim vrijednostima reducirane snage prijelaza u rasponu energije pobuđenja do 50 MeV;  $\sum_E B_{M2}(E) = 35.64755 \times 10^3 \mu_N^2 fm^2$  -ukupna,  $\sum_E B_{M2}^\sigma(E) = 25.51513 \times 10^3 \mu_N^2 fm^2$  - spinska i  $\sum_E B_{M2}^\ell(E) = 6.935671 \times 10^3 \mu_N^2 fm^2$  - orbitalna. Rezultati pokazuju značajni doprinos spinske komponente i konstruktivnu spin-orbit interferenciju snaga prijelaza.



Slika 3.30: Isto kao na slici 3.24 ali za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ .

Skup eksperimentalno izmjerenih vrijednosti energije i snage prijelaza kvadrupolnih pobuđenja jezgre  $^{208}\text{Pb}$  navedeni su u tablicama 3.12 i 3.13

Tablica 3.12: Isto kao u tablici 3.11 ali za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ .

$E_x[\text{MeV}]$	$B_{M2}(E) [\mu_N^2 \text{fm}^2]$
7.40	$(449 \pm 89)^a$
7.50	$(1876 \pm 0)^a$
7.91	$(614 \pm 92)^a$

a) podatci iz ref. [74].

**Tablica 3.13:** Isto kao u tablici 3.11 ali za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ .

$E_x$ [MeV ]	$B_{M2}(E)$ [ $\mu_N^2 \text{fm}^2$ ]
6.43	*
6.49	*
6.59	*
6.93	*
7.46	*
7.51	*
7.92	*
8.00	*
$\sum_E B_{M2}(E) = (8500 \pm 750)^a$	

a) podatci iz ref. [75].

\* ne postoje podatci snage prijelaza za individualnu energiju pobuđenja, umjesto toga navedena je suma.

Ako kvantitativne vrijednosti eksperimentalnih snaga prijelaza u rezonantnim vrhovima  $E_x = 7.45, 7.50, 7.92$  i  $8.00$  MeV iz ref. [75] zbrojimo, ukupna snaga iznosi  $(5230 \pm 130) \mu_N^2 \text{fm}^2$  što je usporediva vrijednost sa prethodnim eksperimentalnim istraživanjima gdje suma snage prijelaza u ref. [74] u rezonantnim dominantnim vrhovima na energijama  $E_x = 7.40$  i  $E_x = 7.91$  MeV iznosi  $\sum_E B_{M2}(E) = (5300 \pm 900) \mu_N^2 \text{fm}^2$ .

Teorijska istraživanja u ref. [79] ukazuju na jedan širi eksperimentalno opaženi  $J^\pi = 2^-$  vrh na  $E_x = 7.4$  MeV u kojem je koncentrirana gotovo sva snaga prijelaza  $\sum_E B_{M2}(E) = 8500 \mu_N^2 \text{fm}^2$  i to je ujedno rezultat potvrđen u modelu sa separabilnom rezidualnom interakcijom (MSI-RPA) u ref. [80]. Nadalje, RPA istraživanje u ref.[81] pokazuje kvantitativnu vrijednost  $\sum_E B_{M2}(E) = (9700 - 12600) \mu_N^2 \text{fm}^2$  u intervalu energije pobuđenja  $E_x = (6.1 - 8.4)$  MeV. Druga teorijska istraživanja, također temeljena na RPA pristupu iz ref. [82] rezultiraju slijedećim kvantitativnim vrijednostima;  $\sum_E B_{M2}(E) = 11000 \mu_N^2 \text{fm}^2$  ili  $\sum_E B_{M2}(E) = 11600 \mu_N^2 \text{fm}^2$  u ref. [83] u okviru istog raspona energija pobuđenja  $E_x = (6.1 - 8.4)$  MeV i navedene predikcije su konzistentne u usporedbi s različitim teorijskim pristupima.

Zaključno, razmatrajući aktualne rezultate iz tablice M2 prijelaza 3.17, 3.18, suma RQRPA snage prijelaza na energijama pobuđenja  $E_x = 6.46, 7.45, 7.61, 8.69, 8.97$  i  $9.88$  MeV rezultira sa  $\sum_E B_{M2}(E) = 11806.92 \mu_N^2 \text{fm}^2$ , što je u izvrsnom slaganju s drugim teorijskim pristupima i usporedivo s eksperimentalnim rezultatima u tablici 3.13. Ako usporedimo,

s druge strane, aktualne rezultate ne energijama pobuđenja  $E_x = 6.46, 7.45, 7.61, 8.69,$  i  $8.97$  MeV, pri tome isključivši  $9.88$  MeV, tada je ukupna teorijski dobivena snaga prijelaza  $\sum_E B_{M2}(E) = 3786.78 \mu_N^2 \text{fm}^2$  opet usporediva sa eksperimentalnim vrijednostima u pripadajućem intervalu energija pobuđenja  $\sum_E B_{M2}(E) = (5230 - 5300) \mu_N^2 \text{fm}^2$  [74, 75]. Detaljna analiza prijelaza i parcijalnih snaga prijelaza po pojedinom rezonantnom vrhu prikazane su u poglavlju (3.2.3).

### 3.2.3 Analiza dominantnih M2 prijelaza u jezgrama $^{16}\text{O}$ , $^{48}\text{Ca}$ i $^{208}\text{Pb}$

Da bismo detaljnije proanalizirali magnetske kvadrupolne (M2) prijelaze u pojedinom rezonantom vrhu prisjetimo se da je snaga prijelaza proporcionalna kvadratu reduciranog matričnog elementa magnetskog operatora (2.12) a iz dodatka (F.1) znamo da vrijedi,

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}, \ell_f\right) j_f \left\| \hat{\mu}_\lambda \left\| \left(\frac{1}{2}, \ell_i\right) j_i \right\rangle \propto \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_f & j_f \\ \frac{1}{2} & \ell_i & j_i \\ 1 & \lambda - 1 & \lambda \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

Također 9j simbol je različit od nule ako vrijedi pravilo trokuta po stupcima i po retcima. Dakle, po stupcima, mora biti,

- $\Delta(\ell_f; \ell_i; \lambda - 1)$  odnosno  $|\ell_i - (\lambda - 1)| \leq \ell_f \leq \ell_i + (\lambda - 1)$ . Za slučaj magnetskih kvadrupolnih prijelaza (M2) ( $\lambda = 2$ ) zbog navedenog pravila zbrajanja angularnog momenta možemo imati dva slučaja, kada su orbitalni kvantni brojevi početnog i konačnog stanja različiti  $\ell_f \neq \ell_i$  ili jednaki  $\ell_f = \ell_i$ ,
- $\Delta(j_f; j_i; \lambda)$  odnosno  $|j_f - j_i| \leq \lambda \leq j_f + j_i$ .

Nadalje, kako je pokazano za nerelativistički slučaj u poglavlju (L), a isto možemo zaključiti i u relativističkom slučaju, snaga prijelaza proporcionalna je kvadratu integrala preklopa velikih  $I_{velika}^{(\lambda)}$  (2.16) odnosno malih  $I_{mala}^{(\lambda)}$  (2.16) komponenti Diracovih valnih funkcija. Dakle, osim već navedenih izbornih pravila koja su posljedica vezanja određenih 9j simbolom, vrijede i izborna pravila za slučaj relativističkog magnetskog operatora (poglavlje G) koja dopuštaju određene magnetske prijelaze ili istih  $n_f = n_i$  ili različitih  $n_f \neq n_i$  glavnih kvantnih brojeva Diracove valne funkcije. Konačno, snaga prijelaza i fragmentacija snage prijelaza ovise o preklopu valnih funkcija početnog i konačnog stanja za prijelaze koji su dopušteni navedenim izbornim pravilima, riječ je, dakle, o M2 prijelazima s izmjenom spina (*engl. spin-flip*). U tablicama 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, analizirane su parcijalne neutronske(protonske) snage prijelaza  $b_{ph}^{\nu(\pi)}(E)$  dominantnih M2 vrhova u jezgrama  $^{16}\text{O}$ ,  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{208}\text{Pb}$ . Zvezdica u tablicama (\*) naznačuje da su protonske parcijalne snage prijelaza dva i više redova veličina manje od dominantnog neutronskeg doprinosa pa ih ne navodimo. Tablice pokazuju da pojedinim M2 prijelazima doprinosi po nekoliko protonskih i neutronskeg  $ph$  konfiguracija. Možemo zaključiti da su M2 pobuđenja karakterizirana prijelazima nukleona veće kolektivnosti što predstavlja različitu strukturu od M1 prijelaza u kojima sudjeluje manji broj čestično-šupljinskih konfiguracija.

**Tablica 3.14:** Teorijski proračun ukupne parcijalne snage prijelaza  $B_{M2}(E) = \left| \sum_{\nu} b_{ph}^{\nu}(E) + \sum_{\pi} b_{ph}^{\pi}(E) \right|^2$  za  $^{16}\text{O}$  jezgru na energijama  $E_{vrh}^{teor.}$  s dominantnim prijelazima s izmjenom orijentacije spina (*engl. spin-flip*,  $j_{>} \leftrightarrow j_{<}$ ) gdje su  $b_{ph}^{\nu}$  i  $b_{ph}^{\pi}$  neutronske odnosno protonske parcijalne snage prijelaza.

$E_{vrh}^{teor.} [\text{MeV}]$	$B_{M2}(E) [\mu_N^2 fm^2]$	$b_{ph}^{\nu} [\mu_N fm]$	$b_{ph}^{\pi} [\mu_N fm]$	$j_{>} \leftrightarrow j_{<}$
8.60	397.15	-8.43	-13.72	$(\nu 1p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{5/2})$
				$(\pi 1p_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 1d_{5/2})$
		-0.30	2.85	$(\nu 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2s_{1/2})$
				$(\pi 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1d_{5/2})$
17.15	206.73	1.85	-1.29	$(\nu 1p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{3/2})$
				$(\pi 1p_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 1d_{5/2})$
		0.87	-15.80	$(\nu 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{5/2})$
				$(\pi 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1d_{5/2})$
17.81	487.57	-1.35	13.99	$(\nu 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2s_{1/2})$
				$(\pi 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1d_{5/2})$
		1.46	0.35	$(\nu 1p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{3/2})$
				$(\pi 1p_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 1d_{5/2})$
		1.48	-0.23	$(\nu 1p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{5/2})$
				$(\pi 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2s_{1/2})$
6.96	*	$(\nu 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{5/2})$		
19.04	158.74	-2.53	-11.93	$(\nu 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 1d_{5/2})$
				$(\pi 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2s_{1/2})$
19.99	123.27	-8.47	-2.29	$(\nu 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2s_{1/2})$
				$(\pi 1p_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1d_{5/2})$

**Tablica 3.15:** Isto kao tablica 3.14 ali za jezgru  $^{48}\text{Ca}$ .

$E_{\text{vrh}}^{\text{teor.}}$ [MeV]	$B_{\text{M2}}(E)$ [ $\mu_N^2 fm^2$ ]	$b_{ph}^v$ [ $\mu_N fm$ ]	$b_{ph}^\pi$ [ $\mu_N fm$ ]	$j_> \leftrightarrow j_<$
7.17	834.71	-0.76	-29.69	$(\nu 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
		-0.59	3.56	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{9/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
13.28	122.26	-6.85	-0.13	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{3/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{1/2})$
		1.73	-0.18	$(\nu 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		-2.02	0.18	$(\nu 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		-1.12	-0.19	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{5/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
-2.36	*	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{9/2})$		
14.00	180.43	-13.73	7.85	$(\nu 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		-7.69	1.00	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{9/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
14.41	223.95	-5.05	-18.73	$(\nu 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		-1.73	8.68	$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
				$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{9/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
14.61	159.10	-1.11	-9.32	$(\nu 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		-5.59	-1.07	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 1g_{9/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		0.21	1.57	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2d_{3/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
0.27	2.29	$(\nu 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$		
		$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$		



**Tablica 3.16:** Nastavak tablice 3.15 za jezgru  $^{48}\text{Ca}$ .

$E_{\text{vrh}}^{\text{teor.}}$ [MeV]	$B_{\text{M2}}(E)$ [ $\mu_N^2 fm^2$ ]	$b_{ph}^v$ [ $\mu_N fm$ ]	$b_{ph}^\pi$ [ $\mu_N fm$ ]	$j_> \leftrightarrow j_<$
15.08	1569.21	1.44	-6.82	$(\nu 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2})$
				$(\pi 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		0.61	-2.17	$(\nu 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{1/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
		-0.69	-33.23	$(\nu 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
15.57	192.15	1.60	-3.11	$(\nu 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{1/2})$
				$(\pi 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		2.73	13.41	$(\nu 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
		-1.49	0.94	$(\nu 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 1f_{5/2})$
				$(\pi 1d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
19.81	119.60	2.83	-1.22	$(\nu 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{1/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
		-1.29	-1.19	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{3/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
		-8.32	-0.48	$(\nu 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 2s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$
20.74	302.61	-9.01	-1.22	$(\nu 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{1/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{1/2})$
		-2.38	-1.46	$(\nu 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{3/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{7/2})$
		-2.32	-0.74	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{7/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 1f_{5/2})$
21.59	165.43	-1.49	2.76	$(\nu 1f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{7/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{1/2})$
		-0.63	-14.92	$(\nu 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2p_{1/2})$
				$(\pi 1d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2p_{3/2})$

Tablica 3.17: Isto kao i tablica 3.14 ali za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ .

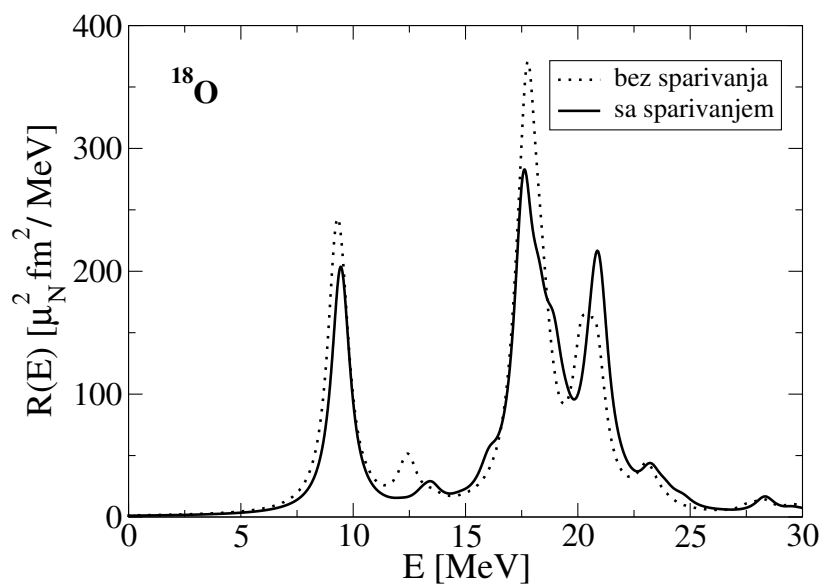
$E_{vrh}^{teor.}$ [MeV]	$B_{M2}(E)$ [ $\mu_N^2 fm^2$ ]	$b_{ph}^\nu$ [ $\mu_N fm$ ]	$b_{ph}^\pi$ [ $\mu_N fm$ ]	$j_> \leftrightarrow j_<$
6.46	1815.74	1.86	7.67	$(\nu 3p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 2d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
		39.87	-3.21	$(\nu 2f_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
		-1.88	-3.35	$(\nu 2f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$
-1.11	-0.48	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1j_{15/2})$		
		$(\pi 3s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$		
7.45	982.58	-23.71	-18.55	$(\nu 3p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 2d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
		1.37	2.61	$(\nu 3p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
		7.82	1.65	$(\nu 2f_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$
7.61	420.15	-12.38	1.22	$(\nu 3p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 3s_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$
		2.51	37.45	$(\nu 3p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 2d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
		-7.23	-4.07	$(\nu 2f_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
1.11	-0.89	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1j_{15/2})$		
		$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$		
8.69	336.46	1.09	-3.02	$(\nu 3p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 4s_{1/2})$
				$(\pi 2d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
		2.49	-2.09	$(\nu 3p_{1/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$
		24.13	-0.34	$(\nu 3p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
-1.32	-0.25	$(\nu 2f_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$		
		$(\pi 3s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$		
-1.47	-0.16	$(\nu 2f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$		
		$(\pi 2s_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$		
8.97	231.85	16.78	-1.03	$(\nu 3p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 4s_{1/2})$
				$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
		-1.62	-1.69	$(\nu 3p_{3/2}^{-1} \rightarrow \nu 3d_{5/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$
		1.24	0.37	$(\nu 2f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$
1.42	0.28	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1j_{15/2})$		
		$(\pi 1g_{7/2}^{-1} \rightarrow \pi 1h_{9/2})$		

**Tablica 3.18:** Nastavak tablice 3.17 za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ .

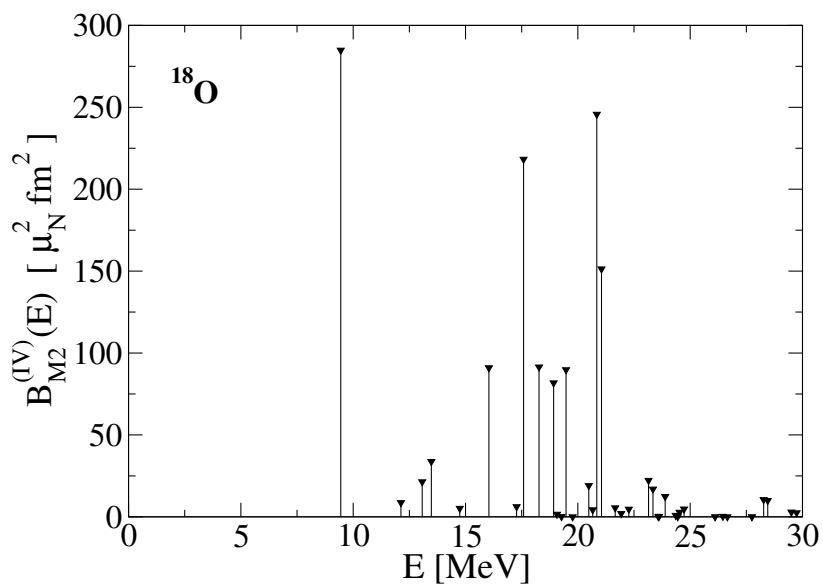
$E_{\text{vrh}}^{\text{teor.}}$ [MeV]	$B_{\text{M2}}(E)$ [ $\mu_N^2 fm^2$ ]	$b_{ph}^\nu$ [ $\mu_N fm$ ]	$b_{ph}^\pi$ [ $\mu_N fm$ ]	$j_> \leftrightarrow j_<$
9.88	8020.14	1.58	-1.62	$(\nu 2f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 3s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$
		9.84	-1.16	$(\nu 2f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 2d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
-2.19	-20.72	$(\nu 1h_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1i_{11/2})$		
		$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$		
11.55		11.55	92.71	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1j_{15/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$
10.18	7843.68	-3.91	4.62	$(\nu 2f_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{7/2})$
				$(\pi 3s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$
		-1.62	-3.22	$(\nu 2f_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 2d_{3/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
2.71	-46.81	$(\nu 1h_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1i_{11/2})$		
		$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$		
-13.08		-13.08	-27.37	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1j_{15/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$
10.78	1926.70	1.18	32.23	$(\nu 2f_{5/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{9/2})$
				$(\pi 3s_{1/2}^{-1} \rightarrow \pi 3p_{3/2})$
		-1.24	4.75	$(\nu 1h_{9/2}^{-1} \rightarrow \nu 1i_{11/2})$
				$(\pi 2d_{5/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{7/2})$
2.23	4.14	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1j_{15/2})$		
		$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$		
16.24	1094.44	2.72	-4.61	$(\nu 2f_{7/2}^{-1} \rightarrow \nu 4d_{3/2})$
				$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 1h_{9/2})$
		13.69	0.68	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 1i_{11/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{13/2})$
6.30	15.49	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 1j_{13/2})$		
		$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 1i_{11/2})$		
19.33	1888.20	16.05	5.45	$(\nu 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \nu 2g_{7/2})$
				$(\pi 1h_{11/2}^{-1} \rightarrow \pi 2g_{7/2})$
		8.58	5.01	$(\nu 1i_{13/2}^{-1} \rightarrow \nu 3h_{9/2})$
				$(\pi 1g_{9/2}^{-1} \rightarrow \pi 2f_{5/2})$

### 3.2.4 Učinci korelacija sparivanja na M2 prijelaze

Kada govorimo o ulozi korelacija sparivanja u magnetskim kvadrupolnim prijelazima, možemo istaknuti rezultate za nuklearne sustave za koje su eksperimentalna i teorijska istraživanja dostupna. Jedan takav primjer je jezgra  $^{90}\text{Zr}$ , za koju je u ref. [73] analiziran spektar do 12 MeV i određena je RPA vrijednost EWSR-a,  $\sum_E m_1^{teor.}(E) = 112.3 \times 10^3 \text{ MeV} \mu_N^2 \text{fm}^2$  koja je usporediva sa aktualnim proračunom, ukupni EWSR-RQRPA  $\sum_E m_1^{teor.}(E) = 160.10 \times 10^3 \text{ MeV} \mu_N^2 \text{fm}^2$  dobivenim za interval energija pobuđenja do 50 MeV. S druge strane eksperimentalna EWSR vrijednost za  $^{90}\text{Zr}$  iz ref. [73] iznosi  $\sum_E m_1^{eksp.}(E) = 28.0 \times 10^3 \text{ MeV} \mu_N^2 \text{fm}^2$ , što je niža vrijednost u odnosu na oba teorijska predviđanja. Nešto drugačije eksperimentalno istraživanje provedeno tehnikom analize fluktuacija u ref. [241] rezultira sa ukupnom snagom M2 prijelaza NEWSR  $\sum_E B_{M2}^{eksp. \uparrow}(E) = 1616 \mu_N^2 f m^2$  ( $^{90}\text{Zr}$ ), vrijednosti koja je 28% vrijednost RPA proračuna iz ref. [242] i također je značajno niža od aktualnog RQRPA proračuna. Na slikama 3.31, 3.33, 3.35 i 3.37 prikazane su M2 funkcije odziva  $R_{M2}(E)$  za jezgre  $^{18}\text{O}$ ,  $^{42}\text{Ca}$ ,  $^{56}\text{Fe}$  i  $^{90}\text{Zr}$ . Riječ je, kao i kod M1 prijelaza, o diskretnom spektru R(Q)RPA snage prijelaza  $B_{M2}(E)$  konvoluirane Lorentzianom, prizvoljno izabrane širine,  $\Gamma = 1 \text{ MeV}$ . Lorentzian je normaliziran tako da je intergral Lorentzove funkcije po energiji jednak jedinici, dakle izborom drugačije vrijednosti širine  $\Gamma$  ukupna snaga prijelaza  $\sum_E B_{M2}(E)$  ostaje nepromijenjena. S druge strane na slikama 3.32, 3.34, 3.36 i 3.38, za ilustraciju diskretnog R(Q)RPA spektra, prikazane su izovektorske (IV) M2 snage prijelaza  $B_{M2}^{(IV)}(E)$ , naime izoskalarne (IS) snage prijelaza  $B_{M2}^{(IS)}(E) \ll B_{M2}^{(IV)}(E)$  su znatno manje. Riječ je o diskretnom R(Q)RPA spektru snage prijelaza koji nije konvoluiran Lorentzianom. Tablice 3.19, 3.20, 3.21 i 3.22 prikazuju R(Q)RPA vrijednosti M2 snage prijelaza i centroida sa i bez korelacija sparivanja. Kao generalan zaključak, slično kao i za M1 prijelaze, korelacije sparivanja reduciraju ukupnu snagu prijelaza  $\sum_E B_{M2}(E)$  i pomiču prosječnu vrijednost energije centroida M2 prijelaza  $\bar{E}^{teor.}$  prema višim energijama.



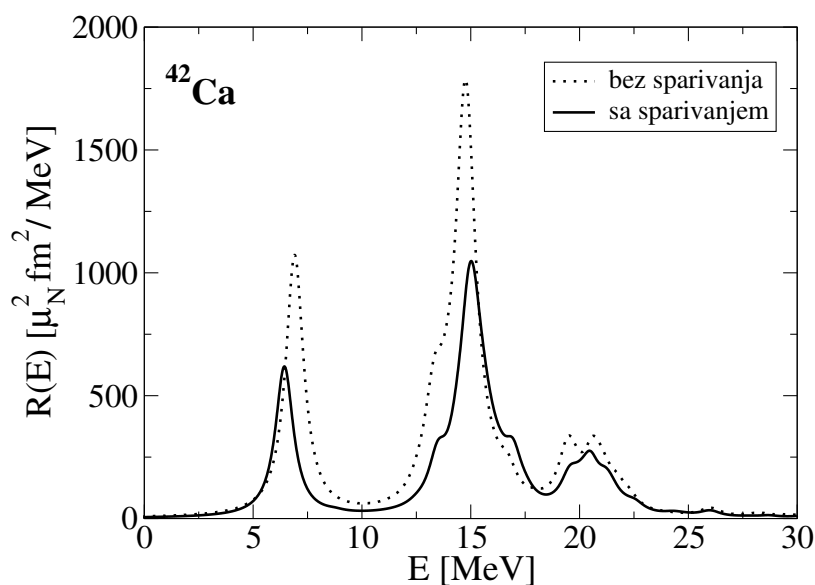
**Slika 3.31:** RHB+RQRPA  $R_{M_2}(E)$  - ukupna funkcija odziva M2 prijelaza za jezgru  $^{18}\text{O}$  s DD-PC1 parametrizacijom energijskog funkcionala i D1S-Gogny interakcijom sparivanja. Funkcija odziva bez (RRPA) i sa korelacijama sparivanja (RQRPA) pokazane su zasebno.



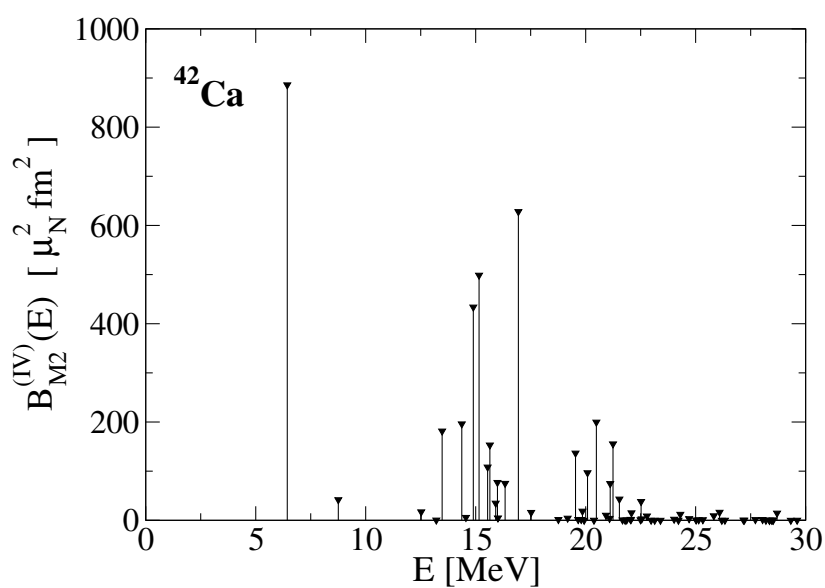
**Slika 3.32:** RHB+RQRPA diskretan spektar izovektorske snage prijelaza  $B_{M_2}^{(IV)}(E)$  za jezgru  $^{18}\text{O}$ .

**Tablica 3.19:** Teorijski proračun  $\sum_E B_{M2}(E)$  snage prijelaza i  $\bar{E}^{teor.}$  centroida energije pobuđenja za jezgru  $^{18}\text{O}$  u intervalu energije do 50 MeV sa i bez D1S-Gogny interakcije sparivanja.

Korelacije sparivanja	$\sum_E B_{M2}(E) [\times 10^3 \mu_N^2 fm^2]$	$\bar{E}^{teor.} [\text{MeV}]$
bez	16.17	16.87
sa	15.40	17.91



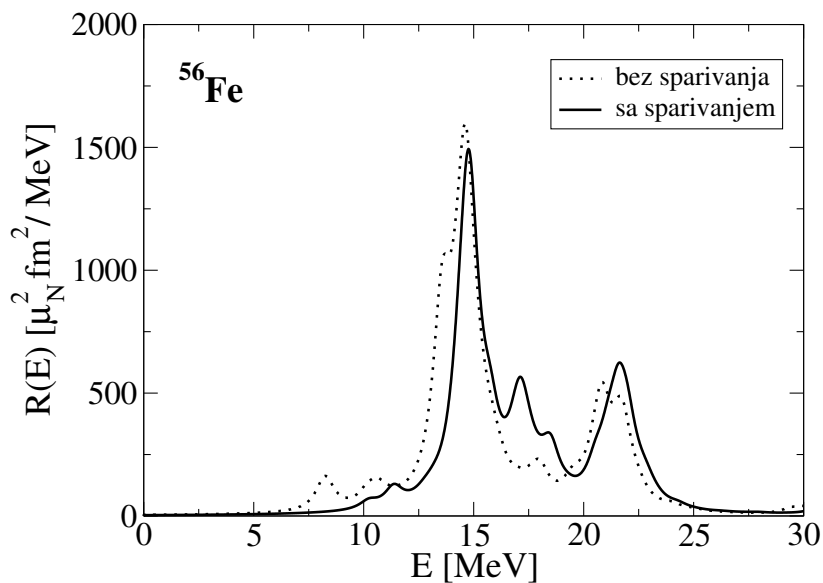
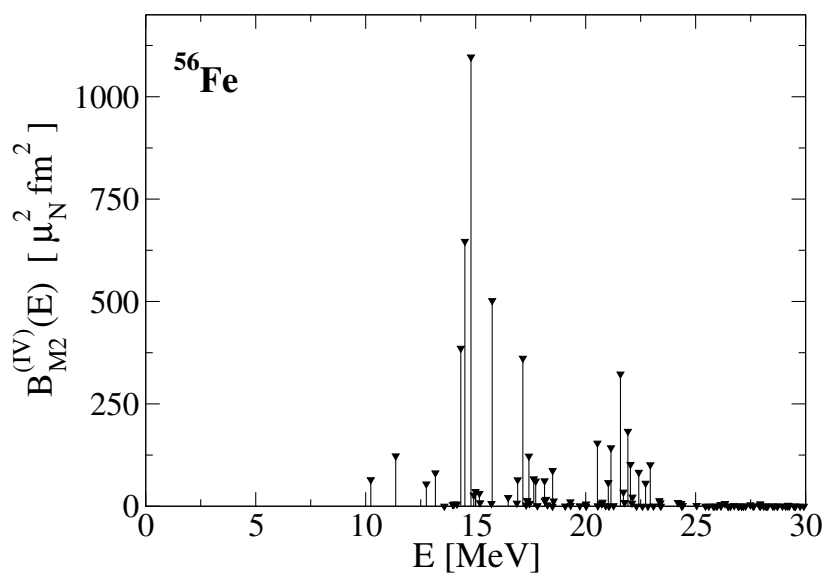
**Slika 3.33:** Isto kao na slici 3.31 ali za jezgru  $^{42}\text{Ca}$ .



**Slika 3.34:** Isto kao na slici 3.32 ali za jezgru  $^{42}\text{Ca}$ .

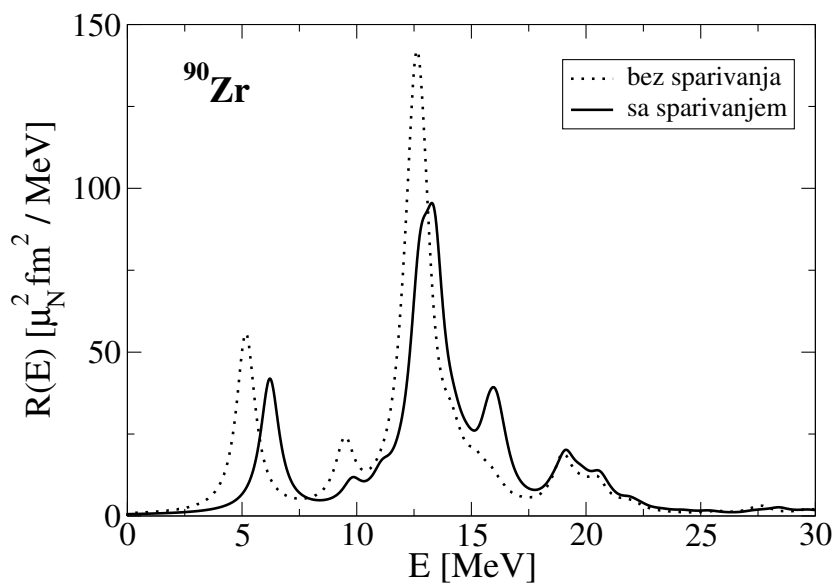
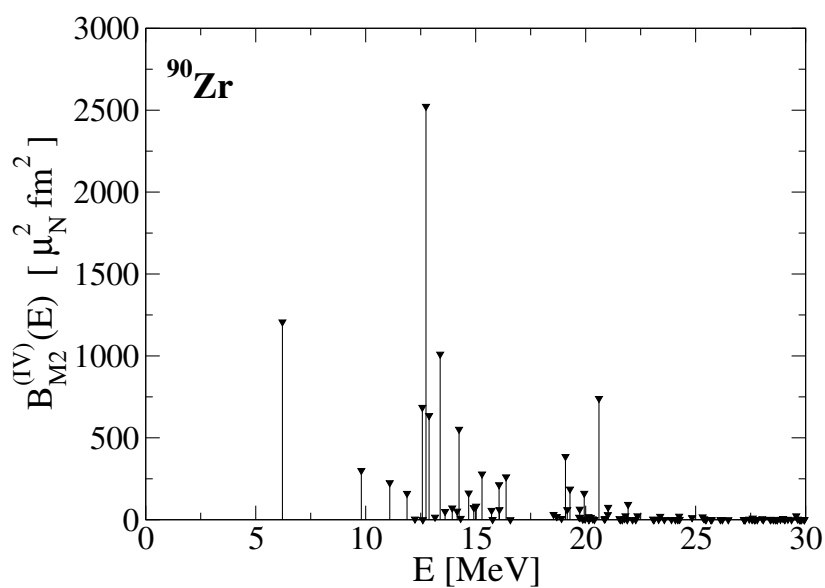
**Tablica 3.20:** Isto kao u tablici 3.19 ali za jezgru  $^{42}\text{Ca}$ .

Korelacije sparivanja	$\sum_E B_{M2}(E) [\times 10^3 \mu_N^2 fm^2]$	$\bar{E}^{teor.} [\text{MeV}]$
bez	6.89	14.06
sa	4.62	14.81

**Slika 3.35:** Isto kao na slici 3.31 ali za jezgru  $^{56}\text{Fe}$ .**Slika 3.36:** Isto kao na slici 3.32 ali za jezgru  $^{56}\text{Fe}$ .

**Tablica 3.21:** Isto kao u tablici 3.19 ali za jezgru  $^{56}\text{Fe}$ .

Korelacije sparivanja	$\sum_E B_{M2}(E) [\times 10^3 \mu_N^2 fm^2]$	$\bar{E}^{teor.} [\text{MeV}]$
bez	6.29	16.47
sa	5.87	17.80

**Slika 3.37:** Isto kao na slici 3.31 ali za jezgru  $^{90}\text{Zr}$ .**Slika 3.38:** Isto kao na slici 3.32 ali za jezgru  $^{90}\text{Zr}$ .



**Tablica 3.22:** Isto kao u tablici 3.19 ali za jezgru  $^{90}\text{Zr}$ .

Korelacije sparivanja	$\sum_E B_{M2}(E) [\times 10^3 \mu_N^2 fm^2]$	$\bar{E}^{teor.}$ [MeV]
bez	11.78	13.09
sa	11.02	14.53

# Zaključak

U ovom radu uveden je novi pristup teorijskog opisa magnetskih dipolnih (M1) i kvadrupolnih (M2) pobuđenja atomskih jezgara, zasnovan na RHB+RQRPA modelu koristeći relativističku kontaktnu interakciju ovisnu o gustoći. Kontaktnom interakcijom opisane su dugodosežne čestično-šupljinske korelacije dok su korelacije sparivanja u čestično-čestičnom kanalu uključene nerelativističkom D1S-Gogny interakcijom kako u RHB modelu za jezgre u osnovnom stanju tako i u rezidualnoj R(Q)RPA interakciji za proračun pobuđenih stanja. Standardna formulacija gustoće Lagranžijana sa kontaktnim interakcijama proširena je izovektorsko-pseudovektorskom kontaktnom interakcijom u R(Q)RPA, koja doprinosi prijelazima neprirodnog pariteta. Da bismo odredili jačinu izovektorske-pseudovektorske interakcije, pripadajući parametar  $\alpha_{IV-PV}$  prilagođen je na eksperimentalne energije M1 pobuđenja dominantnih rezonantnih vrhova u dobro poznatom spektru snaga prijelaza jezgara  $^{208}\text{Pb}$  i  $^{48}\text{Ca}$ . Nedavno razvijeno analitičko pravilo M1 sume, bez korelacija sparivanja, u modelu sredice plus dva nukleona (*engl. core-plus-two-nucleon*) [29] ili kraće model tri-tijela, korišteno je za provjeru teorijskog pristupa zasnovanog na R(Q)RPA metodi. Suma ukupne M1-snage prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$  iz R(Q)RPA modela, bez korelacija sparivanja, za jezgru  $^{42}\text{Ca}$  precizno reproducira vrijednost dobivenu analitičkim pravilom sume u modelu tri-tijela.

U okviru Hartree+RRPA modela, provedeno je istraživanje svojstava ( $0^+ \rightarrow 1^+$ ) M1 prijelaza u jezgrama  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{208}\text{Pb}$  sa magičnim brojevima nukleona. Detaljno su istražene funkcije odziva  $R_{M1}(E)$  sa pripadajućim snagama prijelaza  $\sum_E B_{M1}(E)$ , uključujući izoskalarnu i izovektorsku te spinske i orbitalne snage M1 prijelaza. Potvrđeno je da je, u sferno simetričnim jezgrama, spinska komponenta snage prijelaza znatno veća od orbitalne. Zbog velikih razlika žiromagnetskih omjera izovektorska komponenta M1 prijelaza značajno je veća od izoskalarne a obje komponente interferiraju destruktivno na način da je ukupna snaga prijelaza manja od izovektorske. Također je pokazano da se struktura, dominantnih vrhova izovektorske komponente spin-M1 prijelaza, sastoji od 1p1h jedno-čestično-šupljinskih prijelaza između spin-orbit partnerskih stanja. Jedan od zanimljivih aspekata koji je istražen je pitanje kako korelacije sparivanja utječu na svojstva M1 funkcije odziva jezgara s otvorenim ljuskama, što je ilustrirano na primjerima jezgri  $^{42}\text{Ca}$  i  $^{50}\text{Ti}$ . R(Q)RPA proračun pokazuje značajan utjecaj korelacija sparivanja na

dominantni vrh spektra snage prijelaza na način da pomiču vrh prema višim energijama i istovremenu reduciraju snagu prijelaza. Za jezgru  $^{50}\text{Ti}$ , korelacije sparivanja su odgovorne za fragmentaciju snage prijelaza na dva vrha, što je eksperimentalno potvrđeno u ref. [220]. Ishodište učinka korelacija sparivanja su doprinosi na razini osnovnog stanja jezgre dok su čestično-čestične korelacije rezidualne R(Q)RPA interakcije vrlo male.

Kao slijedeći korak istražili smo evoluciju M1-odziva atomskih jezgara duž izotopnog lanca Ca ( $Z=20$ ). Pokazano je da na izotopima Ca s brojem neutrona 20 i 40 M1-odziv pada na nulu, budući da su na razini jednočestičnog spektra relevantni 1p1h prijelazi između spin-orbit partnera blokirani. Isti efekt redukcije M1 odziva smo opazili, kao što i očekujemo zamjenom neutrona protonima u strukturi višefermionskog sustava, tzv. zrcalnim jezgrama (*engl. mirror nuclei*), i na izotonskom lancu ( $Z = 20$ ). Također je detaljno analizirana veza LS-rascjepa i M1 pobuđenja duž izotopnog lanca. Efekt korelacija sparivanja se pokazao značajnim za pomak distribucije M1-snage prijelaza prema višim energijama pri čemu energija rezonantnog vrha snage prijelaza ne koincidira s energijom LS-rascjepa. Razlog tog odstupanja je u doprinosu rezidualne R(Q)RPA interakcije, dominantno IV-PV kontaktne interakcije i korelacija sparivanja, što se pokazalo ključnim za ostvarenje M1 prijelaza povrh neperturbiranog Hartree odziva jezgara.

Zbog izravne povezanosti sa spin-orbit interakcijom, M1-pobuđenja mogu dati jasniji uvid i smjernice za unapređenje RNEDF-a. Nedavno je implementiran novi relativistički energijski funkcional gustoće (DD-PCX) za čije određivanje su osim svojstava osnovnog stanja jezgre uzeti u obzir i eksperimentalni podatci E1-pobuđenja (tj. dipolna polarizibilnost) i energija gigantske monopolne rezonancije za jezgru  $^{208}\text{Pb}$ . Slično, svojstva M1 pobuđenja eksperimentalno dobro poznatih jezgara mogla bi poslužiti za potencijalna poboljšanja parametrizacije RNEDF funkcionala. Treba napomenuti da su ovdje zanemareni doprinosi Fock-ovog člana izmjene u RHB modelu i potencijalno drugih članova rezidualnih interakcija, a mogu imati učinak na konačan rezultat [243].

Proračuni M1 snage prijelaza u ovoj analizi pokazuju nešto veće kvantitativne vrijednosti u odnosu na eksperimentalne podatke, pa stoga ostaje otvoreno pitanje da li je potrebno uključiti dodatne efekte u teorijskim proračunima ili nedostaje snaga prijelaza ekstrahirana obradom eksperimentalnih podataka. Dodatno, energija M1 pobuđenja lakih nuklearnih sustava, kao na primjer jezgre  $^{48}\text{Ca}$ , također pokazuje odstupanje od referentnih podataka. Naime, kod prilagodbe  $\alpha_{IV-PV}$  parametra na eksperimentalne podatke M1 pobuđenja, teorijska vijednost energije centroida  $\bar{E}^{teor.}$  prilagođena je na empirijsku vrijednost rezonantnog vrha. Pri tome bi trebalo voditi računa kako bi numerička vrijednost parametra bila usporediva sa dobivenom vrijednošću za slučaj Gamow-Tellerovih prijelaza. U tom smislu se mogu razmatrati buduća poboljšanja.

Treba istaknuti da u ovom radu, nije uzet u obzir efekt gušenja (*engl. quenching*) [57] kojim se standardnom procedurom značajno reducira snaga prijelaza. Dok su u ovom radu korišteni žiromagnetski faktori slobodnih nukleona, drugi pristupi često uvode faktore gušenja  $0 \leq \zeta_s \leq 1$  kojima se prilagođavala snaga prijelaza na eksperimentalne podatke na način da reduciraju žiromagnetske faktore  $\zeta_s \cdot g_s$ , a time i dominantnu spinsku komponentu snage prijelaza  $B_{M1}^\sigma(E) \rightarrow \zeta_s^2 B_{M1}^\sigma(E)$ . Riječ je o svojevrsnoj proizvoljnosti u pristupu kojim se modifikacijom  $g$  faktora nastoje objasniti efekti nuklearnog medija (*engl. in-medium effects*) [57] na pojedini nukleon. Dodatno, za pouzdaniju analizu efekta gušenja  $g$  faktora potrebno je ići izvan okvira RQRPA proračuna uključivanjem doprinosa kompleksnih konfiguracija, slično kao kod studija Gamow-Teller prijelaza [59, 60]. Nadalje, također nije uključen efekt izmjene mezonskih struja (*engl. meson-exchange current*) [57, 244–246]. Također za veći dio jezgara bogatih neutronima potrebno je uključiti opis deformacije jezgre. Međutim, ne očekujemo da će sva navedena potencijalna poboljšanja u bitnome utjecati na glavne rezultate i zaključke aktualne analize, posebice energije pobuđenja dominantnih vrhova u spektru M1 snage prijelaza i energije SO-rascjepa. S druge strane, nedavna eksperimentalna istraživanja izotopnog lanca kositra  $^{112-124}\text{Sn}$  i vrlo dobro slaganje mjerene i R(Q)RPA snage prijelaza pokazuju da je faktor gušenja  $\zeta_s \approx 0.8 - 0.93$ , što odgovara slabijem gušenju  $g$  faktora nego što je zaključeno u prethodnim istraživanjima,  $\zeta_s \approx 0.6 - 0.75$ . Možemo reći da je R(Q)RPA razinom proračuna i nedavnim eksperimentalnim istraživanjima bitno unaprijeđeno razumijevanje problema nedostatka snage prijelaza (*engl. missing strength problem*).

Osim M1 prijelaza, RNEDF implementacija omogućava istraživanje multipola višeg reda i u tom smislu razmatrani su i magnetski kvadrupolni prijelazi (M2) odnosno prijelazi iz osnovnog  $0^+$  na pobuđeno  $2^-$  stanje. Dobiveni rezultati su konzistentni sa ranijim RPA i proračunima u modelu ljusaka, osobito za  $^{16}\text{O}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ , i  $^{208}\text{Pb}$  jezgre gdje su dobivene snage prijelaza  $\sum_E B_{M2}(E)$  veće od mjerenih. Međutim ako pažljivije analiziramo dostupne podatke parcijalnih snaga M2 prijelaza koji pokazuju znatno više fragmenata u odnosu na M1 prijelaze, osobito za sustave gdje su mjerenja dostupna poput  $^{16}\text{O}$  i  $^{208}\text{Pb}$  jezgara, vidimo vrlo dobro slaganje s eksperimentom. Kao i kod M1 prijelaza korelacije sparivanja imaju važnu ulogu, pomiču spektar snage M2 prijelaza prema višim energijama pri tome reducirajući kvantitativnu vrijednost  $\sum_E B_{M2}(E)$ .

Možemo zaključiti da je područje istraživanja magnetskih gigantskih rezonancija, odnosno  $M\lambda$  prijelaza i dalje vrlo aktivno i izazovno. Ovaj rad otvara niz mogućnosti budućih istraživanja za unaprijeđenje parametrizacije energijskog funkcionala gustoće, takve koja bi uključivala električne, magnetske i Gamow-Teller prijelaze. Primjena takvog, novo-optimiziranog RNEDF-a, na deformirane sustave kao i na egzotične sustave daleko od doline stabilnosti rezultirala bi potpunijim razumijevanjem strukture atomskih jezgara

kao i astrofizičkih procesa. Konačno, i dalje otvorena pitanja nedostatka snage prijelaza te fragmentacije spektra snage prijelaza, mogla bi biti riješena uvođenjem kompleksnijih konfiguracija  $2p2h$  ili  $nph$  u teorijskim razmatranjima odnosno preciznijim mjerenjima u budućim eksperimentalnim istraživanjima.

POGLAVLJE 4

Dodatak

## DODATAK A

# Detalji nerelativističkog Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) formalizma

U ovom poglavlju razmatramo evoluciju matrica jednočestične gustoće  $\rho_{ij}$  i anomalne gustoće  $\kappa_{ij}$  [247] u vremenu. Korelacije sparivanja uvodimo Bogoliubov-Valatin transformacijama [184], pri čemu su čestični operatori  $\hat{a}_i$  izraženi preko kvazičestičnih operatora  $\hat{\beta}_\alpha$ ,

$$\hat{a}_i = \sum_{\alpha} U_{i\alpha} \hat{\beta}_{\alpha} + V_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger}, \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{a}_i^{\dagger} = \sum_{\alpha} U_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} + V_{i\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}. \quad (\text{A.2})$$

Kvazičestični vakuum  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$ , s obzirom na operator  $\hat{\beta}_{\alpha}$ , definiramo kao Slaterovu determinantu,

$$|\tilde{\Phi}_0\rangle = \prod_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha} |0\rangle, \quad (\text{A.3})$$

s obzirom da je  $\hat{\beta}_{\alpha}^2 = 0$  vrijedi,

$$\hat{\beta}_{\alpha'} |\tilde{\Phi}_0\rangle = 0. \quad (\text{A.4})$$

Definiramo jednočestičnu gustoću kao,

$$\rho_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Djelujemo čestičnim operatorom na kvazičestično stanje,

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_i |\tilde{\Phi}_0\rangle &= \left\{ \sum_{\alpha} U_{i\alpha} \hat{\beta}_{\alpha} + V_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} \right\} |\tilde{\Phi}_0\rangle \\
 &= \sum_{\alpha} U_{i\alpha} \hat{\beta}_{\alpha} |\tilde{\Phi}_0\rangle + \sum_{\alpha} V_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} |\tilde{\Phi}_0\rangle \\
 &= \sum_{\alpha} U_{i\alpha} \times 0 + \sum_{\alpha} V_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} |\tilde{\Phi}_0\rangle \\
 &= \sum_{\alpha} V_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} |\tilde{\Phi}_0\rangle,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

slijedi,

$$\begin{aligned}
 \rho_{ij} &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \langle \tilde{\Phi}_0 | (U_{j\alpha'}^* \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} + V_{j\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha'}) (V_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger}) | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} U_{j\alpha'}^* V_{i\alpha}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle + V_{j\alpha'} V_{i\alpha}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} U_{j\alpha'}^* V_{i\alpha}^* (\hat{\beta}_{\alpha'} | \tilde{\Phi}_0 \rangle)^{\dagger} \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle + V_{j\alpha'} V_{i\alpha}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} U_{j\alpha'}^* V_{i\alpha}^* \times 0 \times \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle + V_{j\alpha'} V_{i\alpha}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{j\alpha'} V_{i\alpha}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{j\alpha'} V_{i\alpha}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \delta_{\alpha\alpha'} - \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} \hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{j\alpha'} V_{i\alpha}^* \delta_{\alpha\alpha'} \langle \tilde{\Phi}_0 | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{j\alpha'} V_{i\alpha}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} \hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} V_{j\alpha} V_{i\alpha}^* - 0 = \sum_{\alpha} V_{i\alpha}^* V_{\alpha j} = (V^* V^T)_{ij}.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Definiramo matrični element anomalne gustoće kao,

$$\begin{aligned}
 \kappa_{ij} &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \langle \tilde{\Phi}_0 | \left( \sum_{\alpha} U_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} + V_{i\alpha} \hat{\beta}_{\alpha} \right) \left( \sum_{\alpha'} U_{j\alpha'}^* \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} + V_{j\alpha'} \hat{\beta}_{\alpha'} \right) | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \langle \tilde{\Phi}_0 | (U_{i\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} + V_{i\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}) U_{j\alpha'}^* \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} U_{i\alpha}^* U_{j\alpha'}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha}^{\dagger} \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle + \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{i\alpha} U_{j\alpha'}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} U_{i\alpha}^* U_{j\alpha'}^* (\hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle)^{\dagger} \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle + \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{i\alpha} U_{j\alpha'}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} U_{i\alpha}^* U_{j\alpha'}^* \times 0 \times \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle + \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{i\alpha} U_{j\alpha'}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{i\alpha} U_{j\alpha'}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{\beta}_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{i\alpha} U_{j\alpha'}^* \langle \tilde{\Phi}_0 | \delta_{\alpha\alpha'} - \hat{\beta}_{\alpha'}^{\dagger} \hat{\beta}_{\alpha} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} V_{i\alpha} U_{j\alpha'}^* \delta_{\alpha\alpha'} - 0 = \sum_{\alpha} V_{i\alpha} U_{j\alpha}^* = \sum_{\alpha} V_{i\alpha} U_{\alpha j}^{\dagger} = (V U^{\dagger})_{ij}.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$



Generalizirana matrica gustoće,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle & \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle & \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle \end{pmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

gdje vidimo da su, član po član, članovi generalizirane matrice gustoće dani sa,

$$\rho_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (\text{A.10})$$

kompleksno konjugirana vrijednost jednočestične gustoće dana je sa,

$$\rho_{ij}^* = (\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle)^\dagger = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \rho_{ji}, \quad (\text{A.11})$$

odnosno ako iskoristimo antikomutacijske relacije za fermione slijedi,

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^* &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \langle \tilde{\Phi}_0 | \delta_{ij} - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &= \delta_{ij} \langle \tilde{\Phi}_0 | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \rho_{ij} = \delta_{ij} - \rho_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Iz relacija (A.11) i (A.12) slijedi,

$$\rho_{ij}^* + \rho_{ij} = \delta_{ij}, \quad (\text{A.13})$$

odnosno,

$$2\mathcal{R}e(\rho_{ij}) = \delta_{ij}. \quad (\text{A.14})$$

Računamo matrični element anomalne gustoće,

$$\kappa_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (\text{A.15})$$

koristeći antikomutacijske relacije za fermione, pa slijedi,

$$\kappa_{ij} = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle = -\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle = -\kappa_{ji}, \quad (\text{A.16})$$

odnosno ako kompleksno konjugiramo relaciju (A.15) slijedi,

$$\kappa_{ij}^* = (\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle)^\dagger = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle = -\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle. \quad (\text{A.17})$$

Konačno pogledamo matrične elementa generalizirane matrice gustoće, iz relacije (A.17) slijedi,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle = -\kappa_{ij}^*. \quad (\text{A.18})$$

odnosno,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \delta_{ij} - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \delta_{ij} - \rho_{ji} = \delta_{ij} - \rho_{ij}^*, \quad (\text{A.19})$$

pa generaliziranu matricu gustoće možemo pisati kao,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \rho_{ij} & \kappa_{ij} \\ -\kappa_{ij}^* & \delta_{ij} - \rho_{ij}^* \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Računamo evoluciju matričnih elemenata generalizirane matrice gustoće u vremenu:

$$i\hbar \frac{d\rho_{ji}}{dt} = i\hbar \frac{d\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle}{dt} = \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle \quad (\text{A.21})$$

odnosno,

$$i\hbar \frac{d\kappa_{ji}}{dt} = i\hbar \frac{d\langle \hat{a}_j \hat{a}_i \rangle}{dt} = \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i \hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle \quad (\text{A.22})$$

pri tome je, po pretpostavci, Hamiltonijan poznata forma Hamiltonijana dvočestične interakcije,

$$\hat{H} = \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\sigma\rho} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma. \quad (\text{A.23})$$

Neka su  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  i  $\hat{H}$  bilo koja tri operatora, računamo komutator,

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{H}] &= (\hat{A}\hat{B})\hat{H} - \hat{H}(\hat{A}\hat{B}) \\ &= (\hat{A}\hat{B})\hat{H} - \hat{H}(\hat{A}\hat{B}) - \hat{A}(\hat{H}\hat{B}) + \hat{A}(\hat{H}\hat{B}) \\ &= \hat{A}(\hat{B}\hat{H} - \hat{H}\hat{B}) + (-\hat{H}\hat{A} + \hat{A}\hat{H})\hat{B} \\ &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{H}] + [\hat{A}, \hat{H}]\hat{B}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Za konkretan slučaj vrijedi,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i \hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle + \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i^\dagger, \hat{H}] \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \quad (\text{A.25})$$

Računamo prvi član u relaciji (A.25):

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \quad (\text{A.26})$$

odnosno komutator,

$$[\hat{a}_j, \hat{H}] = \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu} [\hat{a}_j, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu] + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\sigma\rho} [\hat{a}_j, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma]. \quad (\text{A.27})$$

računamo prvi član u relaciji (A.27),

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_j, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu] &= \hat{a}_j (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu) - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu) \hat{a}_j \\
 &= (\delta_{j\mu} - \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_j) \hat{a}_\nu - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu) \hat{a}_j \\
 &= \delta_{j\mu} \hat{a}_\nu + \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu \hat{a}_j - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu) \hat{a}_j \\
 &= \delta_{j\mu} \hat{a}_\nu.
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Nadalje, računamo drugi član u relaciji (A.27),

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_j, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma] &= \hat{a}_j (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) \hat{a}_j \\
 &= (\delta_{j\mu} - \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_j) \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) \hat{a}_j \\
 &= \delta_{j\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) \hat{a}_j \\
 &= \delta_{j\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - \hat{a}_\mu^\dagger (\delta_{j\nu} - \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_j) \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) \hat{a}_j \\
 &= \delta_{j\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - \delta_{j\nu} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma + (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) \hat{a}_j - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) \hat{a}_j \\
 &= \delta_{j\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - \delta_{j\nu} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma.
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Uvrštavamo dobivene rezultate u (A.26),

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu} \delta_{j\mu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger (\delta_{j\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma - \delta_{j\nu} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma) | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\sigma\rho} \delta_{j\mu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\sigma\rho} \delta_{j\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\mu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu j,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle,
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

U sumi, mijenjamo slijepi indeks  $\mu \rightarrow \nu$  pa slijedi  $\sum_{\mu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu j,\sigma\rho} \rightarrow \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\nu j,\sigma\rho}$ , odnosno slijedi,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\nu j,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle,
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

gdje koristimo pravilo antisimetriziranog matričnog elementa  $\bar{v}_{\nu j,\sigma\rho} = -\bar{v}_{j\nu,\sigma\rho}$ .

Konačno,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

Primjenom Wickovog teorema računamo sljedeći matrični element,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\rho | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho | \tilde{\Phi}_0 \rangle,
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

pa, uzevši u obzir prethodno definirane relacije matričnog elementa korelacije i jedinične gustoće, vrijedi,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho} + \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu} - \rho_{\sigma i} \rho_{\rho\nu}. \tag{A.34}$$

Uvrštavanjem dobivenih međurezultata u (A.32) slijedi,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} (\kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho} + \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu} - \rho_{\sigma i} \rho_{\rho\nu}) \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma i} \rho_{\rho\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho},
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

u članu  $\sum_{j\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma i} \rho_{\rho\nu}$  zamijenimo indekse  $\sigma \leftrightarrow \rho$ , pa slijedi,

$$\sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\rho\sigma} \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu} = - \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu}. \tag{A.36}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (A.35) slijedi da je očekivana vrijednost komutatora,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \sum_{j\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho} \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho},
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

u članu  $\bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho i} \rho_{\sigma\nu}$  zamijenimo indekse  $\rho \leftrightarrow \nu$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\rho,\sigma\nu} \rho_{\nu i} \rho_{\sigma\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho} \\
 &= \sum_{\nu} \left( t_{j\nu} \rho_{\nu i} + \sum_{\sigma\rho} \bar{v}_{j\rho,\sigma\nu} \rho_{\sigma\rho} \right) \rho_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho}.
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

U relaciji (A.38) koristimo simetriju na zamjenu indeksa  $\bar{v}_{j\rho,\sigma\nu} = \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho}$  te definiciju Hamiltonijana srednjeg polja,

$$h_{j\nu}(\rho) = t_{j\nu} + \sum_{\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma\rho}, \quad (\text{A.39})$$

slijedi,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{\nu} h_{j\nu}(\rho) \rho_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \kappa_{i\nu}^* \kappa_{\sigma\rho}. \quad (\text{A.40})$$

Definiramo tenzor polja sparivanja,

$$\Delta_{j\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \kappa_{\sigma\rho}. \quad (\text{A.41})$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\nu} h_{j\nu}(\rho) \rho_{\nu i} + \sum_{\nu} \kappa_{i\nu}^* \Delta_{j\nu} \\ &= \sum_{\nu} h_{j\nu}(\rho) \rho_{\nu i} - \sum_{\nu} \Delta_{j\nu} \kappa_{\nu i}^* \\ &= (h(\rho) \cdot \rho)_{ji} - (\Delta \cdot \kappa^*)_{ji}, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

pri tome smo uzeli u obzir da je  $\kappa_{ij} = -\kappa_{ji}$ .

Računamo drugi član u relaciji (A.25), sličnim računom moguće je pokazati da vrijedi,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i^\dagger, \hat{H}] \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle = -(\rho \cdot h(\rho))_{ji} + (\kappa \cdot \Delta^*)_{ji}, \quad (\text{A.43})$$

konačno uvrštavanjem u (A.21) slijedi,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\rho_{ji}}{dt} &= (h(\rho) \cdot \rho)_{ji} - (\Delta \cdot \kappa^*)_{ji} - (\rho \cdot h(\rho))_{ji} + (\kappa \cdot \Delta^*)_{ji} \\ &= (h(\rho) \cdot \rho - \rho \cdot h(\rho))_{ji} - (\Delta \cdot \kappa^*)_{ji} + (\kappa \cdot \Delta^*)_{ji} \\ &= [h(\rho), \rho]_{ji} - (\Delta \cdot \kappa^*)_{ji} + (\kappa \cdot \Delta^*)_{ji}, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

odnosno jednačba gibanja jednočestične matrice gustoće dana je,

$$i\hbar \frac{d\rho_{ji}}{dt} = [h(\rho), \rho]_{ji} - (\Delta \cdot \kappa^*)_{ji} + (\kappa \cdot \Delta^*)_{ji}. \quad (\text{A.45})$$

Računamo evoluciju anomalne gustoće u vremenu,

$$i\hbar \frac{d\kappa_{ji}}{dt} = \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i \hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle + \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i, \hat{H}] \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle. \quad (\text{A.46})$$

Iz prethodnog računa, a zbog sličnosti relacija, možemo pisati,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle. \quad (\text{A.47})$$

Računamo matrični element prvo koristeći antikomutacijske relacije,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \langle \tilde{\Phi}_0 | (\delta_{i\nu} - \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_i) \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &= \delta_{i\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_i \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

pa primjenom Wickovog teorema,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_i \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &\quad + \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i \hat{a}_{\rho} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &\quad - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\rho} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &= \rho_{i\nu} \kappa_{\sigma\rho} + \rho_{\sigma\nu} \kappa_{\rho i} - \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i}, \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

slijedi,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \delta_{i\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_i \hat{a}_{\rho} \hat{a}_{\sigma} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &= \delta_{i\nu} \kappa_{\sigma\rho} - \rho_{i\nu} \kappa_{\sigma\rho} - \rho_{\sigma\nu} \kappa_{\rho i} + \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Konačno uvrštavanjem u (A.47) slijedi,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i [\hat{a}_j, \hat{H}] | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} (\delta_{i\nu} \kappa_{\sigma\rho} - \rho_{i\nu} \kappa_{\sigma\rho} - \rho_{\sigma\nu} \kappa_{\rho i} + \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i}) \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{ji,\sigma\rho} \kappa_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{i\nu} \kappa_{\sigma\rho} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma\nu} \kappa_{\rho i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i} \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \rho_{i\nu} \Delta_{j\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma\nu} \kappa_{\rho i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i} \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \rho_{i\nu} \Delta_{j\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i} \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \rho_{i\nu} \Delta_{j\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i} \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \rho_{i\nu} \Delta_{j\nu} + \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{\sigma i} \\
 &= \sum_{\nu} t_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \rho_{i\nu} \Delta_{j\nu} + \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\nu\rho} \rho_{\rho\sigma} \kappa_{\nu i} \\
 &\quad \sum_{\nu} \left( t_{j\nu} + \sum_{\sigma\rho} \bar{v}_{j\nu,\nu\rho} \rho_{\rho\sigma} \right) \kappa_{\nu i} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \rho_{i\nu} \Delta_{j\nu} \\
 &= \sum_{\nu} h(\rho)_{j\nu} \kappa_{\nu i} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \rho_{i\nu} \Delta_{j\nu} \\
 &= (h(\rho) \cdot \kappa)_{ji} + \Delta_{ji} - \sum_{\nu} \Delta_{j\nu} \cdot \rho_{\nu i}^* \\
 &= (h(\rho) \cdot \kappa)_{ji} + \Delta_{ji} - (\Delta \cdot \rho^*)_{ji}.
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

Računamo drugi član u evoluciji anomalne gustoće,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i, \hat{H}] \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle, \tag{A.52}$$

međuračun komutatora dvočestičnog Hamiltonijana i čestičnog operatora poništenja rezultira,

$$[\hat{a}_i, \hat{H}] = \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu} [\hat{a}_i, \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}] + \sum_{\mu\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\sigma\rho} [\hat{a}_i, \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\sigma} \hat{a}_{\rho}]. \tag{A.53}$$

Računamo prvi član u relaciji (A.53),

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_i, \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}] &= \hat{a}_i (\hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}) - (\hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}) \hat{a}_i \\
 &= (\delta_{i\mu} - \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_i) \hat{a}_{\nu} - (\hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}) \hat{a}_i \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_{\nu} - \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_i \hat{a}_{\nu} - (\hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}) \hat{a}_i \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_{\nu} - \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_i \hat{a}_{\nu} + \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_i \hat{a}_{\nu} \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_{\nu}.
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

odnosno drugi član u relaciji (A.53),

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_i, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho] &= \hat{a}_i (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho) - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho) \hat{a}_i \\
 &= (\delta_{i\mu} - \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_i) \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho) \hat{a}_i \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho) \hat{a}_i \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - \hat{a}_\mu^\dagger (\delta_{i\nu} - \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_i) \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho) \hat{a}_i \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - \delta_{i\nu} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho + \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho) \hat{a}_i \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - \delta_{i\nu} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho + \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_i - \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_i \\
 &= \delta_{i\mu} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho - \delta_{i\nu} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho.
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

Dobivene međurezultate uvrštavamo u (A.52)

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i, \hat{H}] \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{\mu\nu} t_{\mu\nu} \delta_{i\mu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu\nu,\sigma\rho} \left( \delta_{i\mu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \delta_{i\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho | \tilde{\Phi}_0 \rangle \right) \\
 &= \sum_{\nu} t_{i\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\mu\sigma\rho} \bar{v}_{\mu i,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\nu} t_{i\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\nu i,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\nu} t_{i\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \sum_{\nu} t_{i\nu} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{A.56}$$



Primjenjujemo Wickov teorem na matrični element,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\sigma | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\rho \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &+ \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\sigma \hat{a}_\rho | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &- \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\rho | \tilde{\Phi}_0 \rangle \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_\sigma \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\
 &= \rho_{\sigma\nu} \kappa_{j\rho} + \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} - \rho_{\rho\nu} \kappa_{j\sigma},
 \end{aligned} \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | [\hat{a}_i; \hat{H}] \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_\nu t_{i\nu} \kappa_{j\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} (\rho_{\sigma\nu} \kappa_{j\rho} + \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} - \rho_{\rho\nu} \kappa_{j\sigma}) \\
 &= \sum_\nu \kappa_{j\nu} t_{\nu i}^\dagger + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma\nu} \kappa_{j\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{j\sigma} \\
 &= \sum_\nu \kappa_{j\nu} t_{\nu i}^\dagger + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma\nu} \kappa_{j\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{j\sigma} \\
 &= \sum_\nu \kappa_{j\nu} t_{\nu i}^\dagger + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma\nu} \kappa_{j\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{\rho\nu} \kappa_{j\sigma} \\
 &= \sum_\nu \kappa_{j\nu} t_{\nu i}^\dagger + \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{\sigma\nu} \kappa_{j\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} \\
 &= \sum_\nu \kappa_{j\nu} t_{\nu i}^\dagger + \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\rho,\sigma\nu} \rho_{\sigma\rho} \kappa_{j\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} \\
 &= \sum_\nu \kappa_{j\nu} (t_{\nu i}^\dagger + \sum_{\sigma\rho} \bar{v}_{i\rho,\sigma\nu} \rho_{\sigma\rho}) + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} \\
 &= \sum_\nu \kappa_{j\nu} h_{\nu i}^\dagger + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} \\
 &= (\kappa h^*)_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{i\nu,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} = (\kappa h^*)_{ji} - \frac{1}{2} \sum_{\nu\sigma\rho} \bar{v}_{\nu i,\sigma\rho} \rho_{j\nu} \kappa_{\rho\sigma} \\
 &= (\kappa h^*)_{ji} - \sum_\nu \rho_{j\nu} \frac{1}{2} \sum_{\sigma\rho} \bar{v}_{\nu i,\sigma\rho} \kappa_{\rho\sigma} = (\kappa h^*)_{ji} - \sum_\nu \rho_{j\nu} \Delta_{\nu i} \\
 &= (\kappa \cdot h^*(\rho))_{ji} - (\rho \cdot \Delta)_{ji}
 \end{aligned} \tag{A.58}$$

Konačno jednadžba gibanja za matrični element anomalne gustoće glasi,

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d\kappa_{ji}}{dt} &= (h(\rho) \cdot \kappa)_{ji} + \Delta_{ji} - (\Delta \cdot \rho^*)_{ji} + (\kappa \cdot h^*(\rho))_{ji} - (\rho \cdot \Delta)_{ji} \\
 &= (h(\rho) \cdot \kappa)_{ji} + (\kappa \cdot h^*(\rho))_{ji} - (\Delta \cdot \rho^*)_{ji} - (\rho \cdot \Delta)_{ji} + \Delta_{ji}.
 \end{aligned} \tag{A.59}$$

## DODATAK B

# EksPLICITNO slamanje simetrije sačuvanja broja čestica u HFB aproksimaciji

Računamo fluktuaciju operatora broja čestica  $\hat{N} = \sum_{i=1}^A \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$  [247] kao,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_0 | \left( \hat{N} - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \right)^2 | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \left( \hat{N}^2 - 2\hat{N} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle + \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle^2 \right) | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}^2 | \tilde{\Phi}_0 \rangle - 2 \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle^2 + \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle^2 \quad (\text{B.1}) \\ &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}^2 | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle^2, \end{aligned}$$

očekivanu vrijednost kvadrata odstupanja operatora broja čestica od ukupnog broja čestica.

Pri tome je ukupan broj čestica dan izrazom,

$$\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{i=1}^A \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{i=1}^A \rho_{ii} = \text{Tr}(\rho), \quad (\text{B.2})$$

odnosno, prosječna vrijednost kvadrata broja čestica dana je izrazom kako slijedi,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}^2 | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger (\delta_{ij} - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i) \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \delta_{ij} \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j | \tilde{\Phi}_0 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \delta_{ij} \rho_{ji} - \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \left( \kappa_{ij}^* \kappa_{ji} + \rho_{ji} \rho_{ij} - \rho_{ii} \rho_{jj} \right) \quad (\text{B.3}) \\ &= \sum_{i=1}^A \rho_{ii} - \sum_{i=1}^A (\kappa^* \cdot \kappa)_{ii} - \sum_{i=1}^A (\rho^2)_{ii} + \sum_{i=1}^A \rho_{ii} \sum_{j=1}^A \rho_{jj} \\ &= \text{Tr}(\rho) - \text{Tr}(\kappa^* \cdot \kappa) - \text{Tr}(\rho^2) + (\text{Tr}(\rho))^2. \end{aligned}$$

Konačno,

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_0 | \left( \hat{N} - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle \right)^2 | \tilde{\Phi}_0 \rangle &= \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N}^2 | \tilde{\Phi}_0 \rangle - \langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle^2 \\
 &= (Tr \rho)^2 - Tr(\rho) + Tr(\kappa^* \kappa) + Tr((\rho)^2) - (Tr \rho)^2 \quad (\text{B.4}) \\
 &= Tr(\rho^2 - \rho) + Tr(\kappa^* \cdot \kappa) \neq 0,
 \end{aligned}$$

operator broja čestica fluktuiru u odnosu na fiksni broj čestica  $\langle \tilde{\Phi}_0 | \hat{N} | \tilde{\Phi}_0 \rangle$  gledajući prosjek po kvazičestičnom HFB vakuumu.

Kontraprimjer kad broj operatora čestica ne fluktuiru oko prosječne vrijednosti broja čestica, odnosno simetrija broja čestica je sačuvana. Pretpostavimo da je osnovno stanje jezgre bez nukleon-nukleon korelacija, dakle Hartree-Fockov  $|\Phi_0\rangle$  čestično-šupljinski vakuum. Tada je jednočestična gustoća projektor na popunjena stanja, vrijedi,

$$(\hat{\rho})^2 = \hat{\rho}, \quad (\text{B.5})$$

te,

$$\kappa_{ij} = 0, \quad (\text{B.6})$$

za svaki  $i, j$ . Konačno slijedi,

$$\langle \Phi_0 | \left( \hat{N} - \langle \Phi_0 | \hat{N} | \Phi_0 \rangle \right)^2 | \Phi_0 \rangle = Tr(\rho^2 - \rho) + Tr(\kappa^* \cdot \kappa) = 0 + 0 = 0, \quad (\text{B.7})$$

da sada, za slučaj HF čestično-šupljinskog vakuuma, operator broja čestica ne slama simetriju broja čestica, ne fluktuiru oko fiksnog broja čestica  $\langle \Phi_0 | \hat{N} | \Phi_0 \rangle$ .

## DODATAK C

# Matrični elementi kontaktnih međudjelovanja

## C.1 Izoskalar-skalar

Gustoća Lagranžijana izoskalar-skalar interakcije dana je sa [164],

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{2}\alpha_S(\rho)[\bar{\Psi}\Psi][\bar{\Psi}\Psi]. \quad (\text{C.1})$$

Dvočestični matrični element rezidualne kontaktne interakcije glasi,

$$\begin{aligned} \langle ab | V_S(1, 2) | cd \rangle &= - \int d^3\vec{r} \mathcal{L}_S \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 \alpha_S(\rho) [\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1)\Psi_c(\vec{r}_1)][\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2)\Psi_d(\vec{r}_2)]\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Delta funkciju reprezentirajmo razvojem po kuglinim funkcijama,

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-L}^L Y_{L\lambda}^*(\Omega_1) Y_{L\lambda}(\Omega_2), \quad (\text{C.3})$$

a radijalnu ovisnost integralom,

$$\frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} = \int r^2 dr \frac{\delta(r - r_1)}{r r_1} \frac{\delta(r - r_2)}{r r_2}. \quad (\text{C.4})$$

Računamo vezanje dvočestičnog matričnog elementa u dobar angularni moment  $J$ :

$$\begin{aligned} V_{ab,cd}^{(JM)}(1, 2) &= \sum_{m_a, m_c} (-1)^{j_c - m_c} \langle j_a m_a; j_c (-m_c) | JM \rangle \\ &\quad \sum_{m_d, m_b} (-1)^{j_b - m_b} \langle j_d m_d; j_b (-m_b) | JM \rangle V_{ab,cd}(1, 2). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Konačan rezultat je suma četiri člana,

$$\begin{aligned} \langle ab | V_S(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \langle ab | V_S^{\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} + \langle ab | V_S^{\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\ &+ \langle ab | V_S^{\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} + \langle ab | V_S^{\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)}, \end{aligned} \quad (C.6)$$

koji pojedinačno glase,

$$\begin{aligned} \langle ab | V_S^{\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2J+1)} \int r^2 dr \alpha_S(\rho) f_a(r) f_c(r) f_b(r) f_d(r) \\ &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle, \end{aligned} \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} \langle ab | V_S^{\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2} \frac{1}{(2J+1)} s \int r^2 dr \alpha_S(\rho) f_a(r) f_c(r) g_b(r) g_d(r) \\ &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle, \end{aligned} \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} \langle ab | V_S^{\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2} \frac{1}{(2J+1)} \int r^2 dr \alpha_S(\rho) g_a(r) g_c(r) f_b(r) f_d(r) \\ &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle, \end{aligned} \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} \langle ab | V_S^{\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2J+1)} \int r^2 dr \alpha_S(\rho) g_a(r) g_c(r) g_b(r) g_d(r) \\ &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle. \end{aligned} \quad (C.10)$$

## C.2 Izoskalar-vektor

Gustoća Lagranžijana izoskalar-vektor interakcije dana je sa [164],

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2}\alpha_V(\rho)[\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi][\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi] \quad (\text{C.11})$$

Dvočestični matrični element rezidualne kontaktne interakcije glasi,

$$\begin{aligned} \langle ab|V_V(1,2)|cd\rangle &= -\int d^3\vec{r}\mathcal{L}_V \\ &= \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}_1\int d^3\vec{r}_2\alpha_V(\rho)[\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1)\gamma_{(1)}^\mu\Psi_c(\vec{r}_1)][\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2)\gamma_{(2)\mu}\Psi_d(\vec{r}_2)]\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Pokazuje se korisnim delta funkciju prikazati razvojem po kuglinim funkcijama,

$$\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \frac{\delta(r_1-r_2)}{r_1r_2}\sum_{L=0}^{\infty}\sum_{\lambda=-L}^L Y_{L\lambda}^*(\Omega_1)Y_{L\lambda}(\Omega_2), \quad (\text{C.13})$$

gdje radijalnu ovisnost reprezentiramo integralom,

$$\frac{\delta(r_1-r_2)}{r_1r_2} = \int r^2 dr \frac{\delta(r-r_1)}{rr_1} \frac{\delta(r-r_2)}{rr_2}. \quad (\text{C.14})$$

Računamo vezanje dvočestičnog matričnog elementa u dobar angularni moment  $J$ :

$$\begin{aligned} V_{ab,cd}^{(JM)}(1,2) &= \sum_{m_a,m_c} (-1)^{j_c-m_c} \langle j_a m_a; j_c(-m_c)|JM\rangle \\ &\quad \sum_{m_d,m_b} (-1)^{j_b-m_b} \langle j_d m_d; j_b(-m_b)|JM\rangle V_{ab,cd}(1,2). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Riječ je o skalarnom produktu dva četverovektora, rezultat je,

$$\langle ab|V(1,2)_V|cd\rangle^{(JM)} = \langle ab|V_V^{(vremenski)}(1,2)|cd\rangle^{(JM)} - \langle ab|V_V^{(prostorni)}(1,2)|cd\rangle^{(JM)}, \quad (\text{C.16})$$

razlika vremenskog i prostornog produkta dva četverovektora.

Konačan rezultat oba, vremenskog i prostornog doprinosa, raspisan je po članovima kako slijedi.

**Vremenska komponenta:**

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(vremenski)}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \langle ab | V_V^{(vremenski)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_V^{(vremenski)\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_V^{(vremenski)\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_V^{(vremenski)\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)}
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(vremenski)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^{j_b - j_d}}{(2J+1)} \int r^2 dr \alpha_V(\rho) f_a(r) f_c(r) f_b(r) f_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(vremenski)\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^{j_b - j_d}}{(2J+1)} \int r^2 dr \alpha_V(\rho) f_a(r) f_c(r) g_b(r) g_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(vrmenski)\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^{j_b - j_d}}{(2J+1)} \int r^2 dr \alpha_V(\rho) g_a(r) g_c(r) f_b(r) f_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(vremenski)\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^{j_b - j_d}}{(2J+1)} \int r^2 dr \alpha_V(\rho) g_a(r) g_c(r) g_b(r) g_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle, \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

**Napomena:** Fazu koja se javlja u vremenskim članovima  $\propto \frac{1}{2} \frac{(-1)^{j_b - j_d}}{(2J+1)}$  moguće je eliminirati koristeći relaciju simetrije reduciranog matričnog elementa iz dodatka (I.2),

$$\langle (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b || [\vec{\sigma} \otimes Y_J]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d \rangle = (-1)^{j_d + j_b} \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma} \otimes Y_J]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle. \tag{C.22}$$

**Prostorna komponenta:**

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(prostorni)}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \langle ab | V_V^{(prostorni)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_V^{(prostorni)\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_V^{(prostorni)\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_V^{(prostorni)\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)}
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(prostorni)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{+\infty} \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a | | [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d | | [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &\times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) f_a(r) g_c(r) f_b(r) g_d(r) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \left\{ \right. \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a | | [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d | | [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a | | [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d | | [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a | | [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d | | [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J | | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \left. \right\} \\
 &\times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) f_a(r) g_c(r) f_b(r) g_d(r),
 \end{aligned} \tag{C.24}$$



$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(prostorni)\text{član.2}}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{+\infty} \times \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &\quad \times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) f_a(r) g_c(r) g_b(r) f_d(r), \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \left\{ \right. \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \quad (C.25) \\
 &\quad + \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &\quad + \\
 &\left. \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \right\} \\
 &\quad \times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) f_a(r) g_c(r) g_b(r) f_d(r),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(prostorni)\text{član.3}}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{+\infty} \times \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \\
 &\quad \times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) g_a(r) f_c(r) f_b(r) g_d(r) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \left\{ \right. \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \quad (C.26) \\
 &\quad + \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \\
 &\quad + \\
 &\left. \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \right\} \\
 &\quad \times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) g_a(r) f_c(r) f_b(r) g_d(r),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_V^{(\text{prostorni})\text{član.4}}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{+\infty} \times \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &\quad \times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) g_a(r) f_c(r) g_b(r) f_d(r) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{2J+1} \left\{ \right. \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle & \quad (C.27) \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle & \\
 &+ \\
 \left. \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \right\} \\
 &\quad \times \int r^2 dr \alpha_V(\rho) g_a(r) f_c(r) g_b(r) f_d(r).
 \end{aligned}$$

### C.3 Izovektor-vektor

Gustoća Lagranžijana izovektor-vektor interakcije dana je sa [164],

$$\mathcal{L}_{TV} = -\frac{1}{2}\alpha_{TV}(\rho)[\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma^\mu\Psi] \cdot [\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_\mu\Psi] \quad (\text{C.28})$$

dvočestični matrični element glasi ,

$$\begin{aligned} \langle ab|V_{TV}(1,2)|cd\rangle &= -\int d^3\vec{r} \mathcal{L}_{TV} \\ &= \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 \alpha_{TV}(\rho)[\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1)\gamma_{(1)}^\mu\vec{r}_1\Psi_c(\vec{r}_1)] \\ &\quad \cdot [\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2)\gamma_{(2)\mu}\vec{r}_2\Psi_d(\vec{r}_2)]\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 \alpha_{TV}(\rho)[\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1)\gamma_{(1)}^\mu\Psi_c(\vec{r}_1)] \\ &\quad \cdot [\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2)\gamma_{(2)\mu}\Psi_d(\vec{r}_2)]\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &\quad \times \langle t_a t_{za} | \vec{r}_1 | t_c t_{zc} \rangle \cdot \langle t_b t_{zb} | \vec{r}_2 | t_d t_{zd} \rangle . \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Razlika u odnosu na "izoskalar-vektor" račun je ,

- $\alpha_V(\rho) \rightarrow \alpha_{TV}(\rho)$ , dakle proračun dvočestičnog matičnog elementa je identičan kao i u slučaju "izoskalar - vektor " tipu intetrakcije,
- preostaje izračunati  $\langle t_a t_{za} | \vec{r}_1 | t_c t_{zc} \rangle \cdot \langle t_b t_{zb} | \vec{r}_2 | t_d t_{zd} \rangle$  matrične elemente u izovektor-skom prostoru u dodatku (C.7).

## C.4 Izovektor-pseudovektor

Gustoća Lagranžijana efektivne izovektor-pseudovektor kontaktne interakcije glasi [248],

$$\mathcal{L}_{IV-PV} = -\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV}[\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\vec{r}\Psi] \cdot [\bar{\Psi}\gamma^5\gamma_\mu\vec{r}\Psi]. \quad (\text{C.30})$$

Matrični element dvočestične kontaktne interakcije računamo kao dvostruki integral po Hilbertovom prostoru prvog i drugog nukleona,

$$\begin{aligned} \langle ab|V_{IV-PV}(1,2)|cd\rangle &= -\int d^3\vec{r}\mathcal{L}_{IV-PV} \\ &= \frac{1}{2}\alpha_{IV-PV}\int d^3\vec{r}_1[\Psi_a^\dagger(\vec{r}_1)\gamma_{(1)}^0\gamma_{(1)}^5\gamma_{(1)}^\mu\Psi_c(\vec{r}_1)] \\ &\quad \times \int d^3\vec{r}_2[\Psi_b^\dagger(\vec{r}_2)\gamma_{(2)}^0\gamma_{(2)}^5\gamma_{(2)\mu}\Psi_d(\vec{r}_2)]\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \\ &\quad \times \langle t_a t_{za}|\vec{r}_1|t_c t_{zc}\rangle \cdot \langle t_b t_{zb}|\vec{r}_2|t_d t_{zd}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

sa faktorizacijom doprinosa u izospinskom prostoru (C.7).

Delta funkciju reprezentiramo razvojem po kuglinim funkcijama,

$$\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \frac{\delta(r_1-r_2)}{r_1 r_2} \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-L}^L Y_{L\lambda}^*(\Omega_1) Y_{L\lambda}(\Omega_2), \quad (\text{C.32})$$

gdje je radijalna ovisnost dana integralom,

$$\frac{\delta(r_1-r_2)}{r_1 r_2} = \int r^2 dr \frac{\delta(r-r_1)}{r r_1} \frac{\delta(r-r_2)}{r r_2}. \quad (\text{C.33})$$

Računamo vezanje dvočestičnog matričnog elementa u dobar angularni moment  $J$ :

$$\begin{aligned} V_{ab,cd}^{(JM)}(1,2) &= \sum_{m_a, m_c} (-1)^{j_c - m_c} \langle j_a m_a; j_c(-m_c) | JM \rangle \\ &\quad \sum_{m_d, m_b} (-1)^{j_b - m_b} \langle j_d m_d; j_b(-m_b) | JM \rangle V_{ab,cd}(1,2). \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

S obzirom na Lorentzove transformacije riječ je o produktu dva četverovektora pa matrični element dvočestične interakcije, vezan u dobar  $J$ , možemo napisati kao razliku,

$$\langle ab|V_{IV-PV}(1,2)|cd\rangle^{(JM)} = \langle ab|V_{IV-PV}^{(vremenska)}(1,2)|cd\rangle^{(JM)} - \langle ab|V_{IV-PV}^{(prostorna)}(1,2)|cd\rangle^{(JM)}, \quad (\text{C.35})$$

vremenske i prostorne komponente.

Navodimo konačne rezultate matričnog elementa, vremenske i prostorne komponente izovektorske-pseudovektorske kontaktne interakcije, vezanog u dobar  $J$ .

**Vremenska komponenta:**

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_{IV-PV}^{(vremenski)}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \langle ab | V_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)},
 \end{aligned} \tag{C.36}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM=0)} &= -\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \int r^2 dr f_a(r)g_c(r)f_b(r)g_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c)j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d)j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.37}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V(1, 2)_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM=0)} &= +\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \int r^2 dr f_a(r)g_c(r)g_b(r)f_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c)j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b)j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.38}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V(1, 2)_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM=0)} &= +\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \int r^2 dr g_a(r)f_c(r)f_b(r)g_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a)j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d)j_d \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.39}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V(1, 2)_{IV-PV}^{(vremenski)\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM=0)} &= -\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \int r^2 dr g_a(r)f_c(r)g_b(r)f_d(r) \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a)j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b)j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d \rangle.
 \end{aligned} \tag{C.40}$$

**Prostorna komponenta:**

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_{IV-PV}^{(prostorni)}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= \langle ab | V_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.2}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.3}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} \\
 &+ \langle ab | V_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.4}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)},
 \end{aligned} \tag{C.41}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V(1, 2)_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.1}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2}\alpha_{TPV}\frac{1}{2J+1}\sum_{L=0}^{\infty} \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b \rangle \\
 &\times \int r^2 dr f_a(r)f_c(r)f_b(r)f_d(r) \\
 &= +\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV}\frac{1}{2J+1}\left\{ \right. \\
 \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b \rangle \tag{C.42} \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b \rangle \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b \rangle \left. \right\} \\
 &\times \int r^2 dr f_a(r)f_c(r)f_b(r)f_d(r),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V(1, 2)_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.2} (1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{\infty} \\
 &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &\quad \times \int r^2 dr f_a(r) f_c(r) g_b(r) g_d(r) \\
 &= +\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \left\{ \right. \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \quad (C.43) \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \left. \right\} \\
 &\quad \times \int r^2 dr f_a(r) f_c(r) g_b(r) g_d(r),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V(1, 2)_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.3} (1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{\infty} \\
 &\langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \\
 &\quad \times \int r^2 dr g_a(r) g_c(r) f_b(r) f_d(r) \\
 &= +\frac{1}{2}\alpha_{PV} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{\infty} \left\{ \right. \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \quad (C.44) \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \left. \right\} \\
 &\quad \times \int r^2 dr g_a(r) g_c(r) f_b(r) f_d(r),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V(1, 2)_{IV-PV}^{(prostorni)\check{c}lan.4} (1, 2) | cd \rangle^{(JM)} &= +\frac{1}{2}\alpha_{IV-PV} \frac{1}{2J+1} \sum_{L=0}^{\infty} \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &\times \int r^2 dr g_a(r) g_c(r) g_b(r) g_d(r) \\
 &= \frac{1}{2}\alpha_{PV} \frac{1}{2J+1} \left\{ \right. \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J-1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J-1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \quad (C.45) \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \\
 &+ \\
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_{J+1}(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle &\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_{J+1}(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \left. \right\} \\
 &\times \int r^2 dr g_a(r) g_c(r) g_b(r) g_d(r).
 \end{aligned}$$



### C.4.1 Dimenzionalna analiza koeficijenta vezanja $\alpha_{IV-PV}$ u izovektor-pseudovektor kontaktnoj interakciji

Da bismo odredili dimenziju koeficijenta vezanja  $\alpha_{IV-PV}$  izovektorske-pseudovektorske [248] interakcije koristimo se metodom dimenzionalne analize. Polazeći od normalizacijskog uvjeta valne funkcije,

$$\int \bar{\Psi}_N(\vec{x}) \Psi_N(\vec{x}) d^3\vec{x} = 1, \quad (\text{C.46})$$

i uzevši u obzir definiciju integrala slijedi da produkt valnih funkcije mora biti obrnuto proporcionalan volumenu,

$$[\bar{\Psi}_N(\vec{x}) \Psi_N(\vec{x})] = \left[ \frac{1}{V} \right], \quad (\text{C.47})$$

pa konačno dimenzija valne funkcije mora biti obrnuto proporcionalna kvadratnom korijenu volumena,

$$[\Psi_N(\vec{x})] \propto \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \right]. \quad (\text{C.48})$$

Gustoća Lagranžijana kontaktne interakcije glasi,

$$\mathcal{L}_{IV-PV} = -\frac{1}{2} \alpha_{IV-PV} (\bar{\Psi}_N \vec{\tau} \gamma^5 \gamma^\nu \Psi_N) \cdot (\bar{\Psi}_N \vec{\tau} \gamma^5 \gamma_\nu \Psi_N), \quad (\text{C.49})$$

Nultom komponentom tenzora gustoće energije,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_N)} (\partial^\nu \Psi_N) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{C.50})$$

možemo izračunati gustoću Hamiltonijana,

$$\mathcal{H}_{IV-PV} = T_{IV-PV}^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}_{IV-PV}}{\partial \dot{\Psi}_N} \dot{\Psi}_N - g^{00} \mathcal{L}_{IV-PV} = -\mathcal{L}_{IV-PV}. \quad (\text{C.51})$$

Iz dobivene gustoće Hamiltonijana, integracijom po čitavom koordinatnom prostoru, računamo Hamiltonijan,

$$H_{IV-PV} = \int \mathcal{H}_{IV-PV}(\vec{x}) d^3\vec{x} = +\frac{1}{2} \alpha_{IV-PV} \int d^3\vec{x} [\bar{\Psi}_N \vec{\tau} \gamma^5 \gamma^\nu \Psi_N] \cdot [\bar{\Psi}_N \vec{\tau} \gamma^5 \gamma_\nu \Psi_N], \quad (\text{C.52})$$

uvrštavamo odgovarajuće fizikalne veličine, odnosno jedinice,

$$[E] = [\alpha_{IV-PV}] \times \left[ V \times \frac{1}{V} \times \frac{1}{V} \right]. \quad (\text{C.53})$$

Budući da je energija izražena u jedinicama MeV-a, a volumen  $\text{fm}^3$ , slijedi,

$$[\alpha_{IV-PV}] = \text{MeV fm}^3. \quad (\text{C.54})$$

## C.4.2 Metoda određivanja numeričke vrijednosti koeficijenta vezanja $\alpha_{IV-PV}$ u izovektor-pseudovektor kontaktnoj interakciji

Numeričku vrijednost konstante vezanja  $\alpha_{IV-PV}$  odredili smo kao vrijednost na kojoj standardna devijacija  $\sigma_{\Delta}(\alpha_{IV-PV})$  kao funkcija vrijednosti parametra postiže minimum kako je pokazano na slici C.1. Pri tome su,

- $E_{\text{vrh}}^{\text{eksp.}}(^{48}\text{Ca}) = 10.22 \text{ MeV}$ , položaj dominantnog vrha u eksperimentalno mjerenoj funkciji odziva za jezgru  $^{48}\text{Ca}$  [37],
- $E_{\text{vrh}}^{\text{eksp.}}(^{208}\text{Pb}) = 7.3 \text{ MeV}$ , položaj dominantnog vrha u eksperimentalno poznatoj funkciji odziva za jezgru  $^{208}\text{Pb}$  [37, 38].

Uvodimo razliku,

$$\Delta = |\bar{E}^{\text{teor.}} - E_{\text{vrh}}^{\text{eksp.}}|, \quad (\text{C.55})$$

teorijski proračunate energije centroida u odnosu na eksperimentalno utvrđen položaj dominantnog vrha u funkciji odziva  $R_{M1}(E)$  za danu jezgru. S obzirom na to da je  $\bar{E}^{\text{teor.}}$  teorijski proračunata energija centroida funkcija parametra  $\alpha_{IV-PV}$  proizlazi da i  $\Delta$  varira promjenom parametra. Pokazalo se korisnim izračunati standardnu devijaciju,

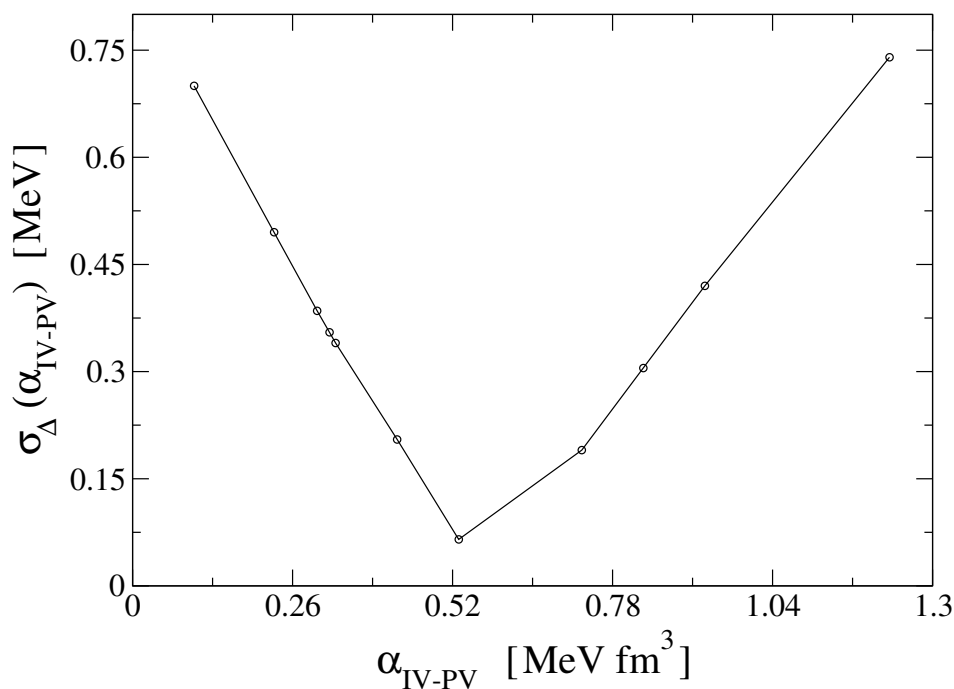
$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\frac{(\Delta(^{48}\text{Ca}) - \bar{\Delta})^2 + (\Delta(^{208}\text{Pb}) - \bar{\Delta})^2}{2}}, \quad (\text{C.56})$$

koja također varira s promjenom vrijednosti parametra  $\alpha_{IV-PV}$ . Dakle, tražimo minimum funkcije  $\sigma_{\Delta}(\alpha_{IV-PV})$  i time smo odredili optimalnu vrijednost parametra  $\alpha_{IV-PV}$  s obzirom na dobro poznate eksperimentalne vrijednosti položaja dominantnog vrha u funkciji odziva  $R_{M1}(E)$  za dva referentna sustava  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{208}\text{Pb}$ . Pri tome je,

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta(^{48}\text{Ca}) + \Delta(^{208}\text{Pb})}{2}, \quad (\text{C.57})$$

aritmetička sredina.

Tablica C.1 prikazuje pregled numeričkih vrijednosti, dobivenih analizom dominantnih M1 stanja za  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{208}\text{Pb}$ .



**Slika C.1:** Standardna devijacija odstupanja centroida energije od energije dominantnih vrhova u eksperimentalno određenim funkcijama odziva za jezgre  $^{48}\text{Ca}$  [37] i  $^{208}\text{Pb}$  [37, 38] kao funkcija koeficijenta vezanja izovektorske-pseudovektorske kontaktne interakcije. Minimum standardne devijacije nalazi se na vrijednosti parametra  $\alpha_{IV-PV} = 0.53 \text{ MeV fm}^3$

**Tablica C.1:** Numeričke vrijednosti razlike, aritmetičke sredine, standardne devijacije i relativne greške,  $\Delta$ ,  $\bar{\Delta}$ ,  $\sigma_{\Delta}$  i  $\sigma_{\Delta}/\bar{\Delta}$  za eksperimentalne i teorijske energije M1 pobuđenja u jezgrama  $^{48}\text{Ca}$  i  $^{208}\text{Pb}$  u ovisnosti o parametru vezanja  $\alpha_{IV-PV}$  izovektorske-pseudovektorske kontaktne interakcije.

$\alpha_{IV-PV}$ [MeV · fm <sup>3</sup> ]	$\Delta(^{48}\text{Ca})$ [MeV]	$\Delta(^{208}\text{Pb})$ [MeV]	$\bar{\Delta}$ [MeV]	$\sigma_{\Delta}$ [MeV]	$\sigma_{\Delta}/\bar{\Delta}$
0.0	1.56	0.17	0.865	0.695	0.803
0.09	1.43	0.0	0.715	0.715	1.000
0.10	1.42	0.02	0.720	0.700	0.978
0.23	1.24	0.25	0.745	0.495	0.664
0.30	1.14	0.37	0.755	0.385	0.509
0.32	1.11	0.40	0.755	0.355	0.509
0.33	1.10	0.42	0.760	0.340	0.447
0.43	0.98	0.57	0.775	0.205	0.265
0.53	0.85	0.72	0.785	0.065	0.083
0.73	0.62	1.00	0.810	0.190	0.235
0.83	0.51	1.12	0.815	0.305	0.374
0.93	0.41	1.25	0.830	0.420	0.508
1.23	0.11	1.59	0.850	0.740	0.870
1.43	0.08	1.79	0.935	0.855	0.914
1.83	0.41	2.16	1.285	0.875	0.681

## C.5 Derivativni član Lagranžijana, skalarno vezanje

Gustoća Lagranžijana derivativnog člana interakcije dana je sa [164],

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{int.}^{(\delta_S)} &= -\frac{1}{2}\delta_S\partial_\nu[\bar{\Psi}\Psi]\partial^\nu[\bar{\Psi}\Psi] \\
 &= -\frac{1}{2}\delta_S\left\{\partial_0[\bar{\Psi}\Psi]\partial^0[\bar{\Psi}\Psi] - \nabla[\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla[\bar{\Psi}\Psi]\right\} \\
 &= -\frac{1}{2}\delta_S\left\{\left(\frac{\partial[\bar{\Psi}\Psi]}{\partial t}\right)^2 - \nabla[\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla[\bar{\Psi}\Psi]\right\}
 \end{aligned} \tag{C.58}$$

Zanemarujemo efekte retardacije, odnosno zanemarujemo varijaciju valne funkcije u vremenu zbog malih dimenzija jezgre  $\left(\frac{\partial[\bar{\Psi}\Psi]}{\partial t}\right)^2 \approx 0$  kao u ref. [153], pa slijedi,

$$\mathcal{L}_{\delta_S} \approx \frac{1}{2}\delta_S\nabla[\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla[\bar{\Psi}\Psi], \tag{C.59}$$

odnosno Hamiltonijan interakcije je dan sa,

$$V_{\delta_S} = -\int d^3\vec{r} \mathcal{L}_{\delta_S} = -\frac{1}{2}\delta_S\int d^3\vec{r} \nabla[\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla[\bar{\Psi}\Psi]. \tag{C.60}$$

Dalje razmatramo integral,

$$I = \int d^3\vec{r} \nabla[\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla[\bar{\Psi}\Psi], \tag{C.61}$$

koristimo pomoćnu relaciju,

$$\nabla \cdot \left\{[\bar{\Psi}\Psi]\nabla[\bar{\Psi}\Psi]\right\} = \nabla[\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla[\bar{\Psi}\Psi] + [\bar{\Psi}\Psi]\nabla^2[\bar{\Psi}\Psi], \tag{C.62}$$

integriramo lijevu i desnu stranu,

$$\int_{V(S)} d^3\vec{r} \nabla \cdot \left\{[\bar{\Psi}\Psi]\nabla[\bar{\Psi}\Psi]\right\} = \int_{V(S)} d^3\vec{r} \nabla[\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla[\bar{\Psi}\Psi] + \int_{V(S)} d^3\vec{r} [\bar{\Psi}\Psi]\nabla^2[\bar{\Psi}\Psi]. \tag{C.63}$$

$$\int_{V(S)} d^3\vec{r} \nabla \cdot \left\{[\bar{\Psi}\Psi]\nabla[\bar{\Psi}\Psi]\right\} = \int_S \hat{n} \cdot \left\{[\bar{\Psi}\Psi]\nabla[\bar{\Psi}\Psi]\right\} dS \tag{C.64}$$

Da bi probabilistička interpretacija valne funkcije imala fizikalnog smisla mora biti:

- kvadratično integrabilna  $\Psi(\vec{r}) \in L^2[0; \infty)$ , pa vrijedi uvjet normalizacije  $\int \bar{\Psi}(\vec{r})\Psi(\vec{r})d^3\vec{r} = 1$ ,
- kao posljedica kvadratične integrabilnosti valne funkcije vrijedi rubni uvjet da radijalni dio valne funkcije u limesu  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r) = 0$  beskonačne udaljenosti mora iščezavati,

- i konačno mora vrijediti  $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(r) \frac{\partial \Psi(r)}{\partial r} = 0$ .

S obzirom na svojstva valne funkcije integral po površini:

- ne ovisi o obliku površine  $S$  koja obuhvaća volumen  $V(S)$ ,
- ne specificira o kojoj se površini integracije radi pa biramo onu u beskonačnosti  $\lim_{S \rightarrow \infty}$  gdje podintegralna funkcija pada na nulu,
- normalu na površinu u beskonačnosti biramo da je radijalnog smjera  $\hat{n} = \hat{r}$ ,

$$\begin{aligned} \int_S \hat{n} \cdot \left\{ [\bar{\Psi}\Psi] \nabla [\bar{\Psi}\Psi] \right\} dS &= \lim_{S \rightarrow \infty} \int dS \hat{r} \cdot \left\{ [\bar{\Psi}\Psi] \nabla [\bar{\Psi}\Psi] \right\} \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \int dS [\bar{\Psi}\Psi] \frac{\partial [\bar{\Psi}\Psi]}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

slijedi,

$$\int d^3\vec{r} \nabla [\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla [\bar{\Psi}\Psi] = - \int d^3\vec{r} [\bar{\Psi}\Psi] \nabla^2 [\bar{\Psi}\Psi]. \quad (\text{C.66})$$

Konačno, Hamiltonijan derivativnog člana skalarnog vezanja glasi,

$$V_{\delta_S} = -\frac{1}{2} \delta_S \int d^3\vec{r} \nabla [\bar{\Psi}\Psi] \cdot \nabla [\bar{\Psi}\Psi] = \frac{1}{2} \delta_S \int d^3\vec{r} [\bar{\Psi}\Psi] \nabla^2 [\bar{\Psi}\Psi]. \quad (\text{C.67})$$

Računamo dvočestični matrični element rezidualne kontaktne interakcije,

$$\begin{aligned} \langle ab | V_{\delta_S}(1, 2) | cd \rangle &= \frac{1}{2} \delta_S \int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 [\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1) \Psi_c(\vec{r}_1)] \\ &\quad \nabla_{\vec{r}_2}^2 [\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2) \Psi_d(\vec{r}_2)] \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

Pokazuje se korisnim delta funkciju reprezentirati razvojem po kuglinim funkcijama,

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-L}^L Y_{L\lambda}^*(\Omega_1) Y_{L\lambda}(\Omega_2), \quad (\text{C.69})$$

gdje radijalnu ovisnost reprezentiramo integralom,

$$\frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} = \int r^2 dr \frac{\delta(r - r_1)}{r r_1} \frac{\delta(r - r_2)}{r r_2}. \quad (\text{C.70})$$

Nakon uvrštavanja računamo integral,

$$\begin{aligned}
 & \int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 [\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1)\Psi_c(\vec{r}_1)]\nabla_{\vec{r}_2}^2[\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2)\Psi_d(\vec{r}_2)]\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\
 &= \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{\lambda=-L}^L \int r^2 dr \int d\Omega_1 [\bar{\Psi}_a(r, \Omega_1)Y_{L\lambda}^*(\Omega_1)\Psi_c(r, \Omega_1)] \\
 & \quad \times \int d\Omega_2 \nabla_{r, \Omega_2}^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega_2)\Psi_d(r, \Omega_2)]Y_{L\lambda}(\Omega_2),
 \end{aligned} \tag{C.71}$$

pokazalo se korisnim definirati funkciju ovisnu o radijalnoj koordinati,

$$I_{ac}(r) = \int d\Omega_1 [\bar{\Psi}_a(r, \Omega_1)Y_{L,\lambda}^*(\Omega_1)\Psi_c(r, \Omega_1)]. \tag{C.72}$$

Promatramo izraz,

$$\begin{aligned}
 & \int r^2 dr I_{ac}(r) \int d\Omega_2 \nabla_{r, \Omega_2}^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega_2)\Psi_d(r, \Omega_2)]Y_{L,\lambda}(\Omega_2) \\
 &= \int r^2 dr \int d\Omega_2 \nabla_{r, \Omega_2}^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega_2)\Psi_d(r, \Omega_2)]I_{ac}(r)Y_{L,\lambda}(\Omega_2)
 \end{aligned} \tag{C.73}$$

s obzиром da je sada  $\Omega_2(\theta_2, \phi_2)$  postao slijepi prostorni kut možemo pisati,

$$\begin{aligned}
 & \int r^2 dr \int d\Omega_2 \nabla_{r, \Omega_2}^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega_2)\Psi_d(r, \Omega_2)]I_{ac}(r)Y_{L,\lambda}(\Omega_2) \\
 &= \int r^2 dr \int d\Omega \nabla_{\vec{r}}^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)]I_{ac}(r)Y_{L,\lambda}(\Omega) \\
 &= \int d^3\vec{r} \nabla_{\vec{r}}^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)]I_{ac}(r)Y_{L,\lambda}(\Omega).
 \end{aligned} \tag{C.74}$$

Definiramo funkcije,

$$F_{ac}(r, \Omega) = I_{ac}(r)Y_{L,\lambda}(\Omega), \tag{C.75}$$

i

$$G_{bd}(r, \Omega) = [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)], \tag{C.76}$$

pa sada integral možemo pisati kao,

$$\int d^3\vec{r} \nabla_{\vec{r}}^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)]I_{ac}(r)Y_{L,\lambda}(\Omega) = \int d^3\vec{r} \nabla_{\vec{r}}^2 [G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega). \tag{C.77}$$

**Pomoćni račun I :**

$$\nabla \cdot \left\{ \nabla [G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) \right\} = \nabla_{\vec{r}}^2 [G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) + \nabla G_{bd}(r, \Omega) \cdot \nabla F_{ac}(r, \Omega) \tag{C.78}$$

Integriramo lijevu i desnu stranu,

$$\int d^3\vec{r} \nabla \cdot \left\{ \nabla[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) \right\} = \int d^3\vec{r} \nabla_{\vec{r}}^2[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) + \int d^3\vec{r} \nabla G_{bd}(r, \Omega) \cdot \nabla F_{ac}(r, \Omega), \quad (\text{C.79})$$

koristimo Gaussov teorem i integral po volumenu transformiramo u integral po zatvorenoj površini,

$$\begin{aligned} & \int d^3\vec{r} \nabla \cdot \left\{ \nabla[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) \right\} \\ &= \int dS \hat{n} \cdot \nabla[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) \\ &= \int dS \hat{r} \cdot \nabla[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) \\ &= \lim_{S \rightarrow \infty} \int dS \frac{\partial[G_{bd}(r, \Omega)]}{\partial r} F_{ac}(r, \Omega) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

dakle, rezultat je nula. Naime integral po zatvorenoj površini vrijedi za bilo koju po volji izabranu zatvorenu površinu  $S$  pa slobodno možemo izabrati površinu integracije u beskonačnosti  $\lim_{S \rightarrow \infty} \int dS$  na kojoj podintegralna funkcija  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial[G_{bd}(r, \Omega)]}{\partial r} F_{ac}(r, \Omega) = 0$  pada na nulu.

Konačno,

$$\int d^3\vec{r} \nabla_{\vec{r}}^2[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) = - \int d^3\vec{r} \nabla G_{bd}(r, \Omega) \cdot \nabla F_{ac}(r, \Omega). \quad (\text{C.81})$$

**Pomoćni račun II :**

$$\nabla \left\{ G_{bd}(r, \Omega)F_{ac}(r, \Omega) \right\} = \nabla[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) + G_{bd}(r, \Omega)\nabla F_{ac}(r, \Omega) \quad (\text{C.82})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \left\{ G_{bd}(r, \Omega)F_{ac}(r, \Omega) \right\} &= \nabla^2[G_{bd}(r, \Omega)]F_{ac}(r, \Omega) \\ &+ 2\nabla G_{bd}(r, \Omega) \cdot \nabla F_{ac}(r, \Omega) \\ &+ G_{bd}(r, \Omega)\nabla^2 F_{ac}(r, \Omega), \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

integriramo lijevu i desnu stranu,

$$\begin{aligned}
 \int d^3\vec{r} \nabla \cdot \nabla \left\{ G_{bd}(r, \Omega) F_{ac}(r, \Omega) \right\} &= \int d^3\vec{r} \nabla^2 [G_{bd}(r, \Omega)] F_{ac}(r, \Omega) \\
 &+ 2 \int d^3\vec{r} \nabla G_{bd}(r, \Omega) \cdot \nabla F_{ac}(r, \Omega) \\
 &+ \int d^3\vec{r} G_{bd}(r, \Omega) \nabla^2 F_{ac}(r, \Omega),
 \end{aligned} \tag{C.84}$$

koristimo relaciju izvedenu u poglavlju "Pomoćni račun I"

$$\begin{aligned}
 \int d^3\vec{r} \nabla \cdot \nabla \left\{ G_{bd}(r, \Omega) F_{ac}(r, \Omega) \right\} &= \int d^3\vec{r} \nabla^2 [G_{bd}(r, \Omega)] F_{ac}(r, \Omega) \\
 &- 2 \int d^3\vec{r} \nabla^2 [G_{bd}(r, \Omega)] F_{ac}(r, \Omega) \\
 &+ \int d^3\vec{r} G_{bd}(r, \Omega) \nabla^2 F_{ac}(r, \Omega) \\
 &= - \int d^3\vec{r} \nabla^2 [G_{bd}(r, \Omega)] F_{ac}(r, \Omega) \\
 &+ \int d^3\vec{r} G_{bd}(r, \Omega) \nabla^2 F_{ac}(r, \Omega)
 \end{aligned} \tag{C.85}$$

pa integral po volumenu na lijevoj strani jednakosti možemo transformirati u integral po zatvorenoj površini,

$$\begin{aligned}
 \int d^3\vec{r} \nabla \cdot \nabla \left\{ G_{bd}(r, \Omega) F_{ac}(r, \Omega) \right\} &= \int_S dS \hat{n} \cdot \nabla \left\{ G_{bd}(r, \Omega) F_{ac}(r, \Omega) \right\} \\
 &= \int_S dS \hat{r} \cdot \nabla \left\{ G_{bd}(r, \Omega) F_{ac}(r, \Omega) \right\} \\
 &= \lim_{S \rightarrow \infty} \int dS \frac{\partial (G_{bd}(r, \Omega) F_{ac}(r, \Omega))}{\partial r} = 0,
 \end{aligned} \tag{C.86}$$

jer, kao u prethodnom slučaju, podintegralna funkcija na površini u beskonačnosti pada na nulu, slijedi,

$$\int d^3\vec{r} \nabla^2 [G_{bd}(r, \Omega)] F_{ac}(r, \Omega) = \int d^3\vec{r} G_{bd}(r, \Omega) \nabla^2 F_{ac}(r, \Omega). \tag{C.87}$$

Uvrštavanjem pokrata koje smo prethodno uveli slijedi,

$$\begin{aligned}
 &\int d^3\vec{r} \nabla^2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega) \Psi_d(r, \Omega)] I_{ac}(r) Y_{L\lambda}(\Omega) \\
 &= \int d^3\vec{r} [\bar{\Psi}_b(r, \Omega) \Psi_d(r, \Omega)] \nabla^2 [I_{ac}(r) Y_{L\lambda}(\Omega)].
 \end{aligned} \tag{C.88}$$



S obzirom da se, po pretpostavci, radi o sferno simetričnom sustavu znamo da vrijedi,

$$\nabla^2[I_{ac}(r)Y_{L\lambda}(\Omega)] = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) [I_{ac}(r)Y_{L\lambda}(\Omega)], \quad (\text{C.89})$$

slijedi,

$$\begin{aligned} & \int d^3\vec{r} [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)]\nabla^2[I_{ac}(r)Y_{L\lambda}(\Omega)] \\ &= \int d^3\vec{r} [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)] \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) [I_{ac}(r)Y_{L\lambda}(\Omega)] \\ &= \int r^2 dr \int d\Omega [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)] \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) [I_{ac}(r)Y_{L\lambda}(\Omega)] \\ &= \int r^2 dr \int d\Omega [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)Y_{L,\lambda}(\Omega)\Psi_d(r, \Omega)] \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) I_{ac}(r), \end{aligned} \quad (\text{C.90})$$

definiramo,

$$I_{bd}(r) = \int d\Omega [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)Y_{L,\lambda}(\Omega)\Psi_d(r, \Omega)], \quad (\text{C.91})$$

pa možemo pisati,

$$\begin{aligned} & \int d^3\vec{r} [\bar{\Psi}_b(r, \Omega)\Psi_d(r, \Omega)]\nabla^2[I_{ac}(r)Y_{L\lambda}(\Omega)] \\ &= \int_0^\infty r^2 dr I_{bd}(r) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) I_{ac}(r) \\ &= \int_0^\infty r^2 dr I_{bd}(r) \frac{\partial^2 I_{ac}(r)}{\partial r^2} + 2 \int_0^\infty r dr I_{bd}(r) \frac{\partial I_{ac}(r)}{\partial r} - L(L+1) \int_0^\infty dr I_{bd}(r) I_{ac}(r). \end{aligned} \quad (\text{C.92})$$

Potrebno je izračunati radijalni integral,

$$\int_0^\infty r^2 dr I_{bd}(r) \frac{\partial^2 I_{ac}(r)}{\partial r^2}. \quad (\text{C.93})$$

Razmatramo derivaciju,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 I_{bd}(r) \frac{\partial I_{ac}(r)}{\partial r} \right\} = 2r I_{bd}(r) \frac{\partial I_{ac}(r)}{\partial r} + r^2 \frac{\partial I_{bd}(r)}{\partial r} \frac{\partial I_{ac}(r)}{\partial r} + r^2 I_{bd}(r) \frac{\partial^2 I_{ac}(r)}{\partial r^2} \quad (\text{C.94})$$

integriramo, parcijalne derivacije možemo zamijeniti punim s obzirom da je  $r$  jedina

varijabla koja je preostala,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left\{ r^2 I_{bd}(r) \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \right\} &= 2 \int_0^\infty r dr I_{bd}(r) \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \\ &+ \int_0^\infty r^2 dr \frac{dI_{bd}(r)}{dr} \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \\ &+ \int_0^\infty r^2 dr I_{bd}(r) \frac{d^2 I_{ac}(r)}{dr^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

Izračunamo integral na lijevoj strani jednakosti,

$$\int_0^\infty dr \frac{d}{dr} \left\{ r^2 I_{bd}(r) \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \right\} = r^2 I_{bd}(r) \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \Big|_0^\infty = 0, \quad (\text{C.96})$$

pri čemu su rubni uvjeti  $r^2 I_{bd}(r) \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \Big|_0^\infty$  takvi da po obje granice integracije podintegralna funkcija pada na nulu, slijedi,

$$\int_0^\infty r^2 dr I_{bd}(r) \frac{d^2 I_{ac}(r)}{dr^2} = -2 \int_0^\infty r dr I_{bd}(r) \frac{dI_{ac}(r)}{dr} - \int_0^\infty r^2 dr \frac{dI_{bd}(r)}{dr} \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \quad (\text{C.97})$$

Konačno,

$$\begin{aligned} &\int d^3 \vec{r} [\bar{\Psi}_b(r, \Omega) \Psi_d(r, \Omega)] \nabla^2 [I_{ac}(r) Y_{L,\lambda}(\Omega)] \\ &= \int_0^\infty r^2 dr I_{bd}(r) \frac{\partial^2 I_{ac}(r)}{\partial r^2} + 2 \int_0^\infty r dr I_{bd}(r) \frac{\partial I_{ac}(r)}{\partial r} - L(L+1) \int_0^\infty dr I_{bd}(r) I_{ac}(r) \\ &= -2 \int_0^\infty r dr I_{bd}(r) \frac{dI_{ac}(r)}{dr} - \int_0^\infty r^2 dr \frac{dI_{bd}(r)}{dr} \frac{dI_{ac}(r)}{dr} \\ &\quad + 2 \int_0^\infty r dr I_{bd}(r) \frac{\partial I_{ac}(r)}{\partial r} - L(L+1) \int_0^\infty dr I_{bd}(r) I_{ac}(r) \\ &= - \int_0^\infty r^2 dr \frac{dI_{bd}(r)}{dr} \frac{dI_{ac}(r)}{dr} - L(L+1) \int_0^\infty dr I_{bd}(r) I_{ac}(r). \end{aligned} \quad (\text{C.98})$$

Dakle, matrični element rezidualne, dvočestične kontaktne interakcije, glasi,

$$\begin{aligned} &\langle ab | V_{\delta_S}(1, 2) | cd \rangle \\ &= \frac{1}{2} \delta_S \int d^3 \vec{r}_1 \int d^3 \vec{r}_2 [\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1) \Psi_c(\vec{r}_1)] \nabla_{\vec{r}_2}^2 [\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2) \Psi_d(\vec{r}_2)] \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= -\frac{1}{2} \delta_S \sum_{L=0}^\infty \sum_{\lambda=-L}^L \left\{ \int_0^\infty r^2 dr \frac{dI_{bd,L\lambda}(r)}{dr} \frac{dI_{ac,L\lambda}(r)}{dr} + L(L+1) \int_0^\infty dr I_{bd,L\lambda}(r) I_{ac,L\lambda}(r) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.99})$$

gdje su  $I_{ac}(r)$  i  $I_{bd}(r)$  definirani kako slijedi,

$$I_{ac,L\lambda}(r) = \int d\Omega_1 [\bar{\Psi}_a(r, \Omega_1) Y_{L\lambda}^*(\Omega_1) \Psi_c(r, \Omega_1)], \quad (\text{C.100})$$

$$I_{bd,L\lambda}(r) = \int d\Omega_2 [\bar{\Psi}_b(r, \Omega_2) Y_{L\lambda}(\Omega_2) \Psi_d(r, \Omega_2)]. \quad (\text{C.101})$$

Računamo,

$$\begin{aligned} I_{ac,L\lambda}(r) &= \int d\Omega_1 [\bar{\Psi}_a(r, \Omega_1) Y_{L,\lambda}^*(\Omega_1) \Psi_c(r, \Omega_1)] \\ &= \int d\Omega_1 [\bar{\Psi}_a(r, \Omega_1) (-1)^\lambda Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) \Psi_c(r, \Omega_1)] \\ &= (-1)^\lambda \int d\Omega_1 \begin{bmatrix} f_a(r) \Omega_{j_a[\frac{1}{2}\ell_a]}(\hat{r}_1) \\ ig_a(r) \Omega_{j_a[\frac{1}{2}\tilde{\ell}_a]}(\hat{r}_1) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) \begin{bmatrix} f_c(r) \Omega_{j_c[\frac{1}{2}\ell_c]}(\hat{r}_1) \\ ig_c(r) \Omega_{j_c[\frac{1}{2}\tilde{\ell}_c]}(\hat{r}_1) \end{bmatrix} \\ &= (-1)^\lambda \int d\Omega_1 \begin{bmatrix} f_a(r) \Omega_{j_a[\frac{1}{2}\ell_a]}^\dagger(\hat{r}_1) - ig_a(r) \Omega_{j_a[\frac{1}{2}\tilde{\ell}_a]}^\dagger(\hat{r}_1) \\ -ig_c(r) Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) \Omega_{j_c[\frac{1}{2}\ell_c]}(\hat{r}_1) \\ -ig_c(r) Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) \Omega_{j_c[\frac{1}{2}\tilde{\ell}_c]}(\hat{r}_1) \end{bmatrix} \\ &= (-1)^\lambda \left\{ f_a(r) f_c(r) \langle (\frac{1}{2}; \ell_a) j_a m_a | Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) | (\frac{1}{2}; \ell_c) j_c m_c \rangle \right. \\ &\quad \left. - g_a(r) g_c(r) \langle (\frac{1}{2}; \tilde{\ell}_a) j_a m_a | Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) | (\frac{1}{2}; \tilde{\ell}_c) j_c m_c \rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.102})$$

### Pomoćni račun III:

Znamo da vrijedi,

$$[1_\sigma \otimes Y_{L,-\lambda}(\Omega_1)]_{J'M'} = \sum_{m_s, \lambda} \langle 0 m_s; L(-\lambda) | J'M' \rangle 1_\sigma \otimes Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) \quad (\text{C.103})$$

odnosno inverzna relacija,

$$\begin{aligned} 1_\sigma \otimes Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) &= \sum_{J', M'} \langle 0 m_s; L(-\lambda) | J'M' \rangle [1_\sigma \otimes Y_{L,-\lambda}(\Omega_1)]_{J'M'} \\ &= \langle 00; L(-\lambda) | L(-\lambda) \rangle [1_\sigma \otimes Y_{L,-\lambda}(\Omega_1)]_{L,-\lambda} = [1_\sigma \otimes Y_{L,-\lambda}(\Omega_1)]_{L,-\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{C.104})$$

Primjenom Wigner-Eckartovog teorema slijedi,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a m_a | Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) | (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c m_c \rangle &= \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a m_a | [1_\sigma \otimes Y_{L,-\lambda}(\Omega_1)]_{L,-\lambda} | (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c m_c \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2j_a + 1}} \langle j_c m_c, L(-\lambda) | j_a m_a \rangle \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_\sigma \otimes Y_L(\Omega_1)]_L || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.105})$$

Uvrštavanjem slijedi,

$$\begin{aligned}
 I_{ac,L\lambda}(r) &= (-1)^\lambda \\
 &\times \left\{ f_a(r)f_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a m_a | Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) | (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c m_c \rangle \right. \\
 &\quad \left. - g_a(r)g_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a)j_a m_a | Y_{L,-\lambda}(\Omega_1) | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c)j_c m_c \rangle \right\} \\
 &= (-1)^\lambda \frac{1}{\sqrt{2j_a + 1}} \langle j_c m_c; L(-\lambda) | j_a m_a \rangle \\
 &\times \left\{ f_a(r)f_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_a)j_a || [1_\sigma \otimes Y_L(\Omega_1)]_L || (\frac{1}{2}, \ell_c)j_c \rangle \right. \\
 &\quad \left. - g_a(r)g_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a)j_a || [1_\sigma \otimes Y_L(\Omega_1)]_L || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c)j_c \rangle \right\}
 \end{aligned} \tag{C.106}$$

odnosno možemo pisati,

$$\begin{aligned}
 I_{bd,L\lambda}(r) &= \left\{ f_b(r)f_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b m_b | Y_{L,\lambda}(\Omega_2) | (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d m_d \rangle \right. \\
 &\quad \left. - g_b(r)g_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b)j_b m_b | Y_{L,\lambda}(\Omega_2) | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d)j_d m_d \rangle \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2j_b + 1}} \langle j_d m_d; L\lambda | j_b m_b \rangle \\
 &\times \left\{ f_b(r)f_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_b)j_b || [1_\sigma \otimes Y_L(\Omega_2)]_L || (\frac{1}{2}, \ell_d)j_d \rangle \right. \\
 &\quad \left. - g_b(r)g_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b)j_b || [1_\sigma \otimes Y_L(\Omega_2)]_L || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d)j_d \rangle \right\}.
 \end{aligned} \tag{C.107}$$

Računamo dvočestični matrični element vezan u angularni moment  $J$ :

$$\begin{aligned}
 V_{ab,cd}^{(JM)}(1, 2) &= \sum_{m_a, m_c} (-1)^{j_c - m_c} \langle j_a m_a; j_c(-m_c) | JM \rangle \\
 &\quad \sum_{m_d, m_b} (-1)^{j_b - m_b} \langle j_d m_d; j_b(-m_b) | JM \rangle V_{ab,cd}(1, 2),
 \end{aligned} \tag{C.108}$$

Konačan rezultat za derivativni član Lagranžijana, za skalarno vezanje,  $\langle ab | V_{\delta_S}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)}$ :

$$\begin{aligned} & \langle ab | V_{\delta_S}^{\text{đlan.1}}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} = +\frac{1}{2}\delta_S \frac{1}{(2J+1)} \\ & \times \left\{ \int_0^\infty r^2 dr \left( \frac{df_a(r)}{dr} f_c(r) + f_a(r) \frac{df_c(r)}{dr} \right) \left( \frac{df_b(r)}{dr} f_d(r) + f_b(r) \frac{df_d(r)}{dr} \right) \right. \\ & \left. + J(J+1) \int_0^\infty dr f_a(r) f_c(r) f_b(r) f_d(r) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

$$\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle,$$

$$\begin{aligned} & \langle ab | V_{\delta_S}^{\text{đlan.2}}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} = -\frac{1}{2}\delta_S \frac{1}{(2J+1)} \\ & \times \left\{ \int_0^\infty r^2 dr \left[ \left( \frac{df_a(r)}{dr} f_c(r) + f_a(r) \frac{df_c(r)}{dr} \right) \left( \frac{dg_b(r)}{dr} g_d(r) + g_b(r) \frac{dg_d(r)}{dr} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + J(J+1) \int_0^\infty dr f_a(r) f_c(r) g_b(r) g_d(r) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.110})$$

$$\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle,$$

$$\begin{aligned} & \langle ab | V_{\delta_S}^{\text{đlan.3}}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} = -\frac{1}{2}\delta_S \frac{1}{(2J+1)} \\ & \times \left\{ \int_0^\infty r^2 dr \left( \frac{dg_a(r)}{dr} g_c(r) + g_a(r) \frac{dg_c(r)}{dr} \right) \left( \frac{df_b(r)}{dr} f_d(r) + f_b(r) \frac{df_d(r)}{dr} \right) \right. \\ & \left. + J(J+1) \int_0^\infty dr g_a(r) g_c(r) f_b(r) f_d(r) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.111})$$

$$\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle,$$

$$\begin{aligned} & \langle ab | V_{\delta_S}^{\text{đlan.4}}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} = +\frac{1}{2}\delta_S \frac{1}{(2J+1)} \\ & \times \left\{ \int_0^\infty r^2 dr \left( \frac{dg_a(r)}{dr} g_c(r) + g_a(r) \frac{dg_c(r)}{dr} \right) \left( \frac{dg_b(r)}{dr} g_d(r) + g_b(r) \frac{dg_d(r)}{dr} \right) \right. \\ & \left. + J(J+1) \int_0^\infty dr g_a(r) g_c(r) g_b(r) g_d(r) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.112})$$

$$\times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [1_\sigma \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle.$$

## C.6 Coulombov član

Propagator Yukawinog tipa za maseno polje,  $m_\pi \neq 0$  [150, 153],

$$D_\pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{e^{-m_\pi|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (\text{C.113})$$

S obzirom da je Coulombova interakcija elektromagnetskog tipa uvrštavamo masu mirovanja fotona  $m_\gamma = 0$  jednaku nuli pa slijedi,

$$D_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\alpha_c}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (\text{C.114})$$

gdje je konstanta vezanja dana sa  $\alpha_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$ .

Možemo izraziti Fourierov transformat,

$$D_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int D_\gamma(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{q}, \quad (\text{C.115})$$

inverzni Fourierov transformat,

$$D_\gamma(\vec{q}) = \int D_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) (\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}, \quad (\text{C.116})$$

gdje je  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  relativna udaljenost a  $\vec{q}$  prijenos impulsa. Dvočestični matrični element iznosi,

$$\langle ab | V_C(1, 2) | cd \rangle = \int d^3\vec{r}_1 \int d^3\vec{r}_2 [\bar{\Psi}_a(\vec{r}_1) \gamma^\mu \Psi_c(\vec{r}_1)] D_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) [\bar{\Psi}_b(\vec{r}_2) \gamma_\mu \Psi_d(\vec{r}_2)]. \quad (\text{C.117})$$

Uvrštavanjem  $D_\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  slijedi,

$$\begin{aligned} \langle ab | V_C(1, 2) | cd \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int D_\gamma(\vec{q}) d^3\vec{q} \int d^3\vec{r}_1 \bar{\psi}_a(\vec{r}_1) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_1} \gamma^\mu \psi_c(\vec{r}_1) \\ \int d^3\vec{r}_2 \bar{\psi}_b(\vec{r}_2) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_2} \gamma_\mu \psi_d(\vec{r}_2). \end{aligned} \quad (\text{C.118})$$

Ravni val možemo razviti po kuglinim funkcijama,

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_1} = 4\pi \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} i^L j_L(qr_1) Y_{LM}(\hat{r}_1) Y_{LM}^*(\hat{q}), \quad (\text{C.119})$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_2} &= 4\pi \sum_{L'=0}^{\infty} \sum_{M'=-L'}^{+L'} i^{L'} j_{L'}(qr_2) Y_{L'M'}^*(\hat{r}_2) Y_{L'M'}(-\hat{q}) \\
 &= 4\pi \sum_{L'=0}^{\infty} \sum_{M'=-L'}^{+L'} i^{L'} j_{L'}(qr_2) Y_{L'M'}^*(\hat{r}_2) (-1)^{L'} Y_{L'M'}(\hat{q})
 \end{aligned} \tag{C.120}$$

s obzirom da  $L \in [0; \infty)$  kažemo da ravni val sadrži sve orbitalne angularne momente.

Uvrštavanjem u (C.118) i korištenjem relacije ortogonalnosti,

$$\int d\Omega_{\hat{q}} Y_{LM}^*(\hat{q}) Y_{L'M'}(\hat{q}) = \delta_{LL'} \delta_{MM'}, \tag{C.121}$$

slijedi,

$$\begin{aligned}
 \langle ab | V_C(1, 2) | cd \rangle &= \frac{2}{\pi} \int D_{\gamma}(|\vec{q}|) |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \\
 &\quad \times \int r_1^2 dr_1 j_L(qr_1) \int d\Omega_{\vec{r}_1} \bar{\Psi}_a(\vec{r}_1) Y_{L,M}(\hat{r}_1) \gamma^{\mu} \Psi_c(\vec{r}_1) \\
 &\quad \times \int r_2^2 dr_2 j_L(qr_2) \int d\Omega_{\vec{r}_2} \bar{\Psi}_b(\vec{r}_2) Y_{L,M}^*(\hat{r}_2) \gamma_{\mu} \Psi_d(\vec{r}_2).
 \end{aligned} \tag{C.122}$$

Vidimo da je Coulombova interakcija skalarni produkt dva četverovektora slijedi,

$$\langle ab | V_C(1, 2) | cd \rangle = \langle ab | V_C^{(vremenski)}(1, 2) | cd \rangle - \langle ab | V_C^{(prostorni)}(1, 2) | cd \rangle. \tag{C.123}$$

Računamo dvočestični matrični element vezan u dobar angularni moment  $J$ :

$$\begin{aligned}
 V_{ab,cd}^{(JM)}(1, 2) &= \sum_{m_a, m_c} (-1)^{j_c - m_c} \langle j_a m_a; j_c(-m_c) | JM \rangle \\
 &\quad \sum_{m_d, m_b} (-1)^{j_b - m_b} \langle j_d m_d; j_b(-m_b) | JM \rangle V_{ab,cd}(1, 2).
 \end{aligned} \tag{C.124}$$

Navodimo konačane rezultate za vremensku i prostornu komponentu.

**Vremenska komponenta:**

$$\langle ab | V_C^{(vremenska)}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} = \frac{2}{\pi} \int D_{\gamma}(|\vec{q}|) I_{ac}^{(J)}(|\vec{q}|) I_{bd}^{(J)}(|\vec{q}|) |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| \tag{C.125}$$

Radijalni integrali su funkcije prijenosa impulsa,

$$I_{ac}^{(J)}(|\vec{q}|) = \int r^2 dr j_J(qr) \left\{ f_a(r) f_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \right. \\ \left. + g_a(r) g_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [1_{\sigma_1} \otimes Y_J(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \right\}. \quad (\text{C.126})$$

$$I_{bd}^{(J)}(|\vec{q}|) = \int r^2 dr j_J(qr) \left\{ f_b(r) f_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d \rangle \right. \\ \left. + g_b(r) g_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b || [1_{\sigma_2} \otimes Y_J(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d \rangle \right\}, \quad (\text{C.127})$$

**Prostorna komponenta:**

$$\langle ab | V_C^{(prostorna)}(1, 2) | cd \rangle^{(JM)} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2J+1} \left\{ \int D_\gamma(|\vec{q}|) I_{ac}^{(J-1)}(|\vec{q}|) \tilde{I}_{bd}^{(J-1)}(|\vec{q}|) |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| \right. \\ \left. + \int D_\gamma(|\vec{q}|) I_{ac}^{(J)}(|\vec{q}|) \tilde{I}_{bd}^{(J)}(|\vec{q}|) |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| \right. \\ \left. + \int D_\gamma(|\vec{q}|) I_{ac}^{(J+1)}(|\vec{q}|) \tilde{I}_{bd}^{(J+1)}(|\vec{q}|) |\vec{q}|^2 d|\vec{q}| \right\} \quad (\text{C.128})$$

pri tome je  $I_{ac}^{(L)}(|\vec{q}|)$  dan sa,

$$I_{ac}^{(L)}(|\vec{q}|) = \int r^2 dr j_L(qr) \left\{ f_a(r) g_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_c) j_c \rangle \right. \\ \left. - g_a(r) f_c(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_a) j_a || [\vec{\sigma}_1 \otimes Y_L(\Omega_1)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_c) j_c \rangle \right\}, \quad (\text{C.129})$$

odnosno  $\tilde{I}_{bd}^{(L)}(|\vec{q}|)$  sa,

$$\tilde{I}_{bd}^{(L)}(|\vec{q}|) = \int r^2 dr_2 j_L(qr) \left\{ f_b(r) g_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_d) j_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle \right. \\ \left. - g_b(r) f_d(r) \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d m_d || [\vec{\sigma}_2 \otimes Y_L(\Omega_2)]_J || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_b) j_b \rangle \right\}. \quad (\text{C.130})$$



## C.7 Matrični element u izospinskom prostoru

Razlika izovektor-vektor u odnosu na račun za izoskalar-vektor kanal interakcije,

- $\alpha_V(\rho) \rightarrow \alpha_{TV}(\rho)$ , dakle proračun izovektor-vektor dvočestičnog matričnog elementa identičan je kao i u slučaju izoskalar-vektor tipu intetrakcije,
- preostaje izračunati  $\langle t_a t_{za} | \vec{\tau}_1 | t_c t_{zc} \rangle \cdot \langle t_b t_{zb} | \vec{\tau}_2 | t_d t_{zd} \rangle$  matrične elemente u izospinskom prostoru.

Produkt matričnih elemenata u izospinskom prostoru,

$$\begin{aligned}
 \langle t_a t_{za} | \vec{\tau}_1 | t_c t_{zc} \rangle \cdot \langle t_b t_{zb} | \vec{\tau}_2 | t_d t_{zd} \rangle &= \sum_{k=-1,0,+1} (-1)^k \langle t_a t_{za} | \tau_{1,k} | t_c t_{zc} \rangle \cdot \langle t_b t_{zb} | \tau_{2,-k} | t_d t_{zd} \rangle \\
 &= \langle t_a t_{za} | \tau_{1,0} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \tau_{2,0} | t_d t_{zd} \rangle \\
 &\quad - \langle t_a t_{za} | \tau_{1,-1} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \tau_{2,+1} | t_d t_{zd} \rangle \\
 &\quad - \langle t_a t_{za} | \tau_{1,+1} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \tau_{2,-1} | t_d t_{zd} \rangle,
 \end{aligned} \tag{C.131}$$

Operatori u izospinskom prostoru definirani su kao,

$$\hat{t}_i = \frac{1}{2} \hat{\tau}_i, \tag{C.132}$$

gdje su  $\hat{\tau}_i$  Paulijeve matrice. Komponente vektor-operatora u sfernoj bazi  $\hat{t}$ ,

$$\hat{t}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{t}_x + i\hat{t}_y) \tag{C.133}$$

$$\hat{t}_0 = \hat{t}_3 \tag{C.134}$$

$$\hat{t}_{-1} = +\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{t}_x - i\hat{t}_y). \tag{C.135}$$

Operatori podizanja i spuštanja,

$$\hat{t}_+ = \hat{t}_x + i\hat{t}_y, \tag{C.136}$$

$$\hat{t}_- = \hat{t}_x - i\hat{t}_y. \tag{C.137}$$

Veza između operatora podizanja i spuštanja te komponenata operatora u sfernoj bazi,

$$\hat{t}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{t}_+, \tag{C.138}$$

$$\hat{t}_0 = \hat{t}_3, \tag{C.139}$$

$$\hat{t}_{-1} = +\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{t}_{-}. \quad (\text{C.140})$$

Konačno pišemo,

$$\begin{aligned} \langle t_a t_{za} | \vec{\tau}_1 | t_c t_{zc} \rangle \cdot \langle t_b t_{zb} | \vec{\tau}_2 | t_d t_{zd} \rangle &= \\ &= \langle t_a t_{za} | \tau_{1,0} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \tau_{2,0} | t_d t_{zd} \rangle \\ &\quad - \langle t_a t_{za} | \tau_{1,-1} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \tau_{2,+1} | t_d t_{zd} \rangle \\ &\quad - \langle t_a t_{za} | \tau_{1,+1} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \tau_{2,-1} | t_d t_{zd} \rangle \\ &= 4 \langle t_a t_{za} | \hat{t}_{1,0} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \hat{t}_{2,0} | t_d t_{zd} \rangle \\ &\quad - 4 \langle t_a t_{za} | \hat{t}_{1,-1} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \hat{t}_{2,+1} | t_d t_{zd} \rangle \\ &\quad - 4 \langle t_a t_{za} | \hat{t}_{1,+1} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \hat{t}_{2,-1} | t_d t_{zd} \rangle \\ &= 4 \langle t_a t_{za} | \hat{t}_{1,0} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \hat{t}_{2,0} | t_d t_{zd} \rangle \\ &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \langle t_a t_{za} | \hat{t}_{1,-} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \hat{t}_{2,+} | t_d t_{zd} \rangle \\ &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \langle t_a t_{za} | \hat{t}_{1,+} | t_c t_{zc} \rangle \langle t_b t_{zb} | \hat{t}_{2,-} | t_d t_{zd} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.141})$$

Konvencija koju koristimo u smislu identifikacije neutrona odnosno protona u izospin-skom prostoru,

$$|n\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{C.142})$$

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (\text{C.143})$$

Djelovanjem operatora podizanja na protonska odnosno neutronska stanja u izospin-skom prostoru vrijedi,

$$\hat{t}_+ |n\rangle = 0, \quad \hat{t}_+ |p\rangle = |n\rangle, \quad (\text{C.144})$$

odnosno djelovanjem operatora spuštanja slijedi,

$$\hat{t}_- |n\rangle = |p\rangle, \quad \hat{t}_- |p\rangle = 0. \quad (\text{C.145})$$

**NC-bez izmjene naboja (*engl. Non-charge exchange*):**

- protone i neutrone računamo neovisno jedne o drugima,
- $\langle n_1 : a | \vec{\tau}_1 | n_1 : c \rangle \cdot \langle n_2 : b | \vec{\tau}_2 | n_2 : d \rangle$ , pri tome je  $|n_1 : a\rangle$  – "prvi" neutron u stanju  $a$
- $\langle p_1 : a | \vec{\tau}_1 | p_1 : c \rangle \cdot \langle p_2 : b | \vec{\tau}_2 | p_2 : d \rangle$ , pri tome je  $|p_1 : a\rangle$  – "prvi" proton u stanju  $a$

**CC-s izmjenom naboja (*engl. Charge exchange*):**

- protone i neutrone računamo neovisno jedne o drugima,
- $\langle p_1 : a | \vec{\tau}_1 | n_1 : c \rangle \cdot \langle n_2 : b | \vec{\tau}_2 | p_2 : d \rangle$ , pri tome je  $|n_1 : c\rangle$  – "prvi" neutron u stanju  $c$ ,
- $\langle p_1 : a | \vec{\tau}_1 | n_1 : c \rangle \cdot \langle n_2 : b | \vec{\tau}_2 | p_2 : d \rangle$ , pri tome je  $|p_1 : a\rangle$  – "prvi" proton u stanju  $a$ ,
- $\langle p_1 : a | \vec{\tau}_1 | n_1 : c \rangle$ ,  $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$ ,
- $\langle n_2 : b | \vec{\tau}_2 | p_2 : d \rangle$ ,  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ .

Konačno računamo neutronske faktor u izospinskom prostoru za slučaj bez izmjene naboja (NC), gdje razmatramo neravisne proton-proton i neutron-neutron parove, dakle izotripletu kombinaciju (T=1), slijedi,

$$\begin{aligned}
 \langle n : a | \vec{\tau}_1 | n : c \rangle \cdot \langle n : b | \vec{\tau}_2 | n : d \rangle &= 4 \langle n : a | \hat{t}_{1,0} | n : c \rangle \langle n : b | \hat{t}_{2,0} | n : d \rangle \\
 &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \langle n : a | \hat{t}_{1,-} | n : c \rangle \langle n : b | \hat{t}_{2,+} | n : d \rangle \\
 &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \langle n : a | \hat{t}_{1,+} | n : c \rangle \langle n : b | \hat{t}_{2,-} | n : d \rangle \\
 &= 4 \langle n : a | \hat{t}_{1,0} | n : c \rangle \langle n : b | \hat{t}_{2,0} | n : d \rangle \\
 &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \langle n : a | \hat{t}_{1,-} | n : c \rangle \times 0 \\
 &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \times 0 \times \langle n : b | \hat{t}_{2,-} | n : d \rangle \\
 &= 4 \langle n : a | \hat{t}_{1,0} | n : c \rangle \langle n : b | \hat{t}_{2,0} | n : d \rangle \\
 &= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = +1
 \end{aligned} \tag{C.146}$$

odnosno protonski faktor u izospinskom prostoru,

$$\begin{aligned}
 \langle p : a | \vec{\tau}_1 | p : c \rangle \cdot \langle p : b | \vec{\tau}_2 | p : d \rangle &= 4 \langle p : a | \hat{t}_{1,0} | p : c \rangle \langle p : b | \hat{t}_{2,0} | p : d \rangle \\
 &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \langle p : a | \hat{t}_{1,-} | p : c \rangle \langle p : b | \hat{t}_{2,+} | p : d \rangle \\
 &\quad + 4(\sqrt{2})^2 \langle p : a | \hat{t}_{1,+} | p : c \rangle \langle p : b | \hat{t}_{2,-} | p : d \rangle \\
 &= 4 \langle p : a | \hat{t}_{1,0} | p : c \rangle \langle p : b | \hat{t}_{2,0} | p : d \rangle \\
 &= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = +1.
 \end{aligned} \tag{C.147}$$

Konačno, u slučaju bez izmjene naboja matrični elementi u izospinskom prostoru za, proton-proton i neutron-neutron T=1, kombinaciju su identični.

## DODATAK D

# Jedinični vektor u sfernoj bazi

Svaki vektor u sfernoj bazi možemo napisati kao,

$$\vec{r} = \sum_{\mu=-1,0,+1} r_{\mu} \hat{e}^{\mu}, \quad (\text{D.1})$$

gdje je  $\hat{e}_{\mu}$  jedinični vektor a  $r_{\mu}$  komponenta vektora,

$$r_{\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{1\mu}(\theta, \phi). \quad (\text{D.2})$$

Diferencijal bilo koje funkcije više varijable  $F(x, y, z)$  možemo napisati kao,

$$dF(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) \cdot d\vec{r}, \quad (\text{D.3})$$

stoga također vrijedi,

$$dr_{\mu} = \nabla(r_{\mu}) \cdot d\vec{r}. \quad (\text{D.4})$$

S druge strane zbog  $r_{\mu} = \vec{r} \cdot \hat{e}_{\mu}$  možemo pisati,

$$d\vec{r} \cdot \hat{e}_{\mu} = \nabla(r_{\mu}) \cdot d\vec{r}, \quad (\text{D.5})$$

ili drugačije,

$$d\vec{r} \cdot [\hat{e}_{\mu} - \nabla(r_{\mu})] = 0. \quad (\text{D.6})$$

Jednadžba (D.6) vrijedi za bilo koji po volji odabran iznos i smjer vektora  $d\vec{r}$ , stoga norma,

$$|\hat{e}_{\mu} - \nabla(r_{\mu})| = 0, \quad (\text{D.7})$$

vektora  $\hat{e}_{\mu} - \nabla(r_{\mu})$  mora biti nula, što je svojstvo nul vektora i vodi na jednadžbu,

$$\hat{e}_{\mu} = \nabla(r_{\mu}) = \nabla \left[ \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{1\mu}(\theta, \phi) \right], \quad (\text{D.8})$$

konačno,

$$\hat{e}_\mu = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \nabla \left[ r Y_{1\mu}(\theta, \phi) \right]. \quad (\text{D.9})$$

## DODATAK E

# M1 operator

## E.1 Nerelativistička forma M1 operatora

Nerelativističku formu M1 operatora u miješanoj spin-izospin bazi  $\{ |(\frac{1}{2}, \ell)jm; tt_z\rangle \}$  možemo pisati kao u ref. [36, 182],

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu} &= \frac{\mu_N}{\hbar} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^N (g_\ell^\nu \hat{\ell}_k + g_s^\nu \hat{s}_k) \otimes \frac{1}{2} (1_\tau + \hat{\tau}_3) \\
 &+ \frac{\mu_N}{\hbar} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^Z (g_\ell^\pi \hat{\ell}_k + g_s^\pi \hat{s}_k) \otimes \frac{1}{2} (1_\tau - \hat{\tau}_3) \\
 &= \frac{\mu_N}{\hbar} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^A (g_\ell^{IS} \hat{\ell}_k + g_s^{IS} \hat{s}_k) \otimes 1_\tau \\
 &- \frac{\mu_N}{\hbar} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^A (g_\ell^{IV} \hat{\ell}_k + g_s^{IV} \hat{s}_k) \otimes \hat{\tau}_3,
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

gdje su  $1_\tau$  i  $\hat{\tau}_3$  jedinična i Paulijeva  $2 \times 2$  matrica u izospinskom prostoru,  $N$  - broj neutrona,  $Z$  - broj protona i  $A = N + Z$  - broj nukleona.

S obzirom na to da je riječ o miješanoj spin-izospin bazi korisno je definirati izoskalarne i izovektorske žiromagnetske omjere,

$$g_\ell^{IS} = \frac{g_\ell^\pi + g_\ell^\nu}{2} = 0.5, \quad g_s^{IS} = \frac{g_s^\pi + g_s^\nu}{2} = 0.880, \tag{E.2}$$

gdje su izoskalarni orbitalni  $g_\ell^{IS}$  i spinski  $g_s^{IS}$  žiromagnetski omjeri a,

$$g_\ell^{IV} = \frac{g_\ell^\pi - g_\ell^\nu}{2} = 0.5, \quad g_s^{IV} = \frac{g_s^\pi - g_s^\nu}{2} = 4.706, \tag{E.3}$$

izovektorski orbitalni  $g_\ell^{IV}$  i spinski  $g_s^{IV}$  žiromagnetski omjeri. Pri tome su orbitalni žiromagnetski omjeri protona ( $\pi$ ) i neutrona ( $\nu$ ) definirani kao,

$$g_\ell^\pi = 1, \quad g_\ell^\nu = 0. \tag{E.4}$$

S druge strane imamo eksperimentalno mjerene vrijednosti spinskih žiromagnetskih omjera slobodnih protona i neutrona [36, 182] su,

$$g_s^\pi = 5.8, \quad g_s^\nu = -3.5. \quad (\text{E.5})$$

Svi žiromagnetski omjeri su izraženi u jedinicama nuklearnog magnetona  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N}$ .

**Napomena** (Izospinska konvencija) . U svim razmatranjima u koje je uključen izospin korištena je slijedeća konvencija:

$$|\nu\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\pi\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

pri tome je  $|\nu\rangle$  neutronska a  $|\pi\rangle$  protonsko stanje u izospinskom prostoru.

Paulijeve matrice u izospinskom prostoru dane su u slijedećoj reprezentaciji,

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.7})$$

Pri tome je  $\hat{P}_\nu = \frac{1}{2}(1_\tau + \hat{\tau}_3)$  projektor u izospinskom prostoru na neutronska stanja a  $\hat{P}_\pi = \frac{1}{2}(1_\tau - \hat{\tau}_3)$  na protonske stanja.

S obzirom na to da su  $\hat{P}_\nu$  i  $\hat{P}_\pi$  projektori vrijede relacije idempotentnosti,

$$\hat{P}_\nu^2 = \hat{P}_\nu, \quad \hat{P}_\pi^2 = \hat{P}_\pi.$$

S druge strane, djelovanjem projektor na protonsko odnosno neutronska stanje u izospinskom prostoru slijedi,

$$\hat{P}_\nu |\nu\rangle = |\nu\rangle, \quad \hat{P}_\nu |\pi\rangle = 0,$$

odnosno,

$$\hat{P}_\pi |\pi\rangle = |\pi\rangle, \quad \hat{P}_\pi |\nu\rangle = 0.$$

## E.2 Relativistička forma M1 operatora

Da bi dobili relativističku formu M1 operatora, slično kao u slučaju Gamow-Teller operatora ref. [150], moramo supstituirati nerelativističke operatore dvokomponentnim relativističkim,

$$\hat{s} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \rightarrow \hat{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.11})$$

nerelativistički spinski operator  $\hat{s}$  zamijenjen je  $\hat{\Sigma}$   $4 \times 4$  matricom u relativističkom slučaju gdje su  $\vec{\sigma}$  Paulijeve  $2 \times 2$  matrice. Nadalje,

$$\hat{\ell} \rightarrow \hat{\ell} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\ell} & 0 \\ 0 & \hat{\ell} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.12})$$

operator orbitalnog angularnog momenta zamijenjen je produktom nerelativističkog operatora momenta impulsa i jedinične  $4 \times 4$  matrice i tako reprezentiran predstavlja relativistički operator orbitalnog angularnog momenta. Konačno, jednočestični operator angularnog momenta je suma orbitalnog i spinskog doprinosa,

$$\hat{j} = \hat{\ell} + \hat{s} \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\ell} & 0 \\ 0 & \hat{\ell} \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.13})$$

Opisana procedura primijenjena na komponentu M1 operatora  $\hat{\mu}_{1\nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{e}_\nu$  rezultira njegovom relativističkom formom. Kako bi M1 reprezentirali u kompaktnijoj formi korisno je definirati izoskalarni matrični element magnetskog operatora za  $k^{ti}$  nukleon,

$$\hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}(11)_k = \hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}(22)_k = \frac{\mu_N}{\hbar} (g_\ell^{IS} \hat{\ell}_k + g_s^{IS} \hat{s}_k) \cdot \nabla (r Y_{1\nu}(\Omega_k)) \quad (\text{E.14})$$

i izovektorski matrični element istog operatora,

$$\hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}(11)_k = \hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}(22)_k = \frac{\mu_N}{\hbar} (g_\ell^{IV} \hat{\ell}_k + g_s^{IV} \hat{s}_k) \cdot \nabla (r Y_{1\nu}(\Omega_k)). \quad (\text{E.15})$$

Konačno, slijedi kompletan izraz za M1 operator u relativističkoj formi koji djeluje u Hilbertovom prostoru sa miješanom spin-izospin bazom,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{1\nu} = & \sum_{k=1}^A \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}(11)_k & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}(22)_k \end{pmatrix} \otimes 1_\tau \\ & - \sum_{k=1}^A \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}(11)_k & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}(22)_k \end{pmatrix} \otimes \hat{\tau}_3. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$



Da bi izraz za relativistički M1 operator napisali u još kompaktnijoj formi, definiramo matrice koje reprezentiraju izoskalarnu,

$$\hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}{}_k = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}(11)_k & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}(22)_k \end{pmatrix}, \quad (\text{E.17})$$

i izovektorsku komponentu magnetskog M1 operatora u relativističkom formalizmu,

$$\hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}{}_k = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}(11)_k & 0 \\ 0 & \hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}(22)_k \end{pmatrix} \quad (\text{E.18})$$

odnosno,

$$\hat{\mu}_{1\nu} = \sum_{k=1}^A \left( \hat{\mu}_{1\nu}^{(IS)}{}_k \otimes 1_\tau - \hat{\mu}_{1\nu}^{(IV)}{}_k \otimes \hat{\tau}_3 \right). \quad (\text{E.19})$$

## DODATAK F

# Generalizacija formalizma, relativistički operator $M\lambda$

U ovom poglavlju namjera nam je pokazati detalje formalizma potrebnog za implementaciju relativističkog magnetskog operatora u RQRPA modelu, u tom smislu razvijeni su:

- Nerelativistički magnetski  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$  operator ranga  $\lambda$  u poglavlju (F.1).
- Proračun jediničnog vektora  $\hat{e}_{\lambda\nu} = \nabla[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]$  ranga  $\lambda$  u sfernoj bazi poglavlje (F.2). Wigner-Eckartov teorem primjenjujemo na komponentu  $\hat{\mu}_{\lambda\nu} = \hat{\mu}_\lambda \cdot \hat{e}_{\lambda\nu}$  nerelativističkog magnetskog operatora.
- Prelazimo na generaliziranu relativističku, blok dijagonalnu formu operatora i računamo reducirani matrični element u bazi ukupnog spina poglavlje (F.3).
- Konačno, računamo reducirani matrični element relativističkog, blok dijagonalnog operatora, u miješanoj spin-izospin bazi, poglavlje (F.4).

## F.1 Proračun reduciranog matričnog elementa nerelativističkog magnetskog operatora $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$

Provodi se proračun reduciranog matričnog elementa za magnetska pobuđenja  $M\lambda$  reprezentirana operatorom,  $\hat{\mu}_{\lambda\nu} = \hat{\mu}_\lambda \cdot \nabla[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]$  ranga  $\lambda$ , gdje je  $\nabla[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]$  za fiksni  $\lambda$  i  $-\lambda \leq \nu \leq \lambda$  generalizacija jediničnog vektora u sfernoj bazi [182],

$$\begin{aligned}
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || \hat{\mu}_\lambda || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle &= \frac{\mu_N}{\hbar} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || \left[ \frac{2}{\lambda+1} g_\ell \hat{\ell} + g_s \hat{s} \right] \cdot \nabla[r^\lambda Y_\lambda(\theta, \phi)] || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \\
 &= \frac{\mu_N}{\hbar} \left( \frac{2}{\lambda+1} g_\ell \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || \hat{\ell} \cdot \nabla[r^\lambda Y_\lambda(\theta, \phi)] || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \right. \\
 &\quad \left. + g_s \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || \hat{s} \cdot \nabla[r^\lambda Y_\lambda(\theta, \phi)] || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \right), \tag{F.1}
 \end{aligned}$$

gdje je operator ukupnog angularnog momenta dan sljedećom jednažbom

$$\hat{j} = \hat{\ell} + \hat{s} = \hat{\ell} + \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}. \quad (\text{F.2})$$

Moguće je pokazati da skalarni produkt  $\nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]$  s bilo kojim vektorom  $\vec{v}$  kako je pokazano u dodatku (F.2) rezultira sljedećim izrazom,

$$\begin{aligned} \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \cdot \vec{v} &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} [Y_{L-1}(\theta, \phi) \otimes \vec{v}]_{LM}, \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

koji kada uvrstimo u jednažbu (F.1), što vodi na reducirani matrični element operatora  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$ ,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | \hat{\mu}_{\lambda} | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle &= \frac{\mu_N}{\hbar} I^{(\lambda)} \left( \frac{2}{\lambda+1} g_\ell \sqrt{\lambda(2\lambda+1)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | [Y_{\lambda-1}(\theta, \phi) \otimes \hat{j}]_{\lambda} | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[ g_s - \frac{2}{\lambda+1} g_\ell \right] \frac{\hbar}{2} \sqrt{\lambda(2\lambda+1)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | [Y_{\lambda-1}(\theta, \phi) \otimes \vec{\sigma}]_{\lambda} | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \right), \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

gdje je radijalni faktor  $I^{(\lambda)}$  dan integralom,

$$I^{(\lambda)} = \int_0^\infty R_{n_f \ell_f}^\dagger(r) R_{n_i \ell_i}(r) r^{\lambda-1} r^2 dr. \quad (\text{F.5})$$

## F.2 Proračun gradijenta $\nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]$

Da bismo izračunali izraz  $\nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]$  pristupom kao u [249] bitno je uočiti sljedeća svojstva, riječ je o,

- vektoru,
- sfernom tenzoru ranga  $L$ ,
- zbog derivacije sadržane u operatoru  $\nabla$  očekujemo smanjivanje stupnja polinoma u varijabli  $r^L$  i funkciji  $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ .

Slijedi da mora biti,

$$\nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] = \alpha r^{L-1} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)}, \quad (\text{F.6})$$

pri tome je  $\alpha$  konstanta proporcionalnosti a,

$$\vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)} = \sum_{\mu,\nu} \langle (L-1)\mu; 1\nu | LM \rangle Y_{(L-1)\mu}(\theta, \phi) \otimes \hat{e}_{1\nu}, \quad (\text{F.7})$$

vektorska kuglina funkcija ranga  $L$  i rezultat je vezanja kugline funkcije ranga  $L-1$  i komponente vektora u sfernoj bazi ranga  $1$ . Normalizacijsku konstantu  $\alpha$  računamo integralom,

$$I = \int_{V(S)} d^3\vec{r} \left\{ \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \right\}^\dagger \cdot \left\{ \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \right\}, \quad (\text{F.8})$$

pri tome je  $V(S)$  zatvoreni volumen obuhvaćen plohom  $S$ . Koristimo pomoćni izraz,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\{r^L Y_{LM}(\theta, \phi) \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]\} &= \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \cdot \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \\ &+ r^L Y_{LM}(\theta, \phi) \Delta[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)], \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

uvrštanjem slijedi,

$$\begin{aligned} \int_{V(S)} d^3\vec{r} \left\{ \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \right\}^\dagger \cdot \left\{ \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \right\} &= \int_{V(S)} \operatorname{div}\{r^L Y_{LM}(\theta, \phi) \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]\} d^3\vec{r} \\ &- \int_{V(S)} r^L Y_{LM}(\theta, \phi) \Delta[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] d^3\vec{r}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Uzevši u obzir rubni uvjet,

$$\Delta[r^L Y_{L,M}(\theta, \phi)] = 0, \quad (\text{F.11})$$

slijedi,

$$\int_{V(S)} d^3\vec{r} \left\{ \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \right\}^\dagger \cdot \left\{ \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \right\} = \int_{V(S)} \operatorname{div}\{r^L Y_{LM}(\theta, \phi) \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]\} d^3\vec{r}. \quad (\text{F.12})$$

Primjenom Gausovog teorema, integral po zatvorenom volumenu obuhvaćenom površinom  $S$  možemo konvertirati u integral po površini  $S$  kako slijedi,

$$\int_{V(S)} \operatorname{div}\{r^L Y_{L,M}(\theta, \phi) \nabla[r^L Y_{L,M}(\theta, \phi)]\} d^3\vec{r} = \int_S \{r^L Y_{L,M}(\theta, \phi) \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]\} \cdot \hat{n} dS, \quad (\text{F.13})$$

pri tome je  $\hat{n}$  jedinični vektor okomit na površinu  $S$ . S obzirom na to da Gaussov teorem vrijedi za bilo koji oblik površine  $S$  izabiremo sferno simetričnu površinu i tada je jedinični vektor  $\hat{n} = \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ , odnosno,

$$I = \int_S \{r^L Y_{LM}(\theta, \phi) \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)]\} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS. \quad (\text{F.14})$$

Znamo da vrijedi,

$$\hat{r} \cdot \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] = \frac{\partial}{\partial r}[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] = L r^{L-1} Y_{LM}(\theta, \phi). \quad (\text{F.15})$$

Uvrštavanjem u (F.14) slijedi,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_S \left\{ r^L Y_{LM}(\theta, \phi) \nabla [r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \right\} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS \\
 &= \int_S r^L Y_{LM}(\theta, \phi) L r^{L-1} Y_{LM}(\theta, \phi) dS = L \int_S r^{2L-1} Y_{LM}^*(\theta, \phi) Y_{LM}(\theta, \phi) dS \\
 &= \int_S r^L Y_{LM}(\theta, \phi) L r^{L-1} Y_{LM}(\theta, \phi) dS = L \int_{\Omega} R^{2L-1} Y_{LM}^*(\theta, \phi) Y_{LM}(\theta, \phi) R^2 d\Omega \\
 &= LR^{2L+1} \int_{\Omega} Y_{LM}^*(\theta, \phi) Y_{LM}(\theta, \phi) d\Omega = LR^{2L+1},
 \end{aligned} \tag{F.16}$$

pri tome je  $R$  po volji velik radius sferne površine  $S$ . S druge strane znamo da vrijedi,

$$\nabla [r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] = \alpha r^{L-1} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)}, \tag{F.17}$$

slijedi,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{V(S)} d^3\vec{r} \nabla [r^L Y_{L,M}(\theta, \phi)]^\dagger \cdot \nabla [r^L Y_{L,M}(\theta, \phi)] \\
 &= |\alpha|^2 \int_{V(S)} r^{2(L-1)} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)}^* \cdot \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)} d^3\vec{r} \\
 &= |\alpha|^2 \int_{V(S)} r^{2(L-1)} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)}^* \cdot \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)} r^2 dr d\Omega \\
 &= |\alpha|^2 \int_0^R r^{2L-2} r^2 dr \int_{\Omega} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)}^* \cdot \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)} d\Omega \\
 &= |\alpha|^2 \int_0^R r^{2L-2} r^2 dr = |\alpha|^2 \int_0^R r^{2L} dr = |\alpha|^2 \frac{r^{2L+1}}{2L+1} \Big|_0^R = \frac{|\alpha|^2}{2L+1} R^{2L+1}.
 \end{aligned} \tag{F.18}$$

Mora vrijediti,

$$\frac{|\alpha|^2}{2L+1} R^{2L+1} = LR^{2L+1}, \tag{F.19}$$

slijedi kvadrat koeficijenta vezanja  $\alpha$ ,

$$|\alpha|^2 = L(2L+1), \tag{F.20}$$

odnosno,

$$\alpha = \pm \sqrt{L(2L+1)}. \tag{F.21}$$

Izabiremo fazu tako da je koeficijent vezanja pozitivan,

$$\alpha = +\sqrt{L(2L+1)}. \tag{F.22}$$

Konačno, dokazali smo da vrijedi relacija,

$$\nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] = \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)}. \quad (\text{F.23})$$

Pokazalo se korisnim izračunati skalarni produkt,

$$\nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \cdot \vec{v}, \quad (\text{F.24})$$

gdje je  $\vec{v} = \sum_{\nu} v_{\nu} \hat{e}^{\nu}$  po volji izabrani vektor u sfernoj bazi, slijedi,

$$\begin{aligned} \nabla[Y_{LM}(\theta, \phi)] \cdot \vec{v} &= \sum_{m_L, \mu} \langle (L-1)m_L; 1\mu | LM \rangle Y_{L-1, m_L}(\theta, \phi) \hat{e}_{\mu} \cdot \vec{v} \\ &= \sum_{m_L, \mu} \langle (L-1)m_L; 1\mu | LM \rangle Y_{L-1, m_L}(\theta, \phi) \hat{e}_{\mu} \cdot \sum_{\nu} v_{\nu} \hat{e}^{\nu} \\ &= \sum_{m_L, \mu, \nu} \langle (L-1)m_L; 1\mu | LM \rangle Y_{L-1, m_L}(\theta, \phi) v_{\nu} \hat{e}_{\mu} \cdot \hat{e}^{\nu} \\ &= \sum_{m_L, \mu, \nu} \langle (L-1)m_L; 1\mu | LM \rangle Y_{L-1, m_L}(\theta, \phi) v_{\nu} \delta_{\mu}^{\nu} \\ &= \sum_{m_L, \mu} \langle (L-1)m_L; 1\mu | LM \rangle Y_{L-1, m_L}(\theta, \phi) v_{\mu} \\ &= [Y_{L-1}(\theta, \phi) \otimes \vec{v}]_{LM}. \end{aligned} \quad (\text{F.25})$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \nabla[r^L Y_{LM}(\theta, \phi)] \cdot \vec{v} &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} \vec{Y}_{LM,(\lambda=L-1,1)} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} [Y_{L-1}(\theta, \phi) \otimes \vec{v}]_{LM}. \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

### F.3 Proračun reduciranog matričnog elementa dijagonalnog relativističkog operatora $\hat{M}_{JM}^{TM_T}$ u bazi ukupnog spina

Pretpostavimo da je relativistička forma magnetskog multipolnog operatora  $\hat{M}_{\lambda\nu}$  reprezentirana kao,

$$\hat{M}_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} \hat{M}_{\lambda\nu}(11)(r, \theta, \phi) & 0 \\ 0 & \hat{M}_{\lambda\nu}(22)(r, \theta, \phi) \end{pmatrix}. \quad (\text{F.27})$$

Diracovu valnu funkciju u centralnom potencijalu možemo napisati u matričnoj formi kao,

$$\Psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_\kappa(r)\Omega_{j(\frac{1}{2}, \ell)} \\ ig_\kappa(r)\Omega_{j(\frac{1}{2}, \tilde{\ell})} \end{pmatrix} \quad (\text{F.28})$$

gdje je,  $\kappa = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  ( $\kappa \neq 0$ ),

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2}, \quad (\text{F.29})$$

orbitalni kvantni broj velike komponente Diracove valne funkcije je  $\ell$  za danu vrijednost  $\kappa$ ,

$$\ell = \begin{cases} \kappa, & \kappa > 0 \\ -\kappa - 1, & \kappa < 0 \end{cases} \quad (\text{F.30})$$

i orbitalni broj male komponente Diracove valne funkcije,

$$\tilde{\ell} = \ell \pm 1. \quad (\text{F.31})$$

Kutni dio velike komponente dan je sa,

$$\Omega_{j(\frac{1}{2}, \ell)} = \sum_{m_s, m_\ell} \langle \frac{1}{2}m_s; \ell m_\ell | jm \rangle \chi_{\frac{1}{2}m_s} \otimes Y_{\ell m_\ell}, \quad (\text{F.32})$$

a kutni dio male komponente,

$$\Omega_{j(\frac{1}{2}, \tilde{\ell})} = \sum_{m_s, m_{\tilde{\ell}}} \langle \frac{1}{2}m_s; \tilde{\ell} m_{\tilde{\ell}} | jm \rangle \chi_{\frac{1}{2}m_s} \otimes Y_{\tilde{\ell} m_{\tilde{\ell}}}, \quad (\text{F.33})$$

Diracove valne funkcije sa dobrim jednočestičnim angularnim momentom  $j$  ali različitim

orbitalim kvantnim brojevima,

$$\begin{aligned}
 \langle j_f m_f | \hat{M}_{\lambda\nu} | j_i m_i \rangle &= \int d^3\vec{r} \Psi_f^\dagger(\vec{r}) \hat{M}_{\lambda\nu} \Psi_i(\vec{r}) \\
 &= \int d^3\vec{r} \begin{pmatrix} f_{\kappa_f} \Omega_{j_f(\frac{1}{2}, \ell_f)} \\ i g_{\kappa_f} \Omega_{j_f(\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f)} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{M}_{\lambda\nu}(11) & 0 \\ 0 & \hat{M}_{\lambda\nu}(22) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{\kappa_i} \Omega_{j_i(\frac{1}{2}, \ell_i)} \\ i g_{\kappa_i} \Omega_{j_i(\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i)} \end{pmatrix} \\
 &= \int d^3\vec{r} \left( f_{\kappa_f}^* \Omega_{j_f(\frac{1}{2}, \ell_f)}^\dagger - i g_{\kappa_f}^* \Omega_{j_f(\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f)}^\dagger \right) \begin{pmatrix} f_{\kappa_i} \hat{M}_{\lambda\nu}(11) \Omega_{j_i(\frac{1}{2}, \ell_i)} \\ i g_{\kappa_i} \hat{M}_{\lambda\nu}(22) \Omega_{j_i(\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i)} \end{pmatrix} \\
 &= \int_0^\infty f_{\kappa_f}^*(r) \hat{M}_\lambda(11)(r) f_{\kappa_i}(r) r^2 dr \int_\Omega \Omega_{j_f(\frac{1}{2}, \ell_f)}^\dagger \hat{M}_{\lambda\nu}(11)(\theta, \phi) \Omega_{j_i(\frac{1}{2}, \ell_i)} d\Omega \\
 &\quad + \int_0^\infty g_{\kappa_f}^*(r) \hat{M}_\lambda(22)(r) g_{\kappa_i}(r) r^2 dr \int_\Omega \Omega_{j_f(\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f)}^\dagger \hat{M}_{\lambda\nu}(22)(\theta, \phi) \Omega_{j_i(\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i)} d\Omega \\
 &= I_{velika}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f m_f | \hat{M}_{\lambda\nu}(11) | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i m_i \rangle \\
 &\quad + I_{mala}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f m_f | \hat{M}_{\lambda\nu}(22) | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i m_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Pri tome su radijalni integrali  $I_{velika}^{(\lambda)}$  i  $I_{mala}^{(\lambda)}$  definirani slijedećim izrazima,

$$I_{velika}^{(\lambda)} = \int_0^\infty f_{\kappa_f}^*(r) \hat{M}_\lambda(11)(r) f_{\kappa_i}(r) r^2 dr, \quad (\text{F.34})$$

$$I_{mala}^{(\lambda)} = \int_0^\infty g_{\kappa_f}^*(r) \hat{M}_\lambda(22)(r) g_{\kappa_i}(r) r^2 dr. \quad (\text{F.35})$$

Primjenimo Wigner- Eckartov teorem na obje strane jednačbe,

$$\langle j_f m_f | \hat{M}_{\lambda\nu} | j_i m_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j_f + 1}} \langle j_i m_i; \lambda\nu | j_f m_f \rangle \langle j_f || \hat{M}_\lambda || j_i \rangle, \quad (\text{F.36})$$

$$\begin{aligned}
 \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f m_f | \hat{M}_{\lambda\nu}(11)(\theta, \phi) | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i m_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2j_f + 1}} \langle j_i m_i; \lambda\nu | j_f m_f \rangle \\
 &\quad \times \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || \hat{M}_\nu(11)(\theta, \phi) || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle,
 \end{aligned} \quad (\text{F.37})$$

$$\begin{aligned}
 \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f m_f | \hat{M}_{\lambda\nu}(22)(\theta, \phi) | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i m_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2j_f + 1}} \langle j_i m_i; \lambda\nu | j_f m_f \rangle \\
 &\quad \times \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f || \hat{M}_{\lambda\nu}(22)(\theta, \phi) || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i \rangle.
 \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$



Nakon što rezultat iz jednadžbi (F.36), (F.37) i (F.38) uvrstimo u jednadžbu (F.34) konačno slijedi,

$$\begin{aligned} \langle j_f || \hat{M}_\lambda || j_i \rangle &= I_{velika}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || \hat{M}_\lambda(11)(\theta, \phi) || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \\ &+ \\ &I_{mala}^{(\lambda)} \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f || \hat{M}_\lambda(22)(\theta, \phi) || (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i \rangle, \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

reducirani matrični element dijagonalnog relativističkog operatora  $\hat{M}_{\lambda\nu}$  kao suma dva doprinosa  $\hat{M}_{\lambda\nu}(11)$  i  $\hat{M}_{\lambda\nu}(22)$  koji djeluju na malu i veliku komponentu Diracove valne funkcije. Pri tome smo iskoristili faktorizaciju operatora na radijalni i kutni dio. Uočimo da je za magnetski operator  $M\lambda$  ranga  $\lambda$ , kao i kod nerelativističkog slučaja (F.5), radijalna ovisnost dana sa  $\hat{M}_\lambda(11)(r) = \hat{M}_\lambda(22)(r) = r^{\lambda-1}$ .

## F.4 Proračun reduciranog matričnog elementa dijagonalnog relativističkog operatora $\hat{M}_{JM}^{TM_T}$ u miješanoj spin-izospin bazi

Pretpostavimo da je operator  $\hat{M}_{JM}^{TM_T} = \hat{M}_{JM}^{(1)} \otimes \hat{M}_{TM_T}^{(2)}$  tenzorski produkt dva operatora, jedan  $\hat{M}_{JM}^{(1)}$  koji djeluje u vektorskom prostoru ukupnog angularnog momenta i drugi  $\hat{M}_{TM_T}^{(2)}$  koji djeluje u izospinskom prostoru. Izračunajmo matrični element tako definiranog operatora u miješanoj spin-izospin bazi,

$$\langle j_f m_f; t_f t_{zf} | \hat{M}_{JM}^{TM_T} | j_i m_i; t_i t_{zi} \rangle = \langle j_f m_f | \hat{M}_{JM}^{(1)} | j_i m_i \rangle \times \langle t_f t_{zf} | \hat{M}_{TM_T}^{(2)} | t_i t_{zi} \rangle. \quad (\text{F.40})$$

Primjena Wigner-Eckartovog teorema samo na prostoru ukupnog angularnog momenta,

$$\langle j_f; t_f t_{zf} | \hat{M}_J^{TM_T} | j_i; t_i t_{zi} \rangle = \langle j_f || \hat{M}_J^{(1)} || j_i \rangle \langle t_f t_{zf} | \hat{M}_{TM_T}^{(2)} | t_i t_{zi} \rangle, \quad (\text{F.41})$$

reduciranim matričnim elementom u prostoru ukupnog angularnog momenta.

Dodatno, primjena Wigner - Eckartovog teorema na  $\langle t_f t_{zf} | \hat{M}_{TM_T}^{(2)} | t_i t_{zi} \rangle$  izopinsku komponentu baze rezultira sa,

$$\langle j_f; t_f t_{zf} | \hat{M}_J^{TM_T} | j_i; t_i t_{zi} \rangle = \langle j_f || \hat{M}_J^{(1)} || j_i \rangle \times \frac{1}{\sqrt{2t_f + 1}} \langle t_i t_{zi}; TM_T | t_f t_{zf} \rangle \langle t_f || \hat{M}_T^{(2)} || t_i \rangle, \quad (\text{F.42})$$

reduciranim matričnim elementom u prostoru ukupnog momenta impulsa koji djeluje u Hilbertovom prostoru sa miješanom spin-izospin bazom.

## DODATAK G

# Izborna pravila relativističkog magnetskog operatora $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$

Prisjetimo se nekoliko specifičnih pravila operatora pariteta  $\hat{\Pi}$  i paritetnih transformacija u koordinatnom prostoru. Ako stanje u koordinatnom prostoru  $|\vec{r}\rangle$  normaliziramo delta funkcijom  $\langle\vec{r}'|\vec{r}\rangle = \delta(\vec{r}' - \vec{r})$  tada je paritetna transformacija takvog stanja,

$$\hat{\Pi} |\vec{r}\rangle = |-\vec{r}\rangle, \quad (\text{G.1})$$

što odmah vodi na uvjet  $\hat{\Pi}^2 = 1$ .

Kao sljedeći korak razmatramo matrični element,

$$\langle\vec{r}'|\hat{\Pi}|\vec{r}\rangle = \langle\vec{r}'|-\vec{r}\rangle = \delta(-\vec{r}' - \vec{r}) = \delta(\vec{r}' + \vec{r}) \quad (\text{G.2})$$

gdje trebamo uzeti u obzir da je delta funkcija parna  $\delta(-\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ , s druge strane matrični element,

$$\langle\vec{r}'|\hat{\Pi}^\dagger|\vec{r}\rangle = \langle-\vec{r}'|\vec{r}\rangle = \delta(\vec{r}' + \vec{r}), \quad (\text{G.3})$$

s obzirom da jednakost  $\langle\vec{r}'|\hat{\Pi}|\vec{r}\rangle = \langle\vec{r}'|\hat{\Pi}^\dagger|\vec{r}\rangle$  vrijedi za svaki *bra*  $\langle\vec{r}'|$  i svaki *ket*  $|\vec{r}\rangle$  slijedi da je paritetna transformacija  $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^\dagger$  hermitski operator.

Konačno primjenom dva prethodna rezultata možemo dokazati da  $\hat{\Pi}^\dagger\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^2 = 1$  slijedi uvjet unitarnosti  $\hat{\Pi}\hat{\Pi}^\dagger = 1$ .

Zaključno operator pariteta  $\hat{\Pi}$  zadovoljava sljedeća pravila:

- $\hat{\Pi}^2 = 1$ , kvadrat operatora je jedinični operator,
- $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^\dagger$ , hermitski operator,
- $\hat{\Pi}^\dagger\hat{\Pi} = \hat{\Pi}\hat{\Pi}^\dagger = 1$ , unitaran operator.

Ako paritetnu transformaciju primjenimo na nerelativističku formu magnetskog operatora  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$ ,

$$\hat{\Pi}\hat{\mu}_{\lambda\nu}\hat{\Pi}^\dagger = \frac{\mu_N}{\hbar} \left[ \frac{2}{\lambda+1} g_\ell \hat{\Pi}\hat{\ell} + g_s \hat{\Pi}\hat{s} \right] \hat{\Pi}^\dagger \cdot \hat{\Pi}\nabla[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]\hat{\Pi}^\dagger, \quad (\text{G.4})$$

uzevši u obzir da su orbitalni operator  $\hat{\ell}$ ,

$$\hat{\Pi}\hat{\ell}\hat{\Pi}^\dagger = \hat{\ell}, \quad (\text{G.5})$$

i operator spina  $\hat{s}$ ,

$$\hat{\Pi}\hat{s}\hat{\Pi}^\dagger = \hat{s}, \quad (\text{G.6})$$

aksijalni vektori.

Konačno, paritetna transformacija vektora  $\nabla[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]$ ,

$$\hat{\Pi}\nabla[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]\hat{\Pi}^\dagger = \hat{\Pi}\nabla\hat{\Pi}^\dagger\hat{\Pi}[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)]\hat{\Pi}^\dagger = (-1)^{\lambda+1}\nabla[r^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta, \phi)], \quad (\text{G.7})$$

rezultira sa dodatni faktorom  $(-1)^{\lambda+1}$  koji nam daje vrlo bitno pravilo za nerelativističkog magnetskog operatora  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$  s obzirom na paritetnu transformaciju u koordinatnom prostoru.

$$\hat{\Pi}\hat{\mu}_{\lambda\nu}\hat{\Pi}^\dagger = (-1)^{\lambda+1}\hat{\mu}_{\lambda\nu}. \quad (\text{G.8})$$

Ako primjenimo paritetnu transformaciju na relativistički matrični element dijagonalnog operatora  $\hat{M}_{\lambda\nu}$  kao u (F.27) slijedi,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{M}_{\lambda\nu} | \Psi_i \rangle &= \langle \Psi_f | \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} \hat{M}_{\lambda\nu} \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} | \Psi_i \rangle = \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f m_f | \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} \hat{M}_{\lambda\nu} (11) \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i m_i \rangle \\ &+ \\ &\langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f m_f | \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} \hat{M}_{\lambda\nu} (22) \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i m_i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Međutim u konkretnom slučaju, u relativističkom izrazu za magnetski operator  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}$  (E.19), moramo evaluirati doprinose dva dijagonalna operatora, izoskalarni  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS)}$  i izovektorski  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IV)}$ . Doprinosi oba operatora imaju istu operatorsku formu kao i u nerelativističkom slučaju, stoga su rezultati s obzirom na paritetnu transformaciju identični za oba slučaja  $\hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS/IV)}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS/IV)} | \Psi_i \rangle &= \langle \Psi_f | \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS/IV)} \hat{\Pi}^\dagger \hat{\Pi} | \Psi_i \rangle = \pi_f \pi_i \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f m_f | \hat{\Pi} \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS/IV)} (11) \hat{\Pi}^\dagger | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i m_i \rangle \\ &+ \\ &\tilde{\pi}_f \tilde{\pi}_i \langle (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_f) j_f m_f | \hat{\Pi} \hat{\mu}_{\lambda\nu}^{(IS/IV)} (22) \hat{\Pi}^\dagger | (\frac{1}{2}, \tilde{\ell}_i) j_i m_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

gdje je  $\pi_i = (-1)^{\ell_i}$ ,  $\pi_f = (-1)^{\ell_f}$ ,  $\tilde{\pi}_i = (-1)^{\tilde{\ell}_i} = (-1)^{\ell_i \pm 1}$  and  $\tilde{\pi}_f = (-1)^{\tilde{\ell}_f} = (-1)^{\ell_f \pm 1}$ .

Vrijedi  $\tilde{\pi}_i \tilde{\pi}_f = \pi_i \pi_f$ , pa mora biti,

$$\left[ 1 - \pi_i \pi_f (-1)^{\lambda+1} \right] \langle \Psi_f | \hat{\mu}_{\lambda\nu} | \Psi_i \rangle = 0. \quad (\text{G.11})$$

S obzirom da računamo kvantnomehaničke prijelaze, odgovarajući matrični elementi ne može biti nula  $\langle \Psi_f | \hat{\mu}_{\lambda\nu} | \Psi_i \rangle \neq 0$ , pa slijedi,

$$\left[ 1 - \pi_i \pi_f (-1)^{\lambda+1} \right] = 0, \quad (\text{G.12})$$

odnosno  $\pi_i \pi_f (-1)^{\lambda+1} = 1$ .

Ovdje razlikujemo dva slučaja,

- $\ell_i = \ell_f$ , što znači da je  $\pi_i \pi_f = 1$  i rang operatora mora biti  $\lambda = 2k - 1$  neparan broj. Time smo identificirali prijelaze  $j_< \leftrightarrow j_>$  s istim orbitalnim kvantnim brojem (isti orbitalni kvantni broj u istoj i različitoj ljusci, misli se na različiti glavni kvantni broj ljuske), takozvani prijelaz s izmjenom orijentacije spina (*engl. spin-flip*) gdje  $j_> = \ell + \frac{1}{2}$  and  $j_< = \ell - \frac{1}{2}$ . To je razlog zašto u slučaju  $M\lambda$  prijelaza s izmjenom orijentacije spina istog orbitalnog kvantnog broja moguće su samo M1, M3, M5, itd. tipovi magnetskih pobuđenja,
- $\ell_i \neq \ell_f$ , odnosno  $\ell_i + \ell_f + \lambda = 2k - 1$  mora biti neparan broj. S druge strane postoje prijelazi  $j_< \leftrightarrow j_>$  između različitih nukleonskih orbitala (različitih orbitala bilo unutar iste ili različitih ljusaka), što je opet prijelaz s izmjenom orijentacije spina gdje je  $j_> = \ell_i + \frac{1}{2}$  and  $j_< = \ell_f - \frac{1}{2}$ .

## DODATAK H

# Operatori izmjene

Da bismo identificirali operator izmjene potrebno je prisjetiti se općeg principa, da fizika sustava na zamjenu poretka svih stupnjeva slobode jednakih čestica ostaje nepromijenjena [250]. Neka je sustav od  $N$  jednakih čestica opisan Hamiltonijanom  $\hat{H}(\zeta_1; \zeta_2, \dots; \zeta_N)$  gdje je  $\zeta_i$  skup svih kvantnih brojeva koji karakteriziraju stanje  $i$ -te čestice  $1 \leq i \leq N$  i neka je  $\hat{P}_{ij}$  operator permutacije  $i$ -te i  $j$ -te čestice koji zadovoljava sva pravila grupe permutacija skupa od  $N$  čestica,

$$\hat{P}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & j & \dots & N \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_j & \zeta_i & \dots & \zeta_N \end{pmatrix}. \quad (\text{H.1})$$

Zahtijevamo da,

$$\hat{P}_{ij} \hat{H}(\zeta_1; \zeta_2, \dots; \zeta_N) \hat{P}_{ij}^{-1} = \hat{H}(\zeta_1; \zeta_2, \dots; \zeta_N), \quad (\text{H.2})$$

fizika sustava na permutacije  $N$  jednakih čestica ostaje nepromijenjena.

Znamo da kvadrat operatora permutacije mora biti jedinični operator  $\hat{P}_{ij}^2 = 1$ , pa za slučaj svojstvenog vektora stanja,

$$\hat{P}_{ij} |\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_N\rangle = \lambda_P |\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_N\rangle, \quad (\text{H.3})$$

svojstvene vrijednosti mogu biti  $\lambda_P = \pm 1$ .

Dakle imamo dva slučaja,

- $\hat{P}_{ij} |\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_N\rangle = + |\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_N\rangle$ , simetrični kojim su opisani bozonski sustavi,
- $\hat{P}_{ij} |\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_N\rangle = - |\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_N\rangle$ , antisimetrični kojim su opisani fermionski sustavi.

Za definiciju operatora izmjene čestica spina  $1/2$  korisno je pogledati djelovanje operatora  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ , definiranog kao skalarni produkt Paulijevih sigma matrica, u Hilbertovom prostoru čija je baza direktni produkt baza dva nukleona. Korisno je definirati dvočestično stanje

s orijentacijom spina. Stanje dva nukleona sa paralelnim projekcijama spina,

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |1:\uparrow\rangle \otimes |2:\uparrow\rangle, \quad (\text{H.4})$$

i stanje dva nukleona sa antiparalelnim projekcijama spina gdje brojevima označavamo prvi odnosno drugi nukleon,

$$|\uparrow\downarrow\rangle = |1:\uparrow\rangle \otimes |2:\downarrow\rangle. \quad (\text{H.5})$$

Da bismo izračunali izraz za operator izmjene dvije čestice spina 1/2 pokazalo se korisnim računati kako  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$  operator djeluje na stanja svih mogućih orijentacija spina,

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |\uparrow\uparrow\rangle = (\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}) |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad (\text{H.6})$$

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |\uparrow\downarrow\rangle = (\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}) |\uparrow\downarrow\rangle = 2|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (\text{H.7})$$

odnosno,

$$\frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) |\uparrow\downarrow\rangle = (\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}) |\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle, \quad (\text{H.8})$$

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |\downarrow\downarrow\rangle = (\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}) |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (\text{H.9})$$

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |\downarrow\uparrow\rangle = (\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}) |\downarrow\uparrow\rangle = 2|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle, \quad (\text{H.10})$$

odnosno,

$$\frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) |\downarrow\uparrow\rangle = (\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}) |\downarrow\uparrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (\text{H.11})$$

konačno operator izmjene definiramo izrazom,

$$\hat{P}_{12}^\sigma = \frac{1}{2}(1_\sigma + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2), \quad (\text{H.12})$$

odmah možemo definirati operator izmjene u izospinskom prostoru,

$$\hat{P}_{12}^\tau = \frac{1}{2}(1_\tau + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2). \quad (\text{H.13})$$

Generalno operator izmjene, što je zapravo operator permutacija, prvog i drugog nukleona definiramo kao,

$$\hat{P}_{12}^{r\sigma\tau} = \hat{P}_{12}^r \hat{P}_{12}^\sigma \hat{P}_{12}^\tau, \quad (\text{H.14})$$

odnosno direktan produkt operatora izmjene u koordinatnom  $\hat{P}_{12}^r$ , spinskom  $\hat{P}_{12}^\sigma$  i izospinskom  $\hat{P}_{12}^\tau$  prostoru. S obzirom da je atomska jezgra fermionski sustav, operator izmjene

mora biti antisimetričan,

$$\hat{P}_{12}^{r\sigma\tau} = -1. \quad (\text{H.15})$$

Konačno, s obzirom na antisimetričnost operatora izmjene i činjenicu da su kvadrati operatora,

$$(\hat{P}_{12}^{\sigma})^2 = 1_{\sigma}, \quad (\text{H.16})$$

u spinskom i

$$(\hat{P}_{12}^{\tau})^2 = 1_{\tau}, \quad (\text{H.17})$$

izospinskom prostoru jedinični, dolazimo do izraza za operator izmjene u koordinatnom prostoru,

$$\hat{P}_{12}^r = \hat{P}_{12}^{r\sigma\tau} (\hat{P}_{12}^{\sigma} \hat{P}_{12}^{\tau}) = -1 (\hat{P}_{12}^{\sigma} \hat{P}_{12}^{\tau}) = -\frac{1}{2} (1_{\sigma} + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{1}{2} (1_{\tau} + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2), \quad (\text{H.18})$$

pri tome  $[\hat{P}_{12}^{\sigma}, \hat{P}_{12}^{\tau}] = 0$ , tj. operatori izmjene u spinskom i izospinskom prostoru komutiraju.

## DODATAK I

# Reducirani matrični elementi i relacije simetrije

## I.1 Reducirani matrični elementi

Zbog kompletnosti informacije navodimo (I.1), (I.3), (I.4), (I.5), (I.6) i (I.7) [182, 249] sve reducirane matrične elemente nužne za proračun u (F.1), gdje koristimo slijedeću notaciju,  $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$ ,  $\hat{L} = \sqrt{2L+1}$ ,  $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$ .

Reducirani matrični element operatora angularnog momenta  $\hat{j}$  i kugline funkcije ranga  $L$  vezanih u operator ranga  $J$  u vezanoj  $SL$  bazi  $\{ |(\frac{1}{2}, \ell)jm\rangle \}$ ,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f)j_f || [\hat{j} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_i)j_i \rangle &= (-1)^{j_f+J+j_i} \hat{j} \begin{Bmatrix} j_i & j_f & J \\ 1 & L & j_f \end{Bmatrix} \\ &\times \langle (\frac{1}{2}, \ell_f)j_f || \hat{j} || (\frac{1}{2}, \ell_i)j_i \rangle \langle (\frac{1}{2}, \ell_f)j_f || Y_L || (\frac{1}{2}, \ell_i)j_i \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

Reducirani matrični element kugline funkcije ranga  $L$  u vezanoj  $SL$  bazi  $\{ |(\frac{1}{2}, \ell)jm\rangle \}$ ,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f)j_f || Y_L || (\frac{1}{2}, \ell_i)j_i \rangle &= \langle (\frac{1}{2}, \ell_f)j_f || [1_\sigma \otimes Y_L]_L || (\frac{1}{2}, \ell_i)j_i \rangle \\ &= \hat{j}_f \hat{L} \hat{j}_i \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_f & j_f \\ \frac{1}{2} & \ell_i & j_i \\ 0 & L & L \end{Bmatrix} \langle \ell_f || Y_L || \ell_i \rangle \langle \frac{1}{2} || 1_\sigma || \frac{1}{2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Reducirani matrični element operatora spina  $\vec{\sigma}$  i kugline funkcije ranga  $L$  vezanih u



operator ranga  $J$  u vezanoj  $SL$  bazi  $\left\{ \left| \left( \frac{1}{2}, \ell \right) jm \right\rangle \right\}$ ,

$$\left\langle \left( \frac{1}{2}, \ell_f \right) j_f \left| \left[ \vec{\sigma} \otimes Y_L \right]_J \left| \left( \frac{1}{2}, \ell_i \right) j_i \right\rangle = \hat{j}_f \hat{L} \hat{j}_i \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_f & j_f \\ \frac{1}{2} & \ell_i & j_i \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \langle \ell_f \left| Y_L \right| \ell_i \rangle \left\langle \frac{1}{2} \left| \vec{\sigma} \right| \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (\text{I.3})$$

Reducirani matrični element kugline funkcije ranga  $L$  u bazi  $\left\{ \left| \ell m_\ell \right\rangle \right\}$ ,

$$\langle \ell_f \left| Y_L \right| \ell_i \rangle = (-1)^{\ell_f} \frac{\hat{\ell}_i \hat{L} \hat{\ell}_f}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_f & L & \ell_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.4})$$

Reducirani matrični element operatora angularnog momenta  $\hat{j}$  u vezanoj  $SL$  bazi  $\left\{ \left| \left( \frac{1}{2}, \ell \right) jm \right\rangle \right\}$ ,

$$\left\langle \left( \frac{1}{2}, \ell_f \right) j_f \left| \hat{j} \left| \left( \frac{1}{2}, \ell_i \right) j_i \right\rangle = \hbar \sqrt{j_i(j_i + 1)(2j_i + 1)} \delta_{j_f j_i}. \quad (\text{I.5})$$

Reducirani matrični element jediničnog operatora u vezanoj  $SL$  bazi  $\left\{ \left| \left( \frac{1}{2}, \ell \right) jm \right\rangle \right\}$ .

$$\langle j_f \left| 1 \right| j_i \rangle = \sqrt{2j_f + 1} \delta_{j_f j_i}. \quad (\text{I.6})$$

Reducirani matrični element operatora spina  $\vec{\sigma}$  u bazi  $\left\{ \left| \frac{1}{2} m_s \right\rangle \right\}$ ,

$$\left\langle \frac{1}{2} \left| \vec{\sigma} \right| \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{6}. \quad (\text{I.7})$$

## I.2 Relacije simetrija reduciranog matričnog elementa $\langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f || [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle$

Da bismo uočili vezu između reduciranih matričnih elemenata u kojima je zamijenjen redoslijed početnih i konačnih stanja,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b || [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d \rangle &= \sqrt{2j_b + 1} \sqrt{2J + 1} \sqrt{2j_d + 1} \\ &\times \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_d & j_d \\ \frac{1}{2} & \ell_b & j_b \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \langle \ell_b || Y_L || \ell_d \rangle \langle \frac{1}{2} || \vec{\sigma} || \frac{1}{2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

računamo,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle &= \sqrt{2j_d + 1} \sqrt{2J + 1} \sqrt{2j_b + 1} \\ &\times \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_b & j_b \\ \frac{1}{2} & \ell_d & j_d \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \langle \ell_d || Y_L || \ell_b \rangle \langle \frac{1}{2} || \vec{\sigma} || \frac{1}{2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Koristimo poznatu relaciju simetrije 9j koeficijenata [182],

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_b & j_b \\ \frac{1}{2} & \ell_d & j_d \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} = (-1)^\Sigma \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_d & j_d \\ \frac{1}{2} & \ell_b & j_b \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

gdje je  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2} + \ell_d + j_d + \frac{1}{2} + \ell_b + j_b + 1 + L + J \\ &= 2 + \ell_d + \ell_b + j_d + j_b + L + J \\ &= 2 + 2L + j_d + j_b + J, \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

slijedi da faza,

$$(-1)^\Sigma = (-1)^{2+2L+j_d+j_b+J} = (-1)^{j_d+j_b+J}. \quad (\text{I.12})$$

Reducirani matrični element kugline funkcije ranga  $L$  dan je sa,

$$\langle \ell_d || Y_L || \ell_b \rangle = \sqrt{\frac{(2\ell_d + 1)(2L + 1)}{4\pi}} \langle \ell_d 0; L 0 | \ell_b 0 \rangle, \quad (\text{I.13})$$

odnosno,

$$\langle \ell_b || Y_L || \ell_d \rangle = \sqrt{\frac{(2\ell_b + 1)(2L + 1)}{4\pi}} \langle \ell_b 0; L 0 | \ell_d 0 \rangle, \quad (\text{I.14})$$

pri čemu treba uzeti u obzir i relaciju simetrije Clebsch-Gordanovih koeficijenata,

$$\langle \ell_b 0; L 0 | \ell_d 0 \rangle = (-1)^L \sqrt{\frac{2\ell_d + 1}{2\ell_b + 1}} \langle \ell_d 0; L 0 | \ell_b 0 \rangle, \quad (\text{I.15})$$

slijedi,

$$\begin{aligned} \langle \ell_b || Y_L || \ell_d \rangle &= (-1)^L \sqrt{\frac{(2\ell_b + 1)(2L + 1)}{4\pi}} \sqrt{\frac{2\ell_d + 1}{2\ell_b + 1}} \langle \ell_d 0; L 0 | \ell_b 0 \rangle \\ &= (-1)^L \sqrt{\frac{(2\ell_d + 1)(2L + 1)}{4\pi}} \langle \ell_d 0; L 0 | \ell_b 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Konačno, relacija simetrije reduciranog matričnog elementa kugline funkcije ranga  $L$ ,

$$\langle \ell_b || Y_L || \ell_d \rangle = (-1)^L \langle \ell_d || Y_L || \ell_b \rangle. \quad (\text{I.17})$$

Uvrštavanjem slijedi,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle &= \sqrt{2j_d + 1} \sqrt{2J + 1} \sqrt{2j_b + 1} \\ &\times \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_b & j_b \\ \frac{1}{2} & \ell_d & j_d \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \langle \ell_d || Y_L || \ell_b \rangle \langle \frac{1}{2} || \vec{\sigma} || \frac{1}{2} \rangle \\ &= (-1)^{j_d + j_b + J} \times (-1)^L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \ell_d & j_d \\ \frac{1}{2} & \ell_b & j_b \\ 1 & L & J \end{Bmatrix} \langle \ell_b || Y_L || \ell_d \rangle \langle \frac{1}{2} || \vec{\sigma} || \frac{1}{2} \rangle \\ &= (-1)^{j_d + j_b + L + J} \langle (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b || [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

S obzirom da su,

- $j_d + j_b$ , cjelobrojan,
- $L$ , cjelobrojan,
- $J$ , cjelobrojan zbog izbornog pravila trokuta koje vrijedi za 9j koeficijente  $\Delta(1; L; J)$ ,

slijedi da je  $(-1)^{j_d + j_b + L + J} = (-1)^{-(j_d + j_b + L + J)}$  pa vrijedi,

$$\langle (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b || [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d \rangle = (-1)^{j_d + j_b + L + J} \langle (\frac{1}{2}, \ell_d) j_d || [\vec{\sigma} \otimes Y_L]_J || (\frac{1}{2}, \ell_b) j_b \rangle. \quad (\text{I.19})$$

## DODATAK J

# Definicije skalara i vektora s obzirom na infinitezimalne rotacije

Da bismo mogli klasificirati snage prijelaza na izovektorsku  $B_{M1}^{(IV)}(E)$  i izoskalarnu  $B_{M1}^{(IV)}(E)$  potrebno je definirati ponašanje izoskalara odnosno izovektora s obzirom na infinitezimalne transformacije rotacije u izospinskom prostoru. Neka je  $\hat{O}_k$  operator koji reprezentira opservablu u Hilbertovom prostoru baze  $\{|\psi\rangle\}$  i neka je  $\{|\chi\rangle\}$  po volji odabrana baza takva da vrijedi unitarna transformacija,

$$|\chi\rangle = U |\psi\rangle, \quad (\text{J.1})$$

takva da vrijedi  $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$ .

Zahtijevamo da operator  $\hat{O}_k$  reprezentira fizikalnu opservablu,

$$\langle \psi_f | \hat{O}_k | \psi_i \rangle = \langle \chi_i | \hat{O}'_k | \chi_i \rangle \quad (\text{J.2})$$

gdje s i-označavamo početno (*engl. initial*) a s f-konačno (*engl. final*) kvantnomehaničko stanje. Tada je veza operatora  $\hat{O}'_k$  u novoj i operatora  $\hat{O}_k$  u staroj bazi dana sa,

$$\hat{O}'_k = U \hat{O}_k U^\dagger. \quad (\text{J.3})$$

Neka je unitarna transformacija dana operatorom rotacije,

$$\hat{R}_{\hat{n}}(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{J} \cdot \hat{n} \phi}, \quad (\text{J.4})$$

tada je generator infinitezimalne rotacije do prvog reda u  $\delta\phi$  dan sa,

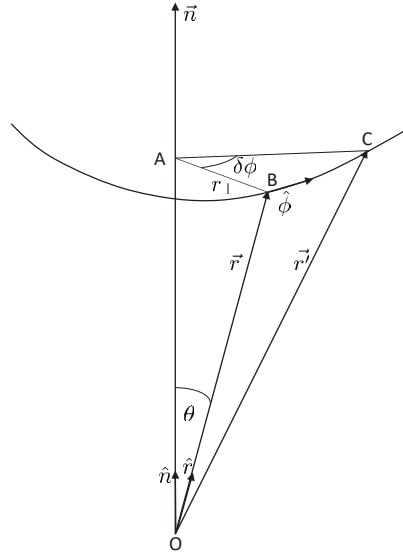
$$\hat{R}_{\hat{n}}(\delta\phi) = 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{J} \cdot \hat{n} \delta\phi. \quad (\text{J.5})$$

Konačno,

$$\hat{O}'_k = \hat{O}_k + \frac{i}{\hbar} [\hat{O}_k, \hat{J} \cdot \hat{n}] \delta\phi. \quad (\text{J.6})$$

Na slici J.1 je prikazana parametrizacija aktivne rotacije u koordinatnom prostoru oko

osi  $\vec{n}$  za po volji mali kut  $\delta\phi$ .



**Slika J.1:** Parametrizacija rotacija  $R_{\hat{n}}(\delta\phi)$  oko osi  $\vec{n}$  za infinitezimalni kut  $\delta\phi$ .

Pri tome je  $\vec{r}'$  zarotirani vektor oko osi  $\vec{n}$  za mali kut  $\delta\phi$ , tada je  $\delta l \approx \widehat{BC}$  i slijedi,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{l} = \vec{r} + \hat{\phi}\delta l. \quad (\text{J.7})$$

Iz trokuta  $\Delta(ABC)$  vidimo da vrijedi,

$$\delta\phi = \frac{\delta l}{r_{\perp}}, \quad (\text{J.8})$$

relacija za infinitezimalni kut  $\delta\phi$  gdje je  $r_{\perp} = \overline{AB}$  odnosno  $r_{\perp} = r \sin\theta$ . S druge strane znamo da vrijedi,

$$\hat{n} \times \hat{r} = \hat{\phi} |\hat{n}| |\hat{r}| \sin\theta = \hat{\phi} \sin\theta, \quad (\text{J.9})$$

konačno slijedi,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{l} = \vec{r} + \hat{n} \times \vec{r} \delta\phi. \quad (\text{J.10})$$

Za k-tu komponentu vektora dobijemo,

$$r'_k = r_k + (\hat{n} \times \vec{r})_k \delta\phi = r_k + \epsilon_{kmp} n_m r_p \delta\phi, \quad (\text{J.11})$$

pa za k-tu komponentu vektorskog operatora  $\hat{O}_k$  možemo pisati,

$$\hat{O}'_k = \hat{O}_k + \epsilon_{kmp} n_m \hat{O}_p \delta\phi. \quad (\text{J.12})$$

Mora biti,

$$\hat{O}_k + \epsilon_{kmp} n_m \hat{O}_p \delta\phi = \hat{O}_k + \frac{i}{\hbar} [\hat{O}_k, \hat{J}_m n_m] \delta\phi, \quad (\text{J.13})$$

gdje koristimo konvenciju sumacije po ponovljenom indeksu  $m$ , slijede komutacijske relacije,

$$[\hat{O}_k, \hat{J}_m] = -i\hbar \epsilon_{kmp} \hat{O}_p. \quad (\text{J.14})$$

Operator  $\hat{\vec{O}} = \{\hat{O}_x, \hat{O}_y, \hat{O}_z\}$  je s obzirom na generator rotacije  $\hat{J}_m$ :

- skalar,

$$[\hat{O}_k, \hat{J}_m] = 0, \quad (\text{J.15})$$

ako komutira sa svim generatorima rotacije  $\hat{J}_m, m = x, y, z$  oko pojedinih osi.

- vektor,

$$[\hat{O}_k, \hat{J}_m] = -i\hbar \epsilon_{kmp} \hat{O}_p, \quad (\text{J.16})$$

ako vrijede komutacijske relacije.

Slijedom navedenih definicija, sada za operator u izospinskom prostoru  $\hat{O}_k^\tau$  gdje su  $\hat{t}_m = \frac{1}{2} \hat{\tau}_m, m = 1, 2, 3$  generatori infinitezimalnih rotacija u izospinskom prostoru a  $\hat{\tau}_m$  Paulijeve matrice u izospinskom prostoru definiramo,

- izoskalar,

$$[\hat{O}_k^\tau, \hat{t}_m] = 0, \quad (\text{J.17})$$

odnosno,

- izovektor,

$$[\hat{O}_k^\tau, \hat{t}_m] = -i\hbar \epsilon_{kmp} \hat{O}_p^\tau. \quad (\text{J.18})$$

## DODATAK K

# Faktor gušenja spinskog žiromagnetskog omjera slobodnog nukleona

Iz definicije spinske snage prijelaza (2.22) znamo da je,

$$B_{M1}^{\sigma}(E) = B_{M1}(E)|_{g_{\ell}=0} \propto g_s^2, \quad (\text{K.1})$$

proporcionalna kvadratu žiromagnetskog faktora. Gušenje žiromagnetskog faktora (*engl. quenching*) uvedeno je na slijedeći način,

$$g_{ef.}^{\sigma} = \zeta_s g_{slob.}^{\sigma}, \quad (\text{K.2})$$

gdje je  $0 \leq \zeta_s \leq 1$  faktor gušenja. Pri tome je  $g_{slob.}^{\sigma}$ -spinski žiromagnetski faktor slobodnog nukleona a  $g_{ef.}^{\sigma}$ -efektivni, gušeni žiromagnetski faktor nukleona unutar atomske jezgre. Dakle, gušena snaga prijelaza proporcionalna je  $\zeta_s^2$ . Po pretpostavci protonski i neutronski žiromagnetski faktori su gušeni istim faktorom,

$$\zeta_s = \zeta_s^{\pi} = \zeta_s^{\nu}, \quad (\text{K.3})$$

pa vrijedi,

$$B_{M1}^{\sigma \text{ eksp.}}(E) \rightarrow \zeta_s^2 B_{M1}^{\sigma \text{ teor.}}(E). \quad (\text{K.4})$$

U konkretnom slučaju riječ je o destruktivnoj interferenciji spinske i orbitalne snage, odnosno,

- $B_{M1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) \gg B_{M1}^{\ell \text{ teor.}}(E)$ , teorijska spinska snaga prijelaza puno je veća od orbitalne, kao što je i očekivano za sferične jezgre,
- $B_{M1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) < B_{M1}^{\sigma \text{ teor.}}(E)$ , teorijska dobivena ukupna snaga prijelaza manja je od spinske. Dakle, riječ je o destruktivnoj intereferenciji spinske i orbitalne snage prijelaza,

i iz jednadžbe (2.24) znamo da vrijedi,

$$\begin{aligned} B_{M_1}(E) &= \left( \sqrt{B_{M_1}^\sigma(E)} - \sqrt{B_{M_1}^\ell(E)} \right)^2 \\ &= B_{M_1}^\sigma(E) + B_{M_1}^\ell(E) - 2\sqrt{B_{M_1}^\sigma(E)B_{M_1}^\ell(E)}. \end{aligned} \quad (\text{K.5})$$

Relacija kojom povezujemo eksperimentalno mjerenu i proračunatu spinsku snagu prijelaza glasi,  $B_{M_1}^{\sigma \text{ eksp.}}(E) = \zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E)$ , slijedi,

$$B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E) = \zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) + B_{M_1}^\ell(E) - 2\sqrt{\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E)B_{M_1}^\ell(E)}. \quad (\text{K.6})$$

Rezultat je kvadratna jednadžba po  $\zeta_s^2$ ,

$$\left( B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E) - B_{M_1}^\ell(E) \right) - \zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) = -2\sqrt{\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E)B_{M_1}^\ell(E)}, \quad (\text{K.7})$$

kvadriranjem lijeve i desne strane jednadžbe slijedi,

$$\begin{aligned} &\left( B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E) - B_{M_1}^\ell(E) \right)^2 + (\zeta_s^2)^2 (B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E))^2 \\ &- 2\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) \left( B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E) - B_{M_1}^\ell(E) \right) \\ &= 4\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) B_{M_1}^\ell(E), \end{aligned} \quad (\text{K.8})$$

S obzirom da je  $B_{M_1}(E) \gg B_{M_1}^\ell(E)$  ukupna snaga prijelaza puno veća od orbitalne možemo pojednostavljeno napisati  $\left( B_{M_1}(E) - B_{M_1}^\ell(E) \right) \approx B_{M_1}(E)$ , slijedi,

$$\begin{aligned} &(\zeta_s^2)^2 (B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E))^2 - 4\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) B_{M_1}^\ell(E) \\ &- 2\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E) + (B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E))^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

ili nakon grupiranja članova,

$$\begin{aligned} &(\zeta_s^2)^2 (B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E))^2 - 2\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) \left( 2B_{M_1}^\ell(E) \right. \\ &\left. + B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E) \right) + (B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E))^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{K.10})$$

Jednadžbu možemo dalje optimizirati na način da aproksimiramo  $\left( 2B_{M_1}^\ell(E) + B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E) \right) \approx B_{M_1}(E)$ , konačno slijedi kvadratna jednadžba,

$$(\zeta_s^2)^2 (B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E))^2 - 2\zeta_s^2 B_{M_1}^{\sigma \text{ teor.}}(E) B_{M_1}(E) + (B_{M_1}^{\text{eksp.}}(E))^2 = 0, \quad (\text{K.11})$$



čije je rješenje spinski faktor gušenja,

$$\zeta_s = \sqrt{\frac{B_{M1}^{eksp.}(E)}{B_{M1}^{\sigma teor.}(E)}}. \quad (\text{K.12})$$

Iz jednadžbe (K.5) znamo da vrijedi,

$$\sqrt{B_{M1}^{\sigma teor.}(E)} = \sqrt{B_{M1}^{teor.}(E)} + \sqrt{B_{M1}^{\ell teor.}(E)} \approx \sqrt{B_{M1}^{teor.}(E)}, \quad (\text{K.13})$$

konačno,

$$\zeta_s = \zeta_s^\pi = \zeta_s^\nu \approx \sqrt{\frac{B_{M1}^{eksp.}(E)}{B_{M1}^{teor.}(E)}}. \quad (\text{K.14})$$

## DODATAK L

# Dimenzionalna analiza magnetske snage prijelaza $B_{M\lambda}$ ranga $\lambda$

Prisjetimo se da je snaga  $M\lambda$  prijelaza ranga  $\lambda$ ,

$$B_{M\lambda} \propto \left| \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | \hat{\mu}_\lambda | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \right|^2, \quad (\text{L.1})$$

proporcionalna kvadratu reduciranog matričnog elementa magnetskog operatora ranga  $\lambda$ . Pri tome smo uzeli u obzir da je operator magnetskih prijelaza  $\hat{\mu}_{\lambda\nu} \propto \frac{\mu_N}{\hbar}$  proporcionalan omjeru nuklearnog magnetona i reducirane Planckove konstante. Proizlazi da je, nakon faktorizacije na radijalni i kutni dio, u skladu s relacijom (F.4) reducirani matrični element magnetskog operatora,

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | \hat{\mu}_\lambda | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle &= \frac{\mu_N}{\hbar} I^{(\lambda)} \left( \frac{2}{\lambda+1} g_\ell \sqrt{\lambda(2\lambda+1)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | [Y_{\lambda-1}(\theta, \phi) \otimes \hat{j}]_\lambda | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[ g_s - \frac{2}{\lambda+1} g_\ell \right] \frac{\hbar}{2} \sqrt{\lambda(2\lambda+1)} \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | [Y_{\lambda-1}(\theta, \phi) \otimes \vec{\sigma}]_\lambda | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \right), \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

proporcionalan s radijalnim integralom  $I^{(\lambda)}$  te odgovarajućom sumom reduciranih matričnih elemenata orbitalnog i spinskog doprinosa. Uočimo da je reducirani matrični element, po relacijama (I.1) i (I.5) proporcionalan s,

$$\langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | [Y_{\lambda-1}(\theta, \phi) \otimes \hat{j}]_\lambda | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \propto \langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | \hat{j} | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \propto \hbar, \quad (\text{L.3})$$

reduciranom Planckovom konstantom pa konačno vrijedi,

$$\langle (\frac{1}{2}, \ell_f) j_f | \hat{\mu}_\lambda | (\frac{1}{2}, \ell_i) j_i \rangle \propto \frac{\mu_N}{\hbar} \times I^{(\lambda)} \times \hbar = \mu_N \times I^{(\lambda)} \quad (\text{L.4})$$

S druge strane radijalni integral je, u nerelativističkom slučaju, dan s,

$$I^{(\lambda)} = \int_0^\infty R_{n_f \ell_f}^\dagger(r) R_{n_i \ell_i}(r) r^{\lambda-1} r^2 dr, \quad (\text{L.5})$$

zbog dimenzionalne analize znamo da vrijedi,

$$[R_{n_i \ell_i}(r)] = \left[ \frac{1}{\sqrt{V}} \right], \quad [r^{\lambda-1}] = [L^{\lambda-1}], \quad [r^2 dr] = [L^3] = [V], \quad (\text{L.6})$$

gdje je L oznaka za dužinu duljine L a V oznaka za volumen, konačno,

$$[I^{(\lambda)}] = \left[ \frac{1}{V} \times L^{\lambda-1} \times V \right] = [L^{\lambda-1}]. \quad (\text{L.7})$$

Slijedi dimenzionalna analiza magnetske snage prijelaza ranga  $\lambda$ ,

$$[B_{M\lambda}] = \left[ \left( \mu_N \times L^{\lambda-1} \right)^2 \right] = \mu_N^2 [L^{2(\lambda-1)}], \quad (\text{L.8})$$

uzevši u obzir da je dimenzija atomske jezgre reda veličine femtometra (fm) možemo pisati,

$$[B_{M\lambda}] = \mu_N^2 f m^{2(\lambda-1)}. \quad (\text{L.9})$$

Odmah možemo zaključiti o dimenziji funkcije odziva  $R_{M\lambda}$  koje je konvolucija magnetske snage prijelaza i Lorentziana, slijedi,

$$[R_{M\lambda}] = \left[ B_{M\lambda} \times \frac{1}{\text{MeV}} \right] = \frac{\mu_N^2 f m^{2(\lambda-1)}}{\text{MeV}}. \quad (\text{L.10})$$

# Bibliografija

- [1] A. Richter, Progress in Particle and Nuclear Physics **13**, 1 (1985).
- [2] A. Richter, Probing the nuclear magnetic dipole response with electrons, photons and hadrons, Progress in Particle and Nuclear Physics **34**, 261 (1995).
- [3] K. Heyde, P. von Neumann-Cosel i A. Richter, Magnetic dipole excitations in nuclei: elementary modes of nucleonic motion, Rev. Mod. Phys. **82**, 2365 (2010).
- [4] U. Kneissl, H. Pitz i A. Zilges, Investigation of nuclear structure by resonance fluorescence scattering, Progress in Particle and Nuclear Physics **37**, 349 (1996).
- [5] N. Pietralla, P. von Brentano i A. Lisetskiy, Experiments on multiphonon states with proton-neutron mixed symmetry in vibrational nuclei, Progress in Particle and Nuclear Physics **60**, 225 (2008).
- [6] T. Shizuma, T. Hayakawa, H. Ohgaki, H. Toyokawa, T. Komatsubara, N. Kikuzawa, A. Tamii i H. Nakada, Fine structure of the magnetic-dipole-strength distribution in  $^{208}\text{Pb}$ , Phys. Rev. C **78**, 061303 (2008).
- [7] S. Goriely, Further explorations of Skyrme–Hartree–Fock–Bogoliubov mass formulas. XV: The spin–orbit coupling, Nuclear Physics A **933**, 68 (2015).
- [8] S. Goriely, S. Hilaire, S. Péru, M. Martini, I. Deloncle i F. Lechaftois, Gogny-Hartree-Fock-Bogolyubov plus quasiparticle random-phase approximation predictions of the M1 strength function and its impact on radiative neutron capture cross section, Phys. Rev. C **94**, 044306 (2016).
- [9] K. Langanke, G. Martínez-Pinedo, P. von Neumann-Cosel i A. Richter, Supernova inelastic neutrino-nucleus cross sections from high-resolution electron scattering experiments and shell-model calculations, Phys. Rev. Lett. **93**, 202501 (2004).
- [10] K. Langanke i G. Martínez-Pinedo, Nuclear weak-interaction processes in stars, Rev. Mod. Phys. **75**, 819 (2003).
- [11] K. Langanke, G. Martínez-Pinedo, B. Müller, H.-T. Janka, A. Marek, W. R. Hix, A. Juodagalvis i J. M. Sampaio, Effects of inelastic neutrino-nucleus scattering on supernova dynamics and radiated neutrino spectra, Phys. Rev. Lett. **100**, 011101 (2008).

- [12] H. P. Loens, K. Langanke, G. Martinez-Pinedo i K. Sieja, M1 strength functions from large-scale shell-model calculations and their effect on astrophysical neutron capture cross-sections, *The European Physical Journal A* **48**, 34 (2012).
- [13] M. B. Chadwick i *et. al.*, *Nuclear Data Sheets* **112**, 2887 (2011).
- [14] T. Otsuka, T. Suzuki, R. Fujimoto, H. Grawe i Y. Akaishi, Evolution of nuclear shells due to the tensor force, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 232502 (2005).
- [15] T. Otsuka, T. Suzuki, M. Honma, Y. Utsuno, N. Tsunoda, K. Tsukiyama i M. Hjorth-Jensen, Novel features of nuclear forces and shell evolution in exotic nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 012501 (2010).
- [16] P. Vesely, J. Kvasil, V. O. Nesterenko, W. Kleinig, P. G. Reinhard i V. Y. Ponomarev, Skyrme random-phase-approximation description of spin-flip M1 giant resonance, *Phys. Rev. C* **80**, 031302 (2009).
- [17] V. O. Nesterenko, J Kvasil, P Vesely, W Kleinig, P.-G. Reinhard i V. Y. Ponomarev, Spin-flip M1 giant resonance as a challenge for skyrme forces, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **37**, 064034 (2010).
- [18] V. Tselyaev, N. Lyutorovich, J. Speth, P.-G. Reinhard i D. Smirnov, Low-energy M1 excitations in  $^{208}\text{Pb}$  and the spin channel of the skyrme energy-density functional, *Phys. Rev. C* **99**, 064329 (2019).
- [19] J. D. Vergados, H. Ejiri i F. Šimkovic, Theory of neutrinoless double-beta decay, *Reports on Progress in Physics* **75**, 106301 (2012).
- [20] D. P. Arteaga i P. Ring, Relativistic random-phase approximation in axial symmetry, *Phys. Rev. C* **77**, 034317 (2008).
- [21] J.-P. Ebran, E. Khan, D. Peña Arteaga i D. Vretenar, Relativistic Hartree-Fock-Bogoliubov model for deformed nuclei, *Phys. Rev. C* **83**, 064323 (2011).
- [22] A. Richter, Shell model and magnetic dipole modes in deformed nuclei, *Nuclear Physics A* **507**, 99 (1990).
- [23] T. Otsuka, Scissors and unique-parity modes of M1 excitation in deformed nuclei, *Nuclear Physics A* **507**, 129 (1990).
- [24] D. Bohle, A. Richter, W. Steffen, A. Dieperink, N. L. Iudice, F. Palumbo i O. Scholten, New magnetic dipole excitation mode studied in the heavy deformed nucleus  $^{156}\text{Gd}$  by inelastic electron scattering, *Physics Letters B* **137**, 27 (1984).
- [25] D. Bohle, G. K uchler, A. Richter i W. Steffen, Further evidence for the new collective magnetic dipole mode in heavy deformed nuclei, *Physics Letters B* **148**, 260 (1984).
- [26] R. Schwengner, S. Frauendorf i B. A. Brown, Low-energy magnetic dipole radiation in open-shell nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 092502 (2017).

- [27] E. B. Balbutsev, I. V. Molodtsova i P. Schuck, Experimental status of the nuclear spin scissors mode, *Phys. Rev. C* **97**, 044316 (2018).
- [28] A. Repko, J. Kvasil i V. O. Nesterenko, Elimination of spurious modes within quasiparticle random-phase approximation, *Phys. Rev. C* **99**, 044307 (2019).
- [29] T. Oishi i N. Paar, Magnetic dipole excitation and its sum rule in nuclei with two valence nucleons, *Phys. Rev. C* **100**, 024308 (2019).
- [30] N. D. Dang i N. Q. Hung, On the importance of using exact pairing in the study of pygmy dipole resonance, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **40**, 105103 (2013).
- [31] K. Yoshida, Pygmy dipole mode in deformed neutron-rich Mg isotopes close to the drip line, *Phys. Rev. C* **80**, 044324 (2009).
- [32] J. Terasaki i J. Engel, Testing skyrme energy-density functionals with the quasiparticle random-phase approximation in low-lying vibrational states of rare-earth nuclei, *Phys. Rev. C* **84**, 014332 (2011).
- [33] S. Ebata, T. Nakatsukasa i T. Inakura, Systematic investigation of low-lying dipole modes using the canonical-basis time-dependent Hartree-Fock-Bogoliubov theory, *Phys. Rev. C* **90**, 024303 (2014).
- [34] I. Stetcu, A. Bulgac, P. Magierski i K. J. Roche, Isovector giant dipole resonance from the 3D time-dependent density functional theory for superfluid nuclei, *Phys. Rev. C* **84**, 051309 (2011).
- [35] A. Tamii i dr., Study of M1 excitations by high-resolution proton inelastic scattering experiment at forward angles, *Nucl. Phys. A* **788**, 53 (2007).
- [36] Y. Fujita, B. Rubio i W. Gelletly, Spin–isospin excitations probed by strong, weak and electro-magnetic interactions, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **66**, 549 (2011).
- [37] J. Birkhan, H. Matsubara, P. von Neumann-Cosel, N. Pietralla, V. Y. Ponomarev, A. Richter, A. Tamii i J. Wambach, Electromagnetic M1 transition strengths from inelastic proton scattering: the cases of  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{208}\text{Pb}$ , *Phys. Rev. C* **93**, 041302 (2016).
- [38] R. M. Laszewski, R. Alarcon, D. S. Dale i S. D. Hoblit, Distribution of M1 transitions in  $^{208}\text{Pb}$ , *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1710 (1988).
- [39] R. M. Laszewski, P. Rullhusen, S. D. Hoblit i S. F. LeBrun, Giant M1 resonance in Pb, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 530 (1985).
- [40] R. M. Laszewski i P. Axel, Interaction of photons with  $^{208}\text{Pb}$  and neighboring isotopes at energies below the neutron emission threshold, *Phys. Rev. C* **19**, 342 (1979).
- [41] R. M. Laszewski, R. J. Holt i H. E. Jackson, Evidence for collective M1 strength in  $^{208}\text{Pb}$  between 8 and 10 MeV, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 813 (1977).

- [42] R. E. Chrien i W. R. Kane, Neutron capture gamma-ray spectroscopy (Springer-Verlag US, 1979.).
- [43] S. Raman, M. Mizumoto i R. L. Macklin, Fine structure of the magnetic dipole giant resonance in  $^{208}\text{Pb}$ , Phys. Rev. Lett. **39**, 598 (1977).
- [44] K. Sieja, Shell-model study of the M1 dipole strength at low energy in the  $A > 100$  nuclei, Phys. Rev. C **98**, 064312 (2018).
- [45] S. Maripuu, Shell-model calculations of M1 transition probabilities from isobaric analogue states, Nuclear Physics A **123**, 357 (1969).
- [46] D. Kurath, Strong M1 transitions in light nuclei, Phys. Rev. **130**, 1525 (1963).
- [47] E. Migli, S. Drozd, J. Speth i J. Wambach, Title unknown, Z. Phys. A **340**, 111 (1991).
- [48] S. Kamerdzhiev, J. Speth, G. Tertychny i J. Wambach, M1 resonances in unstable magic nuclei, Zeitschrift für Physik A **346**, 253 (1993).
- [49] S. Moraghe, J. Amaro, C. García-Recio i A. Lallena, Meson-exchange current effects in inelastic electron scattering from polarized nuclei, Nuclear Physics A **576**, 553 (1994).
- [50] L. E. Marcucci, M. Pervin, S. C. Pieper, R. Schiavilla i R. B. Wiringa, Quantum monte carlo calculations of magnetic moments and M1 transitions in  $A \leq 7$  nuclei including meson-exchange currents, Phys. Rev. C **78**, 065501 (2008).
- [51] L.-G. Cao, G. Colò, H. Sagawa, P. F. Bortignon i L. Sciacchitano, Effects of the tensor force on the multipole response in finite nuclei, Phys. Rev. C **80**, 064304 (2009).
- [52] J. Speth, P.-G. Reinhard, V. Tselyaev i N. Lyutorovich, arXiv, 2001.07236 (2020).
- [53] D. I. Sober, B. C. Metsch, W. Knüpfner, G. Eulenberg, G. Kuchler, A. Richter, E. Spamer i W. Steffen, Magnetic dipole excitations in the  $N=28$  isotones  $^{50}\text{Ti}$ ,  $^{52}\text{Cr}$ , and  $^{54}\text{Fe}$ , Phys. Rev. C **31**, 2054 (1985).
- [54] S. Bassauer, P. von Neumann-Cosel, P.-G. Reinhard, A. Tamii, S. Adachi, C. A. Bertulani, P. Y. Chan, A. D'Alessio, H. Fujioka, H. Fujita, Y. Fujita, G. Gey, M. Hilcker, T. H. Hoang, A. Inoue, J. Isaak, C. Iwamoto, T. Klaus, N. Kobayashi, Y. Maeda, M. Matsuda, N. Nakatsuka, S. Noji, H. J. Ong, I. Ou, N. Pietralla, V. Y. Ponomarev, M. S. Reen, A. Richter, M. Singer, G. Steinhilber, T. Sudo, Y. Togano, M. Tsumura, Y. Watanabe i V. Werner, Electric and magnetic dipole strength in  $^{112,114,116,118,120,124}\text{Sn}$ , Phys. Rev. C **102**, 034327 (2020).
- [55] R. Alarcon, R. M. Laszewski i D. S. Dale, Giant m1 resonance in  $^{120}\text{Sn}$  and the quenching of the nucleon spin  $g$  factors, Phys. Rev. C **40**, R1097 (1989).

- [56] K. Govaert, F. Bauwens, J. Bryssinck, D. De Frenne, E. Jacobs, W. Mondelaers, L. Govor i V. Y. Ponomarev, Dipole excitations to bound states in  $^{116}\text{Sn}$  and  $^{124}\text{Sn}$ , *Phys. Rev. C* **57**, 2229 (1998).
- [57] K. Heyde, P. von Neumann-Cosel i A. Richter, Magnetic dipole excitations in nuclei: elementary modes of nucleonic motion, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2365 (2010).
- [58] P. von Neumann-Cosel, A. Poves, J. Retamosa i A. Richter, Magnetic dipole response in nuclei at the N=28 shell closure: a new look, *Physics Letters B* **443**, 1 (1998).
- [59] M. Ichimura, H. Sakai i T. Wakasa, Spin-isospin responses via (p,n) and (n,p) reactions, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **56**, 446 (2006).
- [60] G. F. Bertsch i I. Hamamoto, Gamow-Teller strength at high excitations, *Phys. Rev. C* **26**, 1323 (1982).
- [61] K. Takayanagi, K. Shimizu i A. Arima, A theoretical study of magnetic dipole transitions in  $^{48}\text{Ca}$ , *Nuclear Physics A* **481**, 313 (1988).
- [62] S. P. Kamerdzhiev i V. N. Tkachev, A microscopic model taking into account 2p2h configurations in magic nuclei. calculations of M1 excitations, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* **334**, 19 (1989).
- [63] B. Brown, D. Horen, B. Castel i H. Toki, Core excitations and M1 strengths in the ca isotopes, *Physics Letters B* **127**, 151 (1983).
- [64] J. S. Dehesa, J. Speth i A. Faessler, Fine structure of the magnetic dipole states in  $^{208}\text{Pb}$ , *Phys. Rev. Lett.* **38**, 208 (1977).
- [65] L. E. Marcucci, M. Pervin, S. C. Pieper, R. Schiavilla i R. B. Wiringa, Quantum monte carlo calculations of magnetic moments and M1 transitions in  $A \leq 7$  nuclei including meson-exchange currents, *Phys. Rev. C* **78**, 065501 (2008).
- [66] G. Kružić, T. Oishi i N. Paar, arXiv, 2012.01622 (2020).
- [67] G. E. Dogotar, R. A. Eramzhyan, M. Gmitro, H. R. Kissener i E. Tinkova, M2 giant resonance in light nuclei, *Journal of Physics G: Nuclear Physics* **5**, L221 (1979).
- [68] R. Eramzhyan, M. Gmitro i H. Kissener, Giant M2 and transversal E1 resonances in light nuclei, *Nucl. Phys. A* **338**, 436 (1980).
- [69] G. Kuchler, A. Richter, E. Spamer, W. Steffen i W. Knüpfner, High-resolution (e, e') study of isovector M1 and M2 transitions in the oxygen isotopes: (i).  $^{16}\text{O}$ , *Nucl. Phys. A* **406**, 473 (1983).
- [70] J. Kokame, K. Fukunaga, N. Inoue i H. Nakamura, Excitation of unnatural-parity states in  $(\alpha, \alpha')$  scatterings on  $^{16}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$  and  $^{28}\text{Si}$  at 28.5 MeV, *Physics Letters* **8**, 342 (1964).



- [71] M. Stroetzel i A. Goldmann, Untersuchung von Kernniveaus des  $^{16}\text{O}$  zwischen 14 und 21 MeV Anregungsenergie durch unelastische Elektronenstreuung, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei* **233**, 245 (1970).
- [72] A. Goldmann i M. Stroetzel, Unelastische Elektronenstreuung im Bereich der Riesenresonanz von  $^{16}\text{O}$  mit Primärenergien kleiner als 60 MeV, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei* **239**, 235 (1970).
- [73] P. von Neumann-Cosel, F. Neumeyer, S. Nishizaki, V. Y. Ponomarev, C. Rangacharyulu, B. Reitz, A. Richter, G. Schrieder, D. I. Sober, T. Waindzoch i J. Wambach, Spin and orbital magnetic quadrupole resonances in  $^{48}\text{Ca}$  and  $^{90}\text{Zr}$  from  $180^\circ$  electron scattering, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1105 (1999).
- [74] R. A. Lindgren, W. L. Bendel, L. W. Fagg i E. C. Jones, Evidence for giant M2 states in  $^{208}\text{Pb}$ . *Phys. Rev. Lett.* **36**, 116 (1976).
- [75] R. Frey, A. Richter, A. Schwierczinski, E. Spamer, O. Titze i W. Knüpfner, High-resolution inelastic electron scattering on  $^{208}\text{Pb}$  at 50 and 63.5 MeV and fragmentation of the magnetic quadrupole strength, *Phys. Lett. B* **74**, 45 (1978).
- [76] G. Peterson i J. Ziegler, Excitation of collective states in  $^{208}\text{Pb}$  by inelastic electron scattering, *Physics Letters* **21**, 543 (1966).
- [77] E. Boridy i J. Pearson, Spin-orbit force and excitation of unnatural-parity states by  $\alpha$ -particles, *Nuclear Physics A* **185**, 593 (1972).
- [78] J. Friedrich, N. Voegler i H. Euteneuer, Electron scattering from levels in  $^{208}\text{Pb}$  with excitation energies up to 6.2 MeV and spins up to  $J = 10$ , *Physics Letters B* **64**, 269 (1976).
- [79] W. Knüpfner, R. Frey, A. Friebel, W. Mettner, D. Meuer, A. Richter, E. Spamer i O. Titze, Electroexcitation of M2 giant resonances, mass dependent quenching of the spin-magnetism and the reduction of M1 strength in heavy nuclei, *Phys. Lett. B* **77**, 367 (1978).
- [80] W. Knüpfner i M. G. Huber, Universal relationship connecting various two-body effective residual interactions, *Phys. Rev. C* **14**, 2254 (1976).
- [81] V. Ponomarev, V. Soloviev, C. Stoyanov i A. Vdovin, Magnetic quadrupole resonance in spherical nuclei, *Nucl. Phys. A* **323**, 446 (1979).
- [82] B. Castel i I. Hamamoto, Giant spin resonances and effective  $M\lambda$  g-factors, *Phys. Lett. B* **65**, 27 (1976).
- [83] J. S. Dehesa, disertacija (Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn, 1977.).
- [84] P. Ring i J. Speth, Nuclear structure calculations with a density-dependent force in  $^{208}\text{Pb}$ , *Nuclear Physics A* **235**, 315 (1974).

- 
- [85] P. Ring i J. Speth, RPA-calculations in  $^{208}\text{Pb}$  with a density dependent interaction, *Physics Letters B* **44**, 477 (1973).
- [86] S. Krewald i J. Speth, Calculation of higher multipole resonances, *Physics Letters B* **52**, 295 (1974).
- [87] P. Ring i P. Schuck, *The nuclear many-body problems* (Springer-Verlag, Berlin i Heidelberg, Germany, 1980.).
- [88] A. Zaringhalam, Electron capture rates during collapse of the supernova core, *Nuclear Physics A* **404**, 599 (1983).
- [89] J. Cooperstein i J. Wambach, Electron capture in stellar collapse, *Nuclear Physics A* **420**, 591 (1984).
- [90] S. E. Woosley, D. H. Hartmann, R. D. Hoffman i W. C. Haxton, The nu-Process, **356**, 272 (1990).
- [91] G. Holzwarth i G. Eckart, The nuclear “twist”, *Z. Physik A* **283**, 219 (1977).
- [92] G. Holzwarth i G. Eckart, Fluid-dynamical approximation for finite fermi systems, *Nucl. Phys. A* **325**, 1 (1979).
- [93] G. Holzwarth i G. Eckart, Nuclear fluid dynamics for giant resonances, *Nucl. Phys. A* **396**, 171 (1983).
- [94] G. Holzwarth i G. Eckart, Sum rules and strength functions in nuclear fluid dynamics, *Phys. Lett. B* **118**, 9 (1982).
- [95] B. Schwesinger, K. Pingel i G. Holzwarth, Excitation of the  $2^-$  twist mode by inelastic electron scattering, *Nucl. Phys. A* **341**, 1 (1980).
- [96] M. Traini, Energy-Weighted Sum Rule for Magnetic Multipole Transitions, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1535 (1978).
- [97] T. Suzuki, Sum rules for spin-dependent excitations of nuclei, *Physics Letters B* **83**, 147 (1979).
- [98] D. Kurath, Argonne national laboratory report no. 97/14 (1977.), str. 161.
- [99] E. Lipparini i S. Stringari, Sum rules and giant resonances in nuclei, *Physics Reports* **175**, 103 (1989).
- [100] N. Shigeru i A. Kazuhiko, Energy Weighted Sum Rules for Spin-Dependent Excitations of Nuclei, *Prog. Theor. Phys.* **63**, 1599 (1980).
- [101] J. Speth, *Electric and magnetic giant resonances in nuclei* (World Scientific, New York, 1991.), str. 436.

- [102] D. F. Geesaman, R. D. Lawson, B. Zeidman, G. C. Morrison, A. D. Bacher, C. Olmer, G. R. Bureson, W. B. Cottingham, S. J. Greene, R. L. Boudrie, C. L. Morris, R. A. Lindgren, W. H. Kelly, R. E. Segel i L. W. Swenson, Quenching of isoscalar spin-flip strength in  $^{54}\text{Fe}$ , *Phys. Rev. C* **30**, 952 (1984).
- [103] A. M. Lallena, The role of the tensor force for high-spin states of unnatural parity in  $^{208}\text{Pb}$ , *Nuclear Physics A* **489**, 70 (1988).
- [104] A. Bacher, G. Emery, W. Jones, D. Miller, G. Adams, F. Petrovich i W. Love, Excitation of high-spin unnatural parity states in  $^{208}\text{Pb}$  from the (p, p) reaction at 135 MeV, *Physics Letters B* **97**, 58 (1980).
- [105] E. Yüksel, T. Marketin i N. Paar, Optimizing the relativistic energy density functional with nuclear ground state and collective excitation properties, *Phys. Rev. C* **99**, 034318 (2019).
- [106] J. Chadwick, The existence of a neutron, *Proceedings of the Royal Society A*. **136**, 692 (1932).
- [107] M. G. Mayer, On closed shells in nuclei. II, *Phys. Rev.* **75**, 1969 (1949).
- [108] A. Einstein, Zur elektrodynamik bewegter körper, *Annalen der Physik* **322**, 891 (1905).
- [109] P. A. M. Dirac, The quantum theory of the electron, *Proc. Roy. Soc. (A)*, 610 (1928).
- [110] C. D. Anderson, The positive electron, *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933).
- [111] H. Yukawa, On the interaction of elementary particles, *Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn.* **17**, 48 (1935).
- [112] C. F. Powell, Multiple disintegration processes produced by cosmic rays, *Nature* **159**, 93 (1947).
- [113] M. Taketani, S. Nakamura i M. Sasaki, On the method of the theory of nuclear forces, *Prog. Theor. Phys.* **45**, 7 (1952).
- [114] R. Machleidt, The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Structure. In: Negele J.W., Vogt E. (eds) *Advances in Nuclear Physics (Adv. in Nucl. Phys., Springer, Boston, 1989.)*.
- [115] L. N. Savushkin, Relativistic nuclear shell model (Publishing Department of B. P. Konstantinov Petersburg Nuclear Physics Institute, St. Petersburg, 2011.).
- [116] M. Taketani, K. Holinde i C. Elster, The bonn meson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction, *Phys. Rep.* **149**, 1 (1987).
- [117] W. Kohn i L. J. Sham, Self-consistent equations including exchange and correlation effects, *Phys. Rev.* **140**, 1133 (1965).

- 
- [118] P. Hohenberg i W. Kohn, Inhomogeneous electron gas, *Phys. Rev.* **136**, 864 (1964).
- [119] J. D. Walecka, A theory of highly condensed matter, *Ann. Phys.* **83**, 491 (1974).
- [120] J. Boguta i A. R. Bodmer, Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface, *Nucl. Phys. A* **292**, 413 (1977).
- [121] R. Brockmann i H. Toki, Relativistic density-dependent Hartree approach for finite nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3408 (1992).
- [122] B. A. Nikolaus, T. Hoch i D. G. Madland, Nuclear ground state properties in a relativistic point coupling model, *Phys. Rev. C* **46**, 1757 (1992).
- [123] R. J. Furnstahl i C. E. Price, Vacuum polarization currents in finite nuclei, *Phys. Rev. C* **41**, 1792 (1990).
- [124] M. Gell-Mann, The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Structure. In: Negele J.W., Vogt E. (eds) *Advances in Nuclear Physics* (US Atomic Energy Commission (AEC), 1961.).
- [125] Y. Ne'eman, Derivation of strong interactions from a gauge invariance, *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).
- [126] D. J. Gross i F. Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. I, *Phys. Rev. D* **3633**, 8 (1973).
- [127] D. J. Gross i F. Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories. II, *Phys. Rev. D* **980**, 9 (1974).
- [128] S. Weinberg, Phenomenological lagrangians, *Phys. A* **96**, 327 (1979).
- [129] S. Weinberg, Effective chiral lagrangians for nucleon-pion interactions and nuclear forces, *Nucl. Phys. B* **363**, 3 (1991).
- [130] S. Weinberg, Elementary particle theory of composite particles, *Phys. Rev.* **130**, 776 (1963).
- [131] A. Nogga, S. K. Bogner i A. Schwenk, Low-momentum interaction in few-nucleon systems, *Phys. Rev. C* **70**, 061002 (2004).
- [132] L. Huth, V. Durant, J. Simonis i A. Schwenk, Shell-model interactions from chiral effective field theory, *Phys. Rev. C* **98**, 044301 (2018).
- [133] W. Bothe i W. Gentner, Künstliche radioaktivität durch  $\gamma$ -strahlen, *Naturwissenschaften* **25**, 90 (1937).
- [134] A. Migdal, Quadrupole and dipole gamma-radiation of nuclei, *J. Phys. (USSR)* **8**, 331 (1944).
- [135] G. C. Baldwin i G. S. Klaiber, Photo-fission in heavy elements, *Phys. Rev.* **71**, 3 (1947).

- 
- [136] S. C. Fultz, R. L. Bramblett, J. T. Caldwell i N. A. Kerr, Photoneutron cross-section measurements on gold using nearly monochromatic photons, *Phys. Rev.* **127**, 1273 (1962).
- [137] B. L. Berman i S. C. Fultz, Measurements of the giant dipole resonance with monoenergetic photons, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 713 (1975).
- [138] M. Goldhaber i E. Teller, On nuclear dipole vibrations, *Phys. Rev.* **74**, 1046 (1948).
- [139] H. Steinwedel, J. H. D. Jensen i P. Jensen, Nuclear dipole vibrations, *Phys. Rev.* **79**, 1019 (1950).
- [140] K. Okamoto, Relation between the quadrupole moments and the widths of the giant resonance of photonuclear reaction, *Prog. Theor. Phys.* **5**, 75 (1956).
- [141] M. Danos, On the long-range correlation model of the photonuclear effect, *Nucl. Phys.* **5**, 23 (1958).
- [142] J. Rainwater, Nuclear energy level argument for a spheroidal nuclear model, *Phys. Rev.* **79**, 432 (1950).
- [143] A. Bohr i B. R. Mottelson, Rotational states in even-even nuclei, *Phys. Rev.* **90**, 717 (1953).
- [144] M. Danos i W. Greiner, Dynamic theory of the nuclear collective model, *Phys. Rev.* **134**, 284 (1964).
- [145] D. Wilkinson, Nuclear photodisintegration, *Phys. Rev.* **22**, 1039 (1956).
- [146] A. Reifman, Wechselwirkung zwischen nukleonenbewegung und oberflächenschwingungen der kerne beim kernphotoeffekt, *Z. Naturforschung Teil A* **8**, 505 (1953).
- [147] J. P. Elliott i B. H. Flowers, The odd-parity states of  $^{16}\text{O}$  and  $^{16}\text{N}$ , *Proc. Roy. Soc. A* **242**, 57 (1957).
- [148] G. E. Brown i M. Bolsterli, Dipole state in nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 472 (1959).
- [149] N. Paar, P. Ring, T. Nikšić i D. Vretenar, Quasiparticle random phase approximation based on the relativistic Hartree-Bogoliubov model, *Phys. Rev. C* **67**, 034312 (2003).
- [150] N. Paar, T. Nikšić, D. Vretenar i P. Ring, Quasiparticle random phase approximation based on the relativistic Hartree-Bogoliubov model. II. Nuclear spin and isospin excitations, *Phys. Rev. C* **69**, 054303 (2004).
- [151] D. J. Rowe, Nuclear collective motion: models and theory (World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2009.).
- [152] S. Raman, M. Mizumoto i R. L. Macklin, Fine structure of the magnetic dipole giant resonance in  $^{208}\text{Pb}$ , *Phys. Rev. Lett.* **39**, 598 (1977).

- 
- [153] D. Vretenar, A. Afanasjev, G. Lalazissis i P. Ring, Relativistic Hartree–Bogoliubov theory: static and dynamic aspects of exotic nuclear structure, *Physics Reports* **409**, 101 (2005).
- [154] T. Nikšić, T. Marketin, D. Vretenar, N. Paar i P. Ring,  $\beta$ -decay rates of  $r$ -process nuclei in the relativistic quasiparticle random phase approximation, *Phys. Rev. C* **71**, 014308 (2005).
- [155] N. Paar, D. Vretenar, E. Khan i G. Colò, Exotic modes of excitation in atomic nuclei far from stability, *Reports on Progress in Physics* **70**, 691 (2007).
- [156] N. Paar, D. Vretenar, T. Marketin i P. Ring, Inclusive charged-current neutrino-nucleus reactions calculated with the relativistic quasiparticle random-phase approximation, *Phys. Rev. C* **77**, 024608 (2008).
- [157] Y. Niu, N. Paar, D. Vretenar i J. Meng, Low-energy monopole and dipole response in nuclei at finite temperature, *Physics Letters B* **681**, 315 (2009).
- [158] E. Khan, N. Paar i D. Vretenar, Low-energy monopole strength in exotic nickel isotopes, *Phys. Rev. C* **84**, 051301 (2011).
- [159] N. Paar, C. C. Moustakidis, T. Marketin, D. Vretenar i G. A. Lalazissis, Neutron star structure and collective excitations of finite nuclei, *Phys. Rev. C* **90**, 011304 (2014).
- [160] X. Roca-Maza, N Paar i G Colò, Covariance analysis for energy density functionals and instabilities, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **42**, 034033 (2015).
- [161] T Nikšić, N Paar, P.-G. Reinhard i D Vretenar, Optimizing relativistic energy density functionals: covariance analysis, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **42**, 034008 (2015).
- [162] N. Paar, T. Marketin, D. Vale i D. Vretenar, Modeling nuclear weak-interaction processes with relativistic energy density functionals, *Int. J. Mod. Phys. E* **24**, 1541004 (2015).
- [163] X. Roca-Maza i N. Paar, Nuclear equation of state from ground and collective excited state properties of nuclei, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **101**, 96 (2018).
- [164] T. Nikšić, N. Paar, D. Vretenar i P. Ring, DIRHB - A relativistic self-consistent mean-field framework for atomic nuclei, *Comp. Phys. Comm.* **185**, 1808 (2014).
- [165] J. Bardeen, L. N. Cooper i J. R. Schrieffer, Theory of superconductivity, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [166] N. Bogolyubov, The compensation principle and the self-consistent field method, *Sov. Phys. Usp.* **2**, 236 (1959).

- 
- [167] T. H. R. Skyrme, The effective nuclear potential, *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1958).
- [168] J.F.Berger, M.Girod i D.Gogny, Microscopic analysis of collective dynamics in low energy fission, *Nucl. Phys. A* **428**, 23 (1984).
- [169] J. Dechargé i D. Gogny, Hartree-Fock-Bogolyubov calculations with the D1 effective interaction on spherical nuclei, *Phys. Rev. C* **21**, 1568 (1980).
- [170] M. Serra, A. Rummel i P. Ring, Relativistic theory of pairing in infinite nuclear matter, *Phys. Rev. C* **65**, 014304 (2001).
- [171] M. Serra i P. Ring, Relativistic Hartree - Bogoliubov theory for finite nuclei, *Phys. Rev. C* **65**, 064324 (2002).
- [172] J. W. Negele, The mean-field theory of nuclear structure and dynamics, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 913 (1982).
- [173] E. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [174] M. Danos, B. S. Ishkhanov, N. P. Yudin i R. A. Eramzhyan, Giant dipole resonance and evolution of concepts of nuclear dynamics, *Phys.-Usp.* **38**, 1297 (1995).
- [175] A. A. Vlasov, The vibrational properties of an electron gas, *Sov. Phys. Usp.* **10**, 721 (1968).
- [176] S. Droždž, S. Nishizaki, J. Speth i J. Wambach, The nuclear response within extended RPA theories, *Phys. Rep.* **197**, 1 (1990).
- [177] J. Speth i A. van der Woude, Giant resonances in nuclei, *Rep. Prog. Phys.* **44**, 719 (1981).
- [178] T. Nakatsukasa, T. Inakura i K. Yabana, Finite amplitude method for the solution of the random-phase approximation, *Phys. Rev. C* **76**, 024318 (2007).
- [179] T. Nikšić, N. Kralj, T. Tutiš, D. Vretenar i P. Ring, Implementation of the finite amplitude method for the relativistic quasiparticle random-phase approximation, *Phys. Rev. C* **88**, 044327 (2013).
- [180] D. Din Nguyen i V. Y. Ponomarev, Influence of phonon interaction on the ground state of even-even spherical nuclei, *Theoretical and Mathematical Physics* **57**, 1053 (1983).
- [181] E. Litvinova, P. Ring i D. Vretenar, Relativistic RPA plus phonon-coupling analysis of pygmy dipole resonances, *Physics Letters B* **647**, 111 (2007).
- [182] J. Suhonen, *From nucleons to nucleus: concepts of microscopic nuclear theory* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007.), str. 119.
- [183] L. Savushkin, *Relativistic nuclear shell model* (Publishing Department of B. P. Konstantinov Petersburg Nuclear Physics Institute, St. Petersburg, 2011.).

- 
- [184] C. Bloch i A. Messiah, The canonical form of an antisymmetric tensor and its application to the theory of superconductivity, *Nucl. Phys.* **39**, 95 (1962).
- [185] E. P. Wigner, ber die operation der zeitumkehr in der quantenmechanik, *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, ur. A. S. Wightman (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.), str. 213.
- [186] B. Zumino, Normal forms of complex matrices, *Journal of Mathematical Physics* **3**, 1055 (1962).
- [187] M. Bender, P.-H. Heenen i P.-G. Reinhard, Self-consistent mean-field models for nuclear structure, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 121 (2003).
- [188] T. Nikšić, D. Vretenar i P. Ring, Relativistic nuclear energy density functionals: adjusting parameters to binding energies, *Phys. Rev. C* **78**, 034318 (2008).
- [189] T. Nikšić, D. Vretenar i P. Ring, Random-phase approximation based on relativistic point-coupling models, *Phys. Rev. C* **72**, 014312 (2005).
- [190] P.-G. Reinhard, M. Rufa, J. Maruhn, W. Greiner i J. Friedrich, Nuclear ground-state properties in a relativistic Meson-Field theory, *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei* **323**, 13 (1986).
- [191] J. F. Berger, M. Girod i D. Gogny, Time-dependent quantum collective dynamics applied to nuclear fission, *Computer Physics Communications* **63**, 365 (1991).
- [192] Y. Gambhir, P. Ring i A. Thimet, Relativistic mean field theory for finite nuclei, *Annals of Physics* **198**, 132 (1990).
- [193] T. Oishi, G. Kružić i N. Paar, arXiv, 2011.04676 (2020).
- [194] G. Brown, J. Evans i D. Thouless, Vibrations of spherical nuclei, *Nuclear Physics* **24**, 1 (1961).
- [195] D. Thouless, Stability conditions and nuclear rotations in the Hartree-Fock theory, *Nuclear Physics* **21**, 225 (1960).
- [196] D. Thouless, Vibrational states of nuclei in the random phase approximation, *Nuclear Physics* **22**, 78 (1961).
- [197] H. J. Lipkin, Collective motion in many-particle systems: part 1. the violation of conservation laws, *Annals of Physics* **9**, 272 (1960).
- [198] R. E. Marshak, *Meson physics* (Dover Publications, New York, 1958.).
- [199] L. N. Savushkin, Relativistic nuclear theory—nucleons and mesons: origin, current status, and trends, *Physics of Particles and Nuclei* **46**, 859 (2015).
- [200] B. L. Birbrair, V. N. Fomenko i L. N. Savushkin, Stability of relativistic nuclear matter against pion condensation, *Journal of Physics G: Nuclear Physics* **8**, 1517 (1982).



- [201] F. Gross, J. W. Van Orden i K. Holinde, Relativistic effects in low-energy nucleon-nucleon scattering, *Phys. Rev. C* **41**, R1909 (1990).
- [202] J. F. Dawson i R. J. Furnstahl, Relativistic spectral random-phase approximation in finite nuclei, *Phys. Rev. C* **42**, 2009 (1990).
- [203] D. Vretenar, A. Wandelt i P. Ring, Isoscalar dipole mode in relativistic random phase approximation, *Physics Letters B* **487**, 334 (2000).
- [204] P. Ring, Zhong-yu Ma, N. V. Giai, D. Vretenar, A. Wandelt i Li-gang Cao, The time-dependent relativistic mean-field theory and the random phase approximation, *Nuclear Physics A* **694**, 249 (2001).
- [205] P. von Neumann-Cosel, V. Y. Ponomarev, A. Richter i J. Wambach, Gross, intermediate and fine structure of nuclear giant resonances: evidence for doorway states, *The European Physical Journal A* **55**, 224 (2019).
- [206] K. Yako, M. Sasano, K. Miki, H. Sakai, M. Dozono, D. Frekers, M. B. Greenfield, K. Hatanaka, E. Ihara, M. Kato, T. Kawabata, H. Kuboki, Y. Maeda, H. Matsubara, K. Muto, S. Noji, H. Okamura, T. H. Okabe, S. Sakaguchi, Y. Sakemi, Y. Sasamoto, K. Sekiguchi, Y. Shimizu, K. Suda, Y. Tameshige, A. Tamii, T. Uesaka, T. Wakasa i H. Zheng, Gamow-Teller strength distributions in  $^{48}\text{Sc}$  by the  $^{48}\text{Ca}(p, n)$  and  $^{48}\text{Ti}(n, p)$  reactions and two-neutrino double- $\beta$  decay nuclear matrix elements, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 012503 (2009).
- [207] J. R. Tompkins, C. W. Arnold, H. J. Karwowski, G. C. Rich, L. G. Sobotka i C. R. Howell, Measurements of the  $^{48}\text{Ca}(\gamma, n)$  reaction, *Phys. Rev. C* **84**, 044331 (2011).
- [208] T. Suzuki, Relativistic Hartree–Bogoliubov theory: static and dynamic aspects of exotic nuclear structure, *J. Phys. Colloques* **45**, 251 (1984).
- [209] K.-F. Liu, H.-D. Luo, Z. Ma, M. Feng i Q.-B. Shen, Sum rules for nuclear excitations with the Skyrme-Landau interaction, *Nuclear Physics A* **534**, 48 (1991).
- [210] F. Osterfeld, Nuclear spin and isospin excitations, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 491 (1992).
- [211] V. F. Weisskopf, Radiative transition probabilities in nuclei, *Phys. Rev.* **83**, 1073 (1951).
- [212] E. Wigner, On the Consequences of the Symmetry of the Nuclear Hamiltonian on the Spectroscopy of Nuclei, *Phys. Rev.* **51**, 106 (1937).
- [213] B. Cassen i E. U. Condon, On nuclear forces, *Phys. Rev.* **50**, 846 (1936).
- [214] P. V. I. A. Frank J. Jolie, *Symmetries in atomic nuclei* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2009.).
- [215] J. Berger, M. Girod i D. Gogny, Time-dependent quantum collective dynamics applied to nuclear fission, *Computer Physics Communications* **63**, 365 (1991).

- [216] Y. Suzuki i K. Ikeda, Cluster-orbital shell model and its application to the he isotopes, *Phys. Rev. C* **38**, 410 (1988).
- [217] T. Myo, S. Aoyama, K. Kat i K. Ikeda, Three-body Coulomb breakup of  $^{11}\text{Li}$  in the complex scaling method, *Physics Letters B* **576**, 281 (2003).
- [218] T. Myo, R. Ando i K. Kat, Five-body resonances of  $^8\text{He}$  using the complex scaling method, *Physics Letters B* **691**, 150 (2010).
- [219] D. Thompson, M. Lemere i Y. Tang, Systematic investigation of scattering problems with the resonating-group method, *Nuclear Physics A* **286**, 53 (1977).
- [220] D. I. Sober, B. C. Metsch, W. Knüpfer, G. Eulenberg, G. Kuchler, A. Richter, E. Spamer i W. Steffen, Magnetic dipole excitations in the  $N=28$  isotones  $^{50}\text{Ti}$ ,  $^{52}\text{Cr}$ , and  $^{54}\text{Fe}$ , *Phys. Rev. C* **31**, 2054 (1985).
- [221] Y. Tanimura, K. Hagino i H. Sagawa, Impurity effect of the  $\Lambda$  particle on the structure of  $^{18}\text{F}$  and  $^{19}_{\Lambda}\text{F}$ , *Phys. Rev. C* **86**, 044331 (2012).
- [222] H. Liang, P. Zhao, L. Li i J. Meng, Spin-orbit and orbit-orbit strengths for the radioactive neutron-rich doubly magic nucleus  $^{132}\text{Sn}$  in relativistic mean-field theory, *Phys. Rev. C* **83**, 011302 (2011).
- [223] H.-T. Janka, K. Langanke, A. Marek, G. Martínez-Pinedo i B. Müller, Theory of core-collapse supernovae, *Physics Reports* **442**, The Hans Bethe Centennial Volume 1906-2006, 38 (2007).
- [224] S. Goriely, A. Bauswein i H.-T. Janka, r-process nucleosynthesis in dynamically ejected matter of neutron star mergers, *The Astrophysical Journal* **738**, L32 (2011).
- [225] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, T. R. Werner, J. F. Berger, C. R. Chinn i J. Decchargé, Mean-field description of ground-state properties of drip-line nuclei: pairing and continuum effects, *Phys. Rev. C* **53**, 2809 (1996).
- [226] G. Lalazissis, D. Vretenar, W. Pöschl i P. Ring, Reduction of the spin-orbit potential in light drip-line nuclei, *Physics Letters B* **418**, 7 (1998).
- [227] J. Fujita i H. Miyazawa, Spin-Orbit Coupling in Heavy Nuclei, *Progress of Theoretical Physics* **17**, 366 (1957).
- [228] K. Andō i H. Bandō, Single-Particle Spin-Orbit Splittings in Nuclei, *Progress of Theoretical Physics* **66**, 227 (1981).
- [229] S. C. Pieper i V. R. Pandharipande, Origins of spin-orbit splitting in  $^{15}\text{N}$ , *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2541 (1993).

- [230] G. Burgunder, O. Sorlin, F. Nowacki, S. Giron, F. Hammache, M. Moukaddam, N. de Séréville, D. Beaumel, L. Cèreses, E. Clément, G. Duchêne, J. P. Ebran, B. Fernandez-Dominguez, F. Flavigny, S. Franchoo, J. Gibelin, A. Gillibert, S. Grévy, J. Guillot, A. Lepailleur, I. Matea, A. Matta, L. Nalpas, A. Obertelli, T. Otsuka, J. Pancin, A. Poves, R. Raabe, J. A. Scarpaci, I. Stefan, C. Stodel, T. Suzuki i J. C. Thomas, Experimental study of the two-body spin-orbit force in nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 042502 (2014).
- [231] A. Obertelli i T. Uesaka, Hydrogen targets for exotic-nuclei studies developed over the past 10 years, *The European Physical Journal A* **47**, 105 (2011).
- [232] S. Sakaguchi, T. Uesaka, N. Aoi, Y. Ichikawa, K. Itoh, M. Itoh, T. Kawabata, T. Kawahara, Y. Kondo, H. Kuboki, T. Nakamura, T. Nakao, Y. Nakayama, H. Sakai, Y. Sasamoto, K. Sekiguchi, T. Shimamura, Y. Shimizu i T. Wakui, Shallow and diffuse spin-orbit potential for proton elastic scattering from neutron-rich helium isotopes at 71 MeV/nucleon, *Phys. Rev. C* **87**, 021601 (2013).
- [233] R. J. Furnstahl i A. Schwenk, How should one formulate, extract and interpret ‘non-observables’ for nuclei?, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **37**, 064005 (2010).
- [234] U. Gayer, T. Beck, M. Bhide, J. Isaak, N. Pietralla, P. C. Ries, D. Savran, M. Schilling, W. Tornow i V. Werner, Experimental M1 response of  $^{40}\text{Ar}$  as a benchmark for neutrino-nucleus scattering calculations, *Phys. Rev. C* **100**, 034305 (2019).
- [235] J. Walecka, A theory of highly condensed matter, *Annals of Physics* **83**, 491 (1974).
- [236] P. G. Reinhard, The relativistic mean-field description of nuclei and nuclear dynamics, *Reports on Progress in Physics* **52**, 439 (1989).
- [237] J. Meng, H. Toki, S. Zhou, S. Zhang, W. Long i L. Geng, Relativistic continuum Hartree Bogoliubov theory for ground-state properties of exotic nuclei, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **57**, 470 (2006).
- [238] P. von Neumann-Cosel i A. Tamii, Electric and magnetic dipole modes in high-resolution inelastic proton scattering at  $0^\circ$ , *The European Physical Journal A* **55**, 110 (2019).
- [239] A. Richter, Probing the nuclear magnetic dipole response with electrons, photons and hadrons, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **34**, Electromagnetic Probes and the Structure Hadrons and Nuclei, 261 (1995).
- [240] G. K uchler, A. Richter, E. Spamer, W. Steffen i W. Kn upfer, High-resolution ( $e, e'$ ) study of isovector M1 and M2 transitions in the oxygen isotopes: (i).  $^{16}\text{O}$ , *Nucl. Phys. A* **406**, 473 (1983).

- 
- [241] S. Müller, F. Beck, D. Meuer i A. Richter, Statistical analysis of high-resolution inelastic electron scattering spectra, level densities and missing magnetic quadrupole strength in  $^{90}\text{Zr}$ , *Phys. Lett. B* **113**, 362 (1982).
- [242] D. Meuer, R. Frey, D. Hoffmann, A. Richter, E. Spamer, O. Titze i W. Knüpfner, High resolution inelastic electron scattering on  $^{90}\text{Zr}$  at low momentum transfer and strong fragmentation of the magnetic quadrupole strength, *Nucl. Phys. A* **349**, 309 (1980).
- [243] J. J. Li, J. Margueron, W. H. Long i N. V. Giai, Magicity of neutron-rich nuclei within relativistic self-consistent approaches, *Physics Letters B* **753**, 97 (2016).
- [244] A. Richter, A. Weiss, O. Häusser i B. A. Brown, New evidence for meson-exchange-current enhancement of isovector M1 strength, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2519 (1990).
- [245] L. E. Marcucci, M. Pervin, S. C. Pieper, R. Schiavilla i R. B. Wiringa, Quantum monte carlo calculations of magnetic moments and M1 transitions in  $A \leq 7$  nuclei including meson-exchange currents, *Phys. Rev. C* **78**, 065501 (2008).
- [246] S. Moraghe, J. Amaro, C. García-Recio i A. Lallena, Meson-exchange current effects in inelastic electron scattering from polarized nuclei, *Nuclear Physics A* **576**, 553 (1994).
- [247] C. Simenel, B. Avez i D. Lacroix, arXiv, 0806.2714 (2008).
- [248] G. Kružić, T. Oishi, D. Vale i N. Paar, Magnetic dipole excitations based on the relativistic nuclear energy density functional, *Phys. Rev. C* **102**, 044315 (2020).
- [249] A. de Shalit, *Nuclear shell theory* (Academic Press, 2013.).
- [250] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics* (Oxford University Press, U.S.A., 1958.).

# Popis slika

1.1	Shematski prikaz $V_{NN}(r)$ nukleon-nukleon potencijala s izmjenom mezona u ovisnosti o udaljenosti [183]. . . . .	11
1.2	Shematski prikaz spektra rješenja Diracove jednadžbe u centralnom potencijalu. Pri tome je $\epsilon_F$ energija Fermijeve plohe, $m_{0N}$ masa nukleona, a $\epsilon_{j\check{c}}$ jednočestična energija nukleona u centralnom potencijalu. . . . .	18
3.1	M1 funkcija odziva za jezgru $^{208}\text{Pb}$ . Rezultat je dobiven u okviru RRPA parametrizirane DD-PC1 funkcionalom za: $R_{\text{M1}}(E)$ -ukupnu, $R_{\text{M1}}^{(IS)}(E)$ -izoskalarnu i $R_{\text{M1}}^{(IV)}(E)$ -izovektorsku funkciju odziva. Neperturbirani odziv na Hartree razini također je prikazan. . . . .	42
3.2	Isto kao na slici 3.1, ali sa $R_{\text{M1}}(E)$ -ukupnom, $R_{\text{M1}}^{\sigma}(E)$ -spinskom i $R_{\text{M1}}^{\ell}(E)$ -orbitalnom funkcijom odziva. Neperturbirani Hartree odziv je također prikazan. . . . .	44
3.3	Isto kao na slici 3.1, ali za $^{48}\text{Ca}$ . . . . .	46
3.4	Isto kao na slici 3.2, ali za $^{48}\text{Ca}$ . Spinska i ukupna funkcija odziva koincidiraju. . . . .	47
3.5	Distribucija M1 snage prijelaza za $^{18}\text{O}$ (gornji panel) i $^{42}\text{Ca}$ (donji panel) u okviru RRPA proračuna sa DD-PC1 parametrizacijom. Za usporedbu su prikazani rezultati u modelu tri-tijela bez korelacija sparivanja iz ref. [29]. . . . .	48
3.6	M1 ( $0^+ \rightarrow 1^+$ ) funkcija odziva $R_{\text{M1}}(E)$ za izotope $^{36-64}\text{Ca}$ . Rezultati sa DD-PC1 parametrizacijom RNEDF funkcionala i Gogny-D1S parametrizacijom čestično-čestičnih korelacija sparivanja (puna linija) i bez korelacija sparivanja (isprekidana linija). . . . .	50
3.7	Suma M1-snage prijelaza za lanac izotopa Ca sa (puna linija) i bez (isprekidana linija) korelacija sparivanja. . . . .	52
3.8	Suma M1-snage prijelaza za izotopni lanac Ca. Razlika M1 snage prijelaza RHB odziva i punog RQRPA računa posljedica je rezidualne interakcije. . . . .	52
3.9	M1 ( $0^+ \rightarrow 1^+$ ) funkcija odziva $R_{\text{M1}}(E)$ za $N = 20$ izotonski lanac. Rezultati s DD-PC1 parametrizacijom RNEDF funkcionala i Gogny-D1S parametrizacijom korelacija sparivanja (puna linija) i bez korelacija sparivanja (isprekidana linija). . . . .	54

3.10	Suma M1-snage prijelaza izotonskog lanca ( $Z = 20$ ), sa i bez korelacija sparivanja. . . . .	55
3.11	Suma M1-snage prijelaza izotonskog lanca ( $Z = 20$ ), za RHB odziv i puni RQRPA izračun. . . . .	55
3.12	M1 ( $0^+ \rightarrow 1^+$ ) funkcija odziva za izotope $^{100-140}\text{Sn}$ , $R_{\text{M1}}(E)$ . Rezultati s DD-PC1 parametrizacijom RNEDF funkcionala i Gogny-D1S parametrizacijom korelacija sparivanja. . . . .	56
3.13	Suma M1-snage prijelaza za $^{100-140}\text{Sn}$ izotopni lanac. . . . .	57
3.14	Parcijalne snage prijelaza $B_{\text{M1}}(E)$ na dominantnim vrhovima funkcije odziva $R_{\text{M1}}(E)$ prikazanim na slikama 3.12 na nižoj $E_{<}^{vrh}$ odnosno višoj $E_{>}^{vrh}$ energiji u izotopnom lancu $^{100-140}\text{Sn}$ . . . . .	57
3.15	Doprinosi parcijalnoj snazi prijelaza $b_{ph}^{\pi(\nu)}(E)$ za protone ( $\pi$ ) i neutrone ( $\nu$ ) na dominantnim vrhovima funkcije odziva $R_{\text{M1}}(E)$ sa slike 3.12 na vrhovima niže $E_{<}^{vrh}$ (panel gore) odnosno više $E_{>}^{vrh}$ (panel dolje) energije u izotopnom lancu $^{100-140}\text{Sn}$ . . . . .	58
3.16	RHB+RQRPA odziv jezgre $^{42}\text{Ca}$ za M1 prijelaze s DD-PC1 parametrizacijom energijskog funkcionala gustoće i Gogny interakcijom sparivanja. Funkcija odziva bez (RRPA) i sa (RQRPA) korelacijama sparivanja pokazane su zasebno, kao i rezultati za dvije varijante interakcije sparivanja, D1S i S1P. . . . .	67
3.17	Isto kao na slici 3.16 ali za $^{50}\text{Ti}$ . . . . .	68
3.18	Gogny $V_{pp}(d)$ čestično-čestični potencijal sparivanja za dvije različite, D1S [215] i S1P [193] parametrizacije, u ovisnosti o udaljenosti između nukleona $d =  \vec{r}_2 - \vec{r}_1 $ . Prikazane su konfiguracije izo-triplet ( $T_{12} = 1$ ) u izospinskom te spin-singlet ( $S_{12} = 0$ ) i spin-triplet ( $S_{12} = 1$ ) u prostoru spina dva nukleona. . . . .	69
3.19	M1-energije pobuđenja izotopa Ca i odgovarajući spin-orbit rascjep. Proračun je temeljen na RHB+RQRPA modelu s DD-PC1 parametrizacijom energijskog funkcionala i D1S interakcijom sparivanja nukleona. Kvantni brojevi ( $nlj$ ) spin-orbit partnera označeni su na svakom grafu. . . . .	73
3.20	Isto kao i slika 3.19 ali bez korelacija sparivanja uključenih u modelu. . . . .	73
3.21	Isto kao na slici 3.19 ali za izotopni lanac $^{100-140}\text{Sn}$ . . . . .	74
3.22	M2 funkcija odziva za jezgru $^{16}\text{O}$ temeljena na RRPA proračunu s DD-PC1 parametrizacijom funkcionala: $R_{\text{M1}}(E)$ -ukupna, $R_{\text{M1}}^{(IS)}(E)$ - izoskalarna i $R_{\text{M1}}^{(IV)}(E)$ -izovektorska funkcija odziva sa energijom centroida pune funkcije odziva $\bar{E}^{teor.} = 16.55$ MeV. Hartree razina odziva također je prikazana. . . . .	77
3.23	$B_{\text{M2}}^{(IV)}(E)$ - izovektorska snaga prijelaza za jezgru $^{16}\text{O}$ s centroidom $\bar{E}^{teor.} = 16.46$ MeV dobivena RRPA proračunom s DD-PC1 parametrizacijom funkcionala. . . . .	77

3.24	Isto kao slika 3.22 ali sa $R_{M2}(E)$ - ukupnom, $R_{M2}^{\sigma}(E)$ -spinskom i $R_{M2}^{\ell}(E)$ -orbitalnom funkcijom odziva za jezgru $^{16}\text{O}$ . Neperturbirani odziv na Hartree razini također je prikazan. . . . .	78
3.25	Isto kao na slici 3.22 ali za jezgru $^{48}\text{Ca}$ . Centroid energije iznosi $\bar{E}^{teor.} = 15.48$ MeV. . . . .	79
3.26	Isto kao na slici 3.23 ali za jezgru $^{48}\text{Ca}$ sa centroidom energije $\bar{E}^{teor.} = 15.44$ MeV. . . . .	80
3.27	Isto kao na slici 3.24 ali za jezgru $^{48}\text{Ca}$ . . . . .	80
3.28	Isto kao na slici 3.22 ali za jezgru $^{208}\text{Pb}$ . Energija centroida iznosi $\bar{E}^{teor.} = 11.87$ MeV. . . . .	81
3.29	Isto kao na slici 3.23 ali za jezgru $^{208}\text{Pb}$ . Energija centroida iznosi $\bar{E}^{teor.} = 11.63$ MeV. . . . .	81
3.30	Isto kao na slici 3.24 ali za jezgru $^{208}\text{Pb}$ . . . . .	82
3.31	RHB+RQRPA $R_{M2}(E)$ - ukupna funkcija odziva M2 prijelaza za jezgru $^{18}\text{O}$ s DD-PC1 parametrizacijom energijskog funkcionala i D1S-Gogny interakcijom sparivanja. Funkcija odziva bez (RRPA) i sa korelacijama sparivanja (RQRPA) pokazane su zasebno. . . . .	92
3.32	RHB+RQRPA diskretan spektar izovektorske snage prijelaza $B_{M2}^{(IV)}(E)$ za jezgru $^{18}\text{O}$ . . . . .	92
3.33	Isto kao na slici 3.31 ali za jezgru $^{42}\text{Ca}$ . . . . .	93
3.34	Isto kao na slici 3.32 ali za jezgru $^{42}\text{Ca}$ . . . . .	93
3.35	Isto kao na slici 3.31 ali za jezgru $^{56}\text{Fe}$ . . . . .	94
3.36	Isto kao na slici 3.32 ali za jezgru $^{56}\text{Fe}$ . . . . .	94
3.37	Isto kao na slici 3.31 ali za jezgru $^{90}\text{Zr}$ . . . . .	95
3.38	Isto kao na slici 3.32 ali za jezgru $^{90}\text{Zr}$ . . . . .	95
C.1	Standardna devijacija odstupanja centroida energije od energije dominantnih vrhova u eksperimentalno određenim funkcijama odziva za jezgre $^{48}\text{Ca}$ [37] i $^{208}\text{Pb}$ [37, 38] kao funkcija koeficijenta vezanja izovektorske-pseudovektorske kontaktne interakcije. Minimum standardne devijacije nalazi se na vrijednosti parametra $\alpha_{IV-PV} = 0.53$ MeV fm <sup>3</sup> . . . . .	130
J.1	Parametrizacija rotacija $R_{\hat{n}}(\delta\phi)$ oko osi $\vec{n}$ za infinitezimalni kut $\delta\phi$ . . . . .	172

# Životopis

## *Datum rođenja:*

13.02.1973., Bjelovar, Hrvatska.

## *Obrazovanje:*

1981.-1988., Osnovna škola Veliko Trojstvo, Veliko Trojstvo, Hrvatska.

1986.-1988., osnovna glazbena škola V. Lisinski, Bjelovar, Hrvatska.

1988.-1992., srednja glazbena škola V. Lisinski, Bjelovar, Hrvatska,  
1992., glazbenik trubač.

1988.-1992., Tehnička škola Bjelovar, Bjelovar, Hrvatska,  
1992., elektrotehničar, elektroničar, usmjerenje automatika.

1992.-2000., Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska  
04.2000., istraživački smjer, dipl.ing. fizike (sada mag.phys.).

Diplomski rad: „Gustoća stanja do visokih energija u teorijskom modelu  $^{102}\text{Rh}$ ”,

mentor: akademik Vladimir Paar.

Dodiplomski studij stipendiran je od strane hrvatskog dijela Nuklearne elektrane Krško, Slovenija.

04.-09.2005., Frankfurt International Graduate School for Science (FIGSS),  
Frankfurt institute for Advanced studies (FIAS), Frankfurt, Njemačka.

2011.-2021., Poslijediplomski doktorski studij fizike, teorijska nuklearna fizika,  
Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, Hrvatska.

## *Sudjelovanje u Domovinskom ratu:*

1991.-1992., Oružane snage Republike Hrvatske,

1994., odlikovan Spomenicom Domovinskog rata 1990.-1992.,

1996., dodijeljena je Zahvalnica za doprinos Domovinskom ratu.



*Radno iskustvo:*

2000.- 11.2000., Tehnička škola Bjelovar, Bjelovar, Hrvatska.

2000.-2004., Siemens d.d., Zagreb, Hrvatska.

2004.-2005., GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung, Darmstadt, Njemačka,  
studija izvedivosti: „J/ψ detection via electron-positron decay in  
Compressed Baryonic Matter (CBM) experiment”.

Boravak, na poziv CBM projekta, i istraživanje stipendirano je  
od strane instituta Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI),  
Darmstadt, Njemačka.

2005. - do sada, Ericsson-Nikola Tesla d.d., Zagreb, Hrvatska.

*Jezici:*

Hrvatski jezik-materinji jezik.

Njemački jezik-VII stupanj, Škola za strane jezike Class, Zagreb.

Engleski jezik-VIII stupanj, Centar za strane jezike d.d., Vodnikova 12, Zagreb.

*Popis publikacija u znanstvenim časopisima:*

1. G. Kružić, T. Oishi, D. Vale, i N. Paar, "Magnetic dipole excitations based on the relativistic nuclear energy density functional", Phys. Rev. C 102, 044315 (2020).
2. T. Oishi, G. Kružić i N. Paar, "Role of residual interaction in the relativistic description of M1 excitation", J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 47 115106 (2020).

*U postupku objave:*

1. G. Kružić, T. Oishi i N. Paar, "The evolution of magnetic dipole strength in  $^{100-140}\text{Sn}$  isotope chain and quenching of nucleon g factors", arXiv:2012.01622 (2020).
2. T. Oishi, G. Kružić i N. Paar, "Discerning nuclear pairing properties from magnetic dipole excitation", arXiv:2011.04676 (2020).

*Publikacije u zbornicima međunarodnih konferencija:*

1. T. Oishi, G. Kružić i N. Paar, "Relativistic nuclear energy density functional approach to magnetic-dipole excitation", J. Phys.: Conf. Ser. 1643 012153 (2020).
2. G. Kružić, "Simulation of J/ψ detection via electron-positron decay", 6<sup>th</sup> Austrian-Croatian-Hungarian meeting "Nonabelian gauge theories and quark matter", Rab, Croatia (2013).

*Poster:*

1. G. Kružić, E. Bratkovskaya, R. Čaplar, P. Senger, "Production and decay of charmonium in dense nuclear matter", Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Physik seit Einstein, Berlin (2005).