

# Difrakcijska produkcija fotona u visoko energetske proton-jezgra sudarima

---

Jakelić, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:112645>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-02**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Marija Jakelić

Difrakcijska produkcija fotona u visoko  
energetskim proton-jezgra sudarima

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Marija Jakelić**

Diplomski rad

**Difrakcijska produkcija fotona u  
visoko energetske proton-jezgra  
sudarima**

Voditelj diplomskog rada: doc.dr.sc Sanjin Benić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2021.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Sanjinu Beniću na pomoći  
prilikom izrade ovoga rada.

## Sažetak

U ovom radu promatramo produkciju fotona u visoko-energijskim proton-jezgra ( $pA$ ) sudarima. Proučava se dvostruko-difrakcijski proces u kojemu i projektil i meta preživljavaju sudar. Pritom smo pretpostavili da je gustoća naboja boje jezgre dovoljno velika da je možemo opisati efektivnom teorijom staklastog kondenzata boje, dok se proton tretira kao smetnja. Eksplicitno je izračunata amplituda za ovaj proces u najnižem redu razvoja po gustoći naboja boje unutar protona te je pronađeno da je ovaj proces osjetljiv na tzv. oderon komponentu valne funkcije jezgre.

Ključne riječi: staklasti kondenzat boje, difrakcija, pomeron, oderon

# Diffraction production of photons in high energy proton-nucleus collision

## Abstract

This thesis explores the production of photons in high-energy proton-nucleus ( $pA$ ) collisions. More specifically, it examines the double diffraction collision in which both the projectile and the target survive the collision. It is assumed that the charge density of the nucleus colour is high enough for it to be described by the effective theory of the colour glass condensate, while the proton is considered a hindrance. In this thesis, the amplitude for this process in the lowest order of perturbation theory is explicitly calculated by the color charge density within the proton, and the process is sensitive to so-called odderon component of the nucleus wave function.

Keywords: colour glass condensate, diffraction, pomeron, odderon

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kvantna kromodinamika</b>	<b>3</b>
2.1	Langranžijan QCD-a . . . . .	3
2.2	Asimptotska sloboda . . . . .	4
2.3	Zatočenje boje . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Struktura hadrona</b>	<b>7</b>
3.1	Duboko neelastično raspršenje . . . . .	7
3.2	Partonske distribucijske funkcije . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Staklasti kondenzat boje-CGC</b>	<b>11</b>
4.1	Postavke modela . . . . .	11
4.2	Efektivna teorija CGC-a . . . . .	14
4.3	Funkcional $W_{\Lambda^+}[\rho]$ . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Polje jezgre i protona</b>	<b>16</b>
5.1	Yang-Millsova jednađba . . . . .	16
5.2	Polje jezgre $\mathcal{A}_{(0)}$ . . . . .	17
5.3	Polje $\mathcal{A}_{(1)}$ . . . . .	19
5.4	Polje $\mathcal{A}_{(2)}$ . . . . .	22
5.5	Kvarkovski propagator u polju jezgre $\mathcal{A}_0$ . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Pomeron i oderon</b>	<b>28</b>
6.1	Nabojna konjugacija . . . . .	28
6.2	Pomeron i oderon - definicije . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Proces <math>p+A \rightarrow p+A+\gamma</math></b>	<b>31</b>
7.1	Amplituda . . . . .	31
7.2	Oderon u amplitudi . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Zaključak</b>	<b>51</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>53</b>





# 1 Uvod

Kvantna kromodinamika (Quantum chromodynamics ili QCD) jedna je od tri interakcije čiji je opis dan standardnim modelom. Ona opisuje jaku silu, odnosno interakciju između kvarkova i gluona. Kvarkovi su čestice spina  $1/2$  i dijelimo ih u tri generacije ovisno o njihovoj masi. Prvu generaciju čine  $u$  i  $d$  kvark, drugu  $s$  i  $c$ , dok se u trećoj nalaze  $t$  i  $b$  kvark. Gluoni su bezmasene čestice spina  $1$  i igraju ulogu prijenosnika sile. Kvarkovi i gluoni posjeduju naboj boje, analogon električnom naboju. Njihovu dinamiku određuje baždarna  $SU(3)$  simetrija. QCD ima dosta sličnosti s još jednom teorijom u standardnom modelu, a to je kvantna elektrodinamika (Quantum electrodynamics ili QED). QED je  $U(1)$  baždarna teorija koja opisuje elektromagnetske interakcije. Prijenosnik je bezmaseni bozon foton koji može interagirati s električki nabijenim fermionima (kvarkovima i leptonima). Najznačajnija razlika između QED-a i QCD-a je da sami gluoni posjeduju naboj boje, te stoga osim s kvarkovima mogu međudjelovati i međusobno. Jedna od najvećih nepoznanica QCD-a je činjenica da čestice koje nose naboj boje, kvarkovi i gluoni, ne postoje kao slobodne čestice, već formiraju vezana hadronska stanja koji su singleti u boji. Ovaj fenomen naziva se hipoteza zatočenja.

U ovome radu proučavamo još jednu nepoznanicu teorije, interakciju hadrona na visokim energijama. Naime, povećavanjem energije sudara s račun smetnje pokazuje da okupacijski broj gluona koji se izrači unutar hadrona postaje jako veliki, u tolikoj mjeri da udarni presjek nije u skladu s unitarnošću teorije. Stoga se pretpostavlja, da kada okupacijski broj gluona postane reda  $\mathcal{O}(1/\alpha_s)$  nelinearni efekti, procesi gluonske rekombinacije  $gg \rightarrow g$  dolaze do izražaja i zaustavljaju rast gluonskih distribucijskih funkcija. Ovaj fenomen nazivamo saturacijom i njegov opis daje teorija koju nazivamo staklasti kondenzat boje ("Colour Glass Condensate" ili CGC). U ovom modelu gluoni koji nose jako mali udio impulsa hadrona  $x$ , zbog velikog okupacijskog broja, opisani su klasičnim poljem boje. Oni su rješenje klasične Yang-Millsove jednadžbe u kojoj ulogu izvora imaju partoni s velikim udiom impulsa hadrona  $x$ .

U kontekstu CGC-a promatrati ćemo pomeron i oderon, odnosno izmjenu parnog i neparnog broja gluona, respektivno. U najnižem redu računa smetnje pomeron je predstavljen izmjenom dva gluona i njegov C-paritet iznosi  $+1$ , dok oderon predstavlja izmjena tri gluona i ima C-paritet jednak  $-1$ . Pomeron i oderon su kvazičestice s

kvantnim brojevima vakuuma. Njihovu izmjenu očekujemo u sudarima gdje ili nema produkcije čestica, npr. elastični sudari  $ep \rightarrow ep$  ili  $pp \rightarrow pp$ , ili u difrakcijskim sudarima gdje se javlja procjep u faznom prostoru između produciranih čestica i mete.

Pomeron je nazvan u čast Isaaka Pomeranchuka. On je 1958. godine (prije otkrića kvarkova i gluona) pokazao da je razlika u udarnim presjecima  $\Delta\sigma = \sigma^{pp} - \sigma^{p\bar{p}}$  između procesa  $pp \rightarrow pp$  i  $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$  na visokim energijama  $\Delta\sigma \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ . Ovaj rezultat poznat je kao Pomeranchukov teorem. Lukaszuka i Nicolescu 1973. godine uvode oderon kao mogući izvor razlike u  $pp$  i  $p\bar{p}$  udarnim presjecima.

U ovome radu nas zanima specijalan slučaj tzv. perturbativnog pomerona i oderona, za koje se predpostavlja da opisuju strukturu difrakcijskih raspršenja na visokim energijama. Npr. perturbativni pomeron dobro opisuje difrakcijsku produkciju  $J_\psi$  ili fotona u  $ep$  sudarima dok se za oderon još uvijek čeka eksperimentalna potvrda. U svrhu nalaženja eksperimentalnog dokaza za oderon promatraju se procesi u kojima je njegova izmjena jedini doprinos udarnom presjeku. Tipičan primjer takvog procesa je difrakcijska produkcija pseudoskalarnih mezona u visokoenergijskim elektron-proton ( $ep$ ) sudarima. Izmjena oderona se argumentira promatranjem C-pariteta. C-paritet pseudoskalarnih mezona je  $+1$ , dok je paritet fotona  $-1$ , zbog čega proton također mora imati C-paritet  $-1$ . S jednakom motivacijom, u ovom radu promatramo produkciju fotona u dvostruko-difrakcijskim proton-jezgra ( $pA$ ) sudarima. Kako je C-paritet fotona  $-1$ , paritet protona ili jezgre mora biti  $-1$ , što vodi na izmjenu oderona.

Struktura ovoga rada je sljedeća. U prvom poglavlju dajemo kratki pregled teorije jakih interakcija, QCD-a. U drugom poglavlju prisjećamo se duboko neelastičnog raspršenja i partonskih distribucijskih funkcija. U trećem i četvrtom poglavlju opisujemo efektivnu teoriju CGC-a i rješavamo Yang-Millsovu jednadžbu iterativnom metodom, respektivno. Zatim uvodimo definicije pomerona i oderona. Na kraju promatramo produkciju fotona u dvostruko difrakcijskom  $pA$  sudaru i dobivamo da u amplitudi vjerojatnosti procesa imamo doprinose oderona i pomerona.

## 2 Kvantna kromodinamika

### 2.1 Langranžijan QCD-a

QCD je  $SU(N_c = 3)$  Yang-Millsova baždarna teorija koja opisuje interakcije kvarkova i gluona. Njena gustoća langranžijana zadana je s:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f^j [i\gamma^\mu D_\mu - m_f]^{jk} \psi_f^k - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

gdje su  $\psi_f$  i  $\bar{\psi}_f$  spinorska polja kvarka i antikvarka okusa  $f$  i mase  $m_f$ , respektivno. Sa slijepim indeksima  $j$  i  $k$  u (2.1) označavamo očuvani naboj QCD-a koji nazivamo boja. Kvarkovi mogu nositi tri boje: crvenu ("red"), plavu ("blue") i plavu ("green"), tj.  $j,k=1,2,3$ . U fundamentalnoj reprezentaciji  $SU(3)$  grupe prikazujemo ga kao vektor:

$$\Psi_f = \begin{bmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Operator  $D_\mu$  je kovarijantna derivacija, koju uvodimo zahtjevom na baždarnu invarijantnost teorije i definiramo u fundamentalnoj reprezentaciji, s:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \quad (2.3)$$

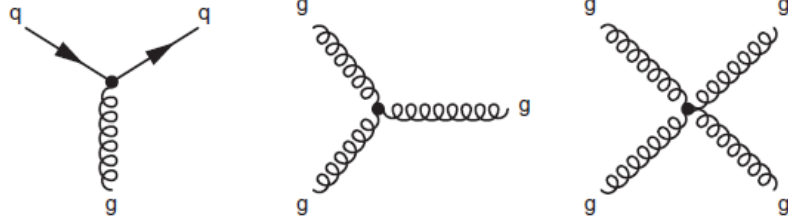
gdje je  $a=1,\dots,8$ , a  $T^a$  generatori  $SU(3)$  grupe (Dodatak A) koji zadovoljavaju komutacijsku relaciju:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \quad (2.4)$$

gdje su  $f^{abc}$  antisimetrične i realne strukturne konstante. U fundamentalnoj reprezentaciji, zadajemo ih s pomoću Gell-Mannovih matrica  $\lambda^a$  kao  $T^a = \lambda^a/2$ . S  $A^\mu = A_a^\mu T_a$  označavamo polje gluona koje je vezano s kvarkovima kroz konstantu  $g$ , lijeva strana slike (2.1).

Veličinu  $F_a^{\mu\nu}$  nazivamo tenzorom jakosti gluonskog polja:

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - gf_{abc} A_b^\mu A_c^\nu. \quad (2.5)$$



Slika 2.1: Interakcije u kvantnoj kromodinamici. Feynmanova pravila nalaze se u [17].

Trag njegovog kvadrata čini Yang-Mills dio langranžijana:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

U posljednjem izrazu, s obzirom na to da generatori grupe međusobno ne komutiraju, pojavljuju se članovi  $\propto A^2 \partial A, A^4$  koji opisuju gluonske samointerakcije prikazane na desnoj strani slike (2.1).

## 2.2 Asimptotska sloboda

Frank Wilczek, David Gross i David Politzer 1973. godine neovisno pokazuju da konstanta vezanja QCD-a  $\alpha_s = g^2/4\pi$  nije konstanta već ovisi o energijskoj skali na kojoj se proces odvija ili promatra. Funkcionalna ovisnost renormaliziranog vezanja o energijskoj skali do na jednu dijagramsku petlju (do drugog reda u računu smetnje) izgleda kao [17]:

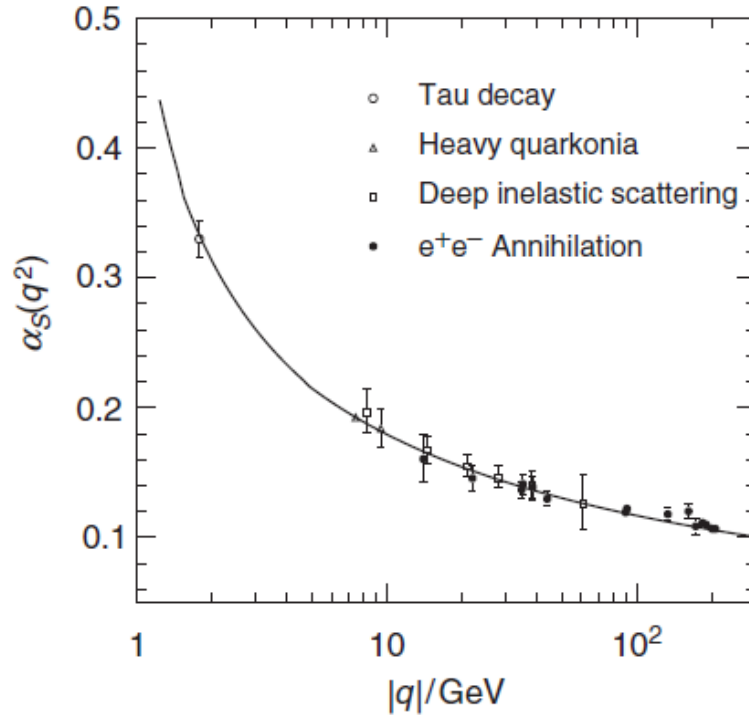
$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + B\alpha_s(\mu^2) \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)}, \quad (2.7)$$

gdje je  $q^2 = \mu^2$  skala na kojoj vršimo mjerenje, dok B ovisi o broju fermionskih i bozonskih petlji. Za  $N_c$  boja i  $N_f$  kvarkovskih okusa imamo [17]:

$$B = \frac{11N_c - 2N_f}{12\pi}. \quad (2.8)$$

Za  $N_c = 3$  i  $N_f \leq 6$ , B je veće od nule te konstanta  $\alpha_s$  opada s rastućim prijenosom impulsa  $q^2$  kao što je prikazano na slici (2.2).

Na energijama  $|q| \sim 1$  Gev vrijednost  $\alpha_s$  postaje  $\mathcal{O}(1)$ . U ovom režimu ne možemo



Slika 2.2: Ovisnost konstante vezanja  $\alpha_s$  o različitim skalama  $|q|$  [17]

primjeniti račun smetnje, već se koriste efektivni modeli i numerički računi. S druge strane na većim energijama kvarkove unutar protona možemo promatrati kao slobodne čestice. Ovo svojstvo QCD-a nazivamo asimptotska sloboda.

### 2.3 Zatočenje boje

Jedan od neriješenih problema QCD-a je da fizikalni objekt može propagirati samo ako je singlet u prostoru boje, odnosno ako je "bezbojan". Čestice koje nose boju, kvarkovi i gluoni, nikada nisu primjećeni samostalno, već se kombiniraju u vezana bezbojna hadronska stanja.

Trenutno ne postoji analitički dokaz koncepta zatočenja boje, ali može se postići kvalitativno razumijevanje promatranjem procesa razdvajanja dvaju slobodnih kvarkova. Njihovu interakciju opisujemo izmjenom virtualnih gluona. Gluoni nose boju i mogu samointeragirati, kao što je prikazano na slici (2.1). Njihova samointerakcija uzrokuje kontrakciju silnica između kvarkova u oblik tube. Na relativno velikim udaljenostima gustoća energije u tubi između dva kvarka je konstantna. Energija pohranjena u polju proporcionalna je udaljenosti kvarkova, što daje potencijal oblika:

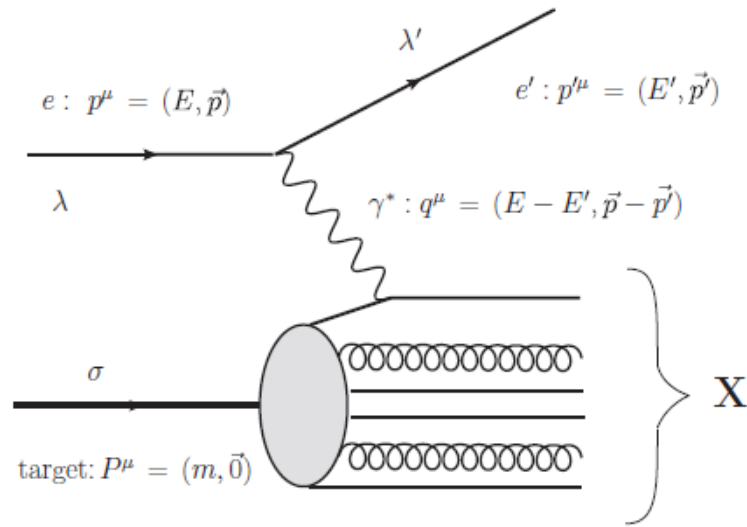
$$V(r) \sim \kappa r, \quad (2.9)$$

gdje eksperimentalno određena vrijednost konstante iznosi  $\kappa \sim 1 \text{ GeV/fm}$ . Što više razdvajamo kvarkove, energija u gluonskom polju postaje sve veća i u jednom trenutku ona postane veća od energije mase para kvark-antikvark. Tada je povoljnije proizvesti par kvark-antikvark i reducirati energiju u gluonskom polju. Kao rezultat dobivamo dva mezona nastala razdvajanjem dva kvarka. Posljedica zatočenja boje je opažanje kvarkova u obliku hadronskih mlazova nastalih procesom koji nazivamo hadronizacija.

### 3 Struktura hadrona

#### 3.1 Duboko neelastično raspršenje

Primjer raspršenja s pomoću kojeg možemo dobiti uvid u strukturu hadrona je duboko neelastično raspršenje ("deep inelastic scattering" ili DIS). Projektil je najčešće elektron koji izmjenjuje foton s hadronskom metom. Shematski prikaz procesa u kojemu je meta proton prikazan je na slici (3.1). Proces promatramo u sustavu u



Slika 3.1: Neelastično raspršenje između elektrona i hadrona (protona) [9]

kojemu proton miruje. Njegov četveroimpuls je  $P^\mu = (m, \vec{0})$ , gdje je  $m$  masa protona. Četveroimpuls ulaznog elektrona označavamo s  $p^\mu = (E, \vec{p})$ , dok izlaznom pripisujemo vrijednost  $p'^\mu = (E', \vec{p}')$ . Stoga za vrijednost četveroimpulsa izmijenjenog fotona vrijedi:  $q^\mu = p^\mu - p'^\mu$ . Parametri s pomoću kojih opisujemo dinamiku DIS-a su: energija u sustavu centra impulsa  $s$ , kvadrat četveroimpulsa izmijenjenog fotona  $Q^2 = -q^2$ , neelastičnost  $y$  i Bjorkenov  $x_B$ . U sustavu mirovanja hadrona, neelastičnost  $y$  interpretiramo kao omjer energije fotona u odnosu na ulaznu energiju elektrona:

$$y = \frac{E - E'}{E}. \quad (3.1)$$

Bjorkenov  $x_B$  opisuje udio impulsa hadrona koju posjeduje parton koji je interagirao s fotonom. Definiran je s:

$$x_B \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q} \quad (3.2)$$

Navedeni parametri međusobno su povezani relacijom:

$$x_{By} = \frac{Q^2}{s}. \quad (3.3)$$

Eksperimentalno mjeriva veličina, diferencijalni udarni presjek za proces prikazan na slici (3.1), prema [17] glasi:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha}{Q^4} \left[ \left( 1 - y - \frac{m_p^2 y^2}{Q^2} \right) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x, Q^2) \right], \quad (3.4)$$

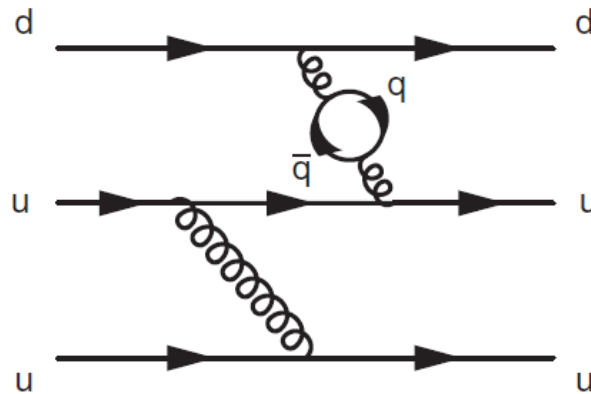
pritom su  $F_1(x, Q^2)$  i  $F_2(x, Q^2)$  strukturne funkcije protona. S  $\alpha$  označavamo konstantu vezanja QED-a,  $\alpha \approx 1/137$ . Strukturne funkcije  $F_1(x, Q^2)$  i  $F_2(x, Q^2)$  povezane su relacijom [17]:

$$F_2(x, Q^2) = 2xF_1(x, Q^2), \quad (3.5)$$

koja se naziva Callan-Grossova relacija.

### 3.2 Partonske distribucijske funkcije

U statičkom modelu proton se sastoji od dva  $u$  kvarka i jednog  $d$  kvarka. U stvarnosti on je puno kompleksnija čestica koja se sastoji od kvarkova, ali i virtualnih gluona koji mogu proizvesti par kvark-antikvark kao što je prikazano na slici (3.2): Kvarkove



Slika 3.2: Produkcija para kvark-antikvark preko virtualnih gluona [17]

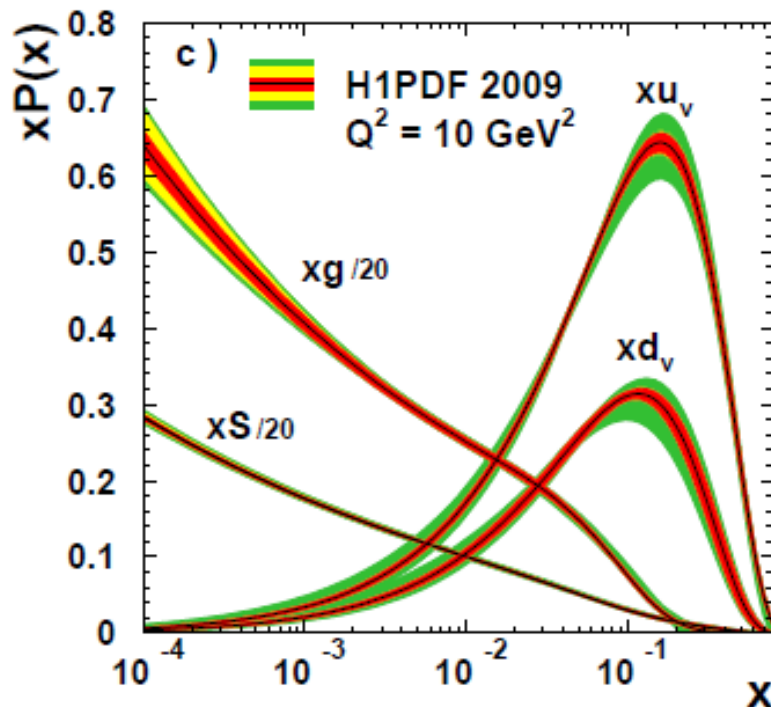
nastale produkcijom para iz virtualnih gluona nazivamo kvarkovi mora, dok su kvarkovi iz statičnog modela protona valentni kvarkovi. Budući da kvarkovi međusobno interagiraju izmjenom gluona, dinamika sistema rezultira distribucijom impulsa kvarkova i gluona unutar protona. Distribucije impulsa partona unutar protona izražene



su preko partonskih distribucijskih funkcija (PDF). Njihov funkcionalni oblik ovisi o dinamici koja nije a priori poznata. Povezane su sa strukturnim funkcijama relacijom:

$$F_2(x, Q^2) = \sum e_f^2 (xq_f(x, Q^2) + x\bar{q}_f(x, Q^2)), \quad (3.6)$$

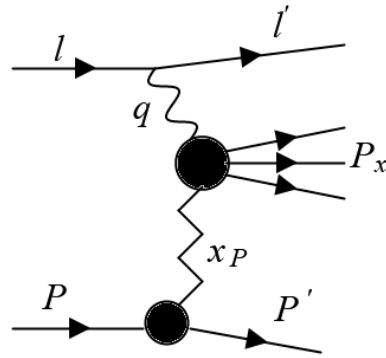
u kojoj je  $e_f^2$  električni naboj kvarka  $q_f$  okusa  $f$ . Prethodna jednačba omogućuje eksperimentalno određivanje partonskih distribucijskih funkcija. Partonske distribucijske funkcije dobivene kao rezultat inkluzivnih sudara protona i elektrona na HERA sudarivaču nalaze se na slici (3.3). U inkluzivnom procesu hadronska meta se raspada.



Slika 3.3: Partonske distribucijske funkcije, HERA DIS,  $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$  [4]

Difrakcijski proces, poput onoga prikazanog na slici (3.4), po definiciji je onaj u kojemu meta preživljava sudar. Također, karakterizira ga procjep u rapiditetu između mete i, čestice koja je proizvedena u procesu. Primjer takvoga procesa prikazan je na slici (3.4). Projektil je lepton čiji ulazni impuls označavamo s  $l$ , a izlazni s  $l'$ . Meta je proton koja ima ulazni četveroimpuls  $P$  i izlazni  $P'$ .

Interakcija između elektrona i protona odvija se izmjenom fotona i pomerona. Pri tom nastaju dodatne čestice, poput  $J_\Psi$  ili fotona. Ovi procesi poznati su pod nazivom Deeply Virtual Meson Scattering ("DVCS"), odnosno Deeply Virtual Compton Scatte-



Slika 3.4: Difrakcijsko raspršenje

ring ("DVCS").

Kinematička varijabla  $x_P$ :

$$x_P = \frac{(P - P') \cdot q}{P \cdot q}, \quad (3.7)$$

opisuje udio longitudinalnog impulsa protona koju ima pomeron. Budući da meta preživljava sudar, te s obzirom na to da je C-paritet fotona -1 a produciranog  $J_\psi$  ili fotona -1, u najnižem redu računa smetnje imamo izmjenu dva gluona.

## 4 Staklasti kondenzat boje-CGC

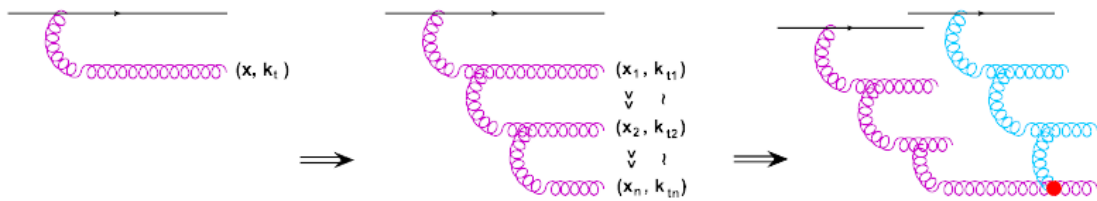
### 4.1 Postavke modela

Proton ne izgleda jednako, već ovisi o energijskoj skali na kojoj se vrši mjerenje. To možemo vidjeti iz rezultata eksperimenata provedenih na HERA sudarivaču, prikazanih na slici (3.3). Za fiksnu vrijednost neelastičnosti  $y$  u formuli (3.3) imamo dva asimptotska režima u DIS-u: Bjorkenov i Regge-Gribov limes. Bjorkenov limes opisuje slučaj u kojem  $Q^2, s \rightarrow \infty$ , a da je pritom  $x_B$  fiksna. U sustavu beskonačnog impulsa hadrona ("Infinite momentum frame"-IMF), hadron u Bjorkenovoj granici je razrijeđen sustav valentnih kvarkova, kvarkova mora i gluona. Iako je na visokim energijama, broj partona veliki hadron ostaje razrijeđen jer je efektivna veličina partona mala ( $1/Q^2 \rightarrow 0$ ). Evoluciju partonskih distribucijskih funkcija s  $\tau = \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)$  opisuju jednačbe koje nazivamo Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altareli-Parisi (DGLAP) [12].

Drugi limes, Regge-Gribov odgovara slučaju u kojem je  $Q^2$  fiksna, uz uvjet da su  $x \rightarrow 0$  i  $s \rightarrow \infty$ . Evoluciju partonskih distribucijskih funkcija promatramo s varijablom rapiditeta:

$$Y \equiv \frac{1}{x}. \quad (4.1)$$

U svrhu motivacije jednačbi koje opisuju evoluciju i uvođenja gluonske saturacije, promotrit ćemo zaključno zračenje na visokim energijama u Regge-Gribov limesu. Ono je prikazano na slici (4.1). Pritom strukturu hadrona u IMF-u karakteriziramo s longitudinalnim  $k^+$  i transverzalnim  $k_{\perp}$  distribucijama impulsa njegovih konstituenta i njihovih korelacija.



Slika 4.1: Shematska reprezentacija dijagrama relevantnih za evoluciju pri malom udjelu impulsa  $x$ : emisija jednog gluona, BFKL ljestve i gluonska rekombinacija [1]

Kada je  $x \ll 1$ , u najnižem redu po  $\alpha_s$  diferencijal vjerojatnosti  $dP_{Brem}$  za emisiju

<sup>1</sup>koordinate svjetlosnog stošca su definirane s:  $k^{\pm} = 1/\sqrt{2}(k^0 \pm k^3)$ ,  $k_{\perp} = (k_1, k_2)$

mekih gluona zadan je izrazom:

$$dP_{Brem} \simeq \frac{\alpha_s C_R}{\pi^2} \frac{d^2 k_\perp}{k_\perp^2} \frac{dx}{x}, \quad (4.2)$$

gdje je  $C_R$  Casimorov operator grupe  $SU(N_c)$ . Ako je emiter kvark on iznosi  $(N_c^2 - 1)/2N_c$ , dok je za gluon jednak  $N_c$ . Ova formula ima singularitete u  $k_\perp \rightarrow 0$  i  $x \rightarrow 0$  koji uzrokuju logaritamsku ovisnost emisije gluona. Iz (4.2) slijedi da je gluonska distribucijska funkcija, tj. broj gluona s transverzalnim impulsom  $k_\perp \leq Q$  i longitudinalnim udiom impulsa  $x$  zadan s:

$$x \frac{dN_g}{dx}(Q^2) = \frac{\alpha_s C_R}{\pi} \int_{\Lambda_{QCD}}^Q \frac{d^2 k_\perp}{k_\perp^2} = \frac{\alpha_s C_R}{\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right), \quad (4.3)$$

gdje s  $\Lambda_{QCD}$  označavamo IR granicu perturbativnog režima. Nadalje, emitirani gluoni mogu emitirati gluone kao što je prikazano na sredini slike (4.1). Ukoliko kaskadi od  $n$  gluona nametnemo poredak  $x_1 \gg x_2 \gg \dots \gg x_n$ , faktor uz posljednju emisiju ima red veličine:

$$\alpha_s^n \int \frac{dx_n}{x_n} \int \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \dots \int \frac{dx_1}{x_1} = \frac{1}{n!} \left( \alpha_s \ln \frac{1}{x} \right)^n \quad (4.4)$$

Kada je  $\alpha_s \ln(1/x) \gtrsim 1$ , moramo sumirati doprinose svih kaskada, što nam daje eksponencijalnu funkciju. Sada izraz za gluonske distribucijske funkcije (4.3), uz definiciju rapiditeta (4.1), zapisujemo kao:

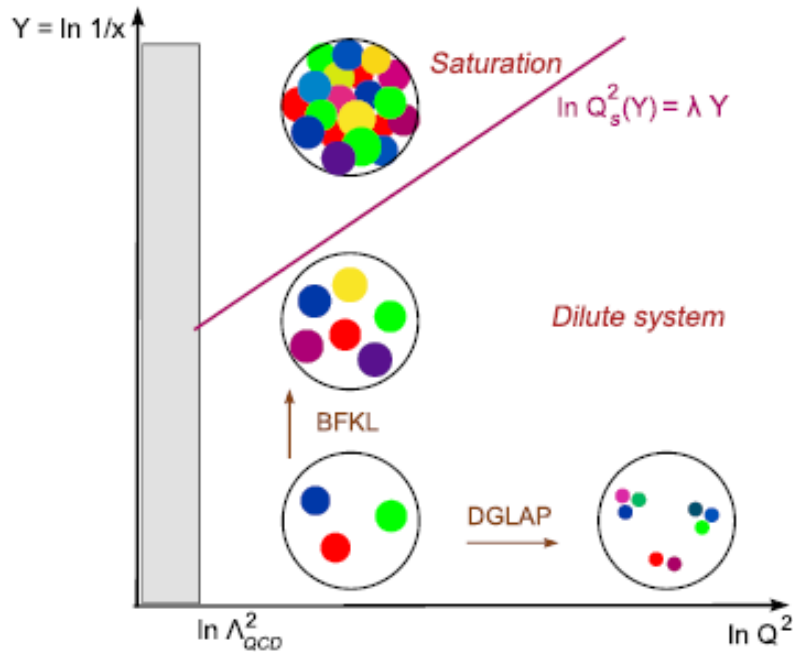
$$x \frac{dN_g}{dx dk_\perp^2} \sim \frac{\alpha_s C_R}{\pi} \frac{1}{k_\perp^2} e^{\omega \alpha_s Y}, \quad (4.5)$$

gdje s  $\omega$  označavamo broj reda jedinice koji je potrebno odrediti drugim metodama. Potpuniji tretman zahtjeva uključivanje virtualnih korekcija, kliznu konstantu veza-nja i sl. Kao rezultat takvog razmatranja dobivamo tzv. Balitski-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) jednadžbu [7]. Njeno rješenje potvrđuje eksponencijalan rast dobiven u jednadžbi (4.5) uz dodatnu ovisnost eksponenta o transverzalnom impulsu  $k_\perp$  te uključuje modifikacije spektra emitiranih gluona reda  $k_\perp^{-2}$ . Nagli porast gluonskih distribucijskih funkcija može se nazrijeti i iz slike (3.3). Taj se rast ne može nastaviti do beskonačnih vrijednosti bez kršenja unitarnosti teorije. Naime, udarni presjek ili vjerojatnost interakcije, je proporcionalana s partonskim distribucijskim funkcijama [17] te je odozgo ograničena s jedinicom, a ta granica se naziva Froissartova

granica. Rast se zaustavlja uzimanjem u obzir nelinearnog procesa rekombinacije, kao što je prikazano na desnom kraju slike (4.1). Veličina koja kontrolira gluonske interakcije u IMF-u njihov je okupacijski broj, definiran kao broj gluona po jedinici transverzalne površine faznog prostora i po jedinici rapiditeta:

$$n(Y, k_{\perp}, b_{\perp}) \equiv \frac{(2\pi)^3}{2(N_c^2 - 1)} \frac{dN_g}{dY d^2k_{\perp} db_{\perp}^2}, \quad (4.6)$$

gdje smo s  $b_{\perp}$  označili udarni parametar, tj. položaj gluona u transverzalnoj ravnini. Ako je  $n \ll 1$ , sistem je razrijeđen, što je prikazano na desnoj strani slike (4.2), i nema interakcija između gluona. Nelinearni efekti dolaze do izražaja kada je  $n \sim \mathcal{O}(1/\alpha_s)$  i tada dolazi do gluonske saturacije. Hadron tada izgleda kao gusta nakupina gluona, kako je prikazano na lijevoj strani slike (4.2). Transverzalni impuls  $k_{\perp}$  na kojem gluonski okupacijski broj postaje reda  $n \sim \mathcal{O}(1/\alpha_s)$  naziva se saturacijska skala  $Q_s$ . Pretpostavlja se da je  $Q_s \gg \Lambda_{QCD}$ , tako da možemo primjeniti račun smetnje ( $\alpha_s(Q_s) \ll 1$ ). Ovaj uvjet je svakako ispunjen za teške jezgre, ali i za proton na dovoljno visokim energijama.



Slika 4.2: Fazni dijagram kvantne kromodinamike. Obojene točke predstavljaju parton longitudinalnog impulsa  $k^+ = xP^+$  i transverzalne površine  $\delta S_{\perp} \sim 1/Q^2$  [4]

Efekt saturacije dodatno je pojačan ako uzmemo jezgru s atomskim brojem  $A \gg 1$ . Naime, transverzalna površina proporcionalana je s  $A^{2/3}$ . Stoga iako je saturacija

univerzalna pojava za hadrone, za jezgre s  $A \gg 1$  nelinearni efekti pojavljuju se na većim vrijednostima  $x$ -a u odnosu na proton.

## 4.2 Efektivna teorija CGC-a

Praktično i fenomenološki najbolji opis kvantne kromodinamike u saturacijskom režimu jest staklasti kondenzat boje ("Colour Glass Condensate" ili CGC). To je efektivna teorija polja temeljena na razdvajanju stupnjeva slobode na brze izvore boje  $\rho(x)$  i spora dinamička polja boje  $\mathcal{A}_\mu$ . Skalu koja ih razdvaja zadajemo s  $\Lambda^+$ . Spori (meki) gluoni koje opisujemo poljima  $\mathcal{A}_\mu$  imaju impuls  $k^+ < \Lambda^+$ , dok brzi izvori boje imaju impuls  $k^+ > \Lambda^+$ . Brzi izvori boje mogu emitirati ili apsorbirati gluone, ali u prvoj aproksimaciji, koju nazivamo eikonalom aproksimacijom [11], uzimamo da ne odstupaju od svojih trajektorija. Stoga ih ne smatramo dinamičkim modovima, već samo generiraju struju  $J^\mu$ . Dinamička polja  $\mathcal{A}_\mu$  dobivamo kao rješenje Yang-Millsove jednadžbe gibanja u prisutnosti vanjskog izvora koji generira struju  $J^\nu$ , a koju ćemo navesti u sljedećem poglavlju. Nezavisnu evoluciju navedena dva stupnja slobode, kao i određivanje granice između njih i njezinu evoluciju s kinematičkim parametrima opisuje Jalilian-Marian-Iancu-McLerran-Weigert-Leonidov-Kovner jednadžba (JIMWLK) [15].

Možemo pokazati da meki gluoni vide izvore kao statične tijekom određenog vremenskog intervala. Razmotrimo jezgru u IMF-u koja se giba longitudinalnim impulsom  $P^-$ , za koji u eikonaloj aproksimaciji pretpostavljemo da zadovoljava  $P^- \gg P^+, P_\perp$ . Vrijeme života mekih gluona u koordinatama svjetlosnog stošca  $x^-$  konjugirana je vrijednost energije  $k^+$ . Za fluktuacije koje imaju udio impulsa  $x = k^-/P^-$  i transverzalan impuls  $k_\perp$  prosječno vrijeme života dobiveno iz relacije neodređenosti je  $\Delta x^- \sim 1/k^+ = 2xP^-/k_\perp^2$ , što je puno manje od  $1/P^+$ . Stoga partoni koji nose mali udio impulsa  $x$  delokalizirani su duž većih udaljenosti i žive kraće od brzih partona. Oni vide valentne partone s većom udiom impulsa  $x$  kao smrznuti izvor boje. Ovo također vrijedi za prostorno-vremensku strukturu prethodno diskutiranih BFKL kaskada. Tamo gluoni na kraju kaskade s manjim udiom impulsa  $x$  imaju kraći životni vijek od onih na početku, tj. onih s velikim  $x$ . Gluoni na vrhu kaskade igraju ulogu zamrznutih izvora boje, dok oni pri dnu imaju dinamičku ulogu.

### 4.3 Funkcional $W_{\Lambda_+}[\rho]$

Iako smrznuti izvori boje nasumično variraju od događaja do događaja, svu informaciju o njima stavljamo u funkcional  $W_{\Lambda_+}[\rho]$  koji daje vjerojatnost određene konfiguracije izvora u hadronu na skali  $\Lambda_+$ . Prema [8] on glasi:

$$W[x; \rho] \equiv \exp \left\{ - \int d^2x_{\perp} \left[ \frac{\rho_a(x_{\perp})\rho^a(x_{\perp})}{2\mu_A^2} - \frac{d_{abc}\rho^a(x_{\perp})\rho^b(x_{\perp})\rho^c(x_{\perp})}{\kappa_A} \right] \right\} \quad (4.7)$$

gdje je  $\mu_A^2$  prosjek kvadrata naboja boje po jedinici transverzalne površine koji prema [8] iznosi:

$$\mu_A^2 = \frac{g^2 A}{2\pi R}, \quad (4.8)$$

dok je  $\kappa_A$  :

$$\kappa_A = \frac{g^3 A^2 N_c}{\pi^2 R^4}. \quad (4.9)$$

Simetričan tenzor  $d_{abc}$  definiramo pomoću izraza [2]:

$$\{T_a, T_b\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} + d_{abc} T_c. \quad (4.10)$$

Tokom računanja fizikalnih observabli moramo napraviti prosjek po svim mogućim konfiguracijama boje izvora:

$$\langle A[\rho] \rangle_{\rho} = \int [D\rho] W[\rho] A[\rho]. \quad (4.11)$$

Nadalje, kada radimo uprosječenje po boji ovisi o tome je li proces difrakcijski ili inkluzivan. Naime, u difrakcijskom procesu meta se ne raspada pa je pri računanju fizikalnih observabli potrebno napraviti prosjek po svim mogućim konfiguracijama izvora boje prije kvadriranja amplitude vjerojatnosti. Ova procedura stvara procjep u rapiditetu između nastale čestice i mete, što je karakteristično za difrakcijske sudare. Ukoliko bi promatrani proces bio inkluzivan, u kojemu se meta raspada, prvo bi morali kvadrirati amplitudu vjerojatnosti i nakon toga napraviti prosjek po naboju boje.

## 5 Polje jezgre i protona

### 5.1 Yang-Millsova jednadžba

U CGC-u, zbog velikog okupacijskog broja gluona, možemo zanemariti kvantne efekte:

$$N = a^\dagger a \sim \frac{1}{\alpha_s} \gg [a^\dagger, a] = 1. \quad (5.1)$$

U takvoj aproksimaciji polje gluona rješenje je Yang-Millsove jednadžbe gibanja s izvorom boje opisanom gustoćom naboja  $\rho(x_\perp)$  [16]:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = J^\nu, \quad (5.2)$$

gdje je  $\mathcal{D}_\mu$  operator kovarijantne derivacije zadan u adjungiranoj reprezentaciji:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} - ig [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}]. \quad (5.3)$$

S  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  označavamo tenzor jakosti gluonskog polja  $\mathcal{A}^\mu$ :

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu - ig [\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu]. \quad (5.4)$$

Struja  $J^\nu$  je funkcija koja ovisi o gustoći naboja. U ovome radu, promatramo slučaj u kojem, uz jezgu opisanu CGC-om, imamo dodatan izvor boje  $\rho_p(x_\perp)$  od protona. Za njega tvrdimo da vrijedi  $\rho_p \ll \rho_A$ . Odnosno on nije gust, već razrijeđen sustav (dilute). Takva pretpostavka omogućuje promatranje protona kao male smetnje uz čiju prisutnost i dalje vrijedi klasična aproksimacija. Nadalje, jezgri (protonu) pripisujemo impuls  $P^\mu$  ( $p^\mu$ ). U eikonalnoj aproksimaciji vrijedi  $P^- \gg P^+, P_\perp$ , analogno za impuls protona  $p^+ \gg p^-, p_\perp$ . Stoga, za struje  $J_A^\mu$  i  $J_p^\mu$  koje jezgra i proton respektivno generiraju vrijedi  $J_A^\mu \simeq \delta^{\mu-} \rho_A$ ,  $J_p^\mu \simeq \delta^{\mu+} \rho_p$ . One su i kovarijantno očuvane, tj. zadovoljavaju jednadžbu:

$$[D_\mu, J^\mu] = 0. \quad (5.5)$$

U baždarenju svjetlosnog stošca, prethodna jednadžba za jezgru svodi se na  $D_- J^- = 0$ . Iz ovoga vidimo da struja jezgre ne ovisi o koordinati  $x^-$ . Analognim postupkom



dobivamo da struja protona ne ovisi o koordinati  $x^+$ . Stoga, u (5.2) uvrštavamo:

$$J^{\nu} = g\delta^{\nu+}\delta(x^-)\rho_p(x_{\perp}) + g\delta^{\nu-}\delta(x^+)\rho_A(x_{\perp}). \quad (5.6)$$

Rješenje jednadžbe u ovom asimetričnom slučaju dobivamo iterativnom metodom. Pritom je korisno uvesti oznaku  $\mathcal{A}_{(m,n)}$  za član reda  $\rho_p^m\rho_A^n$ . Tada perturbativni razvoj možemo zapisati kao:

$$\mathcal{A} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{(m,n)}. \quad (5.7)$$

Doprinosi koji su respektivno proporcionalni s  $\rho_p$  i  $\rho_p^2$  i svim redovima u  $\rho_A$  označavamo s

$$\mathcal{A}_{(1,\infty)} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{(1,n)}, \quad (5.8)$$

i:

$$\mathcal{A}_{(2,\infty)} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{(2,n)}. \quad (5.9)$$

U ovome radu promatrati ćemo  $pA$  sudar u dilute-dense aproksimaciji u kojemu proton i jezgra preživljavaju sudar. U tom slučaju izmjenjuju se singleti u boji za što su potrebna minimalno dva gluona. Stoga se u perturbativnom razvoju zaustavljamo na doprinosu  $\mathcal{A}_{(2,\infty)}$ .

## 5.2 Polje jezgre $\mathcal{A}_{(0)}$

Član  $\mathcal{A}_{(0,\infty)}$  koji je proporcionalan s  $\rho_p^0$  i opisuje CGC jezgru zadajemo razvojem:

$$\mathcal{A}_{(0,\infty)} \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{(0,n)} \quad (5.10)$$

Njegov eksplicitan oblik dobivamo rješavanjem jednadžbe (5.2) s izvorom:

$$J^{\nu} = g\delta^{\nu-}\delta(x^+)\rho_A(x_{\perp}). \quad (5.11)$$

Račun provodimo u Lorentzovom baždarenju:

$$\partial_{\mu}\mathcal{A}^{\mu} = 0. \quad (5.12)$$

Tada jednadžbe (5.2) i (5.5) možemo zapisati u sljedećem respektivnom obliku:

$$\square \mathcal{A}_{(0,\infty)}^{\nu} = J_{(0,\infty)}^{\nu} + ig \left[ \mathcal{A}_{(0,\infty)\mu}, \mathcal{F}_{(0,\infty)}^{\mu\nu} + \partial^{\mu} \mathcal{A}_{(0,\infty)}^{\nu} \right], \quad (5.13)$$

$$\partial_{\mu} J_{(0,\infty)}^{\mu} = ig \left[ \mathcal{A}_{(0,\infty)\mu}, J_{(0,\infty)}^{\mu} \right]. \quad (5.14)$$

Prethodni sustav jednadžbi možemo riješiti iterativnom metodom do proizvoljnog reda u  $\rho_A$ .

Za doprinos u prvom redu u  $\rho_A$  imamo:

$$J_{(0,1)}^{\mu} = g \delta^{\mu-} \delta(x^+) \rho_A(x_{\perp}), \quad (5.15)$$

$$\partial_{\mu} J_{(0,1)}^{\mu} = 0,$$

$$\square \mathcal{A}_{(0,1)}^{\mu} = J_{(0,1)}^{\mu}$$

Budući da struja  $J^{\mu}$  ima samo  $-$  komponentu i ne ovisi o  $x^{-}$  koordinati, rješenje Yang-Millsove jednadžbe je:

$$\mathcal{A}_{(0,1)}^{\mu} = -g \delta^{\mu-} \delta(x^+) \frac{1}{\partial_{\perp}^2} \rho_A(x_{\perp}). \quad (5.16)$$

Tenzor jakosti gluonskog polja u prvome redu ima samo dvije komponente koje su različite od nule:

$$\mathcal{F}_{(0,1)}^{(i-)} = -\mathcal{F}_{(0,1)}^{(-i)} = \partial^i \mathcal{A}_{(0,1)}^{-}. \quad (5.17)$$

Sustav jednadžbi za doprinos u drugome redu, polje  $\mathcal{A}_{(0,2)}$ , dobivamo tako da u jednadžbe (5.13) i (5.14) uvrstimo polje  $\mathcal{A}_{(0,1)}$ . Respektivan sustav glasi:

$$\partial_{\mu} J_{(0,2)}^{\mu} = ig \left[ \mathcal{A}_{(0,1)\mu}, J_{(0,1)}^{\mu} \right], \quad (5.18)$$

$$\square \mathcal{A}_{(0,2)}^{\nu} = J_{(0,1)}^{\nu} + ig \left[ \mathcal{A}_{(0,1)\mu}, \mathcal{F}_{(0,1)}^{\mu\nu} + \partial^{\mu} \mathcal{A}_{(0,1)}^{\nu} \right]. \quad (5.19)$$

Lako se vidi da je komutator na desnoj strani jednadžbe (5.18) jednak nuli i time dobivamo jednadžbu:

$$\partial_{\mu} J_{(0,2)}^{\mu} = 0. \quad (5.20)$$

Njeno rješenje je, uz uvjet da  $J^\mu \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow -\infty$ ,  $J_{(0,2)}^\mu = 0$ .

Nadalje, uvrštavanjem (5.16) i (5.17) u komutator na desnoj strani jednadžbe (5.19) dobivamo da je isti jednak nuli. Tada se jednadžba (5.19) svodi na:

$$\square \mathcal{A}_{(0,2)}^V = 0, \quad (5.21)$$

čije je rješenje, uz uvjet da  $\mathcal{A}^V = 0$  kada  $t \rightarrow -\infty$   $\mathcal{A}_{(0,2)}^V = 0$ . Iz toga proizlazi da polje koje opisuje CGC jezgru nema član koji je proporcionalan s  $\rho_A^2$ .

Iste argumente možemo ponoviti u višim redovima u  $\rho_A$ . Na temelju toga možemo zaključiti da je rješenje u prvom redu u  $\rho_A$  i rješenje u svim redovima  $\rho_A$ , odnosno:

$$\mathcal{A}_{(0,\infty)}^\mu = \mathcal{A}_{(0,1)}^\mu = -g \delta^{\mu-} \delta(x^+) \frac{1}{\nabla_\perp^2} \rho_A(x_\perp), \quad (5.22)$$

$$J_{(0,\infty)}^\mu = J_{(0,1)}^\mu = \delta^{\mu-} \delta(x^+) \rho_A(x_\perp). \quad (5.23)$$

Polje CGC jezgre ćemo označiti s  $\mathcal{A}_{(0)}^\mu$ .

### 5.3 Polje $\mathcal{A}_{(1)}$

Doprinos koji je proporcionalan  $\rho_p$  gluonsko polje  $\mathcal{A}_{(1)}^\mu$  u baždarenju svjetlosnog stošca ("Light-cone gauge" ili LC)  $\mathcal{A}^+ = 0$  dobivamo uvrštavajući razvoj:

$$\mathcal{A}^\mu = \underbrace{\mathcal{A}_{(0)}^\mu}_{COV} + \overbrace{\mathcal{A}_{(1)}^\mu}^{LC} \quad (5.24)$$

u jednadžbu (5.2) s izvorom (5.11). Pritom zanemarujemo doprinos člana koji je proporcionalan s  $\rho_p^2$ , tj. sadrži  $[\mathcal{A}_{(1)}^\mu, \mathcal{A}_{(1)}^\mu]$ . Za  $v = +, -, i$  dobivamo respektivane jednadžbe:

$$-\partial^{+2} \mathcal{A}_{(1)}^- + \partial^+ \partial^i \mathcal{A}_{(1)}^i = J^+, \quad (5.25)$$

$$\partial^+ \mathcal{D}_{(0)}^- \mathcal{A}_{(1)}^- - \partial_\perp^2 \mathcal{A}_{(1)}^- + \mathcal{D}_{(0)}^- \partial^i \mathcal{A}_{(1)}^i - 2ig [\partial^i \mathcal{A}_{(0)}^-, \mathcal{A}_{(1)}^i] = 0, \quad (5.26)$$

$$2\partial^+ \mathcal{D}_{(0)}^- \mathcal{A}_{(1)}^i - \partial^+ \partial^i \mathcal{A}_{(1)}^- - \partial_\perp^2 \mathcal{A}_{(1)}^i + \partial^i \partial^j \mathcal{A}_{(1)}^j = 0. \quad (5.27)$$

Upotrebljavajući (5.25) i kovarijantno očuvanje struje  $\mathcal{D}_{(0)}^- J^+ = 0$ , jednačbu (5.26) možemo zapisati kao:

$$\square \mathcal{A}_{(1)}^- - 2ig \left[ \mathcal{A}_{(0)}^-, \partial^+ \mathcal{A}_{(1)}^- \right] - 2ig \left[ \partial^i \mathcal{A}_{(0)}^-, \mathcal{A}_{(1)}^i \right] = 0 \quad (5.28)$$

Analogno, jednačba (5.27) postaje:

$$\square \mathcal{A}_{(1)}^i - 2ig \left[ \mathcal{A}_{(0)}^-, \partial^+ \mathcal{A}_{(1)}^i \right] = -\frac{\partial^i}{\partial^+} J^+. \quad (5.29)$$

Gluonsko polje  $\mathcal{A}_{(1)}^\mu$  dijelimo na dva dijela:

$$\mathcal{A}_{(1)}^\mu(x) = \mathcal{A}_{(1<)}^\mu(x) + \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(x). \quad (5.30)$$

$\mathcal{A}_{(1<)}^\mu(x)$  rješenje je u području  $x^+ < 0$  i opisuje slučaj u kojemu gluon iz protona još nije međudjelovao s jezgrom.  $\mathcal{A}_{(1>)}^\mu(x)$  predstavlja situaciju u  $x^+ > 0$  nakon interakcije s jezgrom. U području  $x^+ < 0$  polje jezgre  $\mathcal{A}_{(0)}$  jednako je nuli i stoga jednačba (5.29) postaje:

$$-\partial_\perp^2 \mathcal{A}_{(1<)}^i = -\frac{\partial^i}{\partial^+} \delta(x^-) \rho_p(x_\perp) \quad (5.31)$$

Pritom smo iskoristili da struja  $J^+$  ne ovisi o koordinati  $x^+$ . Rješenje prethodne jednačbe je:

$$\mathcal{A}_{(1<)}^i = \frac{\partial^i}{\partial_\perp^2} \rho_p(x_\perp). \quad (5.32)$$

Nadalje, u  $x^+ < 0$  (5.28) postaje:

$$\square \mathcal{A}_{(1<)}^- = 0, \quad (5.33)$$

i njeno rješenje je, uz uvjet da polje  $\mathcal{A}_{(1)} \rightarrow 0$  kada  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\mathcal{A}_{(1<)}^- = 0 \quad (5.34)$$

U  $x^+ > 0$  gluon dobiva fazu opisanom Wilsonovom linijom:

$$V(x_\perp) \equiv \mathcal{P}_{x^+} \exp \left[ ig \int_{-\infty}^{\infty} dx^+ \mathcal{A}_{(0)}^{-a}(x) T_A^a \right], \quad (5.35)$$

gdje je  $T_A^a$  element adjungirane SU(3) algebre.

Radi jedostavnosti, rješenje promatramo u prostoru impulsa u koji iz koordinatnog prostora dolazimo Fourierovom transformacijom:

$$\mathcal{A}(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} \mathcal{A}(x). \quad (5.36)$$

Ono, prema [6], glasi:

$$\mathcal{A}_{(1<)}^+(p) = 0, \quad \mathcal{A}_{(1<)}^-(p) = 0, \quad (5.37)$$

$$-p^2 \mathcal{A}_{(1<)}^i(p) = -ig p^i \frac{p^2}{(p^+ + i\varepsilon)(p^- - i\varepsilon)} \frac{\rho_p(p_\perp)}{p_\perp^2}, \quad (5.38)$$

i:

$$-p^2 \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(p) = -ig \int \frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2} C^\mu(p; q_\perp, p_\perp - q_\perp) V(p_\perp - q_\perp) \frac{\rho_p(q_\perp)}{q_\perp^2}, \quad (5.39)$$

gdje je:

$$V(q_\perp) = \int d^2x_\perp e^{-iq_\perp \cdot x_\perp} V(x_\perp) \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} C^+(p; q_\perp, p_\perp - q_\perp) &= 0 \\ C^-(p; q_\perp, p_\perp - q_\perp) &= \frac{-2q_\perp \cdot (p_\perp - q_\perp)}{p^+ + i\varepsilon} \\ C^i(p; q_\perp, p_\perp - q_\perp) &= \frac{p^i q_\perp^2}{(p^+ + i\varepsilon)(p^- + i\varepsilon)} - 2q^i \end{aligned} \quad (5.41)$$

Oba člana,  $\mathcal{A}_{(1<)}$  i  $\mathcal{A}_{(1>)}$ , imaju doprinos koji dolazi od izvora opisanog gustoćom  $\rho_p$ . Kod  $\mathcal{A}_{(1>)}$  ono uključuje rotaciju u prostoru boje opisanom s  $V(p_\perp - q_\perp)$ . Isti član ima dodatan doprinos od rubnih uvjeta  $x^+ \rightarrow 0^+$  navedenih u [6], koji ne doprinosi za  $x^+ > 0$ .

## 5.4 Polje $\mathcal{A}_{(2)}$

Doprinos drugoga reda u  $\rho_p$  polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  dobivamo uvrštavajući:

$$\mathcal{A}^\mu = \underbrace{\mathcal{A}_{(0)}^\mu + \mathcal{A}_{(1)}^\mu + \mathcal{A}_{(2)}^\mu}_{LOR} + \overbrace{\hspace{10em}}^{LC} \quad (5.42)$$

u jednadžbu (5.2) s izvorom (5.11). Pritom zanemarujemo članove koji sadrže  $[\mathcal{A}_{(1)}^\mu, \mathcal{A}_{(2)}^\nu]$  i  $[\mathcal{A}_{(2)}^\mu, \mathcal{A}_{(2)}^\nu]$ , zato što su respektivno proporcionalni s  $\rho_p^3$  i  $\rho_p^4$ . Za  $\nu = +, -, i$  dobivamo respektivan sustav jednadžbi:

$$-\partial^{+2}\mathcal{A}_{(1)}^- - \partial^{+2}\mathcal{A}_{(2)}^- + \partial^+\partial^i\mathcal{A}_{(1)}^i + \partial^+\partial^i\mathcal{A}_{(2)}^i + ig[\mathcal{A}_{(1)}^i, \partial^+\mathcal{A}_{(1)}^i] = J^+, \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} & \partial^+\mathcal{D}_{(0)}^-(\mathcal{A}_{(1)}^- + \mathcal{A}_{(2)}^-) - \partial_{\perp}^2(\mathcal{A}_{(1)}^- + \mathcal{A}_{(2)}^-) + \mathcal{D}_{(0)}^-\partial^i(\mathcal{A}_{(1)}^i + \mathcal{A}_{(2)}^i) - \\ & - 2ig[\partial^i\mathcal{A}_{(0)}^-, \mathcal{A}_{(1)}^i + \mathcal{A}_{(2)}^i] - ig[\mathcal{A}_{(1)}^-, \partial^+\mathcal{A}_{(1)}^-] - ig[\mathcal{A}_{(1)}^i, \partial^-\mathcal{A}_{(1)}^i] + \\ & + g^2[\mathcal{A}_{(1)}^i, [\mathcal{A}_{(1)}^i, \mathcal{A}_{(0)}^-]] = 0, \end{aligned} \quad (5.44)$$

i:

$$\begin{aligned} & 2\partial^+\mathcal{D}_{(0)}^-(\mathcal{A}_{(1)}^i + \mathcal{A}_{(2)}^i) - \partial^+\partial^i(\mathcal{A}_{(1)}^- + \mathcal{A}_{(2)}^-) - \partial_{\perp}^2(\mathcal{A}_{(1)}^i + \mathcal{A}_{(2)}^i) + \\ & + \partial^i\partial^j(\mathcal{A}_{(1)}^j + \mathcal{A}_{(2)}^j) - ig[\mathcal{A}_{(1)}^-, \partial^+\mathcal{A}_{(1)}^i] - ig\partial^+[\mathcal{A}_{(1)}^-, \mathcal{A}_{(1)}^i] + \\ & + ig\partial^j[\mathcal{A}_{(1)}^j, \mathcal{A}_{(1)}^i] + ig[\mathcal{A}_{(1)}^j, \partial^j\mathcal{A}_{(1)}^i] - ig[\mathcal{A}_{(1)}^j, \partial^i\mathcal{A}_{(1)}^j] = 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Jednadžbu (5.45) možemo, upotrebljavajući (5.43), (5.28) i očuvanje kovarijantne struje  $\mathcal{D}_{(0)}^-J^+ = 0$ , zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} & \square\mathcal{A}_{(2)}^- - 2ig[\mathcal{A}_{(0)}^-, \partial^+\mathcal{A}_{(2)}^-] - 2ig[\partial^i\mathcal{A}_{(0)}^-, \mathcal{A}_{(2)}^-] - ig[\mathcal{A}_{(1)}^-, \partial^+\mathcal{A}_{(1)}^-] - \\ & - ig[\mathcal{A}_{(1)}^i, \partial^-\mathcal{A}_{(1)}^i] + g^2[\mathcal{A}_{(1)}^i, [\mathcal{A}_{(1)}^i, \mathcal{A}_{(0)}^-]] = 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Sličnim postupkom (5.46) možemo svesti na oblik:

$$\begin{aligned} \square \mathcal{A}_{(2)}^i - 2ig \left[ \mathcal{A}_{(0)}^-, \partial^+ \mathcal{A}_{(2)}^i \right] - ig \left[ \mathcal{A}_{(1)}^-, \partial^+ \mathcal{A}_{(1)}^i \right] - ig \partial^+ \left[ \mathcal{A}_{(1)}^-, \mathcal{A}_{(1)}^i \right] + \\ + ig \left[ \partial^j \mathcal{A}_{(1)}^j, \mathcal{A}_{(1)}^i \right] + ig \left[ \mathcal{A}_{(1)}^j, \partial^j \mathcal{A}_{(1)}^i \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Poput gluonskog polja  $\mathcal{A}_{(1)}^\mu$  i polje  $\mathcal{A}_{(2)}^\mu$  dijelimo na dva dijela:

$$\mathcal{A}_{(2)}^\mu(x) = \mathcal{A}_{(2<)}^\mu(x) + \mathcal{A}_{(2>)}^\mu(x). \quad (5.48)$$

Kao i u prethodnom slučaju, u području  $x^+ < 0$  nema interakcije gluonskog polja s jezgrom. U istom području je i  $\mathcal{A}_{(1<)}^- = 0$ . Nadalje, polje  $\mathcal{A}_{(1)}^i$  ne ovisi o koordinati  $x^+$ . Stoga (5.47) se svodi na:

$$-\partial_\perp^2 \mathcal{A}_{(2<)}^i = -ig \left( \left[ \partial^j \mathcal{A}_{(1)}^j, \mathcal{A}_{(1)}^i \right] + \left[ \mathcal{A}_{(1)}^j, \partial^j \mathcal{A}_{(1)}^i \right] \right) \quad (5.49)$$

i njeno rješenje je:

$$\mathcal{A}_{(2<)}^i(x) = \frac{ig}{\partial_\perp^2} \left( \left[ \partial^j \mathcal{A}_{(1)}^j, \mathcal{A}_{(1)}^i \right] + \left[ \mathcal{A}_{(1)}^j, \partial^j \mathcal{A}_{(1)}^i \right] \right). \quad (5.50)$$

Upotrebljavajući iste argumente kao i u prethodnom slučaju, jednadžbu (5.47) možemo zapisati kao:

$$\square \mathcal{A}_{(2<)}^-(x) = 0, \quad (5.51)$$

čije rješenje je:

$$\mathcal{A}_{(2<)}^-(x) = 0. \quad (5.52)$$

Slučaj u kojemu je gluon interagirao s jezgrom, tj. rješenje u području  $x^+ > 0$ , opisuje polje  $\mathcal{A}_{(2>)}$ . Eksplicitan izraz za gluonsko polje  $\mathcal{A}_{(2>)}$  nećemo navoditi jer će u nastavku biti pokazano da njegov doprinos iščezava.

## 5.5 Kvarkovski propagator u polju jezgre $\mathcal{A}_0$

Propagator u polju jezgre  $\mathcal{A}_0$ , shematski prikazan na slici (5.1), prema [14] definiran je kao:

$$\begin{aligned}
 S_{(0)}(x, y) &\equiv -i \langle \Omega_{out} | T \Psi(x) \Psi(y) | \Omega_{in} \rangle = S_F(x - y) \\
 &+ i \theta(x^+) \theta(-y^+) \int d^4 z \delta(z^+) [U(z_\perp) - 1] S_F(x - z) \not{n} S_F(z - y) \\
 &- i \theta(-x^+) \theta(y^+) \int d^4 z \delta(z^+) [U^\dagger(z_\perp) - 1] S_F(x - z) \not{n} S_F(z - y), \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

gdje je  $S_F(x - y)$  Feynmanov propagator:

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip \cdot (x - y)}, \quad (5.54)$$

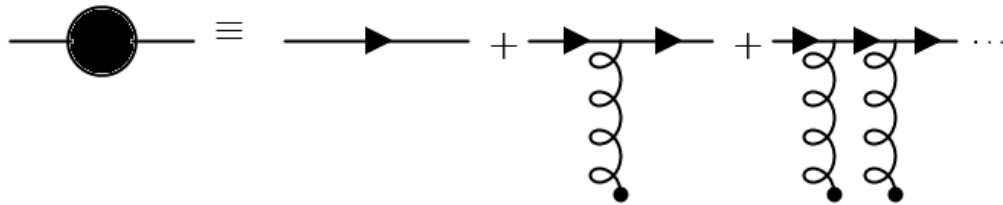
pritom je:

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.55)$$

Višestruke interakcije s poljem jezgre opisuju članovi koji sadrže Wilsonove linije:

$$U(x_\perp) = \mathcal{P}_{x^+} \exp \left[ ig \int_{-\infty}^{\infty} dx^+ \mathcal{A}_0^{-a}(x) T_F^a \right], \quad (5.56)$$

gdje je  $T_F^a$  element fundamentalne reprezentacije SU(3) algebre. S  $\mathcal{P}$  označavamo operator poretka po putanji ("path-ordering operator") čiju definiciju možemo naći u [18].



Slika 5.1: Dijagramski prikaz propagatora

Izraz (5.53) opisuje česticu koja propagira od točke  $y$  do  $z$ , pa od  $z$  do točke  $x$ . Ako je  $z^+ = 0$ , događa se raspršenje na polju jezgre, što vidimo iz delta funkcije. To se može dogoditi samo ako su  $x^+$  i  $y^+$  različitog predznaka, što je vidljivo iz theta funkcija. Za česticu koja se nalazi na ljusci mase,  $p^+$  i  $p^-$  pozitivnog su predznaka. Razmatranjem takve čestice, lako se vidi da ona propagira u smjeru porasta  $x^+$ , dok



anti-čestica, za koju je  $p^\pm < 0$ , propagira u suprotnom smjeru. To znači da imamo slijedeće Fourierove transformacije:

$$\theta(x^+)\theta(-y^+) \longrightarrow \theta(p^+), \quad \theta(-x^+)\theta(y^+) \longrightarrow \theta(-p^+). \quad (5.57)$$

Radi jednostavnosti, uvodimo pokrate za drugi i treći član u (5.53):

$$S_{(0><)}(x,y) \equiv i\theta(x^+)\theta(-y^+) \int d^4z [U(z_\perp) - 1] S_F(x-z) \not{p} S_F(z-y) \quad (5.58)$$

$$S_{(0<>)}(x,y) \equiv -i\theta(-x^+)\theta(y^+) \int d^4z [U^\dagger(z_\perp) - 1] S_F(x-z) \not{p} S_F(z-y) \quad (5.59)$$

Fourier transformacijom prethodnih izraza dobivamo pripadne izraze u impulsnom prostoru:

$$\begin{aligned} S_{(0><)}(x,y) &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \theta(p^+)\theta(q^+) e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot y} (2\pi) \delta(p^+ - q^+) \times \\ &\quad \times (U(p_\perp - q_\perp) - (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p_\perp - q_\perp)) S_F(p) \not{p} S_F(q) \\ &= S_{(0><)}^U(x,y) + S_{(0><)}^1(x,y) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} S_{(0<>)}(x,y) &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \theta(-p^+)\theta(-q^+) e^{-ip \cdot x} e^{iq \cdot y} (2\pi) \delta(p^+ - q^+) \times \\ &\quad \times (U^\dagger(-p_\perp + q_\perp) - (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p_\perp - q_\perp)) S_F(p) \not{p} S_F(q) \\ &= S_{(0<>)}^{U^\dagger}(x,y) + S_{(0<>)}^1(x,y). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Promotrimo član u izrazu (5.60) koji, uz delta funkciju u longitudinalnoj plus komponenti, sadrži i delta funkciju u transverzalnoj komponenti:

$$\begin{aligned} S_{(0><)}^1(x,y) &= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \theta(p^+)\theta(q^+) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p_\perp - q_\perp) (2\pi) \delta(p^+ - q^+) \\ &\quad e^{-ip \cdot x} e^{iq^+ y^- + iq^- y^+ - iq_\perp \cdot y_\perp} S_F(p) \not{p} S_F(q). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Integraciju po  $q^+$  i  $q_\perp$  koordinatama možemo jednostavno provesti, stoga preostaje

samo integracija po  $q^-$  komponenti:

$$S_{(0><)}^1(x,y) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{dq^-}{(2\pi)} e^{-ip \cdot x} e^{iq^- y^+} \times \quad (5.63)$$

$$\times \frac{\not{p} + m}{2p^+ (p^- - \frac{\omega_p^2}{2p^+} + \frac{i\varepsilon}{2p^+})} \not{p} \frac{p^+ \gamma^- + p^- \gamma^+ - p_\perp \cdot \gamma_\perp + m}{2p^+ (q^- - \frac{\omega_p^2}{2p^+} + \frac{i\varepsilon}{2p^+})}, \quad (5.64)$$

gdje smo uveli pokratu:

$$\omega_p^2 = \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p^+}. \quad (5.65)$$

Tu integraciju provodimo u  $q^-$  kompleksnoj ravnini, gdje kao integracijsku krivulju biramo realnu os zajedno s polukružnicom u negativnom području imaginarnog djela. Funkcija pod integralom ima singularitet u:

$$q^- = p^- = \frac{\omega_p^2}{2p^+} - i\varepsilon \quad (5.66)$$

pa cijeli integral možemo izvrjedniti metodom reziduuma:

$$S_{(0><)}^1(x,y) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \not{p} \frac{\not{p} + m}{2p^+}. \quad (5.67)$$

Brojnik možemo, koristeći se antikomutacijskom relacijom za gama matrice  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , svesti na oblik:

$$\begin{aligned} (\not{p} + m) \not{p} (\not{p} + m) &= (m \not{p} - \not{p} \not{p} + 2p \cdot n) (\not{p} + m) \\ &= 2p^+ (\not{p} + m) + \not{p} (-\not{p} + m) (\not{p} + m) \end{aligned} \quad (5.68)$$

Izraz (5.62) time se svodi na:

$$S_{(0><)}^1(x,y) = -\theta(x^+) \theta(y^-) \left\{ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} S_F(p) - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \not{p} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{(\not{p} - m)(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (5.69)$$

Budući da vrijedi  $(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2$ , drugi član ima uklonjivi singularitet i

vrijednost drugog integrala jednaka je nuli. Stoga, (5.62) iznosi:

$$\begin{aligned} S_{(0><)}^1(x,y) &= -\theta(x^+)\theta(-y^+) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} S_F(p) \\ &= -\theta(x^+)\theta(-y^+) S_F(x-y) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Analognim postupkom, za  $S_{(0<>)}^1(x,y)$  u (5.64) dobije se:

$$\begin{aligned} S_{(0<>)}^1(x,y) &= -\theta(x^+)\theta(-y^+) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} S_F(p) \\ &= -\theta(x^+)\theta(-y^+) S_F(x-y). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Stoga, propagator  $S_{(0)}(x,y)$  u koordinatnom prostoru možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} S_{(0)}(x,y) &\equiv -i \langle \Omega_{out} | T \Psi(x) \Psi(y) | \Omega_{in} \rangle = S_F(x-y) + \\ &+ \theta(x^+)\theta(-y^+) \left[ i \int d^4z U(z_\perp) S_F(x-z) \not{n} S_F(z-y) - S_F(x-y) \right] \\ &- \theta(-x^+)\theta(y^+) \left[ i \int d^4z U^\dagger(z_\perp) S_F(x-z) \not{n} S_F(z-y) - S_F(x-y) \right]. \end{aligned} \quad (5.72)$$

## 6 Pomeron i oderon

### 6.1 Nabojna konjugacija

Sada ćemo definirati unitarnu operaciju nabojne konjugacije  $\hat{C}$  koja mijenja česticu s njenom pripadnom antičesticom. Na Diracovo polje  $\psi(x)$  djelovanje operatora  $\hat{C}$  definirano je kao [3]:

$$\hat{C}\psi(x)\hat{C}^{-1} = \zeta\hat{C}\psi^\dagger(x), \quad . \quad (6.1)$$

Oblik operatora  $\hat{C}$  možemo izvesti iz zahtjeva da djelovanje istog mora ostaviti Diracovu jednadžbu [16]:

$$(\not{p} - m)\psi(x) = 0 \quad (6.2)$$

nepromjenjivom. To se svodi na uvjet:

$$\hat{C}\gamma^{\alpha T}\hat{C}^{-1} = -\gamma^\alpha, \quad (6.3)$$

koji je zadovoljen ako vrijedi u Diracovoj reprezentaciji:

$$\hat{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2. \quad (6.4)$$

Primjena nabojne konjugacije na Feynmanov propagator (5.55) daje:

$$\hat{C}S_F(y-x)^T\hat{C}^{-1} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(y-x)} \frac{-\not{p} - m}{p^2 - m^2} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \frac{\not{p} - m}{p^2 - m^2} = S_F(x-y). \quad (6.5)$$

U lagranžijanu QED-a fotonsko polje  $A_\mu$  pojavljuje se u članu koji opisuje interakciju s konstantom vezanja  $e$ :

$$\mathcal{L}_{int} = -ieA_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (6.6)$$

Zahtjev da operator  $\hat{C}$  ne mijenja jednadžbe gibanja ekvivalentan je zahtjevu da lan-granžijan ostaje invarijantan na djelovanje istog, jer iz njega izvodimo jednadžbe gibanja. Da bi taj zahtjev bio zadovoljen, foton  $A_\mu$  mora imati  $\zeta = -1$ . Naime, u prethodnom izrazu umnožak  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$  promjenit će predznak nakon djelovanja operatora  $\hat{C}$ , što je vidljivo iz (6.3).

Prema [5] gluonska baždarna polja QCD-a  $A_\mu = A_\mu^a T^a$ , transformiraju se na sljedeći

način:

$$\hat{C}A_\mu\hat{C}^{-1} = -(A_\mu)^T. \quad (6.7)$$

Wilsonovu liniju  $U(x)$ , koja je funkcija polja  $A_\mu$  definiramo kao:

$$U(x) = \mathcal{P} \exp \left[ ig \int dx^\mu A_\mu(x) \right]. \quad (6.8)$$

## 6.2 Pomeron i oderon - definicije

S pomoću Wilsonove linije možemo konstruirati operator dipola boje  $\text{Tr} [U(x)U^\dagger(y)]$ .

Njega možemo rastaviti na realni i imaginarni doprinos koristeći se svojstvom  $\text{Tr} [U(x)U^\dagger(y)] = (\text{Tr} [U(y)U^\dagger(x)])^*$  :

$$\frac{1}{N_c} \text{Tr} [U(x)U^\dagger(y)] = 1 - P(x,y) + iO(x,y), \quad (6.9)$$

tako da operator  $P(x,y)$  predstavlja pomeron:

$$P(x,y) = 1 - \frac{1}{2N_c} \left[ \text{Tr} [U(x)U^\dagger(y)] + \text{Tr} [U(y)U^\dagger(x)] \right], \quad (6.10)$$

a  $O(x,y)$  oderon:

$$O(x,y) = \frac{1}{2iN_c} \left[ \text{Tr} [U(x)U^\dagger(y)] - \text{Tr} [U(y)U^\dagger(x)] \right] \quad (6.11)$$

Iz transformacije gluonskog polja slijedi transformacija Wilsonove linije:

$$\hat{C}U\hat{C}^{-1} = (U^\dagger)^T, \quad (6.12)$$

stoga vrijedi:

$$\hat{C}\text{Tr}(U^\dagger(x)U(y))\hat{C}^{-1} = \text{Tr}(U^\dagger(y)U(x)) \quad (6.13)$$

Iz prethodnih izraza lako se vidi da tijekom nabojne konjugacije pomeron ne mijenja predznak:

$$\hat{C}P(x,y)\hat{C}^{-1} = P(x,y), \quad (6.14)$$

dok ga oderon mijenja:

$$\hat{C}O(x,y)\hat{C}^{-1} = -O(x,y). \quad (6.15)$$

Pomeron zato nazivamo parnim, a oderon neparnim doprinosom obzirom na transformaciju operatorom  $\hat{C}$ .

U režimu perturbativne kvantne kromodinamike očekujemo da je najniži doprinos pomeronu dvogluonska izmjena, koju ćemo dobiti preko izraza (6.11) razvojem eksponencijalnih funkcija u red do prvog neiščezavajućega člana:

$$P(x, y) \simeq \frac{g^2}{4N_c} (\alpha_x^a - \alpha_y^a)^2, \quad (6.16)$$

a pritom smo uveli pokratu:

$$\alpha_x^a \equiv \int dx^\mu A_\mu^a(x). \quad (6.17)$$

U jednakom režimu i analognim postupkom za oderon dobivamo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} O(x, y) &\simeq \frac{-g^3}{24N_c} d^{abc} \left\{ 3(\alpha_x^a \alpha_y^b \alpha_y^c - \alpha_x^a \alpha_x^b \alpha_y^c) + (\alpha_x^a \alpha_x^b \alpha_x^c - \alpha_y^a \alpha_y^b \alpha_y^c) \right\} \\ &\simeq \frac{-g^3}{24N_c} d^{abc} (\alpha_x^a - \alpha_y^a)(\alpha_x^b - \alpha_y^b)(\alpha_x^c - \alpha_y^c), \end{aligned} \quad (6.18)$$

koji u skladu s očekivanjima odgovara trogluonskoj izmjeni. Iz (6.7) slijedi da taj operator mijenja predznak nakon primjene nabojne konjugacije.

## 7 Proces $p + A \rightarrow p + A + \gamma$

### 7.1 Amplituda

Promatramo dvostruko difrakcijski proces:

$$p + A \rightarrow p + A + \gamma, \quad (7.1)$$

a pritom pretpostavljamo da su jezgra i proton opisani klasičnim gluonskim poljem na način na koji je to opisano u petom poglavlju.

U izlaznom stanju nalazi se foton impulsa  $k$  i polarizacije  $\lambda$ , dok je u početnom vakuum.<sup>2</sup> Račun se provodi u dilute-dense aproksimaciji u kojoj se proton i jezgra opisuju klasičnim poljem uz uvjet  $\rho_p \ll \rho_A$ . Budući da C-paritet fotona iznosi -1, u početnom stanju imamo dvije mogućnosti: u jednoj pomeron dolazi od protona, a oderon od jezgre, dok je u drugoj obratno. S obzirom na to da promaramo jezgru kao gusti izvor boje u odnosu na proton, slučaj u kojemu oderon dolazi iz protona potisnut je za  $1/\alpha_s$  u odnosu na slučaj u kojemu oderon dolazi iz jezgre. Stoga se ograničavamo na prvu mogućnost, najniži red u dilute-dense aproksimaciji koji će dati netrivialni doprinos. Napomenimo da u slučaju kada su oba izvora dilute, što je tipično za  $pp$  sudare, obje opcije se moraju uzeti u obzir.

Konačno, vrijedi spomenuti i da se navedeni proces može miješati s procesom u kojemu umjesto oderona pomeron iz protona interagira s klasičnim elektromagnetskim poljem jezgre naboja  $Z\alpha \sim 1$ ,  $p + Z \rightarrow p + Z + \gamma$ . Očekujemo da zbog razlike u dosegu jake i elektromagnetske sile, proces s oderonom iz jezgre dominira kada je parametar sudara  $b$  mali, dok proces s fotonom iz jezgre dominira kada je  $b$  veliki, odnosno u ultra-periferalnim sudarima, što bi vodilo na to da je kvantitativno miješanje između ova dva procesa malo.

Koristeći se Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) redukcijском formulom [16]

---

<sup>2</sup>Jezgru i proton ne promatramo kao dio kvantnog stanja jer ih promatramo u klasičnoj aproksimaciji.

i razvojem do  $\rho_p^2$ , amplitudu zapisujemo kao:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda(k) \equiv \langle k, \lambda | \Omega_{in} \rangle &= -ie \int d^4x e^{ik \cdot x} \langle \Omega_{out} | \bar{\Psi}(x) \not{\epsilon} \Psi(x) | \Omega_{in} \rangle \\
&+ eg \int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \langle \Omega_{out} | T \bar{\Psi}(x) \not{\epsilon}_\lambda(k) \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) \Psi(y) | \Omega_{in} \rangle \\
&+ eg \int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \langle \Omega_{out} | T \bar{\Psi}(x) \not{\epsilon}_\lambda(k) \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \not{\mathcal{A}}_{(2)}(y) \Psi(y) | \Omega_{in} \rangle \\
&+ ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \langle \Omega_{out} | T \bar{\Psi}(x) \not{\epsilon}_\lambda(k) \Psi(x) \bar{\Psi}(y) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) \Psi(y) \bar{\Psi}(z) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(z) \Psi(z) | \Omega_{in} \rangle.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Član koji je linearan u  $\mathcal{A}_{(1)}$  ne doprinosi procesu jer promatramo dvostruko difrakcijski proces, što znači da u izlaznom stanju mora sadržavati projektil koji je singlet u boji. Također, neće doprinositi ni član koji sadrži polje  $\mathcal{A}_{(2)}$ . Njegov doprinos označavamo s  $\mathcal{M}_{2\lambda}(k)$ . On sadrži doprinose oblika:

$$\int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \text{Tr}(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0<>)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(2<)}(y) S_{(0)}(y, x)) \tag{7.3}$$

$$\int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \text{Tr}(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(2<)}(y) S_{(0><)}(y, x)), \tag{7.4}$$

$$\int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \text{Tr}(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0><)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(2>)}(y) S_{(0)}(y, x)), \tag{7.5}$$

i

$$\int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \text{Tr}(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(2>)}(y) S_{(0><)}(y, x)) \tag{7.6}$$

koji su jednaki nuli. U prvom slučaju imamo  $\mathcal{A}_{(2<)}(y) \sim \theta(-y^+)$ , dok je  $S_{(0<>)}(x, y) \sim \theta(y^+)$ , što moženjem daje nulu. Analognom logikom dolazimo do jednakog zaključka u ostalim slučajevima. Doprinos  $\mathcal{M}_{2\lambda}(k)$  možemo podijeliti na četiri slučaja u kojima se stvara se par kvark-antikvark, tj. dipol boje koji može interagirati s jezgrom da bi konačno anihilirao u foton:

$$\mathcal{M}_{2\lambda}(k) = \mathcal{M}_{2\lambda}^{(<<)}(k) + \mathcal{M}_{2\lambda}^{(<>)}(k) + \mathcal{M}_{2\lambda}^{(><)}(k) + \mathcal{M}_{2\lambda}^{(>>)}(k), \tag{7.7}$$

gdje s  $\mathcal{M}_{2\lambda}^{(<<)}(k)$  označavamo član u kojem ni nastala kvarkovska petlja ni gluonsko polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  nisu interagirali s jezgrom, dok s  $\mathcal{M}_{2\lambda}^{(<>)}(k)$  opisujemo slučaj u kojemu je samo kvarkovska petlja međudjelovala s jezgrom. S  $\mathcal{M}_{2\lambda}^{(><)}(k)$  i  $\mathcal{M}_{2\lambda}^{(>>)}(k)$  opisujemo



slučajeve u kojima samo gluonsko polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  i u kojemu polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  i kvarkovska petlja interagiraju s jezgrom, respektivno.

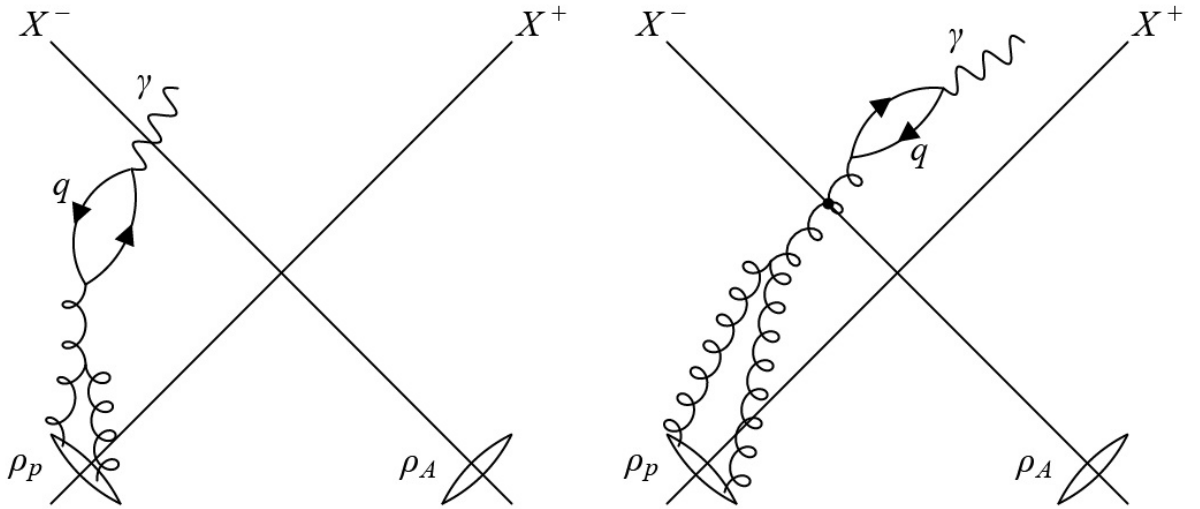
Kada nema interakcije kvarkovske petlje s jezgrom članovi su:

$$\mathcal{M}_{2\lambda}^{(<<)}(k) = eg \int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \text{Tr}_c(\mathcal{A}_{(2<)}(y)) \text{Tr}_D(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-y) \gamma_\mu S_F(y-x)) \quad (7.8)$$

i

$$\mathcal{M}_{2\lambda}^{(>>)}(k) = eg \int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \text{Tr}_c(\mathcal{A}_{(2>)}(y)) \text{Tr}_D(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-y) \gamma_\mu S_F(y-x)). \quad (7.9)$$

Oba izraza, prikazana na slici (7.1) jednaka su nuli zato što sadrže  $\text{Tr}_c(T_F^C)$ .

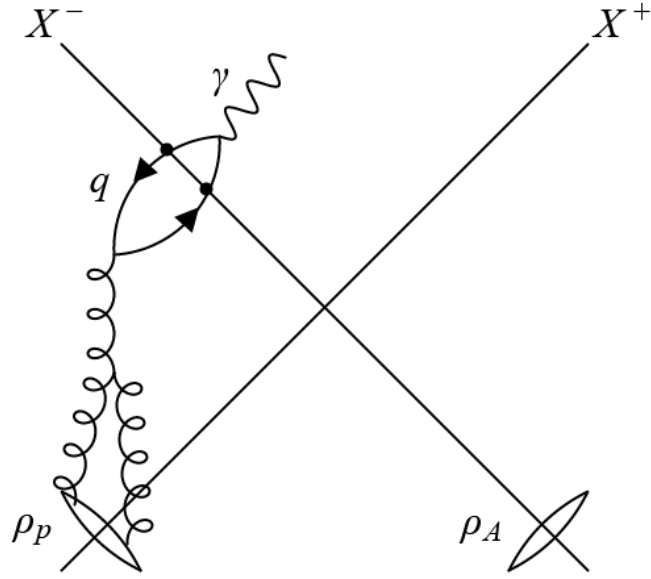


Slika 7.1: Dijagramski prikaz (7.8) i (7.9) Gluonsko polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  se raspada na par kvark-antikvark koji anihilira u foton. Na lijevoj strani slike ni polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  ni dipol boje ne interagiraju, dok na lijevoj strani polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  interagira s CGC jezgrom što je označeno točkom.

Član u kojemu samo kvarkovska petlja interagira s jezgrom, prikazan na slici (7.2), ima oblik:

$$\mathcal{M}_{2\lambda}^{(<>)}(k) = eg \int d^4x d^4y e^{ik \cdot x} \text{Tr}(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0><)}(x,y) \not{\mathcal{A}}_{(2<)} S_{(0<>)}(y,x)) \quad (7.10)$$

i jednak je nuli.



Slika 7.2: Dijagramski prikaz izraza (7.10) koji sadrži polje  $\mathcal{A}_{(2<)}$  i u kojemu kvarkovska petlja interagira s CGC jezgrom što označavamo točkama.

Uzrok tome je sljedeći. Iz (5.50) vidimo da je

$$\mathcal{A}_{(2<)}(y) \sim [T^a, T^b] \rho^a(y'_\perp) \rho^b(y''_\perp) \sim if^{abc} T^c \rho^a(y'_\perp) \rho^b(y''_\perp). \quad (7.11)$$

Pri računanju fizikalnih veličina moramo napraviti prosjek po naboju boje. Tijekom te procedure uvodimo sljedeću parametrizaciju:

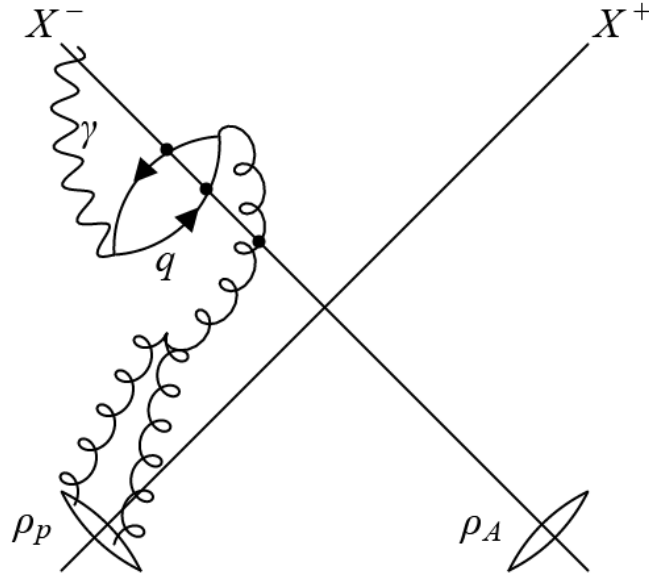
$$\langle \rho_p^a(p_{1\perp}) \rho_p^b(p_{2\perp}) \rangle_p = \frac{\delta^{ab}}{2\pi N_c C_F g^2} \left( \frac{p_{1\perp} + p_{2\perp}}{2} \right)^2 \int d^2 r_\perp e^{i(p_{1\perp} + p_{2\perp}) \cdot r_\perp} \times \frac{d\varphi_p(\frac{1}{2}(p_{1\perp} + p_{2\perp}) | r_\perp)}{d^2 r_\perp}, \quad (7.12)$$

pritom s  $d\varphi_p/d^2 r_\perp$  označavamo gluonsku distribucijsku funkciju protona po jedinici površine, dok je  $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$  Casimirov operator  $SU(N_c)$  grupe u fundamentalnoj reprezentaciji i  $r_\perp = x_\perp - y_\perp$ . Uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo da  $\mathcal{A}_{(2)}$  sadrži  $f^{aac}$  što je jednako nuli.

Doprinos člana u kojemu uz kvarkovsku petlju i gluonsko polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  interagira s jezgrom, prikazan na slici (7.3):

$$\mathcal{M}_{2\lambda}^{(><)}(k) = eg \int d^4 x d^4 y e^{ik \cdot x} \text{Tr}(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0<>)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(2>)} S_{(0><)}(y, x)) \quad (7.13)$$

također je jednak nuli. Uzrok tome isti je kao i u prethodnom slučaju.



Slika 7.3: Dijagramski prikaz doprinosa u kojemu polje  $\mathcal{A}_{(2)}$  i dipol boje interagiraju s CGC jezgrom prije anihilacije fotona.

Primjenom Feynmanovih pravila i Wickovog teorema [16], amplituda iznosi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda(k) = & -e \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, x)] \\
& + ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, x)] \text{Tr} [\not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) S_{(0)}(y, y)] \text{Tr} [\not{\mathcal{A}}_{(1)}(z) S_{(0)}(z, z)] \\
& + ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, x)] \text{Tr} [\not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) S_{(0)}(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(z) S_{(0)}(z, y)] \\
& + ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) S_{(0)}(y, x)] \text{Tr} [\not{\mathcal{A}}_{(1)}(z) S_{(0)}(z, z)] \\
& + ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, z) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(z) S_{(0)}(z, x)] \text{Tr} [\not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) S_{(0)}(y, y)] \\
& + ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) S_{(0)}(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1)}(z) S_{(0)}(z, x)]
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Trag u prethodnoj jednadžbi provodimo s obzirom na Diracove indekse i indekse boje.

Prvi član opisuje situaciju u kojoj nema interakcije protona s jezgrom. Uvrštavanjem izraza za propagator (5.53) i nakon Fourierove transformacije u prostor impulsa do-

bivamo:

$$\begin{aligned}
\int d^4x e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, x)] &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k) N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q)] \\
&\quad + 2\pi i \delta(k^+) \text{Tr}_c \left[ U(k_\perp) - (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_\perp) \right] \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \theta(q^+) \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{\epsilon} S_F(q-k)] \\
&\quad - 2\pi i \delta(k^+) \text{Tr}_c \left[ U^\dagger(-k_\perp) - (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_\perp) \right] \\
&\quad \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \theta(-q^+) \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{\epsilon} S_F(q-k)]. \quad (7.15)
\end{aligned}$$

Kinematički uvjeti iz delta funkcija nisu zadovoljeni za česticu koja se nalazi na ljusci mase. Naime, ona tada mora imati  $k^\pm > 0$ . Ovaj član zato ne doprinosi amplitudi. Budući da se prethodni izraz pojavljuje u drugom i trećem članu u (7.14), njihove doprinose također zanemarujemo. Nadalje, članovi koji sadrže izraz:

$$\begin{aligned}
\int d^4y \text{Tr} [\not{\mathcal{A}}_{(1)}(y) S_{(0)}(y, y)] &= \int d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c(\not{\mathcal{A}}_{(1)}^\mu(y)) \text{Tr}_D(\gamma_\mu S_F(q)) \\
&\quad + i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c \left[ \not{\mathcal{A}}_{(1)}^\mu(p_1) (U(-p_{1\perp}) - (2\pi)^2 \delta(p_{1\perp})) \right] \times \\
&\quad \times (2\pi) \delta(p_1^+) \theta(q^+) \text{Tr}_D(\gamma_\mu S_F(q) \not{\epsilon} S_F(q-p_1)) \\
&\quad - i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c \left[ \not{\mathcal{A}}_{(1)}^\mu(p_1) (U^\dagger(p_{1\perp}) - (2\pi)^2 \delta(p_{1\perp})) \right] \times \\
&\quad \times (2\pi) \delta(p_1^+) \theta(-q^+) \text{Tr}_D[\gamma_\mu S_F(q) \not{\epsilon} S_F(q-p_1)] \quad (7.16)
\end{aligned}$$

također neće doprinositi amplitudi. U prvom članu imamo  $\text{Tr}_c(\not{\mathcal{A}}_{(1)}^\mu(y))$ , što je jednako nuli. U drugom i trećem članu provodimo integraciju u kompleksnoj ravnini po longitudinalnoj  $q^-$  komponenti. Funkcija pod integralom ima singularitete u:

$$q_1^- = \frac{\omega_q^2}{2q^+} + \frac{i\epsilon}{2q^+} \quad (7.17)$$

i

$$q_2^- = p_1^- + \frac{\omega_{q-p}^2}{2q^+} + \frac{i\epsilon}{2q^+}. \quad (7.18)$$

Oni se oboje nalaze iznad (ispod) realne ovisno o predznaku  $q^+$ . Za integracijsku krivulju biramo realnu os s polukružnicom u negativnom (pozitivnom) području imaginarnog djela, što daje nulu.

Posljednji član u (7.14), uzimajući u obzir da se  $\mathcal{A}_{(1)}$  sastoji od dva doprinosa,  $\mathcal{A}_{(1<)}$  i  $\mathcal{A}_{(1>)}$ , zapisujemo na sljedeći način:

$$\mathcal{M}_\lambda(k) = \mathcal{M}_\lambda^{(<<)}(k) + \mathcal{M}_\lambda^{(<>)}(k) + \mathcal{M}_\lambda^{(><)}(k) + \mathcal{M}_\lambda^{(>>)}(k), \quad (7.19)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda^{(<<)}(k) = & ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_0(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_0(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_0(z, x)] + \\ & + y \leftrightarrow z, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda^{(<>)}(k) = & ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_0(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_0(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(z) S_0(z, x)] + \\ & + y \leftrightarrow z, \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda^{(><)}(k) = & ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_0(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(y) S_0(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_0(z, x)] + \\ & + y \leftrightarrow z, \end{aligned} \quad (7.22)$$

i

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda^{(>>)}(k) = & ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_0(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(y) S_0(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(z) S_0(z, x)] + \\ & + y \leftrightarrow z. \end{aligned} \quad (7.23)$$

U svim slučajevima tri kvarkovska propagatora formiraju petlju koja može interagirati s CGC jezgrom prije anihiliranja fotona.

Promotrimo izraz (7.20). On sadrži doprinos oblika u kojemu ni gluoni iz protona ni kvarkovska petlja ne interagira s jezgrom kao što je prikazano na lijevoj strani slike (7.4). Ovakav član označavamo s  $\mathcal{M}_\lambda^{-(<<)}(k)$  i on glasi:

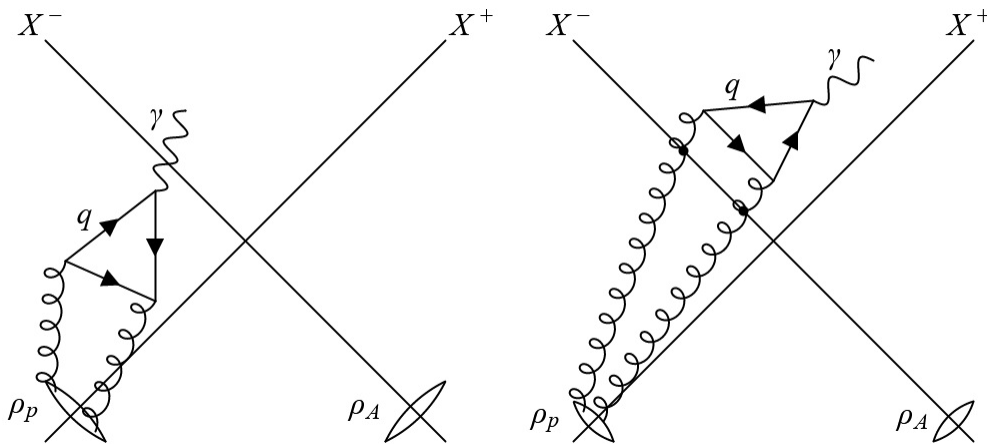
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda^{-(<<)}(k) = & \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x - y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_F(y - z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_F(z - x)] + \\ & + y \leftrightarrow z. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Primjenom nabojne konjugacije na drugi član u prethodnom izrazu dobivamo:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}_D [\gamma_\alpha S_F(x-z) \gamma_\nu S_F(z-y) \gamma_\mu S_F(y-x)] = \\
& = \text{Tr}_D [\gamma_\alpha S_F(x-z) \gamma_\nu S_F(z-y) \gamma_\mu S_F(y-x)]^T = \\
& = \text{Tr}_D [\gamma_\alpha^T S_F^T(y-x) \gamma_\mu^T S_F^T(z-y) \gamma_\nu^T S_F^T(x-z)] = \\
& = \text{Tr}_D [\hat{C} \gamma_\alpha^T \hat{C}^{-1} \hat{C} S_F^T(y-x) \hat{C}^{-1} \hat{C} \gamma_\mu^T \hat{C}^{-1} \hat{C} S_F^T(z-y) \hat{C}^{-1} \hat{C} \gamma_\nu^T \hat{C}^{-1} \hat{C} S_F^T(x-z) \hat{C}^{-1}] = \\
& = -\text{Tr}_D [\gamma_\alpha S_F(x-y) \gamma_\mu S_F(y-z) \gamma_\nu S_F(z-x)], \tag{7.25}
\end{aligned}$$

što je po iznosu jednako tragu po Diracovim indeksima prvog člana, samo suprotnog predznaka. Također, članovi posjeduju simetriju na zamjenu indeksa boje, tj. vrijedi  $\text{Tr}_c(T_F^a T_F^b) = \text{Tr}_c(T_F^b T_F^a)$  i stoga se zbrajaju u nulu. Prema [16], očekivana vrijednost fermionske petlje s neparnim brojem elektromagnetskih vrhova jednaka je nuli. Taj rezultat poznat je pod nazivom Furryev teorem. Analognim postupkom vidimo da je doprinos člana u kojemu su dva gluona iz protona interagirala s jezgrom dok nastala kvarkovska petlja nije interagirala. Ovaj doprinos označavamo s  $\mathcal{M}^{+(\gg)}$  i prikazan je na desnoj strani slike (7.4):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{+(\gg)}(k) = & \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-y) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(y) S_F(y-z) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(z) S_F(z-x)] + \\
& + y \leftrightarrow z. \tag{7.26}
\end{aligned}$$



Slika 7.4: Dijagramski prikaz izraza (7.24) i (7.26). Iz protona dolaza dva gluonska polja  $\mathcal{A}_{(1)}$  koja formiraju kvarkovsku petlju iz koje anihilira foton. Na lijevoj strani ni polja  $\mathcal{A}_{(1)}$  ni kvarkovska petlja ne interagiraju s CGC jezgrom, dok na desnoj strani polja interagiraju s jezgrom što označavamo s točkama.

Nadalje, možemo zanemariti i doprinose oblika:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0<>)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_0(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0)}(z, x)], \\
& \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_{(0<>)}(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0)}(z, x)], \\
& \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_{(0><)}(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0)}(z, x)] \\
& i \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_{(0)}(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0><)}(z, x)]. \quad (7.27)
\end{aligned}$$

U prvom slučaju to radimo jer je  $\mathcal{A}_{(<)}(y) \sim \theta(-y^+)$ , dok je  $S_{(0<>)}(x, y) \sim \theta(y^+)$ , što daje nulu. Analogno vrijedi u ostalim slučajevima. Jedini dozvoljeni doprinosi glase:

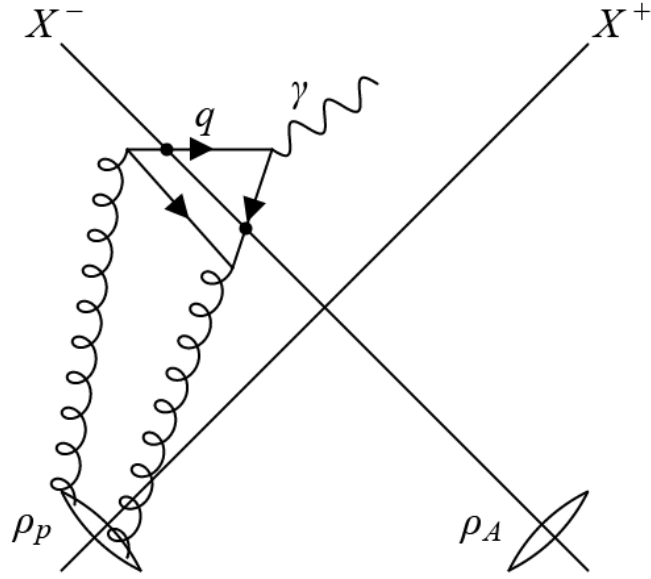
$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{(<<)}(k) = & \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0><)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_F(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_F(z, x)] + \\
& + y \leftrightarrow z \\
& + \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_F(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0<>)}(z, x)] + \\
& + y \leftrightarrow z \\
& + \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0><)}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_F(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0<>)}(z, x)] + \\
& + y \leftrightarrow z. \quad (7.28)
\end{aligned}$$

Ubacivanjem (5.60) i (5.61) u posljednji član prethodnog izraza, lako se vidi da se članovi koji sadrže  $S_{(0><)}^U(x, y)$  i  $S_{(0><)}^1(y, z)$ , te  $S_{(0><)}^1(x, y)$  i  $S_{(0><)}^{U\dagger}(y, z)$  respektivno krata s prva dva doprinosa u prethodnom izrazu. Stoga, jedini član koji doprinosi je:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{(<<)}(k) = & ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0><)}^U(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_F(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0<>)}^{U\dagger}(z, x)] + \\
& + y \leftrightarrow z \quad (7.29)
\end{aligned}$$

i on opisuje situaciju u kojoj dva gluona iz protona ne interagiraju, dok kvarkovska petlja interagira s CGC jezgrom, kao što je prikazano na slici (7.5).

Analognim postupkom, za preostala tri slučaja (7.21), (7.22) i (7.23) dobivamo



Slika 7.5: Dijagramski prikaz izraza (7.29). Gluonska polja  $\mathcal{A}_{(1)}$  iz protona ne interagiraju s CGC jezgrom. Nastala kvarkovska petlja interagira s CGC jezgrom, što označujemo točkama, prije anihilacije fotona.

sljedeće doprinose:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{(<>)}(k) &= ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0>>)}^U(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_{(0<>)}^{U\dagger}(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(z) S_F(z-x) \right] \\
&+ y \leftrightarrow z \\
&+ ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-y) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(y) S_{(0<>)}^{U\dagger}(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(z) S_{(0><)}^U(z, x) \right] \\
&+ y \leftrightarrow z,
\end{aligned} \tag{7.30a}$$

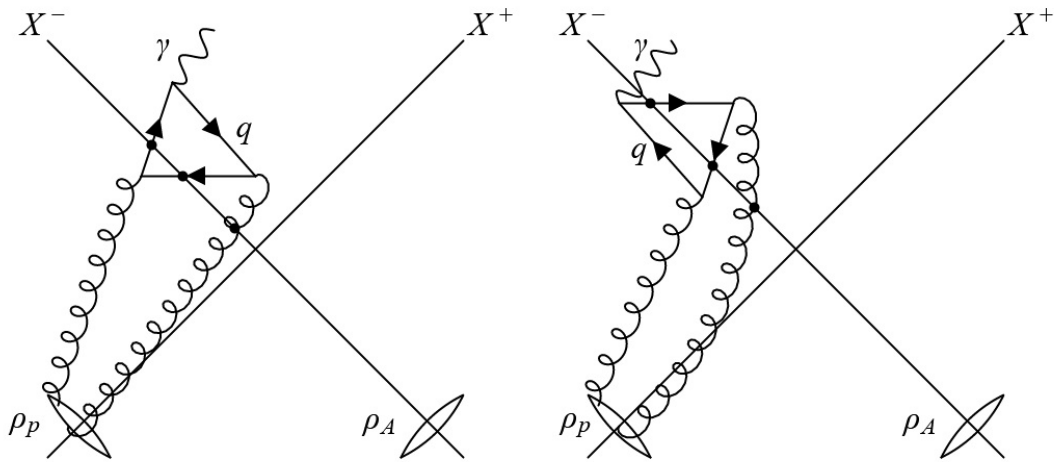
$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{(><)}(k) &= ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0<>)}^{U\dagger}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(y) S_{(0><)}^U(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_F(z-x) \right] \\
&+ y \leftrightarrow z \\
&+ ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-y) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(y) S_{(0><)}^U(y, z) \not{\mathcal{A}}_{(1<)}(z) S_{(0<>)}^{U\dagger}(z, x) \right] \\
&+ y \leftrightarrow z,
\end{aligned} \tag{7.30b}$$

i

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{(>>)}(k) &= ieg^2 \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \text{Tr} \left[ \not{\epsilon}_\lambda(k) S_{(0<>)}^{U\dagger}(x, y) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(y) S_F(y-z) \not{\mathcal{A}}_{(1>)}(z) S_{(0<>)}^U(z, x) \right] \\
&+ y \leftrightarrow z.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

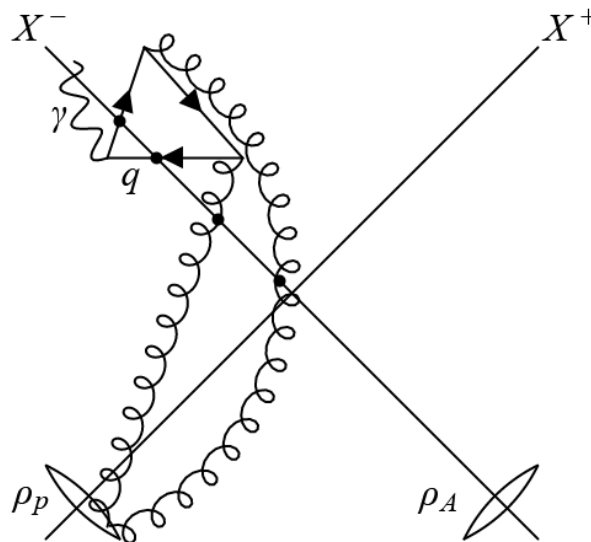


U amplitudama (7.30a) i (7.30b), prikazanima na slici (7.6), jedan od gluona iz protona uz kvarkovsku petlju interagira s CGC jezgrom.



Slika 7.6: Dijagramski prikaz izraza (7.30a) i (7.30b). Kvarkovska petlja interagira s CGC jezgrom, kao i jedno od dva gluonska polja  $\mathcal{A}_{(1)}$ , što je označeno točkama. Na lijevoj strani anihilacija fotona događa se poslije, a na desnoj prije interakcije s CGC jezgrom.

Posljednji član odgovara slučaju u kojemu su oba gluona uz kvarkovsku petlju interagirala s jezgrom kao što je prikazano na slici (7.7).



Slika 7.7: Dijagramski prikaz izraza (7.31). Kvarkovska petlja i oba gluonska polja  $\mathcal{A}_{(1)}$  interagiraju s CGC jezgrom, što je označeno točkama.

Amplitudu (7.31) prebacujemo u prostor impulsa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{(>>)}(k) &= ieg^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \\
&\times \delta(p^+) \delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \theta(-q^+) \theta(q^+ - k^+) \\
&\times \text{Tr}_D(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{\epsilon} S_F(q-p) \gamma^\mu S_F(q-p-p_1) \gamma^\nu S_F(q-p-p_1-p_2) \not{\epsilon} S_F(q-k)) \\
&\times \text{Tr}_c(U(p_\perp) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(p_1) \mathcal{A}_{(1>)}^\nu(p_2) U^\dagger(k_\perp - p_{1\perp} - p_{2\perp} - p_\perp)). \quad (7.32)
\end{aligned}$$

U prethodnom izrazu  $q$  je impuls u fermionskoj petlji,  $p_1$  i  $p_2$  su impulsi gluona iz protona, dok su  $p$  i  $p + p_1 + p_2 - k$  impulsi CGC gluona iz jezgre. Kinematičko ograničenje iz dviju theta funkcija daje  $q^+ < 0$  i  $q^+ > k^+$ , respektivno. Stoga vrijedi  $k^+ < 0$ . Čestica koja je na ljusci mase ne može zadovoljavati dani uvjet jer za nju vrijedi  $k^+ > 0$ . Time ni ovaj slučaj neće doprinosti.

## 7.2 Oderon u amplitudi

Primjenjujući operaciju nabojne konjugacije definirane u prethodnom poglavlju unutar traga po Diracovim indeksima dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}_D [\gamma_\alpha S_F(x-z_3) \gamma_{\alpha_3} S_F(z_3-z) \gamma_\nu S_F(z-y) \gamma_\mu S_F(y-z_1) \gamma_{\alpha_1} S_F(z_1-x)] = \\
&= \text{Tr}_D [\gamma_\alpha S_F(x-z_3) \gamma_{\alpha_3} S_F(z_3-z) \gamma_\mu S_F(z-y) \gamma_\nu S_F(y-z_1) \gamma_{\alpha_1} S_F(z_1-x)]^T = \\
&= \text{Tr}_D [\gamma_\alpha^T S_F^T(z_1-x) \gamma_{\alpha_1}^T S_F^T(y-z_1) \gamma_\nu^T S_F^T(z-y) \gamma_\mu^T S_F^T(z_3-z) \gamma_{\alpha_3}^T S_F^T(x-z_3)] = \\
&= \text{Tr}_D [C \gamma_\alpha^T C^{-1} C S_F^T(z_1-x) C^{-1} C \gamma_{\alpha_1}^T C^{-1} \dots C S_F^T(z_3-z) C^{-1} C \gamma_{\alpha_3}^T C^{-1} C S_F^T(x-z_3) C^{-1}] = \\
&= (-) \text{Tr}_D [\gamma_\alpha S_F(x-z_1) \gamma_{\alpha_1} S_F(z_1-y) \gamma_\mu S_F(y-z) \gamma_\nu S_F(z-z_3) \gamma_{\alpha_3} S_F(z_3-x)]. \quad (7.33)
\end{aligned}$$

Pritom smo iskoristili činjenicu da je trag matrice invarijantan na transponiranje. Budući da imamo neparan broj bozonskih vanjskih nogu u fermionskoj petlji, nakon nabojne konjugacije trag mijenja predznak. Kada bi imali paran broj vanjskih nogu, predznak bi ostao isti.

Sada doprinose u amplitudi (7.28), (7.30a) i (7.30b) možemo grupirati u parove s obzirom na predznak longitudinalnih plus komponenti koordinata u kojima se nalaze dva ulazna gluona iz protona ( $y$  i  $z$ ) i izlazni foton ( $x$ ). Pritom uvodimo oznake  $\mathcal{M}^+$  ( $\mathcal{M}^-$ ) za slučajeve u kojima se anihilacija fotona dogodila poslije (prije) interakcije

s CGC jezgrom:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{+(<<)}(k) &= \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \theta(x^+) \theta(-y^+) \theta(-z^+) \delta(z_1^+) \delta(z_3^+) \times \\
&\times \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-z_1) \not{\eta} S_F(z_1-y) \gamma_\mu S_F(y-z) \gamma_\nu S_F(z-z_3) \not{\eta} S_F(z_3-x)] \times \\
&\times (\text{Tr}_c(U(z_{1\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\mu(y) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(z) U^\dagger(z_{3\perp}) - \\
&- \text{Tr}_c(U(z_{3\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(z) \mathcal{A}_{(1<)}^\mu(y) U^\dagger(z_{1\perp}))), \tag{7.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{+(><)}(k) &= \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \theta(x^+) \theta(y^+) \theta(-z^+) \delta(z_2^+) \delta(z_3^+) \times \\
&\times \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-y) \gamma_\mu S_F(y-z_2) \not{\eta} S_F(z_2-z) \gamma_\nu S_F(z-z_3) \not{\eta} S_F(z_3-x)] \times \\
&\times (\text{Tr}_c(\mathcal{A}_{(1>)}^\mu(y) U(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(z) U^\dagger(z_{3\perp}) - \\
&- \text{Tr}_c(U(z_{3\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(z) U^\dagger(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(y))), \tag{7.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{-(>>)}(k) &= \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \theta(-x^+) \theta(y^+) \theta(-z^+) \delta(z_2^+) \delta(z_1^+) \times \\
&\times \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-z_1) \not{\eta} S_F(z_1-y) \gamma_\mu S_F(y-z_2) \not{\eta} S_F(z_2-z) \gamma_\nu S_F(z-x)] \times \\
&\times (\text{Tr}_c(U^\dagger(z_{1\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(y) U(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(z)) - \\
&- \text{Tr}_c(\mathcal{A}_{(1<)}^\nu(z) U^\dagger(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(y) U(z_{3\perp}))), \tag{7.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{-(<>)}(k) &= \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \theta(-x^+) \theta(-y^+) \theta(z^+) \delta(z_2^+) \delta(z_3^+) \times \\
&\times \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-y) \gamma_\mu S_F(y-z_2) \not{\eta} S_F(z_2-z) \gamma_\nu S_F(z-z_3) \not{\eta} S_F(z_3-x)] \times \\
&\times (\text{Tr}_c(\mathcal{A}_{(1<)}^\mu(y) U^\dagger(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\nu(z) U(z_{3\perp})) - \\
&- \text{Tr}_c(U^\dagger(z_{3\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\nu(z) U(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(y))), \tag{7.37}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{+(<>)}(k) &= \int d^4x d^4y d^4z e^{ik \cdot x} \theta(x^+) \theta(-y^+) \theta(z^+) \delta(z_2^+) \delta(z_1^+) \times \\
&\times \text{Tr}_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(x-z_1) \not{\eta} S_F(z_1-y) \gamma_\mu S_F(y-z_2) \not{\eta} S_F(z_2-z) \gamma_\nu S_F(z-x)] \times \\
&\times (\text{Tr}_c(U(z_{1\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\mu(y) U^\dagger(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\nu(z)) - \\
&- \text{Tr}_c(\mathcal{A}_{(1>)}^\nu(z) U(z_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(y) U^\dagger(z_{3\perp}))). \tag{7.38}
\end{aligned}$$

S koordinatama  $z_1$ ,  $z_2$  i  $z_3$  označili smo interakciju gluona iz jezgre s nastalim parom kvark-antikvark (dipolom boje). Budući da smo izraze za gluonska polja iz protona definirali u prostoru impulsa, prethodne amplitude također ćemo napisati u prostoru impulsa. U slučaju kada imamo dva gluona iz protona koja nisu interagirala s jezgrom, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{+(<<)}(k) = & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^+)(2\pi)\delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \times \\
& \times \theta(q^+)\theta(k^+ - q^+) \times \\
& \times \text{Tr}_D(\not{\epsilon}S_F(q)\not{n}S_F(q-p)\gamma_\perp S_F(q-p-p_1)\gamma_\perp S_F(q-p-p_1-p_2)\not{n}S_F(k-q)) \times \\
& \times (\text{Tr}_c(U(p_\perp)\mathcal{A}_{(1<)}^\mu(p_1)\mathcal{A}_{(1<)}^\nu(p_2)U^\dagger(p_\perp + p_{1\perp} + p_{2\perp} - k_\perp) - \\
& - \text{Tr}_c(U(k_\perp - p_\perp - p_{1\perp} - p_{2\perp})\mathcal{A}_{(1<)}^\nu(p_2)\mathcal{A}_{(1<)}^\mu(p_1)U^\dagger(-p_\perp))), \quad (7.39)
\end{aligned}$$

gdje je  $q$  impuls koji se nalazi u fermionskoj petlji,  $p_1$  i  $p_2$  su transverzalni impulsi koji nose gluoni iz protona, dok su  $p_\perp$  i  $p_\perp + p_{1\perp} + p_{2\perp} - k_\perp$  impulsi gluona iz jezgre. CGC u interakciji mijenja transverzalne komponente, dok longitudinalne ostaju iste i zato imamo delta funkcije.

Nadalje, možemo iskoristiti činjenicu da naboj boje nije direktno mjerljiva veličina. Stoga, tokom računanja fizikalnih vrijednosti, moramo napraviti prosjek po naboju boje. Budući da imamo dva izvora naboja boje, proton i jezgru, imamo dvije težinske funkcije  $W_p[x_p; \rho_p]$  i  $W_A[x_A; \rho_A]$  po kojima radimo usrednjenje (4.7):

$$\langle \mathcal{M}_\lambda^{+(<<)}(k) [\rho_p, \rho_A] \rangle = \int [d\rho_p] [d\rho_A] W_p[x_p; \rho_p] W_A[x_A; \rho_A] \mathcal{M}_\lambda^{+(<<)}(k) [\rho_p, \rho_A] \quad (7.40)$$

Tijekom usrednjavanja prema [13] uvodimo parametrizaciju:

$$\begin{aligned}
\langle \rho_p^a(p_{1\perp}) \rho_p^b(p_{2\perp}) \rangle_p = & \frac{\delta^{ab}}{2\pi N_c C_F g^2} \left( \frac{p_{1\perp} - p_{2\perp}}{2} \right)^2 \int d^2 r_\perp e^{i(p_{1\perp} + p_{2\perp}) \cdot r_\perp} \times \\
& \times \frac{d\varphi_p(\frac{1}{2}(p_{1\perp} - p_{2\perp})|r_\perp)}{d^2 r_\perp}. \quad (7.41)
\end{aligned}$$

Možemo reći da gluoni koji dolaze iz protona tvore singlet u boji, što vidimo iz

delta funkcije. Nadalje, primjenjujemo Fierzov identitet [2]:

$$t_{ik}^a t_{jl}^a = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N_c}\delta_{ik}\delta_{jl}). \quad (7.42)$$

Time za prvi član u prethodnom izrazu nakon vraćanja Wilsonovih linija u koordinatnu reprezentaciju dobivamo:

$$\begin{aligned} & \langle \text{Tr}_c(U(z_{1\perp})\mathcal{A}_{(1<)}^\mu(p_1)\mathcal{A}_{(1<)}^\nu(p_2)U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle = \\ & = \langle \mathcal{A}_{(1<)}^{a\mu}(p_1)\mathcal{A}_{(1<)}^{a\nu}(p_2) \rangle_p \langle \text{Tr}_c(U(z_{1\perp})t^a t^a U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle_A = \\ & = \langle \mathcal{A}_{(1<)}^{a\mu}(p_1)\mathcal{A}_{(1<)}^{a\nu}(p_2) \rangle_p \frac{1}{N_c} \langle \text{Tr}_c(U(z_{1\perp})U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle_A \end{aligned} \quad (7.43)$$

Primjenom istog identiteta za drugi član u (7.39) dobivamo:

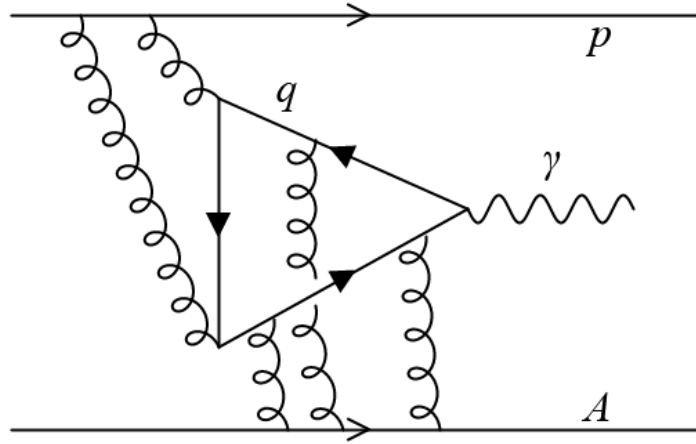
$$\begin{aligned} & \langle \text{Tr}_c(U(z_{3\perp})\mathcal{A}_{1<}^\nu(p_2)\mathcal{A}_{1<}^\mu(p_1)U^\dagger(z_{1\perp})) \rangle \\ & = \langle \mathcal{A}_{(1<)}^{a\mu}(p_1)\mathcal{A}_{(1<)}^{a\nu}(p_2) \rangle_p \frac{1}{N_c} \langle \text{Tr}_c(U(z_{3\perp})U^\dagger(z_{1\perp})) \rangle_A. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Konačno, uvršavanjem izraza za polje gluona iz protona (7.39) postaje:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_\lambda^{+(<<)}(k) \rangle & = \frac{\delta^{ab}}{2\pi N_c C_F g^2} \int d^2 r_\perp d^2 z_{1\perp} d^2 z_{3\perp} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \times \\ & \times \theta(q^+) \theta(k^+ - q^+) (2\pi) \delta(p^+) (2\pi) \delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \times \\ & \times e^{-ip_\perp \cdot z_{1\perp}} e^{i(p_\perp + p_{1\perp} + p_{2\perp} - k_\perp) \cdot z_{3\perp}} e^{i(p_{1\perp} + p_{2\perp}) \cdot r_\perp} \times \\ & \times \text{Tr}_D(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{n} S_F(q-p) \not{p}_{1\perp} S_F(q-p-p_1) \not{p}_{2\perp} \times \\ & \times S_F(q-p-p_1-p_2) \not{n} S_F(k-q)) \times \\ & \times \frac{1}{(p_1^+ + i\epsilon)(p_1^- - i\epsilon)(p_2^+ + i\epsilon)(p_2^- - i\epsilon)} \frac{1}{p_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2} \left( \frac{p_{1\perp} - p_{2\perp}}{2} \right)^2 \times \\ & \times \frac{d\varphi_p(\frac{1}{2}(p_{1\perp} - p_{2\perp})|r_\perp)}{d^2 r_\perp} \langle O(z_{1\perp}, z_{3\perp}) \rangle_A \end{aligned} \quad (7.45)$$

Lako se vidi da je razvojem Wilsonove linije (5.56) najniži doprinos koji je različit od nule je onaj koji sadrži tri gluona  $\mathcal{A}_{(0)}$  koji dolaze iz jezgre, kako je prikazano na slici (7.8).

Član koji će sadržavati jedan  $\mathcal{A}_{(0)}$  nije singlet u boji pa time ne može tvoriti jezgru. Doprinos koji ide kao  $A_0^2$ , odnosno koji sadrži dva gluona iz jezgre je, kao što smo pokazali u sedmom poglavlju, automatski nula jer je amplituda proporcionalana



Slika 7.8: Dijagramski prikaz doprinosa u najnižem redu izraza (7.45). Tri gluona iz jezgre interagiraju s kvarkovskom petljom i predstavljaju oderon  $O(z_1, z_3)$ .

oderonu. Ovo vrijedi i sasvim općenito, odnosno kada ne upotrebljavamo visoko-energetsku aproksimaciju pod kojom gluoni iz jezgre međudjeluju s kvarkovskom petljom. Naime, dva gluona iz jezgre vode na kvarkovsku petlju s pet vrhova, koja mora iščezavati zbog C-pariteta.

Za slučajeve u kojima je jedan od gluona interagirao s jezgrom u prostoru impulsa dobivamo sljedeće izraze:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{(><)}(k) = & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^+) (2\pi)\delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \times \\
& \times \theta(-q^+) \theta(q^+ + p_2^+) \times \\
& \times (Tr_D(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(k+q) \gamma_\mu S_F(k+q-p_1) \not{n} S_F(q-p-p_1+k) \gamma_\nu \times \\
& \times S_F(q-p-p_2-p_1+k) \not{n} S_F(q))) \times \\
& \times (Tr_c(\mathcal{A}_{(1>)}^\mu(p_1) U(p_\perp) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(p_2) U^\dagger(p_{1\perp} + p_{2\perp} + p_\perp - k_\perp)) - \\
& - Tr_c(U(k_\perp - p_\perp - p_{1\perp} - p_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(p_2) U^\dagger(-p_\perp) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(p_1))), \quad (7.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{-(><)}(k) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^+) (2\pi)\delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \times \\
&\times \theta(-q^+) \theta(q^+ - p_1^+) \times \\
&\times (Tr_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{\epsilon} S_F(k+q-p_1) \gamma_\mu S_F(q+p_2+p_1+p-k) \times \\
&\times \not{\epsilon} S_F(q-k+p_2) \gamma_\nu S_F(q-k)]) \times \\
&\times (Tr_c(U^\dagger(p_{1\perp} + p_{2\perp} + p_\perp - k_\perp) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(p_1) U(p_\perp) \mathcal{A}_{(1<)}^\nu(p_2)) - \\
&- Tr_c(\mathcal{A}_{(1<)}^\nu(p_2) U^\dagger(-p_\perp) \mathcal{A}_{(1>)}^\mu(p_1) U(k_\perp - p_\perp - p_{1\perp} - p_{2\perp}))), \quad (7.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{-(<>)}(k) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^+) (2\pi)\delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \times \\
&\times \theta(q^+) \theta(-q^+ - p_2^+) \times \\
&\times Tr_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(k+q) \gamma_\mu S_F(k+q-p_1) \not{\epsilon} S_F(p+q+p_2) \gamma_\nu S_F(q+p) \not{\epsilon} S_F(q)] \times \\
&\times (Tr_c(\mathcal{A}_{(1<)}^\mu(p_1) U^\dagger(p_{1\perp} + p_{2\perp} + p_\perp - k_\perp) \mathcal{A}_{(1>)}^\nu(p_2) U(p_\perp)) - \\
&- Tr_c(U^\dagger(-p_\perp) \mathcal{A}_{(1>)}^\nu(p_2) U(k_\perp - p_\perp - p_{1\perp} - p_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\mu(p_1))) \quad (7.48)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\lambda^{+(<>)}(k) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)\delta(p^+) (2\pi)\delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \times \\
&\times \theta(q^+) \theta(-q^+ + p_1^+) \times \\
&\times Tr_D [\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{\epsilon} S_F(q-p) \gamma_\mu S_F(q-p-p_1) \not{\epsilon} S_F(q-k+p_2) \gamma_\nu S_F(q-k)] \times \\
&\times (Tr_c(U(p_\perp) \mathcal{A}_{(1<)}^\mu(p_1) U^\dagger(p_{1\perp} + p_{2\perp} + p_\perp - k_\perp) \mathcal{A}_{(1>)}^\nu(p_2)) - \\
&- Tr_c(\mathcal{A}_{(1>)}^\nu(p_2) U(k_\perp - p_\perp - p_{1\perp} - p_{2\perp}) \mathcal{A}_{(1<)}^\mu(p_1) U^\dagger(-p_\perp)). \quad (7.49)
\end{aligned}$$

Izraz za gluon iz protona koji je interagirao s jezgrom sadrži Wilsonovu liniju u adjungiranoj reprezentaciji. Možemo ju prebaciti u fundamentalnu reprezentaciju nakon vraćanja Wilsonovih linija u koordinatni prostor s pomoću izraza [10]:

$$T^b V^{ba}(y_\perp) = U(y_\perp) T^a U^\dagger(y_\perp). \quad (7.50)$$

Tada za prvi član u izrazu (7.46) imamo:

$$\begin{aligned}
& \langle \text{Tr}_c(T^b V^{ba}(y_\perp) U(z_{2\perp}) T^c U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle = \\
& = V^{ba}(y_\perp) \langle \text{Tr}_c(T^b U(z_{2\perp}) T^c U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle = \\
& = \langle \text{Tr}_c(U(y_\perp) T^a U^\dagger(y_\perp) U(z_{2\perp}) T^a U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle. \tag{7.51}
\end{aligned}$$

Pritom smo u zadnjem redu iskoristili (7.41). Konačno, izraz (7.51) nakon primjene Fierzova identiteta postaje:

$$\begin{aligned}
& \langle \text{Tr}_c(T^b V^{ba}(y_\perp) U(z_{2\perp}) T^c U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle = \\
& = \frac{1}{2} \langle \text{Tr}_c(U(y_\perp) U^\dagger(z_{3\perp})) \text{Tr}_c(U(z_{2\perp}) U^\dagger(y_\perp)) \rangle - \\
& - \frac{1}{2N_c} \langle \text{Tr}_c(U(z_{2\perp}) U^\dagger(z_{3\perp})) \rangle. \tag{7.52}
\end{aligned}$$

Analognim postupkom za drugi član u (7.46) dobivamo:

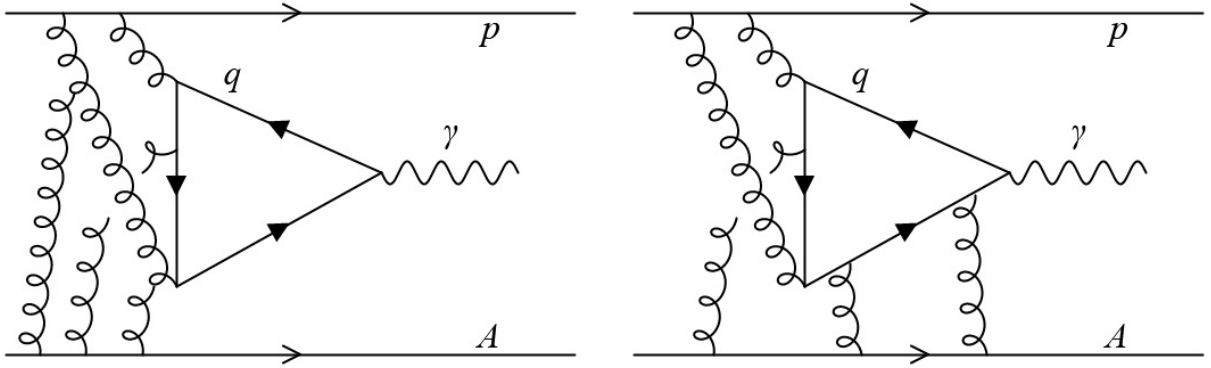
$$\begin{aligned}
& \langle \text{Tr}_c(U(z_{3\perp}) T^c U^\dagger(z_{2\perp}) T^b V^{ba}(y_\perp)) \rangle = \\
& = \frac{1}{2} \langle \text{Tr}_c(U(z_{3\perp}) U^\dagger(y_\perp)) \text{Tr}_c(U(y_\perp) U^\dagger(z_{2\perp})) \rangle - \\
& - \frac{1}{2N_c} \text{Tr}_c(U(z_{3\perp}) U^\dagger(z_{2\perp})). \tag{7.53}
\end{aligned}$$

Izraz za amplitudu (7.46) stoga je:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_\lambda^{(><)}(k) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{2\pi N_c C_F g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^2 k_{1\perp}}{(2\pi)^2} d^2 z_{2\perp} d^2 z_{3\perp} d^2 y_\perp d^2 r_\perp \times \\
& \times (2\pi) \delta(p^+) (2\pi) \delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \theta(-q^+) \theta(q^+ - p_2^+) \times \\
& \times e^{i(p_\perp + p_{1\perp} + p_{2\perp} - k_\perp) \cdot z_{3\perp}} e^{-ip_\perp \cdot z_{2\perp}} e^{-i(p_{1\perp} - k_{1\perp}) \cdot y_\perp} e^{i(k_{1\perp} + p_{2\perp}) \cdot r_\perp} \times \\
& \times \frac{C^\mu(p_1; k_{1\perp}, p_{1\perp} - k_{1\perp})}{p_1^2} \frac{1}{k_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2} \frac{1}{(p_2^+ + i\varepsilon)(p_2^- - i\varepsilon)} \times \\
& \times \left( \frac{k_{1\perp} - p_{2\perp}}{2} \right)^2 \frac{d\varphi_p(\frac{1}{2}(k_{1\perp} - p_{2\perp})|r_\perp)}{d^2 r_\perp} \times \\
& \times (\text{Tr}_D(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q+k) \gamma_\mu S_F(k+q-p_1) \not{n} S_F(q-p-p_1+k)) \times \\
& \times \not{p}_{2\perp} S_F(q-p-p_2-p_1+k) \not{n} S_F(q)) \times \\
& \times (\langle O(y_\perp, z_{2\perp}) \rangle_A + \langle O(z_{3\perp}, y_\perp) \rangle_A - \frac{1}{2N_c} \langle O(z_{3\perp}, z_{2\perp}) \rangle_A + \\
& - \langle P(z_{2\perp}, y_\perp) O(y_\perp, z_{3\perp}) \rangle_A + \langle P(y_\perp, z_{3\perp}) O(z_{2\perp}, y_\perp) \rangle_A). \tag{7.54}
\end{aligned}$$



Doprinosi u najnižem redu prikazani su na slici (7.9). Oni sadrže samo oderon koji je predstavljen s tri gluona koji dolaze iz jezgre. Uz kvarkovsku petlju on može interagirati i s jednim gluonom koji dolazi iz protona kao što je prikazano na lijevoj strani slike (7.9). Doprinos zadnjeg člana u prethodnom izrazu sadrži pet gluona koji dolaze iz jezgre.



Slika 7.9: Dijagramski prikaz izraza doprinosa u najnižem redu izraza (7.54)

Analognim postupkom za ostale slučajeve dobivamo:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_\lambda^{(><)}(k) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{2\pi N_c C_F g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^2 k_{1\perp}}{(2\pi)^2} d^2 z_{2\perp} d^2 z_{1\perp} d^2 y_\perp d^2 r_\perp \times \\
&\times (2\pi) \delta(p^+) (2\pi) \delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \theta(-q^+) \theta(q^+ - p_1^+) \times \\
&\times e^{i(p_\perp + p_{1\perp} + p_{2\perp} - k_\perp) \cdot z_{1\perp}} e^{-ip_\perp \cdot z_{2\perp}} e^{-i(p_{1\perp} - k_{1\perp}) \cdot y_\perp} e^{i(k_{1\perp} + p_{2\perp}) \cdot r_\perp} \times \\
&\times \frac{C^\mu(p_1; k_{1\perp}, p_{1\perp} - k_{1\perp})}{p_1^2} \frac{1}{k_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2} \frac{1}{(p_2^+ + i\epsilon)(p_2^- - i\epsilon)} \times \\
&\times \left( \frac{k_{1\perp} - p_{2\perp}}{2} \right)^2 \frac{d\varphi_p(\frac{1}{2}(k_{1\perp} - p_{2\perp})|r_\perp)}{d^2 r_\perp} \times \\
&\times (\text{Tr}_D(\not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{p} S_F(q + p + p_1 + p_2 - k) \gamma_\mu S_F(q + p + p_2 - k) \times \\
&\times \not{p} S_F(q - k + p_2) \not{p}_{2\perp} S_F(q - k))) \times \\
&\times (\langle \mathcal{O}(z_{1\perp}, y_\perp) \rangle_A + \langle \mathcal{O}(y_\perp, z_{2\perp}) \rangle_A + \frac{1}{2N_c} \langle \mathcal{O}(z_{2\perp}, z_{3\perp}) \rangle_A + \\
&+ \langle \mathcal{P}(z_{2\perp}, y_\perp) \mathcal{O}(y_\perp, z_{1\perp}) \rangle_A + \langle \mathcal{P}(y_\perp, z_{1\perp}) \mathcal{O}(z_{2\perp}, y_\perp) \rangle_A)
\end{aligned} \tag{7.55}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_\lambda^{-(\langle \rangle)}(k) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{2\pi N_c C_F g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^2 k_{2\perp}}{(2\pi)^2} d^2 z_{2\perp} d^2 z_{3\perp} d^2 z_{\perp} d^2 r_{\perp} \times \\
&\times (2\pi) \delta(p^+) (2\pi) \delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \theta(q^+) \theta(p_1^+ - q^+ - k^+) \times \\
&\times e^{-ip_{\perp} \cdot z_{2\perp}} e^{i(p_{\perp} + p_{1\perp} + p_{2\perp} - k_{\perp}) \cdot z_{3\perp}} e^{-i(p_{2\perp} - k_{2\perp}) \cdot z_{\perp}} e^{i(p_{1\perp} + k_{2\perp}) \cdot r_{\perp}} \times \\
&\times \frac{C^v(p_2; k_{2\perp}, p_{2\perp} - k_{2\perp})}{p_2^2} \frac{1}{k_{2\perp}^2 p_{1\perp}^2} \frac{1}{(p_1^+ + i\epsilon)(p_1^- - i\epsilon)} \times \\
&\times \left( \frac{p_{1\perp} - k_{2\perp}}{2} \right)^2 \frac{d\varphi_p(\frac{1}{2}(p_{1\perp} - k_{2\perp})|r_{\perp})}{d^2 r_{\perp}} \times \\
&\times \text{Tr}_D \left[ \not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(k+q) \not{p}_{1\perp} S_F(k+q-p_1) \not{h} S_F(q+p+p_2) \not{\gamma}_V S_F(q+p) \not{h} S_F(q) \right] \times \\
&\times (\langle \mathcal{O}(z_{3\perp}, z_{\perp}) \rangle_A + \langle \mathcal{O}(z_{\perp}, z_{2\perp}, z_{\perp}) \rangle_A + \frac{1}{2N_c} \langle \mathcal{O}(z_{2\perp}, z_{3\perp}) \rangle_A + \\
&+ \langle P(z_{2\perp}, z_{\perp}) \mathcal{O}(z_{\perp}, z_{3\perp}) \rangle_A + \langle P(z_{\perp}, z_{3\perp}) \mathcal{O}(z_{2\perp}, z_{\perp}) \rangle_A) \tag{7.56}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{M}_\lambda^{+(\langle \rangle)}(k) \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{2\pi N_c C_F g^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^2 k_{2\perp}}{(2\pi)^2} d^2 z_{2\perp} d^2 z_{1\perp} d^2 z_{\perp} d^2 r_{\perp} \times \\
&\times (2\pi) \delta(p^+) (2\pi) \delta(p^+ + p_1^+ + p_2^+ - k^+) \theta(q^+) \theta(q^+ - p_1^+) \times \\
&\times e^{i(p_{\perp} + p_{1\perp} + p_{2\perp} - k_{\perp}) \cdot z_{2\perp}} e^{-ip_{\perp} \cdot z_{1\perp}} e^{-i(p_{2\perp} - k_{2\perp}) \cdot z_{\perp}} e^{i(p_{1\perp} + k_{2\perp}) \cdot r_{\perp}} \times \\
&\times \frac{C^v(p_2; k_{2\perp}, p_{2\perp} - k_{2\perp})}{p_2^2} \frac{1}{k_{2\perp}^2 p_{1\perp}^2} \frac{1}{(p_1^+ + i\epsilon)(p_1^- - i\epsilon)} \times \\
&\times \left( \frac{p_{1\perp} - k_{2\perp}}{2} \right)^2 \frac{d\varphi_p(\frac{1}{2}(p_{1\perp} - k_{2\perp})|r_{\perp})}{d^2 r_{\perp}} \times \\
&\times \text{Tr}_D \left[ \not{\epsilon}_\lambda(k) S_F(q) \not{h} S_F(q-p) \not{p}_{1\perp} S_F(q-p-p_1) \not{h} S_F(q-k+p_2) \not{\gamma}_V S_F(q-k) \right] \times \\
&\times (\langle \mathcal{O}(z_{1\perp}, z_{\perp}) \rangle_A + \langle \mathcal{O}(z_{\perp}, z_{2\perp}) \rangle_A + \frac{1}{2N_c} \langle \mathcal{O}(z_{2\perp}, z_{1\perp}) \rangle_A + \\
&+ \langle P(z_{2\perp}, z_{\perp}) \mathcal{O}(z_{\perp}, z_{1\perp}) \rangle_A + \langle P(z_{\perp}, z_{3\perp}) \mathcal{O}(z_{2\perp}, z_{\perp}) \rangle_A) \tag{7.57}
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem redu prepoznali definicije pomerona i oderona, što je očekivano iz simetrije problema. Konačna amplituda za produkciju fotona tada će biti jednaka sumi svih prethodno navedenih amplituda:

$$\langle \mathcal{M}_\lambda(k) \rangle = ieg^2 (\langle \mathcal{M}_\lambda^{(\langle \rangle)}(k) \rangle + \langle \mathcal{M}_\lambda^{+(\langle \rangle)}(k) \rangle + \langle \mathcal{M}_\lambda^{-(\langle \rangle)}(k) \rangle + \langle \mathcal{M}_\lambda^{+(\langle \rangle)}(k) \rangle + \langle \mathcal{M}_\lambda^{-(\langle \rangle)}(k) \rangle). \tag{7.58}$$

## 8 Zaključak

U ovome radu ukratko je predstavljeno stanje hadronske materije na visokim energijama, koje se naziva staklasti kondenzat boje (CGC), i efektivna teorija polja koja ga opisuje. Ova teorija motivirana je neskladom udarnog presjeka na visokim energijama s unitarnošću. Karakterizirana je velikim okupacijskim brojem gluona, što omogućuje zanemarivanje kvantnih efekata.

U drugom dijelu rada dan je eksplicitan račun amplitude za dvostruku difrakciju fotona unutar CGC formalizma te dilute-dense aproksimacije. Navedeno uključuje proizvoljan broj raspršenja na gluonima iz jezgre i do dva raspršenja na gluonima iz protona, što je ujedno i prvi neiščežavajući doprinos u ovome procesu. Direktno je utvrđeno da ovaj proces nužno proizlazi kroz interakciju pomerona i oderona u početnome stanju. U granici u kojoj je gluonsko polje jezgre rijetko, potvrđeno je da se ovaj proces svodi na izmjenu tri gluona iz jezgre.

Produkcija fotona u dvostruko-difrakcijskom sudaru protona i jezgre ima u amplitudi vjerojatnosti doprinose koji su proporcionalni samo oderonu. Zbog toga navedeni proces može biti potencijalni signal za oderon. Sljedeći koraci u istraživanju fenomenološkog značenja ovoga kanala su:

1. Analitički izračunati u amplitudi light-cone impulsne integrale, te analitički izračunati integral po kvarkovskoj petlji.
2. Izračunati udarni presjek prema sljedećoj formuli:

$$\frac{d\sigma}{d^2k_{\perp}d\eta} = \int d^2b_{\perp} \frac{dP^{\gamma}(b_{\perp})}{d^2k_{\perp}d\eta}, \quad (8.1)$$

gdje je  $b$  udarni parametar, dok s  $dP^{\gamma}(b_{\perp})$  označavamo diferencijal vjerojatnosti produkcije fotona impulsa  $k$ , rapiditeta  $\eta = \frac{1}{2} \ln(k^+/k^-)$  i polarizacije  $\lambda$ :

$$\frac{dP^{\gamma}(b_{\perp})}{d^2k_{\perp}d\eta} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \sum_{spin} |\langle \mathcal{M}_{\lambda}(k) \rangle|^2. \quad (8.2)$$

Ovdje se argumenti distribucijskih funkcija pomiću za  $b$  odnosno ishodište koordinatnog sustava.

3. Numerički izračunati pomeron i oderon distribucijske funkcije iz realnog i imaginarnog dijela Balitsky-Kovchegov jednadžbe gdje se uzima eksplicitno u obzir i ovisnost o parametru sudara  $b$ .

4. Numerički integrirati preostale integrale po transverzalnim impulsima. Pronaći  $p_{\perp}$  distribuciju udarnog presjeka kao i ukupni luminozitet te procijeniti mogućnost detekcije na LHC-u.

# Dodaci

## Dodatak A SU(N)

SU(N) je grupa  $N \times N$  unitarnih matrica,  $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ , za koje vrijedi  $\det(U) = 1$ . Generatori SU(N) grupe,  $T^a$  ( $a=1,2,\dots,N^2-1$ ), hermitske su matrice koje zadovoljavaju komutacijsku relaciju:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (\text{A.1})$$

gdje su  $f^{abc}$  realne, antisimetrične strukturne konstante normalizirane uvjetom:

$$f^{abc}f^{bcd} = C_2(G, N)\delta^{ab}. \quad (\text{A.2})$$

Faktor  $C_2(G, N) = N$  svojstvena je vrijednost Casimirove invarijante za adjungiranu reprezentaciju dimenzije  $N^2 - 1$ , koju predstavljamo matricama  $(T^a)^{bc} = if^{abc}$ . Svojstvenu vrijednost invarijante za fundamentalnu reprezentaciju  $C_2(f, N)$  zadajemo s pomoću izraza:

$$T^a T^a = C_2(f, N) = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (\text{A.3})$$

Fundamentalna reprezentacija  $T^a = \lambda^a/2$  je  $N$ -dimentionalna. Za  $N = 2$   $\lambda^a$  odgovaraju Paulijevim matricama, dok ih za  $N = 3$  predstavljamo Gell-Mannovim matricama:

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\lambda^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\lambda^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Za tragove generatora vrijede relacije:

$$\text{Tr}(T^a) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b) = C(f) \delta^{ab} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Tr}([T^a, T^b] T^c) = iC(f) f^{abc}, \quad (\text{A.9})$$

gdje je  $C(f)$  Dykinov indeks koji u fundamentalnoj reprezentaciji iznosi  $1/2$ .

Strukturne konstante zadovoljavaju Jakobijev identitet:

$$f^{abe} f^{cde} + f^{ace} f^{dbe} + f^{ade} f^{bce} = 0. \quad (\text{A.10})$$

## Literatura

- [1] Javier L Albacete and Cyrille Marquet. Gluon saturation and initial conditions for relativistic heavy ion collisions. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 76:1–42, 2014.
- [2] VI Borodulin, RN Rogalyov, and SR Slabospitskii. Core 3.1 (compendium of relations, version 3.1). *arXiv preprint arXiv:1702.08246*, 2017.
- [3] Anthony Duncan. *The conceptual framework of quantum field theory*. Oxford University Press, 2012.
- [4] Francois Gelis, Edmond Iancu, Jamal Jalilian-Marian, and Raju Venugopalan. The color glass condensate. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 60:463–489, 2010.
- [5] Yoshitaka Hatta, E Iancu, K Itakura, and L McLerran. Odderon in the color glass condensate. *Nuclear Physics A*, 760(1-2):172–207, 2005.
- [6] Yoshimasa Hidaka and Kenji Fukushima. Two-gluon production and longitudinal correlations in the color glass condensate. *Nuclear Physics A*, 813(1-2):171–197, 2008.
- [7] Jamal Jalilian-Marian, Alex Kovner, Andrei Leonidov, and Heribert Weigert. The bfgl equation from the wilson renormalization group. *Nuclear Physics B*, 504(1-2):415–431, 1997.
- [8] Sangyong Jeon and Raju Venugopalan. Classical odderon in qcd at high energies. *Physical Review D*, 71(12):125003, 2005.
- [9] Yuri V Kovchegov and Eugene Levin. *Quantum chromodynamics at high energy*. Cambridge University Press, 2012.
- [10] Yuri V Kovchegov and Matthew D Sievert. New mechanism for generating a single transverse spin asymmetry. *Physical Review D*, 86(3):034028, 2012.
- [11] Alex Kovner and Urs Achim Wiedemann. Eikonal evolution and gluon radiation. *Physical Review D*, 64(11):114002, 2001.

- [12] Alan D Martin. Proton structure, partons, qcd, dglap and beyond. *arXiv preprint arXiv:0802.0161*, 2008.
- [13] Mauricio Martinez, Matthew D Sievert, and Douglas E Wertepny. Multiparticle production at mid-rapidity in the color-glass condensate. *Journal of High Energy Physics*, 2019(2):24, 2019.
- [14] Larry McLerran and Raju Venugopalan. Fock space distributions, structure functions, higher twists, and small x. *Physical Review D*, 59(9):094002, 1999.
- [15] Alfred H Mueller. A simple derivation of the jimwlk equation. *Physics Letters B*, 523(3-4):243–248, 2001.
- [16] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Frontiers in Physics. Avalon Publishing, 1995.
- [17] Mark Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [18] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields: volume 3, supersymmetry*. Cambridge university press, 2005.