

Mjere sistemskog rizika na kompleksnim mrežama

Klinčić, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:252933>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Luka Klinčić

MJERE SISTEMSKOG RIZIKA NA
KOMPLEKSNIM MREŽAMA

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Luka Klinčić

Diplomski rad

**Mjere sistemskog rizika na
kompleksnim mrežama**

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Hrvoje Štefančić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2021.

Hvala mojoj obitelji, na bezuvjetnoj potpori svim interesima tijekom mog života, a posebno onim akademskim.

Hvala prof. Štefančiću, na upoznavanju s potpuno novom stranom znanosti te usmjerenju i savjetima koji su doveli do ovog rada.

Hvala Sandri, na pomoći s dizajnom, organizacijskim savjetima i činjenju procesa nastanka rada ljepšim.

Sažetak

Cilj ovog rada je modelirati financijske sustave kompleksnim mrežama te razmotriti nekoliko mjera sistemskog rizika koje kao ulaznu informaciju imaju jedino iznos međubankarskih investicija. Kao mehanizam širenja i amplifikacije inicijalnog financijskog šoka na mreži korišten je *DebtRank* algoritam, a mreža banaka modelirana je Erdős-Rényi nasumičnim grafom. Razvijenim mjerama procjenjujemo rizik od triju kategorija inicijalnih financijskih šokova: uniformnog, lokaliziranog i općeg višeparametarskog šoka te je za svaku od njih ispitana ovisnost iznosa mjere o pojedinom parametru mreže, što je postignuto usrednjivanjem veličine na ansamblu mnoštva mreža.

Ključne riječi: kompleksni sustavi, kompleksne mreže, sistemski rizik, Erdős-Rényi graf, *DebtRank* algoritam, makroekonomski šok

Measures of systemic risk on complex networks

Abstract

The goal of this thesis is to model financial systems using complex networks framework and consider several measures of systemic risk that would use only inter-bank investments as input information. Dynamics of financial shock spreading and amplification was determined by the *DebtRank* algorithm which was applied to the Erdős-Rényi random graph model. The developed measures tackle three types of initial financial shocks: uniform, localised and general multiparameter shocks and each of them was further analysed in dependence on network parameters by averaging over an ensemble of many networks.

Keywords: complex systems, complex networks, systemic risk, Erdős-Rényi graph, *DebtRank* algorithm, macroeconomic shock

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Kompleksni sustavi	3
2.1	Kompleksnost	3
2.2	Izranjajuće pojave	5
2.3	Razumijevanje kompleksnih sustava	6
3	Kompleksne mreže	9
3.1	Osnovni pojmovi i definicije	9
3.2	Statistička svojstva i bitne veličine	12
3.3	Erdős-Rényi model	16
3.4	Procesi širenja	20
4	Sistemska rizik	24
4.1	Osnovni ekonomski pojmovi	25
4.2	<i>DebtRank</i> algoritam	26
5	Istraživanje parametarskog prostora inicijalnog financijskog pogoršanja	31
5.1	Mjere sistemskog rizika	31
5.2	Jednostavan slučaj - mreže s $n \leq 3$ čvora	37
5.3	Generalizacija - Erdős-Rényi ansambl	42
6	Zaključak	54
	Dodaci	56
A	Kod	56
A.1	Generiranje mreže	56
A.2	Uniformni šok	57
A.3	Lokalizirani šok	61
A.4	Hipervolumen	65
	Literatura	70

1 Uvod

Promatrajući mnoge naizgled sasvim različite realne sustave, kao što su primjerice plin, ljudsko tijelo ili atmosfera, potaknuti smo na razmišljanje o tome što možemo univerzalno reći o tim sustavima. Drugim riječima, pitamo se koje zaključke možemo izvesti analizirajući sam sustav i interakcije unutar njega, u odnosu na promatranje isključivo njegovih sastavnica. Tim područjem bavi se znanost o kompleksnim sustavima.

Općenito, kompleksni sustavi su sustavi čije je ponašanje teško opisati zbog brojnosti njihovih sastavnica, različitih ovisnosti te kompleksnosti interakcija među njima. Iz tih odnosa, međutim, proizlaze temeljna svojstva kompleksnih sustava kao što su nelinearnost, izranjajuće pojave (*engl. emergent phenomena*), povratne veze te prilagodba sustava okolini.

Pogledamo li kompleksni sustav, specifično njegove podsustave i međudjelovanja među njima, kao mrežu vrhova i bridova između njih, govorimo o kompleksnoj mreži. Područje kompleksnih mreža podskup je znanosti o kompleksnim sustava i jedno je od aktivnijih i primjenjivijih područja unutar te domene, ali i općenito znanosti.

Razvijene unutar formalizma statističke fizike, kompleksne mreže nalaze primjenu u brojnim područjima van fizike, primjerice u ekonomiji, računarstvu, transportu, sociologiji, epidemiologiji itd. Osim što je primjenjiva na veoma različitim realnim sustavima, znanost o kompleksnim mrežama objedinjuje i mnogobrojne znanstvene discipline, najistaknutije od kojih su teorija grafova iz matematike, statistička fizika i fizika neuređenih sustava iz fizike, strojno učenje i znanost o podacima (*engl. data science*) iz računarstva i sl.

Radi ilustracije, navedimo nekoliko primjera realnih sustava koje možemo modelirati kompleksnim mrežama. Bankarski sustav države možemo pojednostavljeno gledati kao mrežu financijskih sastavnica koje međudjeluju investicijama i posuđivanjem kapitala između njih. U takvom sustavu financijske ustanove predstavljaju vrhove, a protok novca između pojedinih banaka bridove među njima. Ovakve sustave ćemo pobliže proučavati i pokušati opisati u nastavku ovog rada.

Još jedan klasičan primjer kompleksne mreže su neuroni i sinapse koji čine živčani sustav organizma. Ova mreža izrazito velike kompleksnosti daje inteligentnim orga-

nizmima mogućnost zaključivanja i donošenja odluka te je služila kao inspiracija kako razvoju mrežne znanosti, tako i razvoju umjetnih neuronskih mreža, grane strojnog učenja usko povezane s kompleksnim mrežama.

Također, aktualni razvoj pandemije COVID-19, kao i ostale epidemijske procese, moguće je modelirati kao proces širenja na mreži sastavljenoj od društvenih jedinica povezanim kontaktima između njih te analizom strukture odrediti svojstva mreže koja pogoduju širenju zaraze [2].

Dinamika širenja neke pojave, čiji je posebni slučaj epidemijski proces, samo je jedno od svojstava kompleksnih mreža koje je moguće odrediti proučavajući isključivo svojstva vrhova i povezanosti među njima. Svojstva kao grupiranje (*engl. clustering*), distribucija stupnjeva povezanosti i skalarna asortativnost, kao i pojave poput fenomena malog svijeta (*engl. small world phenomenon*) od velike su važnosti za razumijevanje i interpretaciju procesa na mreži.

Proučavajući procese širenja na kompleksnoj mreži primijećeno je da oni ne ovise samo o globalnoj strukturi mreže, nego mogu i značajno ovisiti o pojedinom vrhu na kojemu proces počinje. Takve vrhove nazivamo sistemski važnim vrhovima, a vjerojatnost da neka pojava (npr. financijske poteškoće) izvorno na jednom vrhu uzrokuje širenje i amplifikaciju iste (npr. financijski kolaps) na cijeloj mreži nazivamo *sistemskim rizikom*.

Predmet istraživanja ovog rada bit će upravo to, pobliže proučavati procese širenja na kompleksnim mrežama s ciljem identifikacije sistemski važnih sastavnica te specifičnom primjenom na mreže financijskih institucija. Upotrijebit ćemo *DebtRank* algoritam u svrhu modeliranja evolucije gubitka kapitala te ćemo pokušati na zadanoj mreži financijskih sastavnica pronaći uvjete na inicijalne financijske poteškoće prilikom kojih ne dolazi do konačne propasti niti jedne od financijskih sastavnica u mreži.

2 Kompleksni sustavi

Želimo li definirati kompleksne sustave, možemo reći da su to sustavi s velikim brojem sastavnica koje međudjeluju na netrivialne načine [3]. Takvoj definiciji ne možemo pripisati preveliku preciznost, a još manje formalnost, međutim, definirajući ih na ovaj način sežemo u srž znanosti o kompleksnim sustavima, a to je univerzalnost.

Princip univerzalnosti preuzet je iz rječnika statističke fizike, a nalaže da ćemo u kompleksnom sustavu opažati makroskopske pojave koje neće ovisiti o specifičnom mikroskopskom ponašanju njegovih komponenti [4]. Drugim riječima, jedinstvenu makroskopsku pojavu može uzrokovati cijeli razred mikroskopskih sustava.

Univerzalnost koju primjećujemo u kompleksnim sustavima povlači i pogled na svijet iz drugačijeg kuta nego u znanostima s većom dozom specifičnosti. Dok unutar specifičnih disciplina u fokus stavljamo saznanja koja možemo steći o pojedinoj komponenti sustava, znanost o kompleksnim sustavima intrinzično je interdisciplinarna i glavni joj je cilj steći neke spoznaje o sustavima samima u cjelini te zaključiti što od tih spoznaja općenito vrijedi za sve sustave.

2.1 Kompleksnost

Studiju kompleksnih sustava započeti ćemo pitanjem - što je uopće kompleksnost i kako je opisati?

Kompleksnost sustava možemo definirati kao količinu informacija potrebnu da bismo taj sustav opisali. Ona je nadalje proporcionalna broju stanja koja sustav može poprimiti. Uzmimo za primjer sustav žarulja koje mogu biti upaljene ili ugašene. Znamo li broj stanja Ω tog sustava, njegova kompleksnost iznositi će

$$C = \log_2 \Omega, \quad (2.1)$$

odnosno sustav možemo u potpunosti opisati s C bitova. [5]. Nadalje, možemo promatrati i fizikalni sustav u kojem specificiramo koordinate i količine gibanja pojedine čestice. U tom slučaju možemo definirati entropiju sustava

$$S = k \ln \Omega = C k \ln 2 \quad (2.2)$$

kojoj je proporcionalna ranije definirana kompleksnost sustava [6]. Kvantitativan opis kompleksnosti sustava ovisit će o prirodi samog sustava, no važno je primjetiti kako generalno vrijedi da kompleksnost sustava raste s brojem mikrostanja njegovih sastavnica.

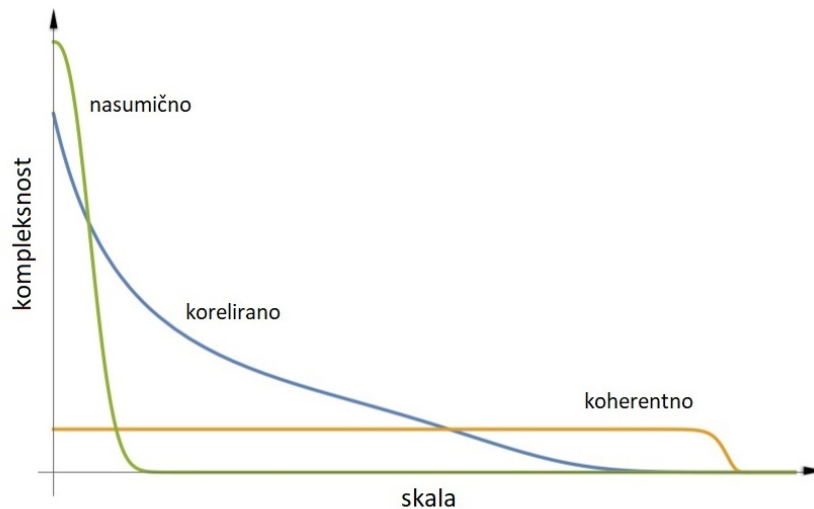
Veza između entropije i kompleksnosti očigledno postoji te je bila predmet intenzivnog istraživanja od sredine 20. st. [7], međutim, promotrimo li je pobliže, dolazimo do prividnog paradoksa.

Naime, sustav u kojem je entropija maksimalna nalazi se u ravnoteži, odnosno maksimalno je neuređen i ne mijenja se u vremenu. Kada bi maksimalna entropija povlačila maksimalnu kompleksnost sustava (2.2), to bi značilo da su sustavi visoke kompleksnosti sustavi blizu ravnoteže te posljedično nemaju prostornu strukturu i ne ovise o vremenu. To se kosi s našim poimanjem kompleksnih sustava, budući da kompleksni sustav prepoznajemo upravo po tim značajkama.

Ovu prividnu kontradikciju razrješujemo uvodeći pojam skale. Problem nastaje jer smo kompleksnost tj. informacije potrebne da opišemo sustav promatrali na mikroskopskoj skali. U tom smislu paradoks naveden u prethodnom odlomku ne postoji - na mikroskali je najviše informacije potrebno da opišemo sustav u ravnoteži, u kojem je svaka sastavnica maksimalno nekorelirana s ostalima. Međutim, kompleksnost na makroskopskoj razini, o kojoj govorimo kad opisujemo kompleksne sustave, nužno zahtijeva određene korelacije i koherentnosti na mikroskali koje odvođe sustav od ravnotežnog stanja i snizuju njegovu entropiju. Stoga kad je riječ o kompleksnosti sustava moramo voditi računa o skali na kojoj sustav promatramo [3].

U svrhu razumijevanja kompleksnosti sustava na različitim skalama ključno nam je uvesti *profil kompleksnosti* sustava. Njime prikazujemo količinu informacija potrebnu za opis sustava kao funkciju skale na kojoj sustav promatramo. Možemo razlučiti tri tipična ponašanja sustava različitih profila kompleksnosti: nasumično, koherentno i korelirano. Nasumičan sustav (npr. idealni plin) ima veliku kompleksnost na najmanjim skalama, no ona drastično pada sa skalom na kojem ga promatramo (nakon prelaska termodinamičke granice idealni plin možemo opisati s malim brojem termodinamičkih funkcija). Koherentni sustav karakterizira zajedničko ponašanje svih elemenata sustava te mu je kompleksnost konstantna na svima skalama (npr. topovska kugla - u principu je jednaka informacija potrebna za opisati pozicije i brzine svih njenih čestica kao i ukupnu poziciju i brzinu kugle). Treći tip

je korelirani sustav koji se sastoji od mnoštva koherentnih podsustava i karakterizira ga profil kompleksnosti koji postepeno opada s povećanjem skale na kojoj ga promatramo (npr. pahulja snijega) [1]. Primjer profila kompleksnosti za ova tri tipa sustava prikazan je na Slici 2.1.



Slika 2.1: Profili kompleksnosti za nasumične, koherentne i korelirane sustave. Slika je dana na korištenje pod CC BY 4.0 licencom [1].

Valja spomenuti i kako je inherentno svojstvo kompleksnosti to da monotono pada s porastom skale. Razlog tome je činjenica da je informacija potrebna da se opiše sustav na većoj skali podskup informacija potrebnih da se isti sustav opiše na manjoj.

2.2 Izranjajuće pojave

Jedno od definirajućih svojstava kompleksnih sustava, koje proizlazi iz promjene kompleksnosti pri variranju skale, opažanje je izranjajućih pojava (*engl. emergent phenomena*). Izranjajućim pojavama nazivamo ponašanja sustava uzrokovana interakcijama na mnogo manjoj skali od one na kojoj pojave opažamo. Pritom je važno naglasiti da su interakcije na mikroskali uzrok pojave, ali da je na toj skali “izranjajuća” pojava o kojoj govorimo neopaziva.

Priroda je prepuna primjera izranjajućih pojava, stoga ćemo u svrhu jasnoće tematike navesti nekolicinu. Pogledamo li primjerice gibanje fluida, zvučni valovi proizlaze iz gibanja mnoštva mikroskopskih čestica zraka, međutim na razini nekolicine čestica, pojam zvuka ostaje nedefiniran. Nadalje, fenomen trenja koji je na razinama ljudskog poimanja toliko intuitivan, “izranja” iz elektromagnetskih interakcija čestica

na kontaktnoj površini.

Izranjajuće pojave, naravno, nisu ograničene na sustave koji uključuju samo fundamentalne interakcije. Stvaranje društvenih krugova i zajednica “izranja” iz socijalnih interakcija na skali pojedinaca, dok protok novca između zasebnih financijskih sastavnica (banaka, kompanija, osoba) kao posljedicu ima formiranje burzi i financijskih tržišta na globalnoj razini.

U potrazi za izranjajućim pojavama moguće je otići i dublje. Gledajući na hijerarhiju znanosti prema skali na kojoj se manifestiraju pojave kojima se bavi, svako područje istraživanja sadrži fenomene koji su neovisni o detaljima mikroskopske slike, što je nobelovac P.W. Anderson argumentirao u svom čuvenom članku iz 1972. godine. [9] U članku je naveo nedostatke redukcionističkog pristupa znanosti¹, zalažući se za to da se većina prirodnih fenomena ne može opisati konstrukcijom iz temeljnih zakonitosti (koristeći dosadašnju terminologiju, oni “izranjaju” iz temeljnih zakona), što pojam fundamentalnosti proširuje s nekoliko temeljnih interakcija na sve prirodne zakone koji opisuju pojavu na nekoj skali, na kojoj “temeljniji” zakoni to ne mogu.

Pojava “izranjanja” stoga je usko vezana uz pojmove skale i kompleksnosti te je univerzalna u smislu da se javlja u naizgled svim područjima istraživanja i na svim skalama, što je čini temeljnom za razmatranje kompleksnih sustava.

2.3 Razumijevanje kompleksnih sustava

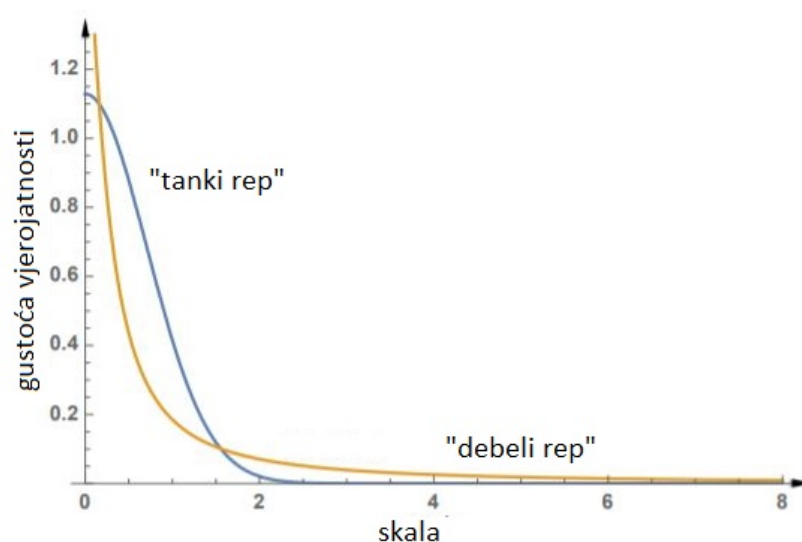
Nakon što smo naveli principe kompleksnosti i izranjanja na kojima se temelji znanost o kompleksnim sustavima, dolazimo do pitanja - kako možemo razumjeti kompleksne sustave i zaključiti nešto o njima?

Kako bismo pokušali odgovoriti na to pitanje, počnimo s općenitim pogledom na bilo kakav sustav. Ono što nam omogućuje da možemo reći išta o npr. sustavu 10^{24} čestica jest činjenica da na različitim skalama sustav možemo tretirati na odvojene načine, o čemu je bilo riječi u prethodnom tekstu. Tako možemo mnoštvo molekula koje međudjeluju na određen način direktno opisati Newtonovom mehanikom na najvećoj skali, dok njihovo kolektivno mikroskopsko ponašanje opisujemo zakonima termodinamike. Važno je spomenuti da u oba slučaja međudjelovanje između molekula mora biti takvo da njihov utjecaj možemo usrednjiti, a fluktuacije od srednje

¹Drugim riječima, filozofskoj doktrini prema kojoj se redukcijom teorije na dijelove, sustav može razumjeti kao cjelina.

vrijednosti možemo smatrati statistički nezavisnima i nasumičnima. Ovaj princip, pojednostavljen u prethodnom primjeru, općenito se naziva *aproksimacijom ili teorijom srednjeg polja* [10].

Aproksimacija srednjeg polja često je korištena u fizici te je dovoljna čak i za opisivanje nekih kompleksnijih ponašanja, najistaknutije u Isingovom modelu feromagnetizma [6]. Međutim, uvjet da srednje polje uopće možemo dobiti te da su fluktuacije od njega nasumične i nezavisne u većini kompleksnih sustava nije ispunjen. U kompleksnim sustavima čest je slučaj da su međudjelovanja između jedne sastavnice i skupa drugih sastavnica mnogo jača nego međudjelovanja s ostatkom sustava, iz čega proizlaze makroskopske fluktuacije koje ne bi bile predviđene teorijom srednjeg polja (npr. formacija oluja u atmosferi, ekstremističkih skupina u društvu ili ekonomski kolapsi).



Slika 2.2: Distribucije tankog repa i debelog repa. Slika je dana na korištenje pod CC BY 4.0 licencom [1].

Vjerojatnost javljanja fluktuacija od ravnotežnog stanja u ovisnosti o skali na kojoj se javljaju ilustrirana je na Slici 2.2. Centralni granični teorem nalaže da će se za dovoljno velik broj nezavisnih slučajnih varijabli njihova aritmetička sredina približavati normalnoj raspodjeli, neovisno o raspodjelama pojedinih slučajnih varijabli [11]. Iz toga proizlazi da će u sustavima u kojima su fluktuacije nezavisne iznad određene skale njihova magnituda pratiti Gaussovu raspodjelu te će na skalama iznad nekoliko standardnih devijacija odstupanja biti jako malo vjerojatna. Međutim, jake interakcije unutar sustava prestaju garantirati nezavisnost fluktuacija te mogu dovesti do

raspodjele njihove magnitude u kojoj je vjerojatnost na većim skalama i dalje mala, ali više nije zanemariva. Takva raspodjela naziva se *raspodjelom debelog repa* (engl. *fat-tailed distribution*) i karakteristika je velikog broja kompleksnih sustava.

“Debljina repa” odnosno vjerojatnost fluktuacija na velikoj skali bitan je čimbenik koji dovodi do sistemskih rizika unutar kompleksnih sustava. Čest je slučaj da se u realnim sustavima teži uklanjanju mikroskopskih fluktuacija koje naizgled čine sustav stabilnijim, ali u konačnici se dobiva suprotan učinak, odnosno sustav postaje manje prilagodljiv i vjerojatnost kolapsa sustava se povećava. Nadalje, kad se kolaps i dogodi, prevencija ponavljanja takvog događaja češće se svodi na spriječavanje specifičnih okolnosti i nizova događaja koji su doveli do njega, umjesto analize međudjelovanja unutar sustava koja su dovela do prevelike povezanosti i posljedično povećanja sistemskog rizika [12].

Zato je od ključne važnosti za razumijevanje uvjeta koji dovode do takvih katastrofalnih pojava unutar kompleksnih sustava mogućnost njihove kvantitativne analize matematičkim, numeričkim i računalnim metodama, što je predmet rada znanosti o kompleksnim mrežama.

3 Kompleksne mreže

Mreže su posvuda oko nas i mi sami neizbježno činimo dio nekih mrežnih struktura, bilo društvenih, ekonomskih, transportnih i sl. Također, i mi kao bića rezultat smo delikatne mreže bioloških procesa i fizioloških sustava. Stoga je prirodno da je s razvitkom tehnologije i sve većom globalnom umreženosti u suvremenom dobu, predmet istraživanja mrežne znanosti postao od velikog interesa.

Mrežna znanost, u matematici poznata kao *teorija grafova*, svoje korijene nalazi 1736. godine Eulerovim rješavanjem čuvenog problema “sedam mostova Königsberga” [13]. Leonhard Euler dokazao je kako je šetnja kojom se prelazi preko svakog mosta jednom i samo jednom nemoguća, a pritom je uveo neke paradigme koje se koriste i danas, primjerice uvođenje apstraktnog prostora vrhova i bridova umjesto razmatranja kopnenih masa i mostova.

Dva stoljeća kasnije, König [14] i Harary [15] postavili su temelje teorije grafova na kojima se izgradilo opširno područje mrežne znanosti i teorije grafova koje strelovito napreduje i danas.

3.1 Osnovni pojmovi i definicije

Kompleksna mreža je graf koji posjeduje neka netrivialna svojstva - svojstva koja ne nalazimo u jednostavnim mrežama, ali su često prisutna u prikazu realnih sustava. Budući da se znanost o kompleksnim mrežama temelji na teoriji grafova i statističkoj analizi, u ovom poglavlju dat ćemo sažetak osnova tog područja i formalno definirati bitne pojmove te ćemo se pretežno koristiti terminologijom teorije grafova.

Vrste grafova

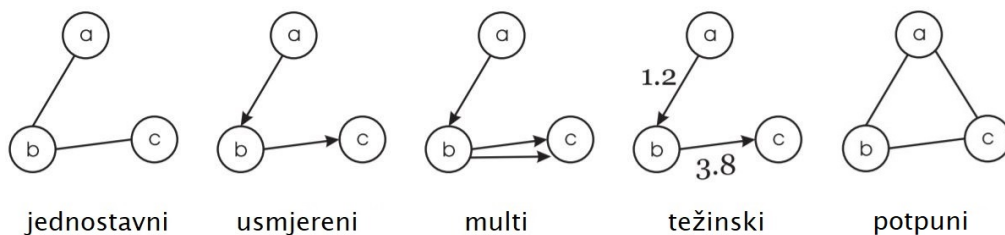
(Neusmjereni) Graf G je uređeni par (V, E) , gdje je $V = V(G)$, $|V| = n$ neprazan skup čije elemente nazivamo vrhovima (čvorovima), a $E = E(G)$, $|E| = m$ je familija dvočlanih podskupova od V koje nazivamo bridovima (vezama). Graf T nazivamo *podgrafom* grafa G ako vrijedi $V_T \subseteq V_G$ i $E_T \subseteq E_G$, gdje su V_T i V_G skupovi vrhova, a E_T i E_G skupovi bridova grafova G i T , slijedom te pišemo $T \subseteq G$.

Graf G možemo prikazati *matricom susjedstva* (engl. *adjacency matrix*) $A \in M^{n \times n}$ čiji elementi iznose $a_{ij} = 1$ ako su vrhovi v_i i v_j povezani bridom, a $a_{ij} = 0$ inače.

Prema vrsti bridova koji povezuju vrhove u grafu te njihovim svojstvima i konfiguraciji, grafove možemo podijeliti u nekoliko osnovnih skupina. U daljnjem tekstu dat ćemo formalne definicije i opise vrsta grafova.

- *Težinski graf* definiramo kao uređenu trojku $G = (V, E, w)$ gdje je $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja pridružuje realne vrijednosti (težine) bridovima. Elementi matrice susjedstva težinskog grafa a_{ij} jednake su težinama w_{ij} bridova između povezanih vrhova.
- *Usmjereni graf* ili *digraf* je takav da vrijedi $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i) \forall (v_i, v_j) \in E$, odnosno u usmjerenom grafu bridovi posjeduju i orijentaciju. Matrica susjedstva neusmjerenog grafa simetrična je, što nije slučaj za usmjereni graf.
- *Multigrafom* nazivamo graf u kojem dva brida mogu biti povezana s više od jednog brida. Iako se mnoge realne kompleksne mreže mogu prikazati multigrafovima, čest je slučaj da je prikladnije multigraf transformirati u težinski graf na način da se broj bridova koji povezuje dva vrha u multigrafu odražava na težini tog brida u težinskoj reprezentaciji. Želimo li pak naglasiti da se ne radi o multigrafu, graf nazivamo *jednostavnim grafom*.
- Za graf G kažemo da je *potpun* ako za svaki par vrhova $v_i, v_j \in V$ vrijedi $(v_i \neq v_j) \Rightarrow (v_i, v_j) \in E$, odnosno postoji brid između svaka dva vrha u grafu. Potpuni grafovi se u literaturi obično označavaju sa K_n , gdje je n broj vrhova, a ukupni broj bridova iznosi $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ ako je riječ o neusmjerenom grafu, a $n(n-1)$ inače.

Na Slici 3.1 grafički su prikazani gore navedene vrste grafova.



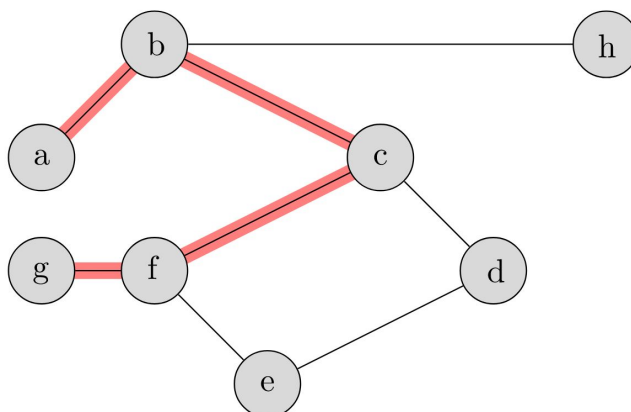
Slika 3.1: Grafički prikaz vrsta grafova. S a, b i c označeni su vrhovi grafa, a linije i strelice označavaju različite vrste i konfiguracije bridova između njih. Prilagođeno s dozvolom autora [16].

Putevi i povezanost

Putevi unutar grafa i povezanost vrhova temeljni su koncepti teorije grafova te se na njih nadograđuje velik dio statističkih svojstava grafova koja će nam biti ključna za razumijevanje kompleksnih mreža i vršenje istraživanja. Stoga ćemo nastaviti u formalnijem tonu te navesti osnovne pojmove i veličine koje se odnose na povezanost grafa.

Šetnjom u grafu nazivamo niz $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ gdje je e_i brid koji povezuje vrhove v_{i-1} i v_i . Put je šetnja u kojoj su svi vrhovi (osim eventualno početnog i završnog) različiti. Broj bridova unutar puta određuje *duljinu puta* te se put duljine k označava s P^k .

Za dva vrha kažemo da su *povezana* ako postoji put između njih, a za graf G kažemo da je *povezan graf* ako su svi njegovi vrhovi povezani. Maksimalni povezani podgraf grafa nazivamo *komponentom povezanosti* grafa.



Slika 3.2: Shematski prikaz puteva u grafu. Crvenom bojom označen je najkraći put između vrhova a i g . Prilagođeno s dozvolom autora, Martina Thome, pod licencom CC BY 3.0.

Važno svojstvo grafa je *najkraći put* između dva vrha d_{ij} , koji se naziva i *geodetskim putem*. U jednostavnom grafu najkraći put jednak je najmanjem broju bridova koje je potrebno prijeći između dva vrha. Primjer najkraćeg puta u grafu možemo vidjeti na Slici 3.2. U slučaju da vrhovi i i j nisu povezani kažemo da je $d_{ij} = \infty$. U težinskim grafovima također definiramo duljinu najkraćeg puta, međutim, tada je potrebno uzeti u obzir i težine bridova na pojedinom putu. Tada će najkraći put biti put kojim minimiziramo sumu težina bridova između dva vrha. Kao karakteristiku “veličine” grafa uvodimo *promjer grafa* D kao maksimum svih geodetskih puteva u

grafu, odnosno

$$D = \max_{i,j} d_{i,j}. \quad (3.1)$$

Osim duljine puta, još jedno obilježje koje je od centralne važnosti u teoriji grafova je *stupanj vrha*. Stupanj vrha $\deg(v)$ ili k_v definiramo kao broj bridova kojima je vrh v jedan od krajeva. Za vrh stupnja $k_v = 0$ kažemo da je *izoliran*. Srednji stupanj vrha $\langle k \rangle$ označava aritmetičku sredinu stupnjeva svih vrhova u grafu.

U slučaju usmjerenog grafa običaj je podijeliti stupanj vrha v na *ulazni* k^{in} i *izlazni stupanj vrha* k^{out} tj. brojeve bridova koji završavaju odnosno počinju u v , slijedom, što također vrijedi i za raspodjelu stupnja vrhova $P(k)$ (vjerojatnost da je pojedini vrh stupnja k) koju ćemo više spominjati u idućem dijelu.

3.2 Statistička svojstva i bitne veličine

Dvije osnovne veličine koje je potrebno poznavati kako bismo mogli razumjeti i modelirati strukturu kompleksne mreže su *karakteristična duljina puta* i *koeficijent klasteriranja* (eng. *clustering coefficient*) [18].

Karakterističnu duljinu puta L u grafu definiramo kao prosječni najkraći put između svih parova vrhova grafa. Primjerice ova mjera označava prosječni broj potrebnih klikova između dvije web stranice ili popularnih “6 stupnjeva odvojenosti” iz Milgramovog eksperimenta iz 1967. [19]. Formalno, karakterističnu duljinu puta računamo kao

$$L(\mathbf{G}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j \in V} d_{ij}, \quad (3.2)$$

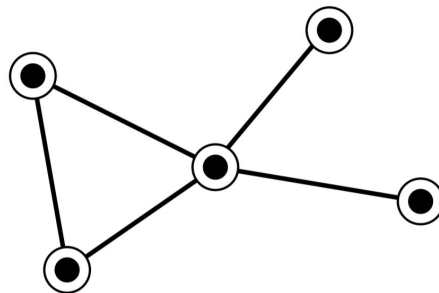
gdje sumu najkraćih puteva između svih parova vrhova normaliziramo s najvećim mogućim brojem bridova u grafu. Valja spomenuti da ova formula divergira ako se graf sastoji od više komponenti povezanosti. Tada je najčešća praksa limitirati jednadžbu (3.2) na parove vrhova unutar najveće komponente, vodeći računa o tome da je komponenta dovoljno velika da bi dobivena veličina bila signifikantna.

Na primjeru mnogih realnih mreža primijećeno je da povezanost vrhova A i B te B i C s povećanom vjerojatnošću implicira povezanost vrhova A i C. Laički rečeno, u tim slučajevima “prijatelj mog prijatelja vjerojatno je i moj prijatelj”. Kao mjeru gustoće takvih snažno povezanih struktura ili klastera u nekom vrhu grafa uvodimo

koeficijent klasteriranja (grupiranja) C [20] koji se definira kao

$$C(\mathbf{G}) = \frac{1}{n} \sum_{i \in V} C_i, \quad C_i = \frac{e_i}{k_i(k_i - 1)/2}. \quad (3.3)$$

C_i nazivamo *lokalnim koeficijentom klasteriranja* i on označava omjer broja bridova e_i ostvarenih između vrhova susjednih vrhu i s ukupnim mogućim brojem bridova između njegovih susjeda. Koeficijent klasteriranja grafa tada je aritmetička sredina lokalnih koeficijenata klasteriranja izvrjednjena po svim vrhovima grafa.



Slika 3.3: Ilustracija jednostavnog grafa kao primjer klasteriranja. Koristeći jednadžbu 3.3, lokalni koeficijenti klasteriranja iznose $1, 1, \frac{1}{6}, 0$ i 0 s lijeva nadesno, dok njihova srednja vrijednost iznosi $C = \frac{13}{30}$. Preuzeto uz dozvolu autora [17].

Često nam je u interesu odrediti važnost određenog vrha te istaknuti najutjecajnije vrhove. U tu svrhu uvodimo niz veličina pod nazivom *centralnosti* [21], među kojima ćemo istaknuti *centralnost blizine*, *centralnost svojstvenog vektora* i *centralnost između vrhova*.

Želimo li opisati koliko su ostali vrhovi blizu vrhu i definiramo *centralnost blizine* (engl. *closeness centrality*) kao recipročnu vrijednost zbroja najkraćih puteva koji povezuju vrh i s ostalim vrhovima, odnosno

$$g_i = \frac{1}{\sum_{j \neq i} d_{ij}}. \quad (3.4)$$

Budući da ovako definirana centralnost blizine znatno ovisi o veličini grafa, ako želimo usporediti centralnosti vrhova u različitim grafovima, obično se (3.4) normira množenjem s maksimalnim brojem susjednih vrhova $n - 1$.

Centralnost između vrhova (eng. *betweenness centrality*) vrha i predstavlja broj najkraćih puteva između svih vrhova koji prolaze kroz i te je računamo kao

$$b_i = \sum_{k \neq j \neq i} \frac{n_{jk}(i)}{n_{jk}}, \quad (3.5)$$

gdje je $n_{jk}(i)$ broj najkraćih puteva između vrhova j i k koji prolaze kroz i , a n_{jk} ukupni broj najkraćih puteva između j i k . Visoku centralnost između vrhova imaju vrhovi koji se s velikom vjerojatnošću nalaze na nasumično odabranom najkraćem putu između arbitrarnih vrhova u grafu. Ova veličina može se gledati i kao mjera otpornosti (engl. *resilience*) grafa - govori nam koliko će se najkraćih puteva u grafu produljiti nakon uklanjanja jednog vrha [22].

Posljednja mjera centralnosti koju ćemo navesti je *centralnost svojstvenog vektora* (engl. *eigenvector centrality*). Ovom mjerom ne uzimamo u obzir samo brojnost veza između vrhova, nego prepoznajemo i to da nisu svi vrhovi ravnopravni te u skladu s tim ocjenjujemo vrh utjecajnijim ako je povezan s velikim brojem vrhova koji su i sami utjecajni. Označimo li centralnost pojedinog vrha s x_i , spomenuti efekt možemo zapisati kao rekurzivnu relaciju

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in V} a_{ij} x_j \quad (3.6)$$

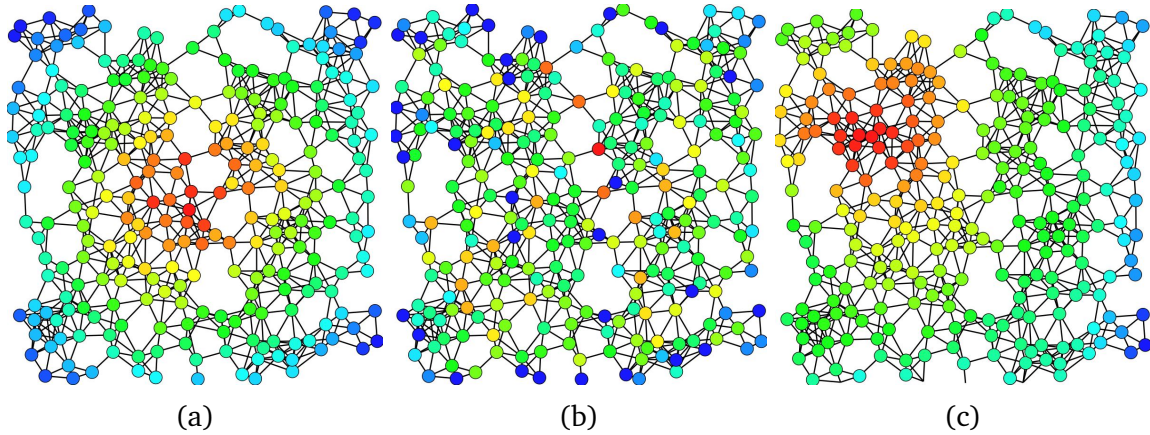
gdje je $\lambda > 0$ neka konstanta, a centralnosti x_j u sumi množimo s elementima matrice susjedstva a_{ij} jer su nam značajni samo vrhovi susjedni vrhu i . Sustav jednačbi (3.3) možemo zapisati kao matricnu jednačbu

$$Ax = \lambda x \quad (3.7)$$

u kojoj prepoznajemo λ kao svojstvene vrijednosti, a x kao svojstvene vektore matrice susjedstva A . Pod uvjetom da su sve vrijednosti x nenegativne, može se pokazati [23] da rješenju jednačbe (3.7) odgovara samo najveća svojstvena vrijednost i pripadajući svojstveni vektor. Tada komponente dobivenog svojstvenog vektora nazivamo *centralnostima svojstvenog vektora*.

Ova mjera centralnosti korisna je koliko i elegantna, što je najistaknutije u činjenici da se *PageRank*, donedavno glavni Googleov algoritam za rangiranje rezultata pretraživanja, zasniva upravo na računanju centralnosti svojstvenog vektora na mreži

web-mjesta [24]. Ono što je nama relevantnije, algoritam *DebtRank* na kojem se bazira većina našeg istraživanja i kojem ćemo posvetiti jedno od kasnijih poglavlja, u svojoj osnovi također koristi ovu mjeru. Grafički prikaz triju navedenih mjera centralnosti nalazi se na Slici 3.4.



Slika 3.4: Vizualizacija mjera centralnosti na grafu. Crvenom bojom označeni su najcentralniji vrhovi, dok su vrhovi najmanje centralnosti označeni plavom. Slika (a) predstavlja centralnost blizine, (b) centralnost među vrhovima, a (c) centralnost svojstvenog vektora. Prilagođeno s dozvolom autora, Claudia Rocchinija, pod licencom CC BY 4.0.

Mjera s kojom ćemo zaključiti pregled bitnih pojmova u mrežnoj znanosti naziva se *asortativnost* (engl. *assortativity*) i predstavlja preferenciju vrhova da se povezuju s ostalima koji su s njima po nečemu slični. Iako mjere sličnosti mogu biti različite, najčešći je slučaj promatranja asortativnosti prema stupnju vrha. Prema tome u *asortativnim* mrežama većina bridova povezuje vrhove sličnog stupnja, dok su u *disasortativnoj* mreži vrhovi visokog stupnja većinom povezani s vrhovima niskog stupnja.

Matematičkim rječnikom, mjereći asortativnost promatramo korelaciju između stupnjeva vrhova koju računamo kao

$$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' P(k'|k) \quad (3.8)$$

gdje je $P(k'|k)$ uvjetna vjerojatnost da je vrh stupnja k povezan s vrhom stupnja k' . U slučaju da stupnjevi vrha nisu korelirani, veličina (3.8) ne ovisi o k i iznosi $k_{nn} = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$. U koreliranim mrežama, asortativne su one u kojima je $k_{nn}(k)$ rastuća funkcija od k , a disasortativne ako je $k_{nn}(k)$ padajuć [18]. Želimo li kvantificirati asortativnost u nekom vrhu, često korištena mjera je Pearsonov koeficijent korelacije stupnjeva vrha izvrjednjen na krajevima brida [25].

3.3 Erdős-Rényi model

Modeliranje kompleksnih mreža temeljni je alat koji se podjednako koristi i u svrhu formalnog opisivanja sustava i njegovih svojstava, i s praktičnim ciljem opisa realnih sustava i predikcije njihovog ponašanja. Naše istraživanje velikim dijelom uključuje analizu procesa i ponašanja na modelu kompleksne mreže te ćemo se stoga ovdje osvrnuti na osnovni model nasumične mreže - *Erdős-Rényijev model*.

Područje studije nasumičnih mreža započeli su 1959. godine mađarski matematičari Paul Erdős i Alfréd Rényi [26] koristeći probabilističke metode u svrhu proučavanja svojstava grafova u ovisnosti o broju nasumičnih bridova u mreži. Razvili su jednu od metoda generiranja nasumične mreže te iscrpno i rigorozno istražili distribuciju stupnja vrha, formaciju komponenti povezanosti i ponašanje mreže za broj vrhova $n \rightarrow \infty$. Osim toga, u daljnjem tekstu ćemo se dotaknuti i faznih prijelaza u nasumičnoj mreži te ponašanju najkraćih puteva i koeficijenta klasteriranja.

Generiranje mreže

Generirati nasumičnu mrežu moguće je na dva načina, prvi originalno formuliran u radu Erdősa i Rényija [26], dok je alternativna metoda iste godine razvijena od strane Gilberta [27]. Oba načina su u granici velikog broja vrhova ekvivalentna te se definiraju na sljedeće načine:

- Mrežu $G_{n,m}$ konstruiramo na način da za svaki od m bridova na nasumičan način odaberemo krajeve iz skupa od n vrhova.
- Ako je $p \in [0, 1]$ vjerojatnost povezivanja dvaju vrhova, mrežu $G_{n,p}$ konstruiramo tako da svaki od $\frac{n(n-1)}{2}$ mogućih bridova generiramo s vjerojatnošću p , to jest ne generiramo s vjerojatnošću $1 - p$.

Na ova dva načina zapravo smo definirali *ansamble* mreža, odnosno skupove svih mreža (članova ansambla) koje zadovoljavaju navedena ograničenja. Ovdje dolazimo do zanimljive analogije sa statističkom fizikom. Naime, usporedimo li broj bridova u mreži m s ukupnom energijom konfiguracije čestica, vidimo da $G_{n,m}$ odgovara *mikrokanonskom ansamblu* budući da svaki član $G_{n,m}$ ansambla mora zadovoljavati uvjet m bridova te je svaka realizacija takve mreže jednako vjerojatna. Ako s druge strane opustimo ograničenja tako da kažemo da ansambl mora imati samo

očekivanu vrijednost $\langle m \rangle$ bridova, možemo uvesti vjerojatnost javljanja brida kao $p = \langle m \rangle / \frac{n(n-1)}{2}$. Na ovaj način smo ponovno definirali ansambl mreža koje se javljaju jednakom vjerojatnošću, no ovaj puta su to mreže s jednakim p , umjesto m kao prije. Konstanta p igra ulogu analognu inverznoj temperaturi u fizikalnom sustavu te ansambl $G_{n,p}$ odgovara kanonskom ansamblu. Podrobnijom analizom moguće je definirati i particijsku funkciju, entropiju te ostale analoge termodinamičkim varijablama za nasumičnu mrežu. Za izvod formalizma i generalizaciju na ostale tipove mreža preporučamo Newmanov i Parkov detaljan pregled iz 2004. [28].

Distribucija stupnja vrha

Zbog jednostavnosti računa, u daljnjem razmatranju bavit ćemo se $G_{n,p}$ modelom, no dobiveni zaključci vrijedit će za oba tipa mreže. Kao što smo ranije naveli, prosječni broj bridova u $G_{n,p}$ mreži iznosi

$$\langle m \rangle = \frac{n(n-1)}{2} p. \quad (3.9)$$

Promotrimo sada distribuciju stupnja vrha u Erdős-Rényi mreži. Iz definicije nasumične mreže znamo da je javljanje jednog brida neovisno o javljanju ostalih bridova. Također, vjerojatnost da je određeni vrh povezan s k drugih iznosi p^k odnosno da nije povezan s preostalima odgovara $(1-p)^{n-1-k}$. To nas navodi na opisivanje distribucije stupnja vrha binomnom raspodjelom

$$P(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}, \quad (3.10)$$

gdje umnožak vjerojatnosti množimo faktorom $\binom{n-1}{k}$ koji odgovara broju kombinacija k bridova među $n-1$ dostupnih vrhova. Poznavanje distribucije stupnja vrha omogućava nam računanje očekivane vrijednosti stupnja vrha u Erdős-Rényi mreži

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^n k P(k) = (n-1)p \approx np. \quad (3.11)$$

Poznato je da za velike n , pod uvjetom da $np = \langle k \rangle$ držimo fiksnim, binomnu raspodjelu možemo aproksimirati Poissonovom raspodjelom s parametrom $\langle k \rangle$. Teži li broj vrhova u beskonačnost, aproksimacija postaje egzaktna te distribuciju stupnja vrha Erdős-Rényi mreže opisujemo s

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (3.12)$$

te iz tog razloga Erdős-Rényi mrežu ponekad nazivamo i *Poissonovom nasumičnom mrežom*.

Statistička svojstva i veličine

Promotrimo sada neka osnovna statistička svojstva ovog modela. Jedno od obilježja kompleksnih mreža je pojava povezanih klastera, stoga nas zanima javlja li se taj fenomen i u Erdős-Rényi mreži. Prosječni koeficijent klasteriranja definiran jednadžbom (3.3) za nasumični graf iznosi

$$\langle C \rangle = \frac{np}{n} = p = \frac{\langle k \rangle}{n}. \quad (3.13)$$

Vidimo da $\langle C \rangle$ opada s povećanjem broja vrhova, posljedica čega je zanemariva pojava klastera u nasumičnim mrežama značajne veličine.

Može se pokazati [30] da karakteristična duljina puta u Erdős-Rényi mreži ima logaritamsku ovisnost o broju vrhova

$$\langle L \rangle \propto \frac{\ln n}{\ln \langle k \rangle}, \quad (3.14)$$

te se takvo svojstvo naziva “svojstvom malog svijeta” (*engl. small world phenomenon*). Ono naznačava da se šetnja između bilo koja dva vrha većinom sastoji od malog broja koraka, a osim u Erdős-Rényi modelu nalazimo ga i u mnogim realnim mrežama.

Svojstvo malog svijeta povlači i logaritamsku ovisnost promjera mreže o broju vrhova. Zanimljivo obilježje promjera nasumične mreže je da za većinu vrijednosti parametra p promjer mreže vrlo malo varira oko vrijednosti

$$\langle D \rangle = \frac{\ln n}{\ln \langle k \rangle}. \quad (3.15)$$

Međutim, kako smo spomenuli u jednom od prijašnjih razmatranja, promjer mreže koja se sastoji od više komponenti povezanosti divergira. Stoga nas dalje zanima, postoje li uvjeti na parametre mreže prilikom kojih se mreža sastoji samo od jedne komponente?

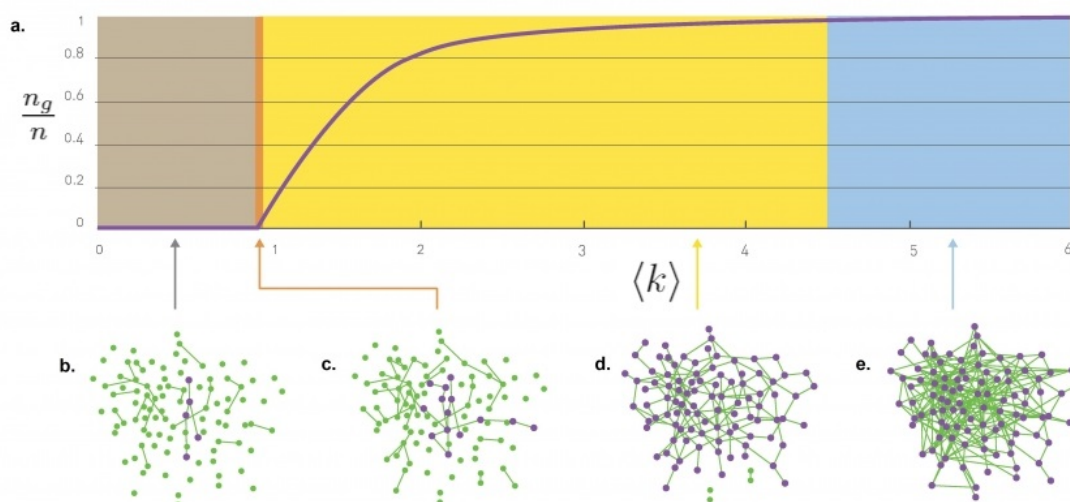
Fazni prijelazi

Prema mnogima, najveće otkriće Erdősa i Rényija bilo je to da mnoga svojstva nasumične mreže nisu kontinuirana tijekom evolucije mreže, nego se javljaju naglo, na točno određenim vrijednostima pojedinih parametara. Inspirirano rječnikom fizike, takav fenomen naziva se *faznim prijelazom*.

U svom radu iz 1960. godine [32], Erdős i Rényi bavili su se pitanjem kako evolucija mreže utječe na njenu strukturu i povezanost. Specifično, mi ćemo se usredotočiti na pojavu i razvoj najveće komponente tj. komponente povezanosti koja sadrži najveći broj vrhova u mreži. Nadalje ćemo broj vrhova u najvećoj komponenti označavati s n_g . Unatoč intuitivnoj pretpostavci da se udio vrhova najveće komponente $\frac{n_g}{n}$ glatko mijenja u intervalu $p \in [0, 1]$, Erdős i Rényi su dokazali da postoji kritična vjerojatnost $p_c = \frac{1}{n}$ koja odgovara srednjem stupnju vrha $\langle k \rangle_c = 1$, pri kojima dolazi do drastične promjene omjera $\frac{n_g}{n}$. Preciznije, dokazano je da:

- Ako $p < p_c$, tada gotovo sigurno (s vjerojatnošću 1 kad $n \rightarrow \infty$) ne postoji komponenta mreže s n_g koji raste brže od $\mathcal{O}(\ln n)$. Ovaj režim naziva se i *podkritičnom fazom*.
- Ako $p = p_c$, tada gotovo sigurno postoji najveća komponenta koja raste s $\mathcal{O}(n^{2/3})$. U tom slučaju najveću komponentu nazivamo *divovskom komponentom* (engl. *giant component*).
- Ako $p \gtrsim p_c$, veličina divovske komponente n_g raste linearno s n , a sve ostale komponente ne rastu brže od $\mathcal{O}(\ln n)$ te ovaj režim nazivamo i *nadkritičnom fazom*.
- Ako $p > \frac{\ln n}{n}$, dolazi do prijelaza u *povezanu fazu* u kojoj preostaje samo divovska komponenta.

Na Slici 3.5 grafički su prikazani fazni prijelazi i nastanak divovske komponente u Erdős-Rényi mreži.



Slika 3.5: Udio broja vrhova divovske komponente u ovisnosti o srednjem stupnju vrha (a). Na slici su označeni podkritični (b), kritični (c), nadkritični (d) i povezani (e) režimi. Preuzeto s dozvolom autora [33].

3.4 Procesi širenja

Jedan od izvornih razloga proučavanja kompleksnih mreža je razumijevanje mehanizama kojima se neko svojstvo propagira između njenih vrhova. Prema njihovoj originalnoj primjeni procesi širenja nazivaju se i *epidemijskim procesima*, no danas njihovo proučavanje obuhvaća mnogo šire područje koje osim epidemiologije uključuje i širenje glasina, računalnih virusa, političkog utjecaja, financijskih šokova i sl.

Osnovna pretpostavka epidemijskih modela je podjela sastavnica u jednu od nekoliko kategorija, ovisno o njihovom stadiju unutar epidemijskog procesa. U većini modela te kategorije odgovaraju podložnim S (*engl. susceptible*), zaraženim I (*engl. infected*) i oporavljenim ili uklonjenim jedinkama R (*engl. recovered, removed*).

U jednostavnim modelima nadalje je pretpostavljeno da su sve jedinice jednake i da se zaraza populacijom širi homogeno. Uzevši to u obzir, ukratko ćemo opisati najkorištenije epidemijske modele [17] na kompleksnim mrežama - *SI*, *SIR* i *SIS* modele.

SI model

Najjednostavniji model procesa širenja svakako je SI (*susceptible-infected*) model. Unutar tog modela jedinke mogu biti samo u dva stanja - podložne zarazi i zaražene. Jednom kada se jedinka zarazi, ona nema mogućnost oporavka nego ostaje zaražena i zarazna. Na SI modelu, zbog njegove jednostavnosti, razvijen je formalizam epidemijskog širenja, koji je zatim lako poopćiti na sustave veće kompleksnosti.

Jedini parametar u SI modelu je stopa širenja zaraze β . On odgovara vremenskoj gustoći vjerojatnosti prenošenja zaraze između dvije susjedne jedinke koje reprezentiramo susjednim vrhovima mreže. Uz pretpostavku uniformne distribucije stupnja vrha $k = \langle k \rangle$, lako se može pokazati da širenje zaraze unutar sustava opisujemo jednadžbom

$$\frac{di(t)}{dt} = \beta \langle k \rangle i(t) s(t), \quad (3.16)$$

gdje je $i(t) = I(t)/N$ udio zaraženih, a $s(t) = 1 - i(t)$ preostali udio podložnih vrhova u mreži.

SIR model

Vjerojatno najpopularniji model epidemijskog širenja je SIR model. Za razliku od jednostavnog SI modela, ovdje uvodimo i udio jedinke koji nakon određenog vremena nisu više susceptibilne zarazi te ga označavamo s $r(t)$. U skladu s time uvodimo i stopu oporavka γ koji, analogno parametru β , odgovara gustoći vjerojatnosti stjecanja trajnog imuniteta jedinke. Proces širenja u ovom modelu opisujemo sustavom jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\beta \langle k \rangle i(t) s(t) \\ \frac{di(t)}{dt} &= -\gamma i(t) + \beta \langle k \rangle i(t) s(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} &= \gamma i(t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdje vrijedi očuvanje broja vrhova u mreži $s(t) + i(t) + r(t) = 1$.

SIR procesi idealni su za opisivanje širenja bolesti koje rezultiraju ili trajnim imunitetom ili smrću (npr. vodenih kozica), međutim, pod određenim uvjetima moguće ga je primijeniti i na financijski sustav [34]. Uzmemo li za primjer mrežu banaka, u

S kategoriju pripadaju sve banke koje su podložne rizičnom poslovanju, dok banke I kategorije investicijama ili kreditiranjem preuzimaju rizik na sebe i postaju zaražene. R kategorija uključuje institucije koje nisu više podložne zarazi, bilo zbog stjecanja “imuniteta” (npr. zaštita centralne banke) ili bankrota.

SIS model

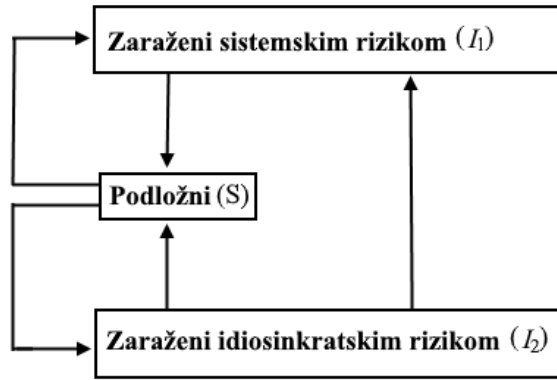
Još jedna često korištena generalizacija SI modela, pogodna primjerice za opis razvoja zaraza koje ne uzrokuju trajni imunitet (gripa, ebola, COVID-19), je SIS model. Unutar modela je uključena opcija da se nakon zaraze jedinka s gustoćom vjerojatnosti γ može vratiti u skup podložnih jedinki. SIS je stoga, kao i SIR, dvoparametarski model i opisujemo ga sličnom jednadžbom

$$\frac{di(t)}{dt} = -\gamma i(t) + \beta \langle k \rangle i(t) s(t), \quad (3.18)$$

gdje također vrijedi $s(t) + i(t) = 1$.

Budući da u SIS modelu nemamo trajnog oporavka jedinki, od velikog je interesa promotriti pod kojim uvjetima će doći do gušenja zaraze u odnosu na beskonačno ustrajanje na mreži. Analizom jednadžbe (3.18) pokazalo se da ključnu ulogu ovdje ima omjer $\sigma = \beta/\gamma$ [18], odnosno pronalazak kritične vrijednosti σ_c koja dijeli dva spomenuta režima epidemijskog širenja. SIS model je također pogodan za primjenu na realne ekonomske procese, no za razliku od SIR-a, ovdje banke koje uspiju smanjiti udio rizične imovine nisu zaštićene od ponovne zaraze daljnjim ulaganjem.

U duhu opisivanja ekonomskih procesa, zanimljivo proširenje SIS-a je *SIIS model* [35], koji kako mu ime govori, I kategoriju dijeli na dvije vrste zaraze. Motivacija za to je činjenica da se osim sa sistemskim (I_1), financijske institucije suočavaju i s *idiosinkratskim rizikom* (I_2), rizikom koji je specifičan za pojedinu instituciju koja je često početak širenja sistemskog rizika. Nadalje, metode korištene za smanjenje idiosinkratskog rizika poput diversifikacije imovine mogu dovesti do povećanja sistemskog rizika, što uvodi mogućnosti direktnog prelaska banke iz kategorije I_1 u I_2 , shematski prikazano na Slici 3.6.



Slika 3.6: Dijagram širenja rizika za SIIS model. Pravokutnici označavaju kategorije zaraze kreditnim rizikom, a strelice moguće prijelaze između kategorija.

Slično kao i kod ostalih modela, SIIS procese opisujemo sustavom diferencijalnih jednažbi

$$\begin{aligned}
 \frac{ds(t)}{dt} &= -\rho s(t)i_2(t) - \langle k \rangle s(t)i_1(t) + \gamma(i_1(t) + i_2(t)) \\
 \frac{di_1(t)}{dt} &= \langle k \rangle s(t)i_1(t) - \gamma i_1(t) + \beta i_1(t)i_2(t) \\
 \frac{di_2(t)}{dt} &= \rho s(t)i_2(t) - \gamma i_2(t) - \beta i_1(t)i_2(t),
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

gdje također pretpostavljamo homogenost mreže, a osim stope zaraze β koja je radi jednostavnosti za oba rizika jednaka i stope oporavka γ , uvodimo i *stupanj korelacije rizika* $0 \leq \rho \leq 1$ koji označava udio sistemskog rizika u ukupnom riziku.

4 Sistemski rizik

Nakon što smo u prethodnim poglavljima opisali područja na kojima se temelji ovaj rad - kompleksne sustave i kompleksne mreže, u daljnjem tekstu slijedit će pregled konkretne primjene teorijskih modela te metoda koje smo razvili s ciljem vrednovanja i predviđanja sistemskog rizika na kompleksnoj mreži financijskih institucija.

Svjetska ekonomija sustav je izrazite kompleksnosti, a njena dinamika je odraz svojstava i karaktera velikog broja poveznica između komponenti od kojih je sastavljena. Aktivno proučavano svojstvo kompleksnih mreža je rizik od širenja šokova koji imaju izvorište u malom podsustavu ili čak jednom vrhu mreže, a imaju značajne posljedice na cjelokupni sustav. Rizik tog tipa poznat je pod imenom *sistemski rizik* i povijesno je bio uzrok financijskim krizama i kolapsima koji su utjecali na ogroman udio svjetskog stanovništva.

U najsvježijem sjećanju je velika financijska kriza s početkom u 2007. godini koja je imala paralizirajući učinak na svjetsko gospodarstvo te je u retrospektivi sasvim očito što je dovelo do nje, međutim konvencionalni pristup procjene rizika u njenom predviđanju u cijelosti podbacio. To je potvrdio i tadašnji predsjednik Europske središnje banke Jean-Claude Trichet u svom govoru iz 2010. godine [36] rekavši da su se “suočeni s krizom osjećali napušteno od strane konvencionalnih alata” te da “trebamo razviti komplementarne alate kako bismo unaprijedili robustnost cjelokupnog sistema”. Nadovezao se i na to da je “dovođenje znanstvenika iz tih polja [fizike, inženjerstva, psihologije, biologije] potencijalno vrlo kreativno i vrijedno”.

Posljedično, financijske krize imaju poguban učinak na mnoge grane gospodarstva, ali kao i svi ekstremni događaji, otvaraju vrata inovativnim rješenjima i pogledima na problematiku. Naš rad nastavlja tim stopama te nam je cilj pronaći metrike sistemskog rizika koje su značajne i precizne, ali i dovoljno jednostavne i intuitivne kako bi potencijalno bile korisne financijskim regulatorima u sprječavanju daljnjih kriza.

4.1 Osnovni ekonomski pojmovi

Kako bismo modelirali bankarski sektor kompleksnom mrežom, nužno je poznavati principe protoka sredstava između financijskih institucija. U tu svrhu počet ćemo s jednim od *tri temeljna financijska izraza* - jednadžbom bilance [37].

Bilansom se naziva sustav praćenja imovine i zaduženja poduzeća unutar određenog vremenskog perioda. Bilanca je okosnica modernog financijskog upravljanja te iz nje iščitavamo ukupnu imovinu institucije te na koji način se ta imovina financira. U svrhu praćenja bilance potrebno nam je poznavati tri iznosa - *imovinu*, *obveze* i *kapital* tvrtke.

- Imovina (*engl. assets*) A se prema međunarodnim standardima financijskog izvještanja (MSFI) definira kao “svaki resurs pod kontrolom poduzeća od kojeg se u budućnosti očekuje financijska dobit”. Pod imovinu pripada gotovina, inventar tvrtke, investicije, patenti itd.
- Obveze (*engl. liabilities*) L podrazumijevaju sva dugovanja koja u danom trenutku poduzeće ima prema drugom poduzeću ili osobi. Neki od primjera obveza su krediti, izdane dionice i neplaćene fakture.
- Kapital (*engl. equity*) E odgovara iznosu novca koji bi pripao vlasnicima tvrtke kad bi se sva njena imovina likvidirala i sva dugovanja otplatila. Kapital se obično spominje kada je riječ o “vrijednosti” kompanije i čest je indikator za financijsko zdravlje poduzeća.

Sustav bilance nalaže da imovina tvrtke mora biti uravnotežena s njenim kapitalom i dugovanjem što nas dovodi do jednadžbe bilance (*engl. balance sheet equation*)

$$A = L + E. \quad (4.1)$$

Jednadžba (4.1) govori nam o tome da u svakom trenutku ukupna vrijednost imovine odgovara zbroju novca dobivenog zaduživanjem i postojećeg kapitala tvrtke.

Nama će ovaj identitet i pojmovi vezani uz njega biti bitni u istraživanju budući da ćemo bankrot institucije definirati kao slučaj kad kapital E pojedine banke padne na nulu. Također, modelirajući sustav banaka kao težinski graf, težinama bridova će odgovarati imovina A_i banke i uložena u sve ostale, odnosno gledano s druge strane, iznos novca L_i koji banka i duguje ostalima.

4.2 DebtRank algoritam

Kao što je spomenuto u prijašnjim poglavljima, u našem istraživanju modelirat ćemo sustav financijskih institucija kompleksnom mrežom te analizirati rizik od katastrofalnih posljedica širenja malih financijskih šokova. Kako bismo modelirali samo širenje šoka i evaluirali utjecaj pojedinih čvorova koristit ćemo algoritam uveden u radu iz 2012. [38] i nadograđen 2015. godine od strane Bardoscie, Battistona, Cacciolija i Caldarellija pod nazivom *DebtRank* [39].

DebtRank se temelji na osnovnim ekonomskim principima i računanju centralnosti vrha u svrhu formulacije mikroskopske teorije stabilnosti financijske mreže te pružanju kvantitativne mjere utjecaja pojedine banke na proširenje nestabilnosti. U daljnjem tekstu dat ćemo kompletan izvod algoritma počevši s osnovnim pretpostavkama.

Teorijska pozadina i izvod

Sustav n banaka možemo prikazati kao usmjerenu težinsku mrežu koja se sastoji od n vrhova. Najzastupljeniji oblik interakcije među bankama je posuđivanje novca, tako da bridovima mreže pridajemo težine A_{ij} koji odgovaraju iznosu novca kojim je banka i kreditirala banku j . U tom slučaju A_{ij} su elementi matrice susjedstva mreže. Imovina banke i unutar sustava odgovara sumi uloženog novca u sve ostale banke $A_i = \sum_j A_{ij}$, dok ostatak imovine banke (dio koji se ne odnosi na kreditiranje ostatka sustava) označavamo s A_i^E . Svakom iznosu uložene imovine A_{ij} banke i odgovara iznos obveze L_{ij} banke j koji je u nekom budućem trenutku dužna otplatiti. Analogno imovini, banke posjeduju i obveze van sustava koje označavamo s L_i^E . Kapital banke i računamo koristeći jednadžbu bilance (4.1) te odgovara $E_i = A_i - L_i$, gdje je $L_i = \sum_j L_{ij}$ ukupna obveza banke i prema svim ostalim bankama. Ovdje možemo definirati bankrot kao slučaj u kojemu obveze banke i premaše njenu imovinu, odnosno $E_i \leq 0$.

Nadalje želimo pronaći evoluciju kapitala banaka u vremenu. U tu svrhu definiramo skup aktivnih banaka, odnosno banaka koje u trenutku t nisu u bankrotu

$$\mathcal{A}(t) = \{j : E_j(t) > 0\}. \quad (4.2)$$

Kako bismo došli do izraza za vremensku ovisnost kapitala, pretpostavit ćemo da s bankrotom banke j imovina uložena u nju iščezne iz sustava tj. $A_{ij} = 0$, no obveze L_{ij} ostaju konstantne. Pretpostavka je razumna jer u realnim sustavima bankrotom institucije ona gubi mogućnost otplaćivanja dugova prema svim svojim kreditorima gotovo trenutno, iako obveza otplaćivanja i dalje postoji. Kao posljedicu pretpostavke dobivamo vremenski ovisnu jednadžbu bilance

$$E_i(t) = A_i^E(t) - L_i^E(t) + \sum_{j \in \mathcal{A}(t-1)} A_{ij}(t) - \sum_{j=1}^n L_{ij}(t), \quad (4.3)$$

gdje suma imovina unutar sustava uključuje samo banke koje su aktivne u vremenu $t-1$, budući da sustav može “saznati” o bankrotu pojedine banke tek u sljedećoj točki vremena.

Saznavši ovisnost kapitala o vremenu, predložen je jednostavan mehanizam propagacije financijskog šoka između čvorova mreže. Pretpostavka ovdje je da se imovina kreditora unutar sustava mijenja razmjerno s kapitalom dužnika u prijašnjem vremenskom trenutku, odnosno

$$A_{ij}(t+1) = \begin{cases} A_{ij}(t) \frac{E_j(t)}{E_j(t-1)}, & j \in \mathcal{A}(t-1) \\ A_{ij}(t) = 0, & j \notin \mathcal{A}(t-1). \end{cases} \quad (4.4)$$

Vremensku evoluciju imovine unutar sustava (4.4) sada možemo uvrstiti u jednadžbu bilance kako bismo izračunali promjenu kapitala banke i između vremena t i $t+1$, uzevši u obzir pretpostavke da su imovine i obveze van sustava, te obveze unutar sustava konstantne. Iz toga slijedi izraz

$$\begin{aligned} E_i(t+1) - E_i(t) &= \sum_{j \in \mathcal{A}(t)} A_{ij}(t+1) - \sum_{j \in \mathcal{A}(t-1)} A_{ij}(t) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{A}(t-1)} (A_{ij}(t+1) - A_{ij}(t)) - \sum_{j \in \mathcal{A}(t-1) \setminus \mathcal{A}(t)} A_{ij}(t+1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdje smo u drugom retku izdvojili članove sume koji odgovaraju bankama aktivnim u vremenu $t-1$ koje su bankrotirale u t . Iz jednadžbe (4.4) vidimo da taj član iščezava.

Nakon sređivanja izraza dobivamo promjenu kapitala

$$E_i(t+1) - E_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{A}(t-1)} \frac{A_{ij}(0)}{E_j(0)} (E_j(t) - E_j(t-1)), \quad (4.6)$$

gdje smo na izlučenom faktoru rekurzivno primijenili jednadžbu (4.4) i iskoristili činjenicu da se u prvom trenutku mijenjaju samo kapitali, a ne i imovina tj. $A_{ij}(1) = A_{ij}(0)$.

Uvedemo li kao pokratu matricu

$$\tilde{\Lambda}_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{A_{ij}(0)}{E_j(0)}, & j \in \mathcal{A}(t-1) \\ 0, & j \notin \mathcal{A}(t-1) \end{cases}. \quad (4.7)$$

vremensku evoluciju kapitala možemo zapisati kao

$$E_i(t+1) = \max \left[0, E_i(t) + \sum_{j=1}^n \tilde{\Lambda}_{ij}(t) (E_j(t) - E_j(t-1)) \right], \quad (4.8)$$

gdje se maksimumom osiguravamo da nakon bankrota kapital banke i ne poprimi negativnu vrijednost. Naposlijetku definiramo kumulativni gubitak kapitala ili *financijski šok* $h_i(t)$ kao

$$h_i(t) = \frac{E_i(0) - E_i(t)}{E_i(0)} \quad (4.9)$$

te možemo zapisati jednadžbu (4.8) u terminima financijskog šoka

$$h_i(t+1) = \min \left[0, h_i(t) + \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}(t) (h_j(t) - h_j(t-1)) \right]. \quad (4.10)$$

Ovime smo dobili jednadžbu koja opisuje vremensku evoluciju financijskog šoka na pojedinom čvoru mreže u kojoj uvodimo novu pokratu $\Lambda_{ij}(t)$ koja se definira kao

$$\Lambda_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{A_{ij}(0)}{E_i(0)}, & j \in \mathcal{A}(t-1) \\ 0, & j \notin \mathcal{A}(t-1) \end{cases}. \quad (4.11)$$

Matricu $\Lambda(t)$ možemo gledati kao reduciranu matricu susjedstva mreže banaka te ćemo nju primarno koristiti u našem istraživanju.

Stabilnost i amplifikacija šoka

Ključna značajka *DebtRank* dinamike je činjenica da su stabilnost sustava te posljedično amplifikacija i gušenje širenja šoka određeni svojstvima matrice $\Lambda(t)$. Pokazat ćemo da ovisno o spektralnom radijusu, iznosu apsolutne vrijednosti najveće svojstvene vrijednosti $|\lambda_{max}|$ reducirane matrice susjedstva, financijski šok može ili konvergirati k stabilnoj vrijednosti ili biti amplificiran dok ne dođe do bankrota jedne ili više institucija.

Promotrimo vremenski period između dva bankrota, odnosno period u kojem je matrica $\Lambda(t) = \Lambda$ konstantna. Definiramo li promjenu financijskog šoka kao $\Delta h(t) = h(t) - h(t-1)$, jednadžbu (4.10) možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{aligned}\Delta h(t+1) &= \Lambda \Delta h(t) \\ &= \Lambda^t \Delta h(1) = \Lambda^t h(1),\end{aligned}\tag{4.12}$$

gdje smo u drugom retku rekursivno koristili jednadžbu (4.10) i iskoristili činjenicu da je $h(0) = 0$. Zanima li nas iznos šoka u vremenu $t+1$, potrebno je sumirati promjene šokova u svim ranijim vremenima

$$h(t+1) = \sum_{t'=0}^{t+1} \Delta h(t') = \sum_{t'=0}^{t+1} \Lambda^{t'} h(1).\tag{4.13}$$

Kako bi asimptotska vrijednost $h^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ postojala, mora biti ispunjen uvjet na normu matrice $\|\Lambda\| < 1$. Ovdje koristimo Gelfandov teorem koji nalaže da za spektralni radijus bilo koje matrice vrijedi

$$\rho(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Lambda^k\|^{1/k}.\tag{4.14}$$

Iz (4.14) i činjenice da $\|\Lambda^k\|^{1/k} \leq \|\Lambda\| < 1$ direktno slijedi da je nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju h^∞ spektralni radijus manji od 1, odnosno $|\lambda_{max}| < 1$. U tom slučaju (4.13) konvergira prema

$$h^\infty = (I - \Lambda)^{-1} h(1).\tag{4.15}$$

U suprotnom slučaju, tj. $|\lambda_{max}| \geq 1$, ne dolazimo do rješenja u zatvorenoj formi nego dolazi do neomeđenog rasta financijskog šoka.

Dinamika opisana s (4.13) vrijedi uz pretpostavku konstantne Λ -matrice, tj. do prvog bankrota, no metodu je lako generalizirati na kompletni vremenski tijek ako u periodima između pojedinih bankrota korigiramo imovine i kapitale banaka odgovarajućim vrijednostima.

Takvim pristupom možemo modelirati kompleksnu dinamiku širenja i amplifikacije financijskog šoka budući da u trenutku u kojem spektralni radijus postane većim od 1 i dođe do bankrota sastavnice, tu instituciju u sljedećem koraku izbacujemo iz sustava te se šok nastavlja povećavati ako je spektralni radijus i dalje veći od 1. Međutim, to ne nalaže kaskadu propadanja svih banaka jer nakon određenog broja bankrota, reducirani sustav može ponovno doći u stabilno stanje $|\lambda_{max}| < 1$ gdje šok konvergira prema nekoj konačnoj vrijednosti.

5 Istraživanje parametarskog prostora inicijalnog financijskog pogoršanja

U sljedećem poglavlju iskoristit ćemo znanje o kompleksnim sustavima, infrastrukturu kompleksnih mreža i mehanizam *DebtRank* algoritma kako bismo razvili nekoliko potencijalno efikasnih mjera za procjenu sistemskog rizika unutar sustava financijskih institucija. Tijekom istraživanja referirali smo se na članak [40] u kojem je pronađena povezanost između amplifikacije financijskog šoka i asortativnosti mreže unutar *DebtRank* scenarija. Autori navedenog članka naslutili su kako bi se iz mrežne strukture, tj. izmjene imovine među bankama na elegantan način moglo doći do intervala dopuštenog inicijalnog makroekonomskog šoka posljedicom kojeg neće doći do bankrota nijedne financijske sastavnice te ovim istraživanjem nastavljamo tim stopama.

Analizu smo počeli na najmanjim netrivialnim mrežnim problemima, odnosno mrežama sastavljenim od dva tj. tri čvora na kojima smo razvili modele koje smo kasnije generalizirali na arbitraran broj čvorova i testirali na ansamblu Erdős-Rényi mreža. U skladu s kompleksnosti problema, jednostavnije slučajeve pokušali smo riješiti analitički, međutim, za naše proračune u glavnini rada koristili smo Monte Carlo simulacije i numeričke pakete unutar jezika *Python*.

5.1 Mjere sistemskog rizika

Mjere sistemskog rizika koje smo razvili podijelili smo na tri česta slučaja nastanka financijskih poteškoća u realnim sustavima. Prva od njih odnosi se na šok koji približno jednako pogađa sve sastavnice u mreži i nazvali smo ga *uniformnim šokom*. Drugi scenarij je nastanak poteškoća unutar samo jedne od sastavnica (idiosinkratski rizik) koji dovodi do proširenja rizika na ostatak mreže, odnosno *lokalizirani šok*. Na posljetku uvodimo generalnu mjeru koja uključuje višeparatarski šok koji pogađa sve sastavnice različitim intenzitetom, koju nazivamo *mjerom hipervolumena*.

Uniformni financijski šok

Prvi slučaj koji smo proučavali je ujedno i najčešći oblik makroekonomskog šoka, koji može imati i najveći spektar potencijalnih uzroka. Faktori koji dovode do uniformnih šokova mogu biti nagli padovi u ponudi i potražnji koji dovode do porasta cijena, promjene u zakonodavstvu koje utječu na fiskalnu politiku, nagli tehnološki napreci, inflacija i sl. Primjerice sukobi na Bliskom istoku prouzročili su smanjenje proizvodnje nafte posljedica koje je porast cijene naftnih derivata koji je jednoliko utjecao na cijeli sektor. Ili s druge strane, rast tečaja švicarskog franka u odnosu na kunu uslijed transfera kapitala tijekom gospodarske krize imao je uniforman utjecaj na banke (a posebno na njihove klijente) koje s tom valutom posluju.

Financijski sustavi su po svojoj prirodi osjetljivi na vanjske okolnosti pa tako neprestane i nepredvidive promjene u svjetskim događanjima uzrokuju približno homogene promjene u likvidnosti svih financijskih sastavnica. Takve promjene često su benigne i financijska infrastruktura je građena na način da ih preživi, međutim, ako je šok dovoljno jak i mreža previše povezana, uniformni šokovi mogu dovesti do značajnih poteškoća.

Kako bismo modelirali financijske šokove, u ovom slučaju uniformni šok, služit ćemo se matričnim oblikom vremenske evolucije kumulativnog gubitka kapitala, u režimu u kojem ne dolazi niti do jednog bankrota, ranije opisanom jednadžbom (4.15)

$$h^\infty = (I - \Lambda)^{-1}h(1).$$

Ponovimo da je $h(1)$ vektor inicijalnih šokova unutar pojedine sastavnice, h^∞ šok asimptotska vrijednost financijskog šoka, a Λ reducirana matrica susjedstva mreže. Uniformni šok modeliramo pretpostavivši da svi elementi vektor-stupca $h(1)$ imaju jednaku vrijednost $\psi_u \in [0, 1)$

$$h(1) = \psi_u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_u \widetilde{h}(1). \quad (5.1)$$

Uvrstimo li pretpostavku o uniformnom šoku u jednadžbu (4.15) dobivamo matricnu jednadžbu

$$h^\infty = \psi_u (I - \Lambda)^{-1} \widetilde{h(1)}. \quad (5.2)$$

Cilj nam je pronaći maksimalni uniformni šok ψ_u koji ne prouzrokuje bankrot niti jedne sastavnice. Matematički, rubni slučaj netom prije bankrota reprezentiran je slučajem u kojem neki od elemenata vektor-stupca h^∞ dosegne iznos 1. Iz tog razloga, da bismo dobili *maksimalni dozvoljeni uniformni šok*, potrebno nam je maksimizirati jednadžbu (5.2)

$$\Psi_u = \frac{1}{\max_j \left[\left((I - \Lambda)^{-1} \widetilde{h(1)} \right)_j \right]}. \quad (5.3)$$

Primijetimo da Ψ_u ovisi jedino o mrežnoj strukturi, odnosno o iznosu međubankarske imovine i kapitalima banaka. Budući da Ψ_u modelira najveći šok koji sustav može podnijeti, visoke vrijednosti Ψ_u odgovaraju velikoj stabilnosti i rezilijentnosti sustava, dok vrijednosti Ψ_u bliske nuli naznačuju propast neke od sastavnica i za vrlo male vanjske šokove.

Lokalizirani financijski šok

U odnosu na uniformni, lokalizirani makroekonomski šok druga je krajnost koja vodi do sistemskog rizika. Do lokaliziranog šoka dovode financijske poteškoće unutar malog broja sastavnica financijskog sustava koje nadalje mogu dovesti do nestabilnosti unutar cijelog sektora. Lokalizirani šokovi imali su velik utjecaj na razvoj kriza u modernoj povijesti. Primjerice, propast investicijske banke Lehman Brothers u 2008., dotad četvrte po veličini investicijske banke u SAD-u, uzrokovala je šokove unutar velikog broja ostalih banaka i fondova, što je nadalje prouzročilo najveći pad burzovnog indeksa Dow Jones u sedam godina prethodnih tom događaju [41].

Razina opasnosti takvih šokova, kao i kod uniformnih, uvelike ovisi o povezanosti mreže banaka, a ovdje posebice o povezanosti pogođenog čvora s ostatkom mreže. Institucije kao banka Lehman Brothers zbog svog utjecaja na sustav nazivale su se "too big to fail", međutim, "veličina" odnosno amplituda šoka nije jedini čimbenik utjecajan na sistemski rizik, već se sve popularniji izraz "too connected to fail" kojim se naglašava važnost povezanosti u evaluaciji stabilnosti sustava.

Mjeru sistemskog rizika uslijed lokaliziranog financijskog šoka razvili smo na sličan način kao i mjeru uniformnog šoka, dakle korištenjem jednadžbe (4.15). Razlika je ovdje u tome što je vektor inicijalnog šoka $h(1)_i$ koji odgovara šoku unutar i -te sastavnice ovaj puta i -ti vektor kanonske baze e_i množen skalarom ψ_l^i

$$h(1)^i = \psi_l^i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_l^i e_i. \quad (5.4)$$

Ako promatramo mrežu n banaka, vidimo da sada imamo n parametara lokaliziranog šoka, svaki od kojih predstavlja slučaj financijskih poteškoća unutar jedne od banaka. Kao i u prethodnom slučaju, tražimo maksimalni ψ_l^i za koji jedan od elemenata $(h^\infty)^i$ doseže maksimalnu vrijednost 1, ovaj puta za pojedini čvor mreže

$$\begin{aligned} (h^\infty)_j^i &= \psi_l^i ((I - \Lambda)^{-1} e_i)_j \\ &= \psi_l^i \sum_{k=1}^n ((I - \Lambda)^{-1})_{jk} \delta_{ki} = \psi_l^i ((I - \Lambda)^{-1})_{ji}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

gdje je δ_{ki} Kroneckerova delta. Maksimiziranjem jednadžbe (5.5) dobivamo *maksimalni dozvoljeni lokalizirani šok*

$$\Psi_l^i = \frac{1}{\max_j [((I - \Lambda)^{-1})_{ji}]}. \quad (5.6)$$

Ψ_l^i također je određen isključivo reduciranom matricom susjedstva Λ , a posjeduje i zanimljivo svojstvo da ovisi samo o jednom elementu inverza $(I - \Lambda)^{-1}$, što bi mogla biti korisna značajka u proračunima na velikim mrežama, na kojima računalna efikasnost postaje bitnim faktorom.

Korisnost mjere maksimalnog dozvoljenog lokaliziranog šoka dvojaka je - može se koristiti generalno ili u užem smislu. Općenito je moguće komponente vektora Ψ_l prikazati histogramom s vrijednosti šoka na apscisi. Tada umjesto jedinstvene kvantitativne mjere dobivamo pregled o raspodjeli broja rizičnih sastavnica u mreži.

Specifičnije, možemo izdvojiti minimalnu komponentu maksimalnog lokaliziranog šoka

$$\Psi_l^m = \min_i \Psi_l^i \quad (5.7)$$

te označava najveći dozvoljeni lokalizirani šok koji može podnijeti i najmanje otporna sastavnica u mreži.

Heterogeni financijski šok

Uniformni i lokalizirani financijski šokovi dva su rubna slučaja koja dovode do sistemskog rizika unutar sustava banaka. Oba su karakterizirana jednim parametrom ψ koji determinira ukupni šok na jednoj ili svim financijskim sastavnicama. Iako su jednoparametarski modeli često prikladni zbog svoje jednostavnosti i približno dobrog opisa realne situacije, generalno na mreži n banaka postoji n parametara financijskog šoka te nas zanima koje kombinacije tih parametara dovode do stabilnog stanja sustava, a koje ne. U tu svrhu predlažemo mjeru koja uključuje mogućnost višeparametarskog šoka, ali je opisana jedinstvenim skalarom.

Ovu mjeru također izvodimo iz vremenske evolucije kumulativnog gubitka kapitala, no ovaj puta ćemo promotriti invertirani oblik jednadžbe (4.15) kao linearnu transformaciju dozvoljenog potprostora h^∞

$$h(1) = (I - \Lambda)h^\infty. \quad (5.8)$$

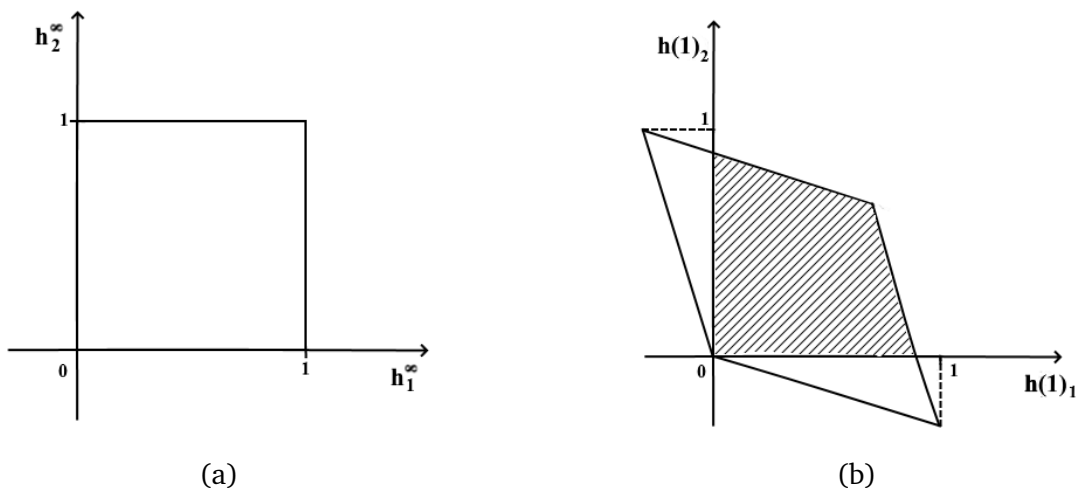
Budući da bankrotu financijske sastavnice i odgovara vrijednost $h_i^\infty = 1$, ukupan potprostor vrijednosti za koje ne dolazi do bankrota ($0 \leq h_i^\infty < 1$) odgovara jediničnoj n -kocki (*hiperkocki*) smještenoj u ishodištu koordinatnog sustava definiranog osima h_i^∞ . Dakle, unutar hiperkocke smješteni su svi dozvoljeni slučajevi prilikom kojih ne dolazi do propasti nijedne od banaka. Na Slici 5.1a grafički je prikazan dozvoljeni potprostor u dvodimenzionalnom prostoru h^∞ .

Nadalje želimo saznati koji potprostor parametara prostora inicijalnog šoka $h(1)$ odgovara dozvoljenim vrijednostima u h^∞ prostoru. U tu svrhu transformiramo hiperkocku iz prostora asimptotskog šoka u prostor inicijalnog šoka koristeći *DebtRank* evoluciju (5.8).

Ovdje moramo uzeti u obzir jedno dodatno ograničenje. Znamo da su elementi matrice Λ nenegativni s tim da su elementi na dijagonali uvijek jednaki 0 budući da pretpostavljamo da banke ne ulažu imovinu same u sebe. To povlači da najopćenitiji oblik matrice $I - \Lambda$ ima jedinice na dijagonali, a svi nedijagonalni članovi su manji ili jednaki 0, odnosno

$$I - \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda_{12} & \dots & -\Lambda_{1n} \\ -\Lambda_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -\Lambda_{n1} & \dots & & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Za linearnu transformaciju hiperkocke to znači da će dobiveni potprostor u $h(1)$ prostoru nužno uključivati vrijednosti van pozitivnog n -oktanta (*hiperoktanta*), odnosno vrijednosti $h(1)_i$ koje odgovaraju stanju u kojem nema bankrota, izlazit će iz intervala $[0, 1]$. Te vrijednosti potrebno je izuzeti iz analize budući da $h(1)_i < 0$ označava pozitivan inicijalni šok, tj. rast kapitala, što je realan slučaj, ali prilikom procjene sistemskog rizika nam nije od interesa. Stoga u našoj analizi promatramo presjek V dozvoljenog $h(1)$ potprostora i pozitivnog hiperoktanta, čiji je dvodimenzionalni slučaj prikazan na Slici 5.1b.



Slika 5.1: Potprostor dozvoljenih vrijednosti u h^∞ prostoru (a) i transformirani potprostor dozvoljenih vrijednosti inicijalnog šoka u $h(1)$ prostoru (b) za $n = 2$.

Poanta ove analize je u tome da ovisno o matrici Λ možemo imati veći ili manji potprostor inicijalnih šokova koji odgovaraju stanju u kojem ne dolazi do bankrota. Drugim riječima, ako je mrežna struktura takva da $I - \Lambda$ transformacijom dobivamo

malen potprostor V , sve kombinacije vrijednosti inicijalnog šoka izvan V izazvat će bankrot barem jedne financijske institucije u mreži, što znači da je takva mrežna struktura niske stabilnosti. Vrijedi i obratno, ako je V “veličine” sumjerljive potprostoru h^∞ , vjerojatnost da će neka kombinacija parametara inicijalnog šoka izazvati bankrot mala je.

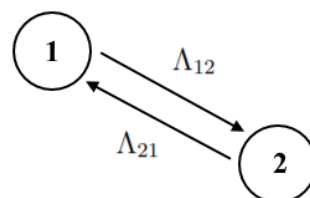
To saznanje navodi nas na uvođenje nove mjere sistemskog rizika sustava koja odgovara *hipervolumenu* Ψ_V dozvoljenog potprostora V . Kad ne bismo imali ranije opisano ograničenje, računanje ove mjere bilo bi trivijalno te bi hipervolumen iznosio $\det(I - \Lambda)$. Međutim, ovisno o iznosima međubankarskih investicija, geometrija ovog problema može biti izrazito kompleksna čak i za male brojeve čvorova, što nas motivira za korištenje numeričkog pristupa problemu.

5.2 Jednostavan slučaj - mreže s $n \leq 3$ čvora

Primjenu mjera opisanih u prethodnom dijelu započeli smo na *toy modelima* mreža s malim brojem čvorova. Razlog je tome što je na mrežama niske dimenzionalnosti mnogo intuitivnije steći kvalitativan uvid u problem, velikim dijelom zbog malog broja parametara i mogućnosti adekvatne vizualizacije. Također, proračun na malim mrežama omogućava nam i analitički pristup računanju mjera za neke specijalne slučajeve.

Mreža s $n = 2$ čvora

Budući da na trivijalnoj mreži s jednim čvorom nema smisla definirati protok novca, analizu ćemo započeti na mreži $n = 2$ financijske sastavnice koje međusobno kreditiraju jedna drugu. Usmjereni graf s dva čvora prikazan je na Slici 5.2.



Slika 5.2: Mreža s $n = 2$ čvora povezana u oba smjera.

U tom slučaju matrica transformacije ima oblik

$$I - \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda_{12} \\ -\Lambda_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

dok njen inverz odgovara

$$(I - \Lambda)^{-1} = \frac{1}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Želimo li sada izvrjedniti mjere uniformnog i lokaliziranog financijskog šoka na mreži dvije sastavnice, uvrštavamo inverz (5.11) u jednadžbe (5.3) i (5.6), slijedom te dolazimo do

$$\Psi_u = \frac{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}}{1 + \max[\Lambda_{12}, \Lambda_{21}]}, \quad (5.12)$$

$$\Psi_l = (1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}) \begin{pmatrix} \min[1, \frac{1}{\Lambda_{21}}] \\ \min[1, \frac{1}{\Lambda_{12}}] \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Hipervolumen u ovom dvodimenzionalnom slučaju odgovara površini paralelograma dobivenog transformacijom unutar prvog kvadranta te ju je moguće izračunati jednostavnom geometrijskom analizom. Tada mjera rizika od heterogenog šoka iznosi

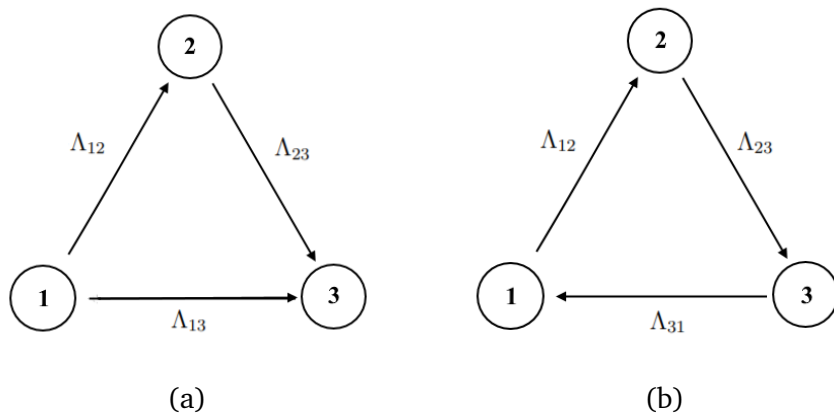
$$\Psi_V = 1 - \frac{1}{2}(\Lambda_{12}(1 - \Lambda_{21}^2) + \Lambda_{21}(1 - \Lambda_{12}^2)). \quad (5.14)$$

Analitički pregled mreže s dva čvora zaključit ćemo računanjem dozvoljenih intervala inicijalnog šoka unutar kojih ne dolazi do bankrota. U tom slučaju mora vrijediti $0 \leq h_i^\infty < 1$, $i \in \{1, 2\}$ te iz tog uvjeta linearnom transformacijom (5.8) dolazimo do sustava nejednadžbi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{h(1)_1 + \Lambda_{21}h(1)_2}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}} < 1 \\ 0 &\leq \frac{\Lambda_{12}h(1)_1 + h(1)_2}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{21}} < 1 \end{aligned}. \quad (5.15)$$

Mreža s $n = 3$ čvora

U slučaju potpuno povezane mreže triju financijskih sastavnica moguća su samo dva nezavisna slučaja iz kojih je cikličkom zamjenom indeksa elemenata Λ_{ij} moguće doći do ostalih konfiguracija. Moguć je i jednostavniji slučaj mreže s $n = 3$ čvora i $m = 2$ veze, no slučaj potpuno povezanog grafa ovdje će nam biti od većeg interesa. Pod pretpostavkom da između dvaju čvorova mreže može postojati samo jedan brid (jednosmjerna investicija), dvije moguće konfiguracije prikazane su na Slici 5.3.



Slika 5.3: Gornjotrokutasta (a) i ciklička (b) konfiguracija mreže s $n = 3$ čvora.

Skup parametara koji određuju vremensku evoluciju financijskog šoka reprezentiran je matricom $I - \Lambda$ te ćemo konfiguracije $n = 3$, u skladu s oblikom matrica, nazvati gornjotrokutastom (indeks UT) i cikličkom (indeks cyc) konfiguracijom. Matrice evolucije za oba slučaja dane su s

$$I - \Lambda_{UT} = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda_{12} & -\Lambda_{13} \\ 0 & 1 & -\Lambda_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$I - \Lambda_{cyc} = \begin{pmatrix} 1 & -\Lambda_{12} & 0 \\ 0 & 1 & -\Lambda_{23} \\ -\Lambda_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Za računanje mjera sistemskog rizika navedenih u 5.1 potrebno nam je poznavati inverze $I - \Lambda$ matrica, koje smo za gore navedene konfiguracije izračunali analitičkim putem. Inverzi matrica evolucije odgovaraju

$$(I - \Lambda_{UT})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{12}\Lambda_{23} + \Lambda_{13} \\ 0 & 1 & \Lambda_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

$$(I - \Lambda_{cyc})^{-1} = \frac{1}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}} \begin{pmatrix} 1 & \Lambda_{12} & \Lambda_{12}\Lambda_{23} \\ \Lambda_{23}\Lambda_{31} & 1 & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{31}\Lambda_{12} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Analogno $n = 2$ slučaju, matrice (5.18) i (5.19) uvrštavamo u jednadžbe (5.3) i (5.6) te dobivamo maksimalne uniformne i lokalizirane šokove za gornjotrokutastu

$$\Psi_u^{UT} = \frac{1}{1 + \max [\Lambda_{13} + \Lambda_{12}(1 + \Lambda_{23}), \Lambda_{23}]}, \quad (5.20)$$

$$\Psi_l^{UT} = \begin{pmatrix} 1 \\ \min [1, \frac{1}{\Lambda_{12}}] \\ \min [1, \frac{1}{\Lambda_{23}}, \frac{1}{\Lambda_{13} + \Lambda_{12}\Lambda_{23}}] \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

i cikličku konfiguraciju

$$\Psi_u^{cyc} = \frac{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}}{1 + \max [\Lambda_{12}(1 + \Lambda_{23}), \Lambda_{23}(1 + \Lambda_{31}), \Lambda_{31}(1 + \Lambda_{12})]}, \quad (5.22)$$

$$\Psi_l^{cyc} = (1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}) \begin{pmatrix} \min [1, \frac{1}{\Lambda_{31}}, \frac{1}{\Lambda_{23}\Lambda_{31}}] \\ \min [1, \frac{1}{\Lambda_{12}}, \frac{1}{\Lambda_{31}\Lambda_{12}}] \\ \min [1, \frac{1}{\Lambda_{23}}, \frac{1}{\Lambda_{12}\Lambda_{23}}] \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Za promatrane konfiguracije mreže triju čvorova moguće je analitičkim računom dobiti i intervale dozvoljenih vrijednosti inicijalnog šoka koristeći uvjet $0 \leq h_i^\infty < 1$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Kao i u prethodnom razmatranju, dolazimo do sustava nejednadžbi za gornjotrokutasti slučaj

$$\begin{aligned} 0 \leq h(1)_1 + \Lambda_{12}h(1)_2 + (\Lambda_{13} + \Lambda_{12}\Lambda_{23})h(1)_3 < 1 \\ 0 \leq h(1)_2 + \Lambda_{23}h(1)_3 < 1 \end{aligned}, \quad (5.24)$$

te za ciklički slučaj

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{h(1)_1 + \Lambda_{12}h(1)_2 + \Lambda_{12}\Lambda_{23}h(1)_3}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}} < 1 \\
0 &\leq \frac{\Lambda_{23}\Lambda_{31}h(1)_1 + h(1)_2 + \Lambda_{23}h(1)_3}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}} < 1. \\
0 &\leq \frac{\Lambda_{31}h(1)_1 + \Lambda_{31}\Lambda_{12}h(1)_2 + h(1)_3}{1 - \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{31}} < 1
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Mjera hipervolumena Ψ_V na mreži s $n = 3$ čvora odgovara volumenu dijela paralelepipeda u $h(1)$ prostoru dobivenog $I - \Lambda$ transformacijom, koji se nalazi unutar prvog oktanta. Volumen Ψ_V možemo računati geometrijski, podjelom nepravilnog tijela na prizme i piramide čiji su volumeni poznati. Međutim, već u trodimenzionalnom slučaju broj takvih tijela te broj različitih geometrija ovisnih o elementima Λ_{ij} postaje vrlo velik, što za posljedicu ima veliku kompleksnost analitičkog računanja općeg rješenja za Ψ_V . Kao primjer dajemo jednadžbu (5.26), koja vrijedi za jedan specijalni slučaj gornjotrokutaste konfiguracije mreže.

$$\begin{aligned}
\Psi_V^{UT} &= \frac{1}{2}\Lambda_{12}(1 - \Lambda_{23})^2 + (1 - \Lambda_{23} + \frac{1}{2}\Lambda_{23})(1 - \Lambda_{12} - \Lambda_{13}) + \frac{1}{6}\Lambda_{13}\Lambda_{23} \\
&+ \frac{1}{2}(\Lambda_{13} + \Lambda_{12}\Lambda_{23})(1 - \frac{2}{3}\Lambda_{23}); \quad \Lambda_{23} < 1, \Lambda_{12} + \Lambda_{13} < 1.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

S povećanjem broja čvorova kompleksnost problema naglo raste te analitički izračun Ψ_V postaje praktično neizvediv. Iz tog razloga ćemo se za računanje hipervolumena nadalje služiti numeričkim metodama, specifično *Monte Carlo simulacijama*. Metodu ćemo uvesti na mreži triju sastavnica, a od posebne koristi će nam biti u kasnijem modeliranju sistemskog rizika na Erdős-Rényi mreži.

Osnovni princip Monte Carlo metoda je korištenje nasumičnog uzorkovanja u svrhu dobivanja numeričkog rješenja. Monte Carlo metode uvriježen su alat u fizici i ostalim prirodnim znanostima, a posebno su pogodne za izvrjednjivanje složenih određenih integrala i volumena [42].

Monte Carlo simulaciju za računanje hipervolumena koristit ćemo na sljedeći način. U h^∞ prostoru generirat ćemo M nasumičnih dozvoljenih točaka iz uniforme distribucije, odnosno vektora s koordinatama $0 \leq h_i^\infty < 1$, uzimajući u obzir da je hipervolumen dozvoljenog h^∞ potprostora uvijek jednak 1. Potom generirane vektore jednadžbom (5.8) transformiramo u $h(1)$ prostor u kojem želimo saznati hi-

pervolumen dobivenog politopa te s M' označavamo broj točaka unutar presjeka politopa i pozitivnog hiperoktanta. Budući da je broj nasumično generiranih točaka tada proporcionalan hipervolumenu tijela, a ukupni hipervolumen politopa $\det(I - \Lambda)$, dolazimo do izraza

$$\Psi_V = \frac{M'}{M} \det(I - \Lambda). \quad (5.27)$$

Aproksimacija volumena ovog tipa pogodna je računalnim simulacijama zbog jednostavnog generiranja pseudoslučajnih vektora i brojenja istih unutar danih ograničenja te uz dovoljan broj točaka može dati relativno precizne rezultate.

5.3 Generalizacija - Erdős-Rényi ansambl

U nadolazećem dijelu promotrit ćemo realniji model bankarskog sektora predstavljen Erdős-Rényi grafom. Iako u realnim sustavima veze između financijskih sastavnica nisu raspoređene potpuno nasumično već je struktura sličnija tzv. *core-periphery* modelima [44], koristeći Erdős-Rényi mrežu posjedujemo veću kontrolu nad variranjem parametara i jednostavnije ju je računalno generirati, a dozvoljava nam istraživanje istih pitanja.

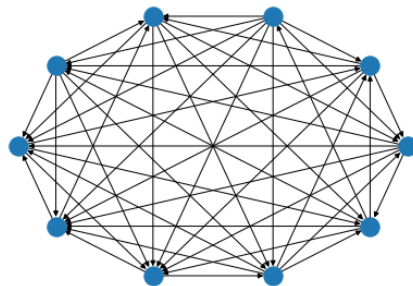
Generiranje mreža, proračune i vizualizacije izvršili smo u programskom jeziku *Python 3.8.3* i pripadnim bibliotekama, a svi korišteni kodovi originalni su te su priloženi u Dodatku A.

Generiranje mreža

Kako bismo stekli saznanja o rizičnosti mrežnih parametara neovisno o strukturi pojedine nasumične mreže, generirat ćemo ansambl N mreža, za svaku od kojih ćemo računati prosjek mjere na cijelom ansamblu. Baviti ćemo se dvjema vrstama nasumične mreže - potpuno i nepotpuno povezanom mrežom. Potpuno povezana mreža služiti će nam kao uvodni model maksimalne gustoće veza, dok ćemo na nepotpuno povezanoj mreži vršiti većinu naših simulacija zbog njene višeparametarske prirode i veće sličnosti realnom slučaju.

Potpuno povezana mreža

Potpuno povezanu Erdős-Rényi mrežu proizvest ćemo generirajući slučajnu matricu susjedstva Λ . Ovdje je bitno razjasniti terminologiju koju ćemo koristiti - na usmjerenim grafovima potpuna povezanost u širem smislu podrazumijeva poveznice između svakog para čvorova u oba smjera. Mi se u ovom razmatranju bavimo mrežama u kojim postoje samo jednosmjerne investicije te ćemo potpuno povezanom mrežom nazivati mrežu koja ima po jedan usmjereni brid između svakog para čvorova. Primjer ovakve mreže s $n = 10$ čvorova prikazan je na Slici 5.4.



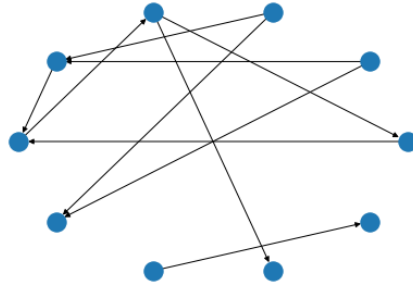
Slika 5.4: Potpuno povezana usmjereni nasumična mreža s $n = 10$ čvorova.

Algoritam generiranja potpuno povezane Erdős-Rényi mreže opisan je u sljedećim koracima:

1. Odabiremo n vrhova.
2. Pretpostavljamo da su kapitali svih sastavnica jednaki, odnosno $E_i = C$, a investicije između banaka A_{ij} odabiremo slučajno iz uniformne distribucije na intervalu $[0, A]$.
3. Za svaki par indeksa $i, j < n; i < j$ generiramo slučajni broj $p' \in [0, 1]$ iz uniformne distribucije te u slučaju $p' < 0.5$ elementu matrice investicije A_{ij} pridajemo slučajnu vrijednost, a u obratnom slučaju tu vrijednost pridajemo elementu A_{ji} .
4. Ostalim elementima matrice pripisujemo vrijednost 0.
5. Elemente matrice A_{ij} dijelimo konstantnim kapitalom C te dobivamo reduciranu matricu susjedstva Λ .
6. Provjeravamo je li spektralni radijus matrice Λ manji od 1, ako ne, vraćamo se na korak 1.

Nepotpuno povezana mreža

Uz parametre A i C , nepotpuno povezanu nasumičnu mrežu opisuje dodatni parametar p koji označava vjerojatnost da su nasumično odabrana dva čvora povezana usmjerenim bridom. Ovakav tip mreže grafički je prikazan na Slici 5.5.



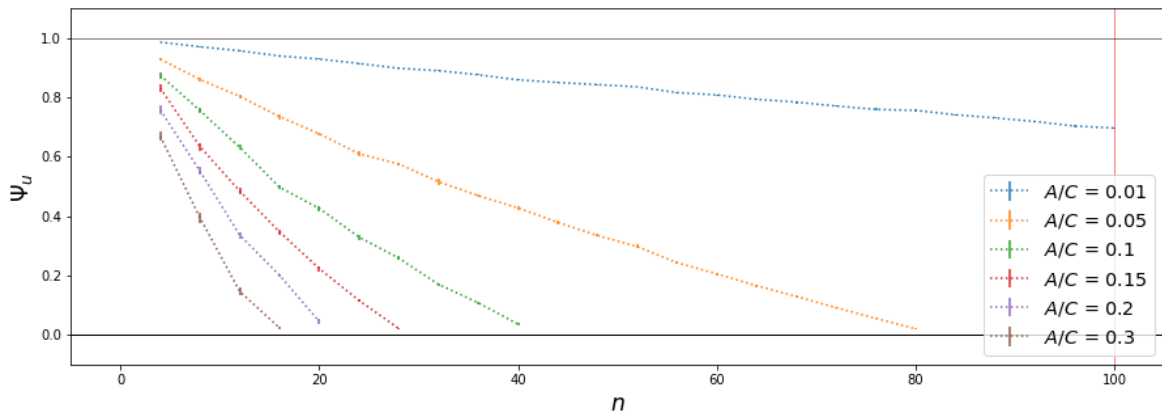
Slika 5.5: Nepotpuno povezana usmjerena nasumična mreža s $n = 10$ čvorova i $p = 0.3$.

Nepotpuno povezanu Erdős-Rényi mrežu generiramo sljedećim algoritmom:

1. Odabiremo n vrhova.
2. Pretpostavljamo da su kapitali svih sastavnica jednaki, odnosno $E_i = C$, a investicije između banaka A_{ij} odabiremo slučajno iz uniformne distribucije na intervalu $[0, A]$.
3. Odabiremo parametar $p \in [0, 1]$ te za svaki par indeksa $i, j < n; i < j$ generiramo slučajnu vrijednost $p'' \in [0, 1]$. Ako vrijedi $p'' < p$, čvorovi i i j bit će povezani bridom A_{ij} , u suprotnom bit će nepovezani.
4. Nadalje generiramo slučajni broj p' koji na način identičan prijašnjem algoritmu određuje usmjerenje brida.
5. Ostalim elementima pripisujemo vrijednost 0.
6. Elemente matrice A_{ij} dijelimo konstantnim kapitalom C te dobivamo reduciranu matricu susjedstva Λ .
7. Provjeravamo je li spektralni radijus matrice Λ manji od 1, ako ne, vraćamo se na korak 1.

Mjera uniformnog šoka Ψ_u

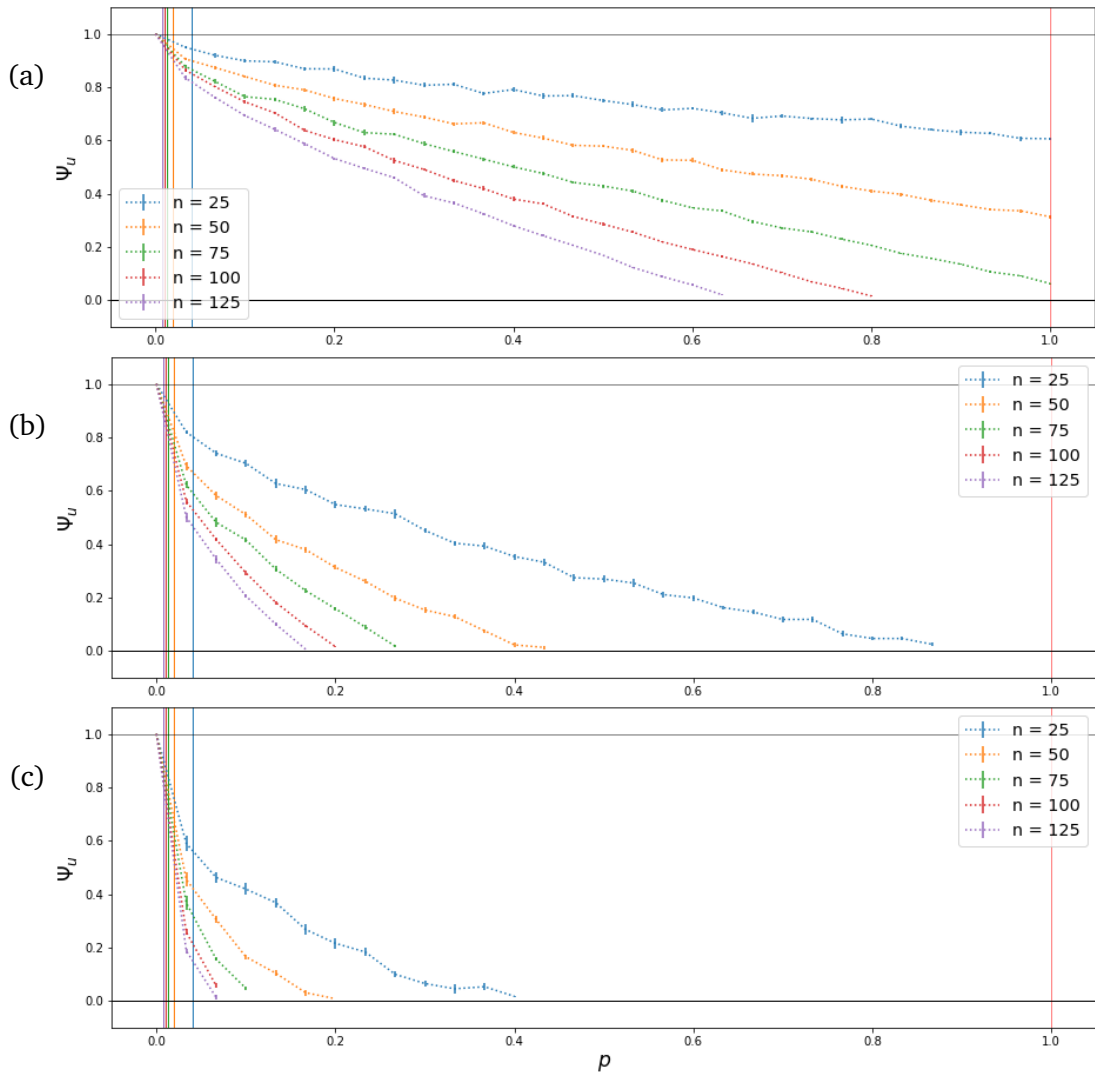
Izračun mjere uniformnog financijskog šoka započeli smo na potpuno povezanoj nasumičnoj mreži. Ovdje nam je od interesa bilo ispitati ponašanje maksimalnog uniformnog šoka Ψ_u u ovisnosti o broju čvorova mreže za različite vrijednosti omjera parametara A/C . Simulaciju smo vršili na ansamblu od $N = 10$ mreža, a dobiven rezultat prikazan je na Slici 5.6. Napominjemo da širina stupaca pogreške (*engl. error bars*) predstavlja standardnu pogrešku $\sigma_{\bar{\Psi}_u}$ veličine na ordinati, što vrijedi i za sve daljnje izračune.



Slika 5.6: Maksimalni dozvoljeni uniformni šok na potpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o broju čvorova. Račun je izvršen na ansamblu od $N = 10$ mreža za brojeve čvorova $n \in [5, 100]$ te za parametre $A/C \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3\}$.

Primijetimo opadajući trend maksimalnog uniformnog šoka koji mreža može podnijeti bez ijednog bankrota. Ψ_u s rastom potpuno povezane mreže monotono pada, parametar A/C regulira brzinu opadanja, odnosno s većim prosječnim međubankarskim investicijama, mreža postaje manje otporna. Ovakvu ovisnost opažat ćemo i u daljnjim razmatranjima.

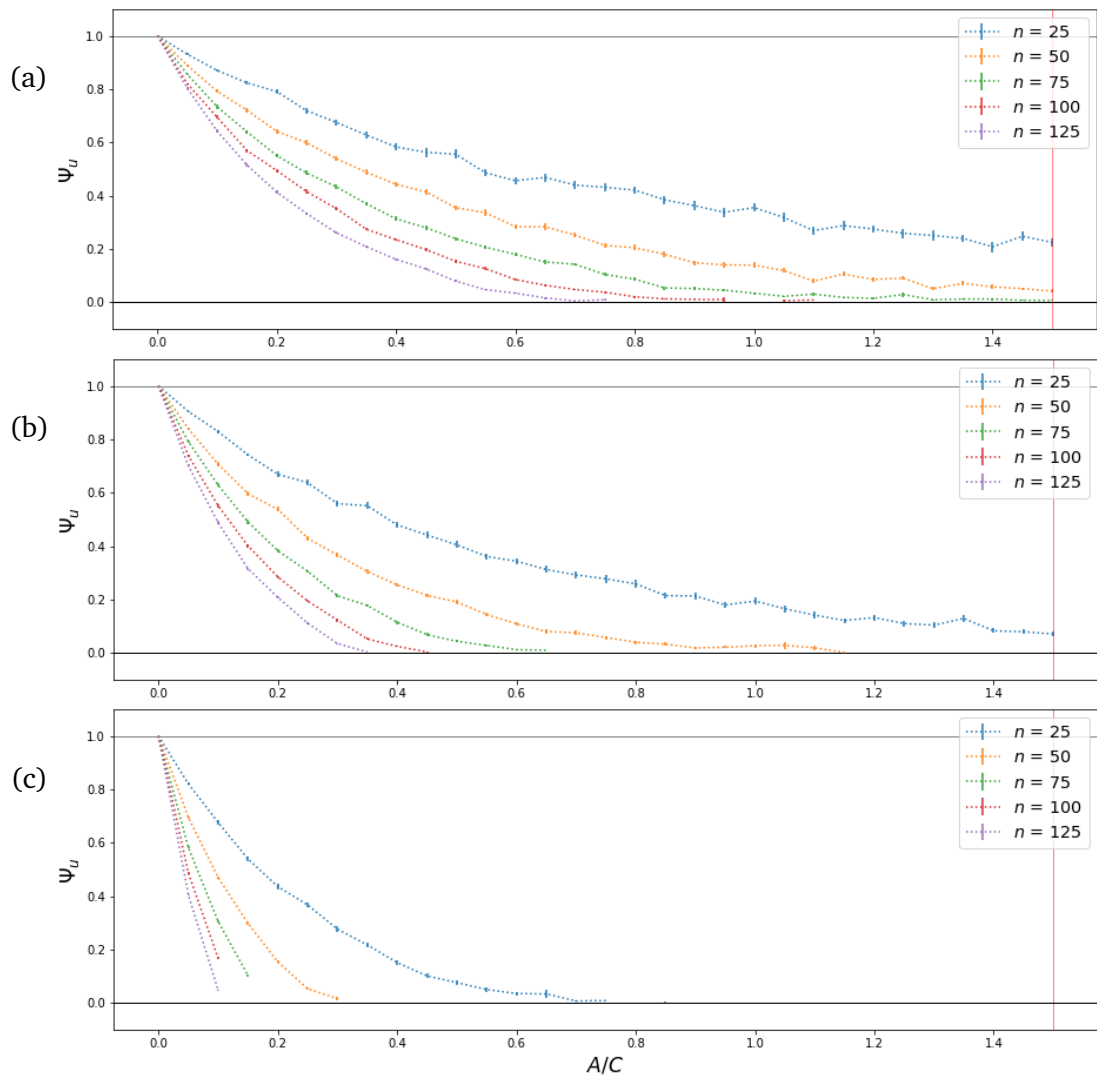
Izračun Ψ_u nastavili smo na ansamblima nepotpuno povezanih mreža karakteriziranih parametrima n , p i A/C . Prvu ovisnost koju smo promatrali bila je ovisnost Ψ_u o parametru povezanosti p , dok smo ostale parametrima držali fiksima. Ovdje je potrebno obratiti pažnju na to da za vrijednosti parametra manje od $p_c = \frac{1}{n}$, mreže koje generiramo nemaju divovsku komponentu, no za dimenzije mreža koje smo promatrali p_c je dovoljno malen da bi se većina mreža ipak nalazila u nadkritičnom režimu. Ovisnost Ψ_u o p prikazana je na Slici 5.7.



Slika 5.7: Maksimalni dozvoljeni uniformni šok na nepotpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o parametru p . Račun je izvršen na ansamblu od $N = 10$ mreža za $p \in \langle 0, 1 \rangle$ te za brojeve čvorova $n \in \{25, 50, 75, 100, 125\}$, dok vertikalne linije odgovaraju kritičnim vrijednostima p_c za pojedine vrijednosti n . Grafovi (a), (b) i (c) odgovaraju parametrima A/C iznosa 0.05, 0.2 i 0.5, slijedom.

Sličnu analizu izvršili smo i promatrajući Ψ_u u ovisnosti o iznosu A/C . Ovdje smo također vodili računa da parametre n i p biramo na način da generirane mreže budu u nadkritičnom režimu. Dobiveni rezultati prikazani su na Slici 5.8.

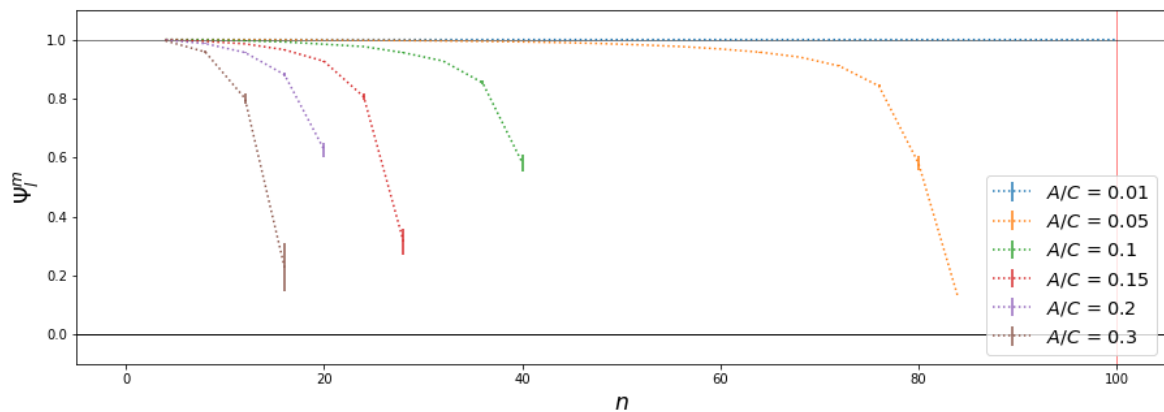
Zapažamo da na nasumičnim mrežama otpornost mreže na uniformni financijski šok (karakteriziran veličinom Ψ_u) opada s vjerojatnošću povezivanja p te prosječnim mjerom udjela investiranog kapitala A/C . Također, Ψ_u značajno ovisi i o broju financijskih ustanova n na način da su veće mreže inherentno rizičnije od manjih, za jednake parametre povezanosti i investicija.



Slika 5.8: Maksimalni dozvoljeni uniformni šok na nepotpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o parametru A/C . Račun je izvršen na ansamblu od $N = 10$ mreža za $A/C \in (0, 1.5]$ te za brojeve čvorova $n \in \{25, 50, 75, 100, 125\}$. Grafovi (a), (b) i (c) odgovaraju parametrima p iznosa 0.05, 0.1 i 0.3, slijedom.

Mjera lokaliziranog šoka Ψ_l

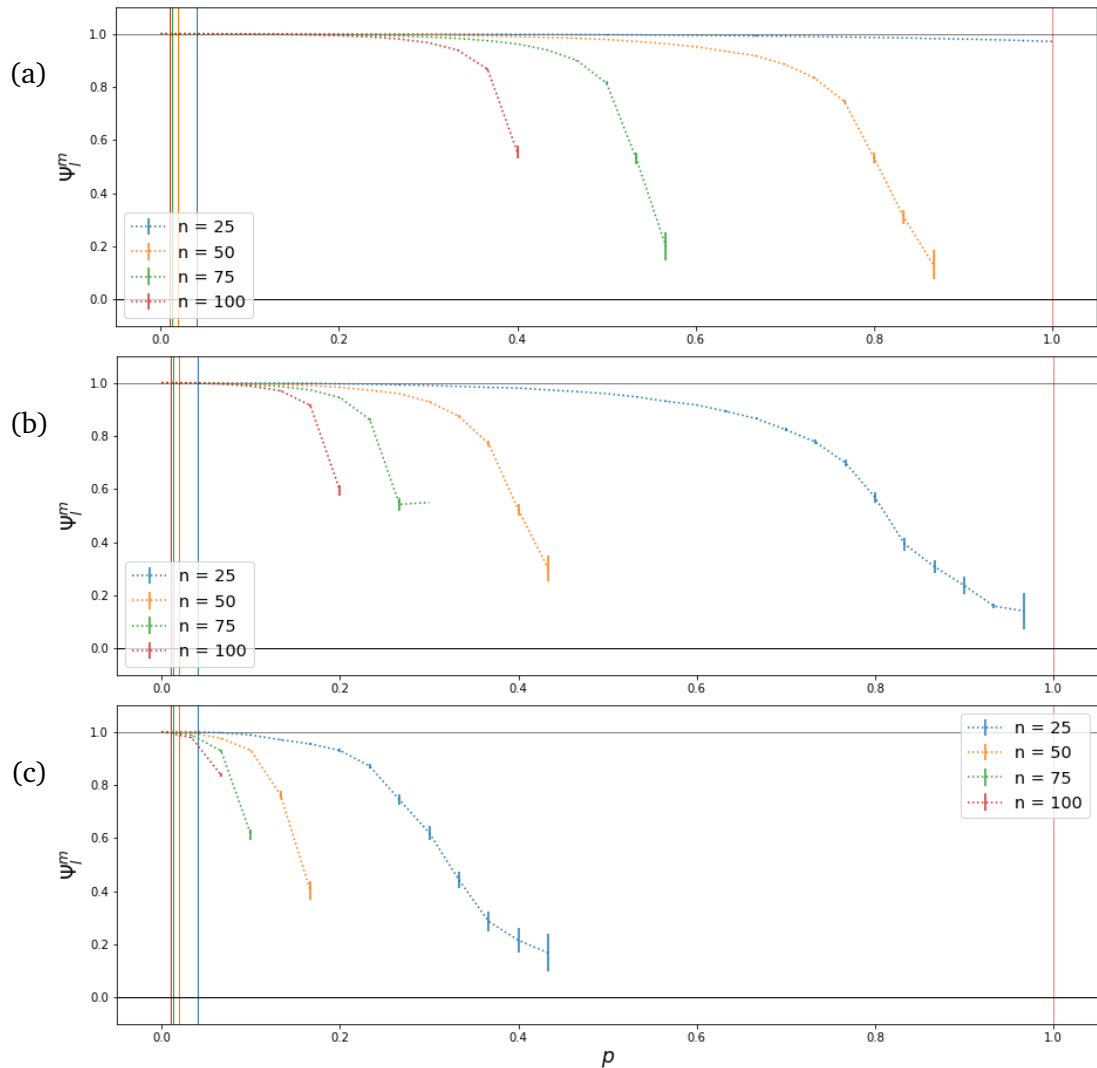
Razmatranja vezana uz lokalizirani financijski šok proveli smo na način analogan uniformnom, odnosno na potpuno povezanoj mreži u ovisnosti o n te na nepotpuno povezanoj mreži u ovisnosti o p i A/C . Veličina koju smo grafički prikazivali je minimalna komponenta Ψ_l^m vektora lokaliziranog šoka Ψ_l tj. maksimalni lokalizirani šok na “najslabijoj karici” mreže prilikom kojeg neće doći ni do jednog bankrota. Rezultat izračuna na potpuno povezanoj mreži prikazan je na Slici 5.9.



Slika 5.9: Maksimalni dozvoljeni lokalizirani šok na potpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o broju čvorova. Račun je izvršen na ansamblu od $N = 20$ mreža za brojeve čvorova $n \in [5, 100]$ te za parametre $A/C \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3\}$.

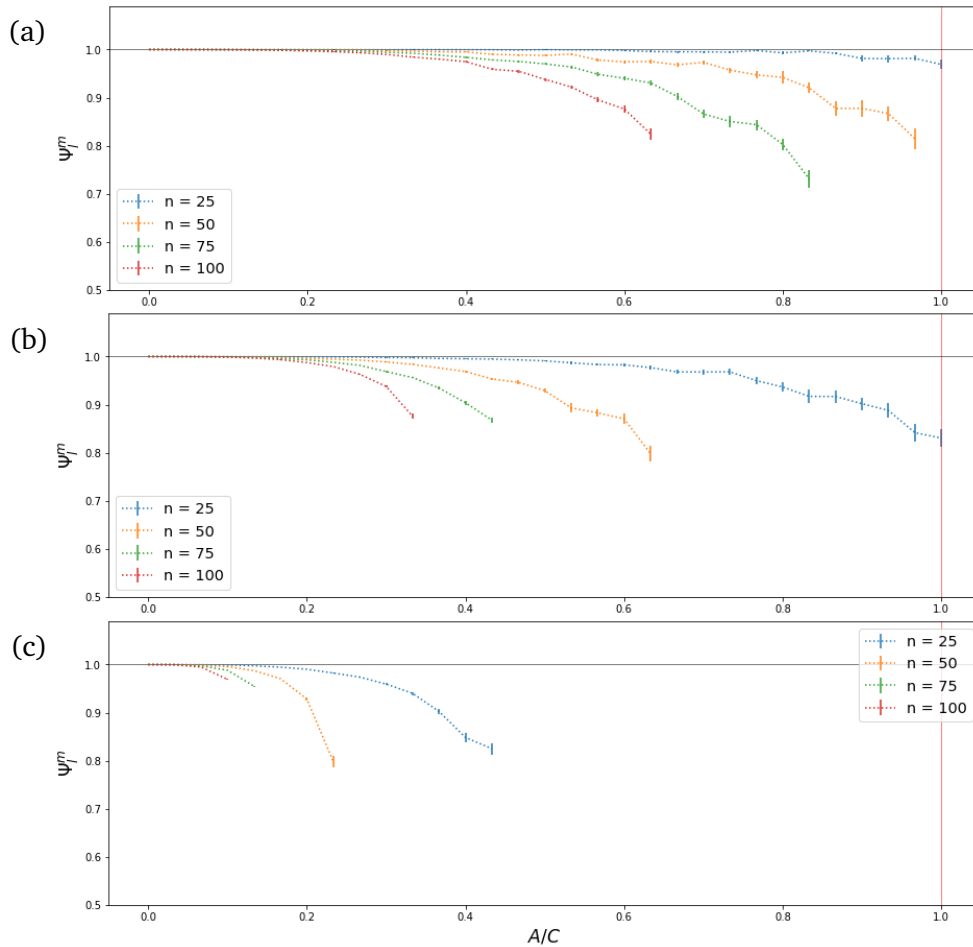
U odnosu na slučaj uniformnog šoka, ovdje primjećujemo drastičniji utjecaj parametra A/C na pad Ψ_l^m u ovisnosti o broju čvorova n . Krivulje su ovdje konkavne, u odnosu na konveksne krivulje uniformnog šoka te vidimo da nakon perioda visoke stabilnosti (koji se s porastom A/C skraćuje) na mreži dolazi do naglog pada u šoku koji mreža može podnijeti. Lokalizirani šok Ψ_l^m nadalje pada do točke izlaska iz režima u kojem generirane matrice Λ imaju spektralni radijus 1.

Kao i tijekom analize uniformnog šoka, modelirali smo rizik od financijskog šoka i na nepotpuno povezanoj Erdős-Rényi mreži varirajući parametre p i A/C . U ovom slučaju bilo nam je potrebno račun vršiti na ansamblima od $N = 100$ mreža za dobivanje stabilnih rezultata. Krivulje dobivene simulacijama prikazane su na Slici 5.10 i Slici 5.11.



Slika 5.10: Maksimalni dozvoljeni lokalizirani šok na nepotpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o parametru p . Račun je izvršen na ansamblu od $N = 100$ mreža za $p \in \langle 0, 1 \rangle$ te za brojeve čvorova $n \in \{25, 50, 75, 100\}$, dok vertikalne linije odgovaraju kritičnim vrijednostima p_c . Grafovi (a), (b) i (c) odgovaraju parametrima A/C iznosa 0.1, 0.2 i 0.5, slijedom.

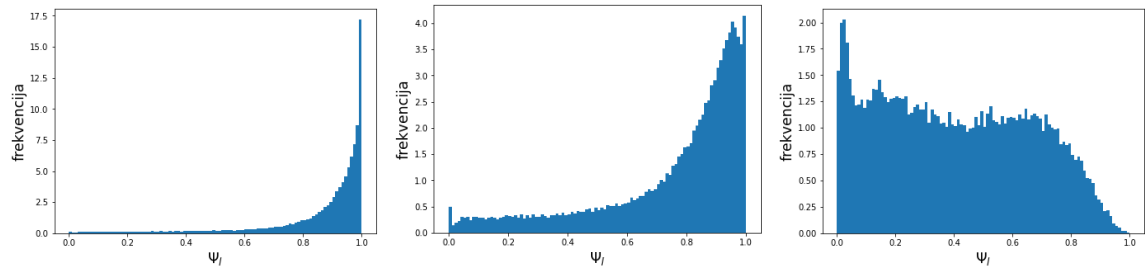
U oba slučaja uočavamo utjecaj parametara na karakter krivulje lokaliziranog šoka sličan prethodnom uniformnom šoku u tome da maksimalni dozvoljeni šok opada s povećanjem broja čvorova n , povezanosti p i prosječnog uloženog udjela kapitala A/C . Međutim, i u nepotpuno povezanoj mreži porast tih parametara uzrokuje strmiji pad Ψ_l^m nego u slučaju Ψ_u . Zbog naglog pada krivulje te brzog izlaska iz režima spektralnog radijusa 1 (posebice u slučaju sa Slike 5.11), koristili smo manji broj vrijednosti pojedinih parametara npr. u broju čvorova ograničili smo se na $n = 100$ budući da za veće iznose nije bilo dovoljno točaka dozvoljenih vrijednosti Ψ_l^m da bismo nastavili račun.



Slika 5.11: Maksimalni dozvoljeni lokalizirani šok na nepotpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o parametru A/C . Račun je izvršen na ansamblu od $N = 100$ mreža za $A/C \in \langle 0, 1 \rangle$ te za brojeve čvorova $n \in \{25, 50, 75, 100\}$. Grafovi (a), (b) i (c) odgovaraju parametrima p iznosa 0.05, 0.1 i 0.3, slijedom.

U dosadašnjem razmatranju služili smo se mjerom lokaliziranog šoka Ψ_l^m , ali želimo li steći detaljniju sliku o raspodjeli rizičnosti na čvorovima pojedine mreže, možemo u obzir uzeti sve komponente vektora Ψ_l , odnosno maksimalni šok s izvorom u bilo kojem čvoru mreže. U tu svrhu smo za nekoliko oglednih kombinacija parametara prikazali histograme komponenta vektora Ψ_l na ansamblu $N = 1000$ mreža.

U simulaciji prikazanoj na Slici 5.12 odabrali smo kombinacije parametara koje reprezentiraju tri stanja rizičnosti mreže. Pod (a) vidimo da je na glavnini čvorova Ψ_l koncentriran oko iznosa 1 što ukazuje na stabilnost mreže, pod (b) se distribucija pomiče ulijevo tj. postoji nezanemariv broj čvorova koji mogu podnijeti samo slabe šokove, dok pod (c) prepoznamo mrežnu strukturu visoke nestabilnosti reprezentiranu velikom koncentracijom čvorova oko iznosa 0. Pregled ove vrste potencijalno može biti od koristi kao trenutni pregled rizičnosti unutar bankarskog sustava.

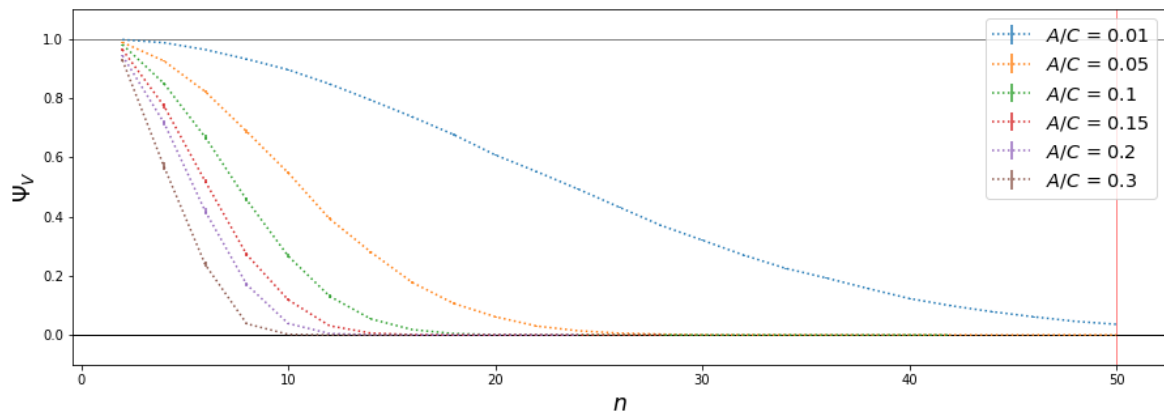


(a) $n = 75, p = 0.1, A/C = 0.5$ (b) $n = 50, p = 0.2, A/C = 0.4$ (c) $n = 50, p = 0.4, A/C = 0.23$

Slika 5.12: Histogrami komponenta vektora lokaliziranog šoka Ψ_l na ansamblu od $N = 1000$ nasumičnih mreža. Apscisu smo podijelili na 100 spremnika (*engl. bins*) i dobivene vrijednosti su normirane tako da površina ispod krivulje iznosi 1.

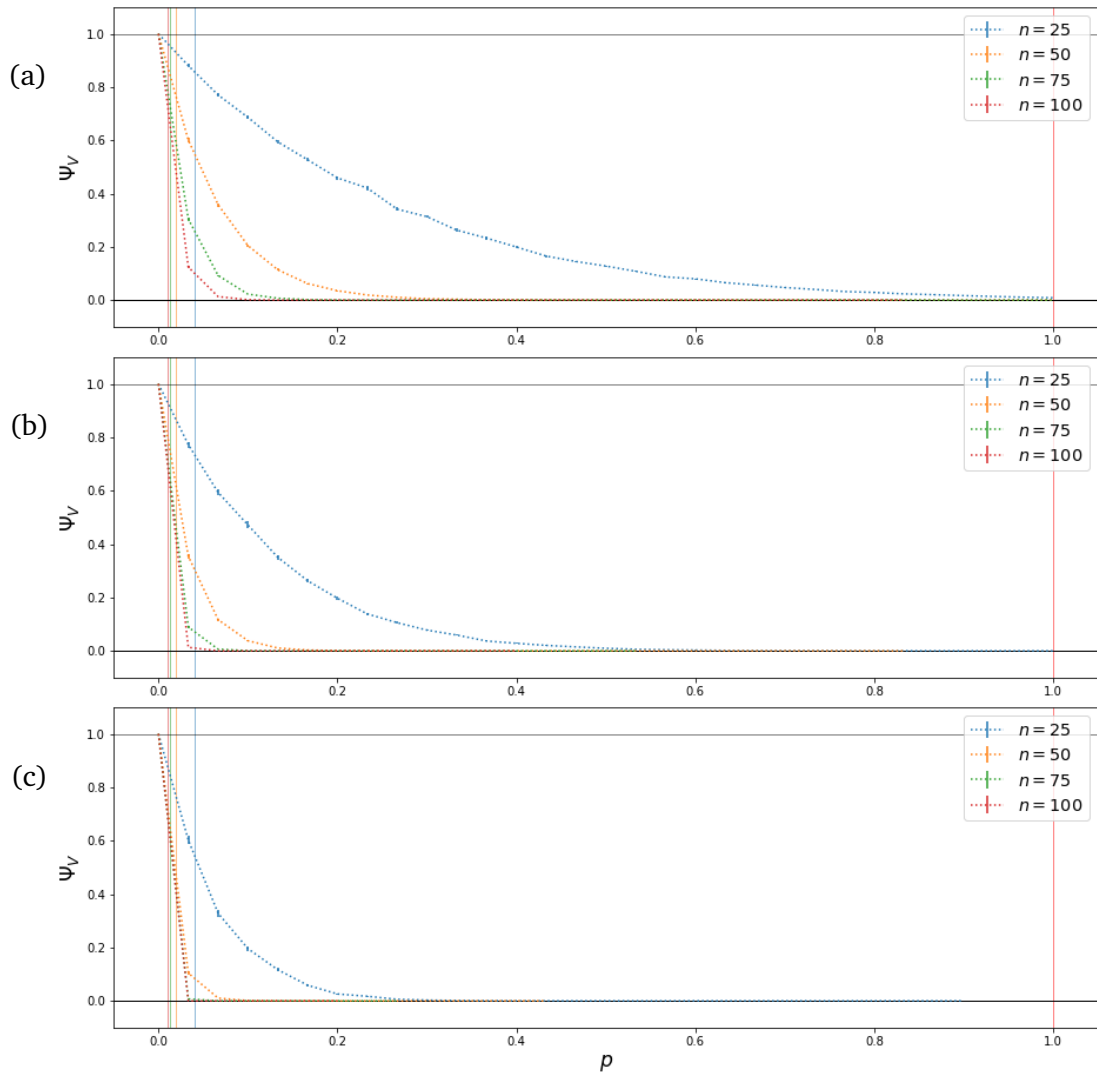
Mjera višeparametarskog šoka Ψ_V

Posljednje razmatranje na Erdős-Rényi mreži bilo je vezano uz ponašanje hipervolumena Ψ_V u ovisnosti o mrežnim parametrima. Ovdje smo koristili Monte Carlo metodu aproksimacije n -volumena opisanu u 5.2, a analizu smo započeli na potpuno povezanoj mreži.



Slika 5.13: Mjera hipervolumena Ψ_V na potpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o broju čvorova. Račun je izvršen na ansamblu od $N = 50$ mreža za brojeve čvorova $n \in [2, 50]$ te za parametre $A/C \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3\}$. U simulaciji je korišteno $M = 10^4$ točaka.

Promotrimo li rezultate na Slici 5.13, primjećujemo kako je mjera Ψ_V najrestriktivnija po pitanju brzine pada s n od triju dosad predstavljenih, tj. ansamble jednakih parametara ocjenjuje rizičnijima nego ostale mjere, na što nas upućuje najbrži pad krivulja. Iz tog razloga smo za ovu mjeru promatrali potpuno povezane mreže s najvećim brojem čvorova $n = 50$.

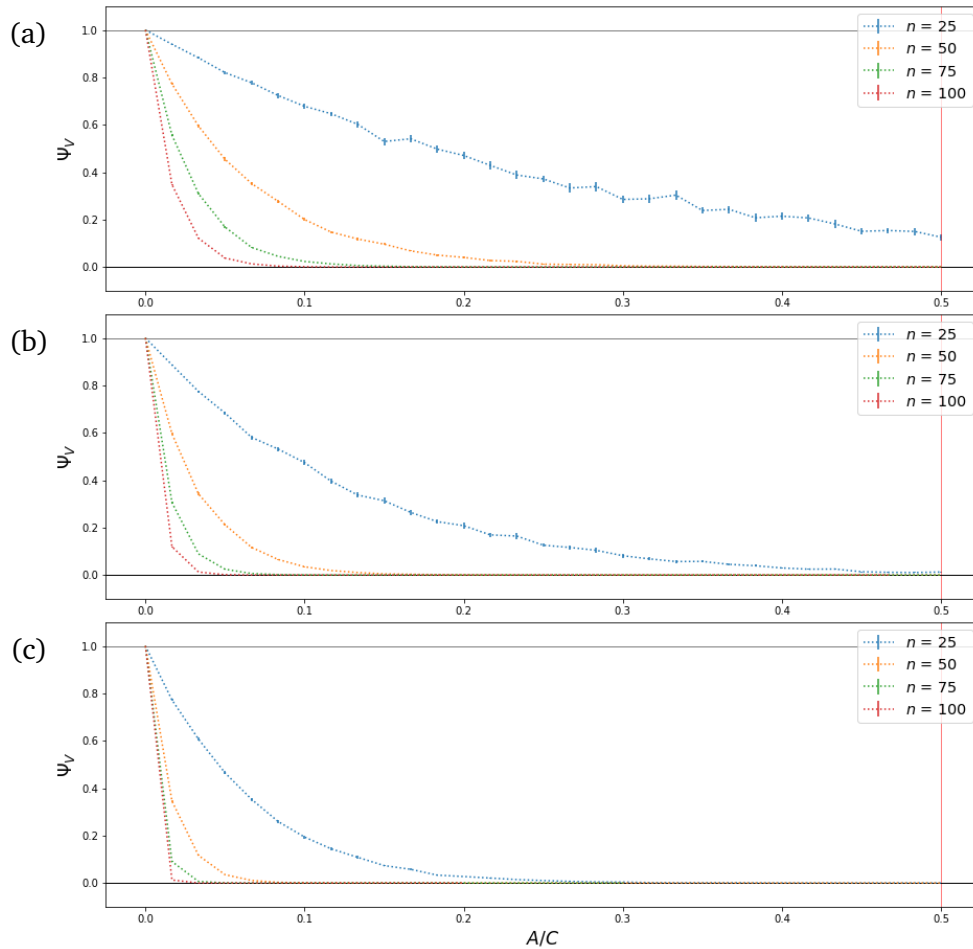


Slika 5.14: Mjera hipervolumena Ψ_V na nepotpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o parametru p . Račun je izvršen na ansamblu od $N = 50$ mreža za $p \in \langle 0, 1 \rangle$ te za brojeve čvorova $n \in \{25, 50, 75, 100\}$, dok vertikalne linije odgovaraju kritičnim vrijednostima p_c . Grafovi (a), (b) i (c) odgovaraju parametrima A/C iznosa 0.05, 0.1 i 0.2, slijedom. U simulaciji je korišteno $M = 10^4$ točaka.

Na nepotpuno povezanoj mreži također je prisutna tendencija strmijeg pada krivulje Ψ_V s povećanjem parametara n , p i A/C (Slika 5.14 i Slika 5.15). Razlog tome leži u samoj prirodi mjere. Prisjetimo se da hipervolumen Ψ_V predstavlja udio svih mogućih kombinacija inicijalnih šokova prilikom kojih neće doći niti do jednog bankrota. Laički rečeno, prilikom šokova koje simulira Ψ_V do bankrota može doći na puno više načina nego posljedicom jednoparametarskih Ψ_u i Ψ_l šokova.

Ovdje je važno komentirati metodu simulacije kojom smo došli do rezultata na Slici 5.14 i Slici 5.15. Monte Carlo uzorkovanje visokodimenzionalnih politopa je problematičan i računalno skup zadatak ako nam je cilj dobiti vrlo male relativne pogreške. U tom smislu je $M = 10^4$ točaka vrlo malo. Međutim, olakotne okolnosti

u našem slučaju su činjenice da ne uzorujemo samo jedno tijelo već računamo prosjek na ansamblu te da nam relativna pogreška nije u središtu interesa.



Slika 5.15: Mjera hipervolumena Ψ_V na nepotpuno povezanoj nasumičnoj mreži u ovisnosti o parametru A/C . Račun je izvršen na ansamblu od $N = 50$ mreža za $A/C \in \langle 0, 1 \rangle$ te za brojeve čvorova $n \in \{25, 50, 75, 100\}$. Grafovi (a), (b) i (c) odgovaraju parametrima p iznosa 0.05, 0.1 i 0.2, slijedom. U simulaciji je korišteno $M = 10^4$ točaka.

Najveće relativne pogreške nalaze se u točkama gdje je egzaktan hipervolumen konačan (iako vrlo malen), a Monte Carlo hipervolumen nula. S druge strane, apsolutna pogreška Monte Carlo hipervolumena u svim točkama mala je. Ta činjenica nam je bitna iz praktičnih razloga, jer je u financijskim sustavima dozvoljeni šok jakosti npr. 10^{-5} efektivno jednak nuli, dok za veće vrijednosti šoka Monte Carlo metoda daje precizne rezultate. Zbog navedenih činjenica Monte Carlo metoda aproksimacije hipervolumena bila je adekvatna za naše simulacije u ovom radu, ali ako se mjere koje smo razvili pokažu korisnima za procjenu rizika u realnim sustavima, u budućim razmatranjima moguće je koristiti naprednije algoritme za aproksimaciju hipervolumena kao što je *VolEsti* [45].

6 Zaključak

Ovo istraživanje radili smo s ciljem povezivanja dva na prvi pogled oprečna područja - formalnu teorijsku fiziku i matematiku s primjenom u financijskoj industriji. U tu smo svrhu na temeljima znanosti o kompleksnim sustavima i kompleksnim mrežama razvili nekoliko modela kojima procjenjujemo sistemski rizik na mreži financijskih institucija koristeći samo informacije o strukturi mreže i jakosti veza unutar nje.

Trima modelima koja smo razmotrili procjenjujemo rizik od različitih vrsta financijskih šokova. Maksimalnim uniformnim šokom Ψ_u mjerimo koji je najveći pad kapitala koji se može dogoditi istovremeno na svim sastavnicama bez propasti nijedne od njih. Maksimalni lokalizirani šok Ψ_l vektor je najvećih šokova kojima može biti pogođena jedna od sastavnica, a da ne dođe do bankrota niti jedne od ostalih. Mjera hipervolumena Ψ_V generalna je mjera kojom uzimamo u obzir sve intervale inicijalnih šokova, koji mogu biti različiti, unutar kojih mreža ne doživljava nijedan bankrot.

Na malim mrežama s $n \leq 3$ sastavnice pokušali smo analitičkim računom dobiti jednadžbe maksimalnih šokova u zatvorenom obliku, što je za $n = 2$ mrežu bilo trivijalno, no već za $n = 3$ primijetili smo velik rast u kompleksnosti problema, što nas je navelo na uvođenje računalnih simulacija u daljnje razmatranje. Iako mreže s ovako malim brojem čvorova ne mogu biti prikladni modeli za realne sustave koji imaju barem red veličine više čvorova, njihova dublja analiza može se pokazati korisnom za stjecanje saznanja o povezanim klasterima i mikromotivima unutar velikih mreža.

Model bliži realnim financijskim mrežama je Erdős-Rényijev model nasumičnog grafa. Na ansamblima velikog broja nasumičnih mreža računali smo prosječne vrijednosti mjera sistemskog rizika uz variranje parametara mreže te smo dobivene podatke prikazivali grafički. U sva tri razvijena modela primijetili smo padajuću ovisnost dozvoljenog šoka o parametrima n , p i A/C , iz čega možemo zaključiti da su visoko rizični sustavi oni koji sadrže mnogo sastavnica koje međusobno imaju veliku vjerojatnost povezivanja te u prosjeku investiraju velike udjele njihovih kapitala u druge banke. Međutim, iz podataka je vidljivo da postignemo li “kompromis” između vrijednosti parametara, mreža može biti stabilna i van trivijalnog režima vrlo malih n , p i A/C .

Promotrimo li svaki od triju modela zasebno, primjećujemo da uniformni šok u prosjeku ima najsporiji pad koji s rastom parametara nadalje usporava, iz čega možemo zaključiti da je za jednake parametre mreže uniformni šok manje opasan od lokaliziranog. S druge strane, lokalizirani šok gotovo da nema utjecaja na mreže niskih parametara, dok za veće vrijednosti pada mnogo drastičnije od uniformnog te vrlo brzo izlazi iz stabilnog režima, što upućuje na potencijalno katastrofalan učinak lokaliziranih šokova na velike i povezane sustave. Pokazalo se da mjera Ψ_V najkonzervativnije ocjenjuje rizik, odnosno njena krivulja ima najbrži pad s povećanjem iznosa parametara. No, potrebno je uzeti u obzir da je Ψ_V inherentno različita mjera od ostalih dviju budući da umjesto maksimalnog dozvoljenog šoka mjeri prostor stabilnosti dostupan sustavu te je iz tog razloga treba uspoređivati s ostalima uz dozu opreza.

Iako smo modele evaluirali na ansamblima velikog broja mreža, izravna primjena naših metoda na jedinstvenoj mreži može se pokazati korisnom u reguliranju realnih financijskih sustava u stvarnom vremenu. Stoga bi u budućim razmatranjima bilo uputno usporediti naše mjere sistemskog rizika sa stvarnim rizikom na nekoj od realnih mreža iz prošlosti. Također, moguće je razviti i mnogo više mjera kojima iskoristavamo mrežnu strukturu i geometriju radi procjene rizika te uključiti veći broj parametara i veličina u izračune, no u ovom radu ograničili smo se na one najtemeljnije i najuniverzalnije.

Dodaci

Dodatak A Kod

```
import numpy as np
from scipy.stats import sem
```

A.1 Generiranje mreže

```
def gen_assets(n, a, c, p):

    A = np.zeros((n, n))

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i < j:
                p1 = np.random.random()

                if p1 < p:
                    p2 = np.random.random()

                    if p2 < 0.5:
                        A[i, j] = a*np.random.random()
                    else:
                        A[j, i] = a*np.random.random()

                else:
                    continue
            else:
                continue

    return A/c
```

```

def f(h, Lambda):
    return list(np.dot(np.identity(len(Lambda)) - Lambda, h))

def gen_vec(m, n, Lambda, a = 0, b = 1):

    h_inf = (b - a)*np.random.rand(m,n) + a

    h_1 = np.empty((m, n))

    for i in range(m):
        h_1[i] = f(h_inf[i,:], Lambda)

    return h_inf, h_1

```

A.2 Uniformni šok

```

def uniform_h1(Lambda):

    n = len(Lambda)
    inv = np.linalg.inv(np.identity(n) - Lambda)
    v = np.dot(inv, np.ones(n))
    psi = 1/np.amax(v)

    return psi

def ER_unif_potp(max_iter, ndim, c, a, p, prov):

    a = np.array([a]).flatten()

    avg = np.zeros((len(a), ndim ))
    error = np.zeros((len(a), ndim ))
    weights = np.ones((len(a), ndim ))

```



```

for aa in a:
    ind = np.where(a == aa)

    v = np.empty((max_iter, ndim))

    for i in range( ndim ):
        for j in range(max_iter):

            L = gen_assets((i + 1)*4, aa, c, p)

            if prov == 1:
                e = np.linalg.eigvals(L)

                if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
                    v[j][i] = float("nan")

                else:
                    v[j][i] = uniform_h1(L)

            else:
                v[j][i] = uniform_h1(L)

        avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
        error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

    return avg, error

def ER_unif_p(max_iter, dim, c, a, pdist, prov):

    dim = np.array([dim]).flatten()
    avg = np.empty((len(dim), pdist + 1))
    error = np.empty((len(dim), pdist + 1))

```

```

for n in dim:
    ind = np.where(dim == n)

    v = np.empty((max_iter, pdist + 1))

    for j in range(max_iter):
        for i in range(pdist + 1):

            L = gen_assets(n, a, c, i/pdist)

            if prov == 1:
                e = np.linalg.eigvals(L)

                if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
                    v[j][i] = float("nan")

                else:
                    v[j][i] = uniform_h1(L)

            else:
                v[j][i] = uniform_h1(L)

    avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
    error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

return avg, error

def ER_unif_a(max_iter, dim, c, amax, p, prov):

    dim = np.array([dim]).flatten()

    avg = np.zeros((len(dim), amax + 1))
    error = np.zeros((len(dim), amax + 1))
    weights = np.ones((len(dim), amax + 1))

```

```

for n in dim:
    if p <= 1/n:
        print('Nema divovske komponente!')

    ind = np.where(dim == n)

    v = np.empty((max_iter, amax + 1))

    for i in range(amax + 1):
        for j in range(max_iter):

            L = gen_assets(n, i, c, p)

            if prov == 1:
                e = np.linalg.eigvals(L)

                if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
                    v[j][i] = float("nan")
                else:
                    v[j][i] = uniform_h1(L)
            else:
                v[j][i] = uniform_h1(L)

    avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
    error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

return avg, error

```

A.3 Lokalizirani šok

```
def localized_h1(Lambda):

    n = len(Lambda)
    inv = np.linalg.inv(np.identity(n) - Lambda)
    psi = np.empty(n)

    for k in range(n):
        v0 = np.zeros(n)
        v0[k] = 1.0

        v = np.dot(inv, v0)
        psi[k] = 1/(np.amax(v) + 0.00000001)

    return psi

def ER_loc_potp(max_iter, ndim, c, a, p, prov):

    a = np.array([a]).flatten()
    avg = np.zeros((len(a), ndim ))
    error = np.zeros((len(a), ndim ))
    weights = np.ones((len(a), ndim ))

    for aa in a:
        ind = np.where(a == aa)
        v = np.empty((max_iter, ndim))

        for i in range( ndim ):
            for j in range(max_iter):

                L = gen_assets((i + 1)*4, aa, c, p)
```

```

        if prov == 1:
            e = np.linalg.eigvals(L)

            if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
                v[j][i] = float("nan")

            else:
                v[j][i] = np.min(localized_h1(L))
        else:
            v[j][i] = np.min(localized_h1(L))

    avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
    error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

return avg, error

def ER_loc_p(max_iter, dim, c, a, pdist, prov):

    dim = np.array([dim]).flatten()
    avg = np.empty((len(dim), pdist + 1))
    error = np.empty((len(dim), pdist + 1))

    for n in dim:
        ind = np.where(dim == n)
        v = np.empty((max_iter, pdist + 1))

        for j in range(max_iter):
            for i in range(pdist + 1):

                L = gen_assets(n, a, c, i/pdist)

                if prov == 1:
                    e = np.linalg.eigvals(L)

```

```

        if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
            v[j][i] = float("nan")

        else:
            v[j][i] = np.min(localized_h1(L))
    else:
        v[j][i] = np.min(localized_h1(L))

avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

return avg, error

def ER_loc_a(max_iter, dim, c, amax, p, prov):

    dim = np.array([dim]).flatten()
    avg = np.empty((len(dim), amax + 1))
    error = np.empty((len(dim), amax + 1))

    for n in dim:
        if p <= 1/n:
            print('Nema divovske komponente!')

        ind = np.where(dim == n)
        v = np.empty((max_iter, amax + 1))

        for j in range(max_iter):
            for i in range(amax + 1):
                L = gen_assets(n, i, c, p)

                if prov == 1:
                    e = np.linalg.eigvals(L)

```

```

        if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
            v[j][i] = float("nan")

        else:
            v[j][i] = np.min(localized_h1(L))
    else:
        v[j][i] = np.min(localized_h1(L))

avg[ind] = np.average(v, axis = 0)
error[ind] = sem(v, axis = 0)

return avg, error

def loc_hist(N, n, a, c, p):

    psi = np.zeros((N, n))
    i = 0

    while i < N:
        L = gen_assets(n, a, c, p)
        e = np.linalg.eigvals(L)

        if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
            continue
            print('Van spektralnog radijusa 1.')

        else:
            psi[i] = localized_h1(L)
            i = i + 1

    return psi

```

A.4 Hipervolumen

```
def ER_vol_potp(max_iter, ndim, m, c, a, prov):

    a = np.array([a]).flatten()

    avg = np.zeros((len(a), ndim))
    error = np.zeros((len(a), ndim))

    avg_det = np.zeros((len(a), ndim))
    error_det = np.zeros((len(a), ndim))

    for aa in a:
        ind = np.where(a == aa)

        v = np.empty((max_iter, ndim))
        r = np.empty((max_iter, ndim))
        V_det = np.empty((max_iter, ndim))

        for i in range(ndim):
            n = (i + 1)*2

            for j in range(max_iter):
                L = gen_assets(n, aa, c, p = 1)

                if prov == 1:
                    e = np.linalg.eigvals(L)

                    if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
                        v[j][i] = float("nan")

                    else:
                        h_inf, h_1 = gen_vec(m, n, L)
```



```

        V_det[j][i] = np.linalg.det(np.identity(n)-L)
        r[j][i] = np.average([np.all(h >= 0) for h in h_1 ])
        v[j][i] = r[j][i]*V_det[j][i]
    else:
        h_inf, h_1 = gen_vec(m, n, L)

        V_det[j][i] = np.linalg.det(np.identity(n)-L)
        r[j][i] = np.average([np.all(h >= 0) for h in h_1 ])
        v[j][i] = r[j][i]*V_det[j][i]

    avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
    error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

    avg_det[ind] = np.nanmean(V_det, axis = 0)
    error_det[ind] = sem(V_det, axis = 0, nan_policy = 'omit')

    return avg, error

def ER_vol_a(max_iter, dim, m, c, amax, p, prov):

    dim = np.array([dim]).flatten()

    avg = np.zeros((len(dim), amax + 1))
    error = np.zeros((len(dim), amax + 1))

    avg_det = np.zeros((len(dim), amax + 1))
    error_det = np.zeros((len(dim), amax + 1))

    for n in dim:
        if p <= 1/n:
            print('Nema divovske komponente!')

        ind = np.where(dim == n)

```

```

v = np.empty((max_iter, amax + 1))
r = np.empty((max_iter, amax + 1))
V_det = np.empty((max_iter, amax + 1))

for i in range(amax + 1):
    for j in range(max_iter):
        L = gen_assets(n, i, c, p)

        if prov == 1:
            e = np.linalg.eigvals(L)
            if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
                v[j][i] = float("nan")

            else:
                h_inf, h_1 = gen_vec(m, n, L)

                V_det[j][i] = np.linalg.det(np.identity(n)-L)
                r[j][i] = np.average([np.all(h >= 0) for h in h_1 ])
                v[j][i] = r[j][i]*V_det[j][i]

        else:
            h_inf, h_1 = gen_vec(m, n, L)

            V_det[j][i] = np.linalg.det(np.identity(n)-L)
            r[j][i] = np.average([np.all(h >= 0) for h in h_1 ])
            v[j][i] = r[j][i]*V_det[j][i]

avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

avg_det[ind] = np.nanmean(V_det, axis = 0)
error_det[ind] = sem(V_det, axis = 0, nan_policy = 'omit')

return avg, error

```

```

def ER_vol_p(max_iter, dim, m, c, a, pdist, prov):

    dim = np.array([dim]).flatten()

    avg = np.empty((len(dim), pdist + 1))
    error = np.empty((len(dim), pdist + 1))

    avg_det = np.empty((len(dim), pdist + 1))
    error_det = np.empty((len(dim), pdist + 1))

    for n in dim:
        ind = np.where(dim == n)

        V_det = np.empty((max_iter, pdist + 1))
        r = np.empty((max_iter, pdist + 1))
        v = np.empty((max_iter, pdist + 1))

        for j in range(max_iter):
            for i in range(pdist + 1):
                L = gen_assets(n, a, c, i/pdist)

                if prov == 1:
                    e = np.linalg.eigvals(L)

                    if np.any(e > 1) or np.any(e < -1):
                        v[j][i] = float("nan")
                    else:
                        h_inf, h_1 = gen_vec(m, n, L)

                        V_det[j][i] = np.linalg.det(np.identity(n)-L)
                        r[j][i] = np.average([np.all(h >= 0) for h in h_1 ])
                        v[j][i] = r[j][i]*V_det[j][i]

```

```

else:
    h_inf, h_1 = gen_vec(m, n, L)

    V_det[j][i] = np.linalg.det(np.identity(n)-L)
    r[j][i] = np.average([np.all(h >= 0) for h in h_1 ])
    v[j][i] = r[j][i]*V_det[j][i]

avg[ind] = np.nanmean(v, axis = 0)
error[ind] = sem(v, axis = 0, nan_policy = 'omit')

avg_det[ind] = np.nanmean(V_det, axis = 0)
error_det[ind] = sem(V_det, axis = 0, nan_policy = 'omit')

return avg, error

```

Literatura

- [1] Siegenfeld, A.F.; Bar-Yam, Y. An Introduction to Complex Systems Science and its Applications, arXiv:1912.05088v2, 2020.
- [2] Siegenfeld, A.F.; Bar-Yam, Y. Eliminating COVID19: The impact of travel and timing, arXiv:2003.10086, 2020.
- [3] Bar-Yam, Y. Dynamics of Complex Systems, Addison-Wesley, 1997.
- [4] Kardar, M. Statistical Physics of Fields, Cambridge University Press, 2007., 19-20
- [5] Cover, T.M.; Thomas, J. A. Elements of Information Theory, John Wiley & Sons, 2012.
- [6] C. Kittel, Elementary Statistical Physics, Dover 2004., 20-21
- [7] Shannon, C. E. A Mathematical Theory of Communication, The Bell System Technical Journal, Vol. 27, 1948.
- [8] Ladyman, J.; Lambert, J., Weisner, K.B. What is a Complex System? Eur. J. Philos. Sci. 2013, 3, 33–67
- [9] Anderson, P. W. More is different. Science 177, 393– 397, 1972.
- [10] Kadanoff, L. P. More is the same; phase transitions and mean field theories. Journal of Statistical Physics 137, 777, 2009.
- [11] A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes, Introduction to the theory of statistics, McGraw Hill, 1974., 233-236
- [12] Haldane, A. G.; May, R. M. Systemic risk in banking ecosystems. Nature 469, 351–355, 2011.
- [13] Euler, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comment. Acad. Sci. U. Petrop 8, 128–40, 1736.
- [14] Kónig, D. (1936.) Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Birkhäuser, 1990.

- [15] Harary, F. Graph Theory, Addison–Wesley, 1969.
- [16] Possamai, L. Multidimensional analysis of complex networks. Ph.D. Thesis. Università di Bologna: Computer Science Department, 2013.
- [17] Newman, M. E. J. The structure and function of complex networks, arXiv:cond-mat/0303516, 2003.
- [18] S. Boccaletti et al. Complex networks: Structure and dynamics, Physics Reports 424, 175–308, 2006.
- [19] Milgram, S. The Small World Problem, Psychology Today, Ziff-Davis Publishing Company, 1967.
- [20] Watts, D. J.; Strogatz S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. Nature (London), 1998.
- [21] Wasserman, S.; Faust, K. Social Network Analysis: Methods and Applications, Cambridge University Press, 1994.
- [22] Holme, P.; Kim; B. J.; Yoon, C. N.; Han, S. K. Attack vulnerability of complex networks, Phys. Rev. E 65, 056109, 2002.
- [23] Spizzirri, L. Justification and Application of Eigenvector Centrality, Algebra Geogr. Eig. Netw., 2011.
- [24] Page, L.; Brin, S.; Motwani, R.; Winograd, T. The PageRank citation ranking: Bringing order to the Web, Technical report, Stanford Digital Library Technologies Project, 1999.
- [25] Newman, M. E. J. Mixing patterns in networks. Physical Review E, 67(2):26126, 2003.
- [26] Erdős, P.; Rényi, A. On Random Graphs. I, Publicationes Mathematicae. 6: 290–297, 1959.
- [27] Gilbert, E. N. Random Graphs, Annals of Mathematical Statistics. 30 (4): 1141–1144, 1959.
- [28] Park, J.; Newman M. E. J. Statistical mechanics of networks. Physical Review E, 70(6):66117, 2004.

- [29] Albert, R.; Barabási, A. Statistical Mechanics of Complex Networks, arXiv:cond-mat/0106096, 2001.
- [30] Fronczak, A.; Fronczak, P.; Holyst, J. A. Average path length in uncorrelated random networks with hidden variables, arXiv:cond-mat/0407098, 2004.
- [31] Chung, F.; Lu, L. The Diameter of Sparse Random Graphs, *Advances in Applied Mathematics*, 26(4), 257–279. doi:10.1006/aama.2001.0720, 2001.
- [32] Erdős, P.; Rényi, A. On the Evolution of Random Graphs, *Bull. Inst. Internat. Statist* 38 (4), 343-347, 1960.
- [33] Barabási, A.-L.; Pósfai, M. *Network science*, Cambridge University Press, 2016.
- [34] Kostylenko, O.; Rodrigues, H. S.; Torres, D. F. M. Banking risk as an epidemiological model: an optimal control approach, arXiv:1707.03500, 2017.
- [35] Dolfin, M.; Knopoff, D.; Limosani, M.; Xibilia, M. G. Credit Risk Contagion and Systemic Risk on Networks, *Mathematics*, 7, 713; doi:10.3390/math7080713, 2019.
- [36] Speech by Jean-Claude Trichet, President of the ECB, Opening address at the ECB Central Banking Conference Frankfurt, 18 November 2010, <https://www.ecb.europa.eu/press/key/date/2010/html/sp101118.en.html>
- [37] *A Dictionary of Accounting* (4 ed.), Oxford University Press, 2010.
- [38] Battiston, S. et al. DebtRank: Too Central to Fail? Financial Networks, the FED and Systemic Risk, *Scientific Reports* 2:541, doi:10.1038/srep00541, 2012.
- [39] Bardoscia, M.; Battiston, S.; Caccioli, F.; Caldarelli, G. DebtRank: A Microscopic Foundation for Shock Propagation. *PLoS ONE* 10(6): e0130406. doi:10.1371/journal.pone.0130406, 2015.
- [40] Krause, S. M.; Štefančić, H.; Zlatić, V.; Caldarelli, G. Controlling systemic risk - network structures that minimize it and node properties to calculate it, arXiv:1902.08483v1, 2019.
- [41] MarketWatch, Kate Gibson. "U.S. stocks hammered after House rejects rescue". MarketWatch. Preuzeto 20. prosinca 2020.

- [42] Fok, D. S. K.; Crevier, D. Volume estimation by monte carlo methods*. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 31(4), 223–235., 1989.
- [43] Jaekel, U. A. Monte Carlo Method for High-Dimensional Volume Estimation and Application to Polytopes, *Procedia Computer Science* 4, 1403–1411, 2011.
- [44] Borgatti, S. P.; Everett, M. G. Models of core/periphery structures. *Social Networks*, 21, 375–395. doi:10.1016/S0378-8733(99)00019-2, 1999.
- [45] Chalkis, A.; Fisikopoulos, V. volesti: Volume Approximation and Sampling for Convex Polytopes in R, arXiv:2007.01578v2, 2020.