Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ivana Čulina

Površina i volumen u novom kurikulumu matematike

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, travanj 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

U ovom diplomskom radu obrađeni su pojmovi površine i volumena te njihova obrada u osnovnoškolskom i gimnazijskom obrazovanju. U hrvatskom jeziku sinonim za površinu je ploština, a za volumen obujam i zapremnina. Sve ove izraze možemo pronaći u školskim udžbenicima, dok se u kurikulumu koriste izrazi površina i volumen.

Na početku rada je povijesni pregled razvoja tih pojmova. U trećem poglavlju obrađeni su pojmovi iz teorije mjere. Definirana je σ-algebra, mjera na σ-algebri i Lebesgueova mjera. Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^2$ predstavlja moderni pojam površine, a na $\mathbb{R}^3$ volumena.

U četvrtom poglavlju je pregled obrade površine i volumena u osnovnoj školi i gimnaziji, prema kurikulumu objavljenom u Narodnim novinama 2019. godine. Dani su primjeri, zadatci, teoremi i dokazi koji se nalaze u školskim udžbenicima. Navedeni su ishodi iz kurikuluma te preporuke za njihovo ostvarivanje.

Na kraju rada predstavljena je geoploča. To je nastavno pomagalo koje se koristi u osnovnoj školi, a prikladno je za obradu opsega i površine.

2 Povijest površine i volumena

Izračunavanje površine i volumena oduvijek se smatralo jednim od najvažnijih osnovnih ciljeva matematike. Povijest izračunavanja površine i volumena opisao je Djura Paunić u svom članku *History of measure theory* u knjizi *Handbook of measure theory* [17]. U ovom poglavlju navodimo neke podatke iz tog članka i iz knjiga [2] i [3].

Prve civilizacije nastale su u riječnim dolinama Indije, Kine, Mezopotamije i Egipta. Iz Indije i Kine ima vrlo malo sačuvanih matematičkih spisa. U Egiptu je sačuvano puno matematičkih spisa, od kojih su najpoznatiji Rhindov i Moskovski papirus, koji su u potunosti posvećeni matematici.

Rhindov papirus sadrži 84 zadatka, a otprilike 20 zadataka posvećeno je izračunima površina i volumena. Točno je izračunata površina paralelograma, trokuta i trapeza. U pedesetom zadatku Rhindovog papirusa površina kruga promjera 9 jednaka je površini kvadrata čija je stranica 8. U desetom zadatku Moskovskog papirusa površinu kruga računa se kao površina kvadrata kojemu je stranica osam devetina promjera kruga, odnosno

$$P = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{256}{81}r^2.$$

Oba zadatka daju istu aproksimaciju broja π, odnosno $\pi = \frac{256}{81} \approx 3.16$.

U četrnaestom zadatku Moskovskog papirusa računa se volumen krnje kvadratne piramide sa stranicama baze a, b. Opis postupka odgovara formuli:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Grčka geometrija započela je s Talesom iz Mileta. On je zapisao bitne teoreme koje su vjerojatno već znali Egipćani i Babilonci. Najviše traga u matematici, pa tako i za izračunavanje površine i volumena, ostavili su Pitagorejci u 6. i 5. st. pr. Kr. Jedno od najvažnijih otkrića koje su Pitagorejci otkrili bilo je postojanje iracionalnih brojeva. Pokazali su da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva stranici kvadrata, tj. da $\sqrt{2}$ nije racionalan.

Demokrit iz Abdere (oko 460.-370. pr. Kr.) bio je matematičar koji je proučavao volumen. Demokrit je postavio pitanje iz kojeg je Arhimed kasnije zaključio da je volumen stošca jedna trećina volumena valjka, a volumen piramide jedna trećina volumena prizme koja ima istu bazu i visinu.

Eudoks s Knida (prva polovica 4. st. pr. Kr.) je dokazao sljedeće teoreme, koji su navedeni u dvanaestoj knjizi Euklidovih Elemenata.

1. Površine kružnica u istom su omjeru kao i kvadrati njihovih polumjera.

2. Volumeni valjaka s istom visinom u istom su omjeru kao i kvadrati njihovih polumjera.

3. Volumeni piramida iste visine u istom su omjeru kao i omjeri površina njihovih baza.

4. Volumeni stošca i valjak su u omjeru 1:3.

Najveći matematičar u antici je Arhimed iz Sirakuze (287.-212. pr. Kr). Smatra se najpoznatijim primijenjenim matematičarom i fizičarom prije Newtona (17. st). Šest njegovih djela *O mjerenju kružnice i kruga, O kugli i valjku, O kvadraturi parabole, O konoidima i sferoidima, O spiralama i Metoda* posvećeno je izračunima duljina, površina i volumena. Samo su prva dva djela bila dobro poznata kroz povijest matematike. Posljednje je otkriveno tek 1906. i nije utjecalo na razvoj matematike.

Prvi poznati Grk koji se bavio problemom kvadrature kruga je Anaksagora iz Klazomene (499.- 428. pr. Kr.). Hipokrat s Hiosa (oko 470.-410. pr. Kr.) baveći se kvadraturom kruga, podijelio je krug na Hipokratove mjesece i izračunao im površine. No, Hipokrat nije uspio dokazati (što je i nemoguće) da se svaki mjesec može kvadrirati. Hipija iz Elide (oko 460.-400. pr. Kr.) otkrio je kvadratisu, krivulju koja se koristila za rješavanje probema kvadrature kruga. Prvi Grk koji je pokušao kvadrirati krug upisujući u njega pravilne mnogokute je Antifont (480.-411. pr. Kr.). Započeo je upisivanjem kvadrata, zatim osmerokuta, i tako dalje udvostručujući broj stranica mnogokuta. Povećavanje broja stranica mnogokuta približit ćemo se površini kruga. Time je on prethodnik Eudoksove metode ekshaustije i Arhimedovog rješenja.

U Arhimedovom djelu *O mjerenju kružnice i kruga* dokazane su dvije važnje činjenice. Prvo da je površina kruga jednaka površini pravokutnog trokuta kojem je jedna kateta jednaka polumjeru, a druga opsegu kruga. Drugo da je $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Do toga dolazi upisivanjem, odnosno opisivanjem, pravilnog 96-erokuta u krug. U djelu *O kugli i valjku* glavni rezultat je izračunavanje oplošja i volumena kugle. U djelu *O kvadraturi parabole* izračunao je površinu segmenta parabole. U djelu *O konoidima i sferoidima* bavi se izračunavanjem volumena tih tijela koristeći se metodom ekshaustije. Djelo *O spiralama* posvećeno je proučavanju Arhimedove spirale. Arhimedova spirala putanja je točke koja se kreće jednoliko po polupravcu koji jednoliko rotira oko polazišta te točke. Prvih dvadeset propozicija posvećeno je određivanju tangente na spiralu, što je utjecalo na razvoj diferencijalnog računa. Posljednjih osam propozicija posvećeno je izračunavanju površine koja je omeđena prvim okretom te spirale i dužinom koja spaja početnu i krajnju točku. Arhimed je izračunao da je ta površina jednaka trećini površine kruga čiji je polumjer ta dužina. U djelu *Metoda* pokazuje rezultate koje je dobio upotrebom principa poluge. Većini problema Arhimed prvo pristupa fizikalno, a onda provodi dokaze Eudoksovom metodom ekshaustije. Tako infinitezimalnim rastavljanjem lika u paralelne dužine (tijela u paralelne ravninske likove) određuje težište lika (tijela) i onda pomoću zakona poluge uspoređuje površinu (volumen) s nekim već poznatim. Nakon takvog fizikalnog pristupa, Arhimed još provodi ekshaustijski dokaz za postizanje potpune preciznosti.

Nakon Arhimeda u antici više nije bilo novih značajnijih ideja za izračunavanje površina i volumena. Tijekom srednjeg vijeka interes za matematiku slabi. Oko 1630. godine javlja se zanimanje matematičara za pronalaženje površine i volumena, dijeljenjem likova i tijela, što će dovesti do razvoja infinitezimalnog računa i teorije mjere. Općenito, problem integrala i problem mjere usko su povezani. Pojam integrala omogućuje definiranje mjere i obrnuto.

Bonaventura Cavalieri (1598.-1677.) u svom djelu *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* dužinu djeli na beskonačno mnogo točaka, a geometrijski lik na beskonačno mnogo dužina. Tom je metodom izračunao površinu ispod krivulje x^n od $x = 0$ do $x = 1$, tj. izračunao je $\int_0^1 x^n dx$. Piere de Fermat (1601.-1665.) generalizirao je Cavalierijevu metodu računanja površine ispod krivulje $y = x^n$, proširivši n iz skupa prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva. De Fermat se bavio i problemima minimuma i maksimuma te određivanja tangente na krivulju. Evangelista Torricelli (1608.-1647.) i Isaac Barrow (1640.-1677.) uočili su da se brzina može odrediti iz puta i obrnuto. To ih je potaklo na razmišljanje o povezanosti integriranja i deriviranja. John Wallis (1616.-1703.) je u svom djelu *Arithmetica infinitorum* izračunao $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ za $n \in \mathbb{N}$.

Između 1665. i 1685., Isaac Newton (1643.-1727.) i Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.), neovisno jedan o drugom, otkrivaju infinitezimalni račun. Problem deriviranja i integriranja su povezali i uočili njihovu međusobnu inverznost. Njihova dodatna zasluga je što su za obje operacije razvili odgovarajuće algoritamske tehnike. Njihove metode kasnije koriste mnogi značajni matematičari, poput braće Bernoulli, Eulera i drugih.

Nakon razvoja teorije skupova, razvila se ideja o računanju duljine, površine i volumena podskupova od $\mathbb{R}^n$. Emil Borel (1871.-1956.) je uveo pojam mjere na skupu realnih brojeva, koja je poznata kao Borelova mjera, a izmjerivi skupovi se nazivaju Borelovim skupovima. Borel je teoriju započeo s familijama otvorenih intervala dodjeljujući im kao mjeru njihovu duljinu. Tu familiju je kasnije nadograđivao dodavajući komplemente i unije tih skupova. Borelov rad je proširio Henry Lebeusge (1875.-1941.) razvijajući teoriju integracije na kojoj se temelji današnja analiza. Njegov najvažniji doprinos je proširivanje Riemannovog integrala. Dao je novu definiciju beskonačnog integrala i definirao je Lebeusgovu mjeru o kojoj ćemo detaljnije u sljedećem poglavlju.

U ovom odlomku opisat ćemo problem s kojim su se matematičari bavili u prvoj polovici 19. stoljeća i na početku 20. stoljeća, a koji ima veliku primjenu pri računanju površina i volumena. Kao literaturu koristimo [18], [19], [30] i [14]. Pretpostavimo da se dva poligona mogu rastaviti na manje poligone koji su u parovima sukladni. Za takav par poligona kažemo da su jednakosastavljivi. Kako se svaki poligon može triangulirati, odnosno rastaviti na konačno trokuta koji nemaju zajedničkih unutarnjih točaka, možemo reći da su poligoni jednakosastavljivi ako ih možemo rastaviti na trokute koji su u parovima sukladni. Jednakosastavljivost je relacija ekvivalencije. Farkas Bolyai, Paul Gerwien i William Walace dokazali su da su svaka dva poligona koja imaju iste površine jednakosastavljiva. Taj pristup koristimo pri dokazivanju formula za površine mnogih poligona. U poglavlju 4.4, pri dokazu formule za površinu paralelograma, paralelogram je jednakosastavljiv s pravokutnikom (slika 7).

David Hilbert je na početku 20. stoljeća postavio pitanje može li se isto napraviti za poliedre u trodimenzionalnom prostoru. Poliedri su jednakosastavljivi ako se mogu rastaviti na manje poliedre koji su u parovima sukladni.

Odgovor na Hilbertovo pitanje dao je njegov student Max Dehn. Dehn je dokazao da postoje dva tetraedra istog volumena koji nisu jednakosastavljivi. Diedar se sastoji od dvije poluravnine i zajedničkog pravca p. Kut kojeg zatvaraju te poluravnine nazivamo diedralni kut, a njegovu mjeru diedralna veličina.

Definicija 2.1. *Neka je P bilo koji poliedar s bridovima duljine a_i i diedrima veličina α_i, $i \in \{1, 2, ...p\}$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup koji sadrži brojeve α_i, $i \in \{1, 2, ...p\}$ i π, a f bilo koja aditivna funkcija na S. Tada se broj*

$$f(P) = a_1 f(\alpha_1) + a_2 f(\alpha_2) + ... + a_p f(\alpha_p)$$

zove Dehnova invarijanta poliedra P (ili bridna zakrivljenost od P).

Teorem 2.2. *Dva su poliedra P i Q jednakosastavljiva ako i samo ako su im volumeni jednaki i sve Dehnove invarijante jednake, tj. $f(P) = f(Q)$, za sve aditivne funkcije f za koje je $f(\pi) = 0$.*

Dehn je dokazao da postoje dva tetraedra istog volumena, ali različitih Dehnovih invarijanti. Iz prethodnog teorema slijedi da nisu jednakosastavljivi. Negativno rješenje Hilbertovog pitanja pokazuje da se volumen tetraedra ne može izračunati elementarno, nego moramo koristiti Cavalierijev princip ili slično "beskonačno" rasijecanje.

3 Teorija mjere

Za ovo poglavlje kao literaturu koristimo knjige [15] i [23].

Površina je funkcija koja podskupovima ravnine $\mathbb{R}^2$ pridružuje nenegativne realne brojeve. Slično, volumen podskupovima prostora $\mathbb{R}^3$ pridružuje realne brojeve, a "duljina" podskupovima pravca $\mathbb{R}$.

Želimo generalizirati ove funkcije na n-dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$. Mjera je funkcija $m : \mathfrak{D} \to \overline{\mathbb{R}}$, pri čemu je $\mathfrak{D} \subseteq 2^{\mathbb{R}^n}$ familija podskupova od $\mathbb{R}^n$. Oznaka za skup svih podskupova od X je 2^X(partitivni skup). $\overline{\mathbb{R}}$ je prošireni skup realnih brojeva.

Prošireni skup realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$ po definiciji je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Uređaj $\leq$ proširujemo sa $\mathbb{R}$ na $\overline{\mathbb{R}}$ tako da definiramo

$$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zbrajanje i množenje proširujemo sa $\mathbb{R}$ na $\overline{\mathbb{R}}$ tako da definiramo:

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$x + \infty = \infty + x = \infty, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty, \forall x > 0,$$
$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty, \forall x > 0,$$
$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty, \forall x < 0,$$
$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty, \forall x < 0,$$
$$\infty + \infty = \infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$
$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty,$$
$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.$$

Zbrojevi $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty) + \infty$ se ne definiraju. U mnogim matematičkim disciplinama sljedeći produkti se ne definiraju, dok se u teoriji mjere pokazalo korisnim definirati ih kao:

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0.$$

Mjera treba imati svojstva koja znamo da vrijede za $n = 1, 2, 3$.

1. $m(A) \geq 0, \forall A \in \mathfrak{D}$ (nenegativnost).
2. $m(\emptyset) = 0$.
3. Za skupove $A, B \in \mathfrak{D}$ koji su disjunktni ($A \cap B = \emptyset$) vrijedi $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Općenitije, za svaku familiju $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ skupova $A_n \in \mathfrak{D}$ koji su međusobno disjunktni ($A_n \cap A_m = \emptyset$ za $m \neq n$) vrijedi $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.
4. Za svaki $A \in \mathfrak{D}$ i $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $m(A + x) = m(A)$ (invarijantnost mjere na translacije).

Uz to treba se podudarati s uobičajenom mjerom dužine, pravokutnika i kvadra. Za $n = 1$ zahtijevamo

5. $m(A) = b - a$ ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ interval: $[a, b], (a, b), [a, b)$ ili $(a, b]$.

Za $n = 2$ zahtijevamo $m([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$. Slično za $n \in \mathbb{N}$. Sljedeći teorem pokazuje da nije moguće zadovoljiti zahtjeve 1. – 5. ako za domenu uzmemo cijeli partitivni skup $\mathfrak{D} = 2^{\mathbb{R}}$.

Teorem 3.1. *Ne postoji funkcija $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava svih pet navedenih svojstava.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava svih pet navedenih svojstava. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $A \subseteq B$. Iz 3. svojstva slijedi $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$. Budući da je $m(B \setminus A) \geq 0$ dobivamo monotonost mjere:

$$A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B). \tag{3.1}$$

Na $\mathbb{R}$ definiramo relaciju $\sim$:

$$a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Q}.$$

Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Za $x \in \mathbb{R}$ označimo s K_x pripadnu klasu ekvivalencije. "Najveće cijelo" $\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi da je $x - \lfloor x \rfloor$ u presjeku K_x i intervala $[-1, 1]$:

$$x - \lfloor x \rfloor \in K_x \cap [-1, 1] \Rightarrow K_x \cap [-1, 1] \neq \emptyset.$$

Po aksiomu izbora postoji injekcija sa $\mathbb{R}/_\sim$ u $[-1, 1]$. Označimo s A sliku te injekcije, posebno $A \subseteq [-1, 1]$.

Neka je $\mathbb{Q} \cap [-2, 2] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, te definiramo,

$$A_n := A + q_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Jasno je da je $A_n \subseteq [-3, 3], \forall n \in \mathbb{N}$.

Neka su $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$. Kada bi imali $x \in A_n \cap A_m$, onda bi postojali $a, b \in A$ takvi da je $x = a + q_n$ i $x = b + q_m$, no iz toga onda zaključujemo da je $b - a \in \mathbb{Q}$, tj. $K_a = K_b$. Po izboru a slijedi da je $a = b$, a iz toga onda da je $q_n = q_m$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $m \neq n$. Dakle, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ su međusobno disjunktni. Po 3. svojstvu vrijedi $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Uočimo da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq [-3, 3]$, sada po 5. svojstvu i monotonosti mjere (3.1) dobivamo

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq m([-3, 3]) = 6 < +\infty.$$

Po 4. svojstvu slijedi $m(A_n) = m(A)$, dakle $6 \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A)$, zbog čega zaključujemo da mora biti $m(A) = 0$.

Neka je $x \in [-1, 1]$. Tada postoji $a \in K_x \cap A \cap [-1, 1]$, pa je $a - x \in \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_{n_0}$. Konačno zaključujemo da je $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Iz 5. svojstva i monotonosti mjere (3.1) slijedi

$$2 = m([-1, 1]) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A) = 0.$$

Došli smo do kontradikcije $2 \leq 0$ i dokazali da ne postoji takva funkcija $m : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$. $\square$

Niti jednu pretpostavku teorema, odnosno niti jedno od pet svojstava ne možemo napustiti. Možemo napustiti samo zahtjev da je $\mathfrak{D} = 2^{\mathbb{R}}$.

3.1 σ-algebra

Mjeru $m : \mathfrak{D} \to [0, +\infty]$ definiramo na nekoj manjoj familiji podskupova $\mathfrak{D} \subset 2^{\mathbb{R}}$. Da bi zahtjevi na funkciju m imali smisla, familija podskupova $\mathfrak{D}$ treba imati određena svojstva, odnosno treba tvoriti σ-algebru.

Definicija 3.2. *Familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa X nazivamo **σ-algebrom** na skupu X ako ona ima sljedeća svojstva:*

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,
3. *unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je **izmjeriv prostor**, a svaki element od $\mathcal{A}$ zovemo **izmjeriv skup**.

Primjer 3.3. *Neka je X bilo koji neprazan skup, a 2^X njegov partitivni skup. Tada su familije $\mathcal{A} = 2^X$ i $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$ σ-algebre na X. Familija $\mathcal{A}$ je najveća, a $\mathcal{B}$ najmanja σ-algebra na X.*

Propozicija 3.4. *Neka je $\mathcal{A}_i$, $i \in I$ bilo koja familija σ-algebri na skupu X. Tada je $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ također σ-algebra na skupu X.*

Dokaz. Dokazat ćemo propoziciju koristeći definiciju σ-algebre. Da bi $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ bila σ-algebra moraju vrijediti sva tri svojstva. $\mathcal{A}_i$ je σ-algebra pa je prema definiciji $X \in \mathcal{A}_i$. Slijedi da je $X \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Znamo da $A \in \mathcal{A}_i \Rightarrow A^c \in A_i$, pa vrijedi $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\mathcal{A}_i$ je element iz $\mathcal{A}_i$, pa je unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ element iz $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. $\square$

Napomena 3.5. *Unija σ-algebri ne mora biti σ-algebra. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$. Familije $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ i $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 3\}\}$ su σ-algebre na X. Njihova unija je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$, a $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Vidimo da $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ne zadovoljava 3. svojstvo iz definicije 3.2. pa nije σ-algebra.*

Korolar 3.6. *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova skupa X. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \textit{ je } \sigma\textit{-algebra}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}$$

najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$.

Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je σ-algebra generirana s $\mathcal{F}$.

Propozicija 3.7. *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova od X. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}^c)$$

gdje je $\mathcal{F}^c = \{F^c\colon F \in \mathcal{F}\}$.

Dokaz. Kako je $\sigma(\mathcal{F})$ zatvorena na komplementiranje, vrijedi $\mathcal{F}^c \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, odakle slijedi $\sigma(\mathcal{F}^c) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma(\mathcal{F})$. Analogno slijedi $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}^c)$. □

Propozicija 3.8. *Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{E}$ familije podskupova skupa X. Ako je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$, onda je $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.*

Dokaz. Svaka σ-algebra $\mathcal{A}$ koja sadrži familiju $\mathcal{E}$, ujedno sadrži i familiju $\mathcal{F}$. Dakle, $\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \ je\ \sigma\text{-algebra}, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\} \subseteq \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \ je\ \sigma\text{-algebra}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}$. Presjek manje familije σ-algebri je nadskup presjeka veće familije σ-algebri, tj. vrijedi $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. □

Definicija 3.9. *Topološki prostor je par $(X,\mathcal{U})$ gdje je X neprazan skup, a $\mathcal{U}$ familija podskupova od X sa svojstvima:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{U}$,*

2. *unija svake familije skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$,*

3. *presjek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$.*

*Familiju $\mathcal{U}$ zovemo **topološkom strukturom** ili **topologijom**, a njezine članove nazivamo **otvorenim skupovima**.*

Definicija 3.10. *Baza topologije na skupu X je familija $\mathcal{B}$ podskupova od X za koju vrijedi:*

1. *Za svaki $x \in X$ postoji barem jedan $B \in \mathcal{B}$ koji sadrži X.*

2. *Ako x pripada presjeku dva elementa $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tada postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ koji sadrži x takav da je $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X koja zadovoljava svojstva iz definicije 3.10, tj. baza toplologije. Neka je $\mathcal{U}$ familija podskupova od X koji su proizvoljne unije elemenata iz $\mathcal{B}$. Tada je $\mathcal{U}$ topologija na X, tj. (X, $\mathcal{U}$) je topološki prostor.

Standardna topologija na $\mathbb{R}$ je topologija kojoj bazu čine svi otvoreni intervali $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. To znači da su otvoreni skupovi unije otvorenih intervala. Slično, bazu topologije $\mathbb{R}^n$ čine otvorene kugle $K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$. Sljedeći teorem preuzet je iz [21].

Teorem 3.11. *Svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}$ može se prikazati kao prebrojiva unija otvorenih intervala.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{O}$ neki otvoreni skup u $\mathbb{R}$ i $x \in \mathcal{O}$. S I_x označavamo najveći otvoreni interval za koji vrijedi $x \in I_x$ i $I_x \subseteq \mathcal{O}$. Točnije, označimo $a_x = \inf\{a \in \mathbb{R} : a < x \ i \ (a, x) \subset \mathcal{O}\}$ i $b_x = \sup\{b \in \mathbb{R} : b > x \ i \ (x, b) \subset \mathcal{O}\}$. Vrijedi $a_x < x < b_x$ (a_x i b_x mogu biti $\pm\infty$). Neka je $I_x = (a_x, b_x)$, stoga vrijedi $\mathcal{O} = \bigcup_{x\in\mathcal{O}} I_x$.

Neka je $\mathcal{I} = \{I_x\}_{x\in\mathcal{O}}$. Trebamo dokazati da su I_x i I_y disjunktni ili se podudaraju. Neka postoji $z \in I_x \cap I_y$. Iz definicije intervala I_z slijedi da je tada $I_x = I_z$ i $I_y = I_z$, pa je $I_x = I_y$. Dakle, bilo koja dva različita intervala iz skupa $\mathcal{I}$ moraju biti disjunktni. Preostalo je dokazati da takvih intervala ima prebrojivo mnogo. Potrebno je definirati injekciju iz skupa $\mathcal{I}$ na prebrojiv skup $\mathbb{Q}$. To je jednostavno jer svaki otvoreni interval iz $\mathcal{I}$ sadrži racionalan broj. □

Prethodni teorem vrijedi i na $\mathbb{R}^n$. Intervali na $\mathbb{R}^n$ su skupovi oblika $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, gdje su $I_1, I_2, ..., I_n$ otvoreni intervali na $\mathbb{R}$. Tako je interval na $\mathbb{R}^2$ otvoreni pravokutnik, a interval na $\mathbb{R}^3$ je otvoreni kvadar.

Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Za σ-algebru $\sigma(\mathcal{U})$ generiranu topologijom $\mathcal{U}$ kažemo da je **Borelova σ-algebra** na topološkom prostoru X i označavamo je s $\mathcal{B}(X)$. Članove od $\mathcal{B}(X)$ nazivamo **Borelovim skupovima**. Za teoriju mjere važna je Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 3.12. *Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generirana je sa svakom od sljedećih familija:*

1. $\mathcal{F}_1 := \{F \subseteq \mathbb{R} : F \text{ je zatvoren}\}$,
2. $\mathcal{F}_2 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
3. $\mathcal{F}_3 := \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
4. $\mathcal{F}_4 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,
5. $\mathcal{F}_5 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
6. $\mathcal{F}_6 := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
7. $\mathcal{F}_7 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
8. $\mathcal{F}_8 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$,
9. $\mathcal{F}_9 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Dokaz. Dokazat ćemo da je $\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$. Sa $\mathcal{U}$ označavamo familiju svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}$, pa je $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Jednakost $\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{F}_1)$ je posljedica propozicije 3.7. Da bismo dokazali drugu jednakost, odnosno $\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{F}_2)$, trebamo dokazati $\sigma(\mathcal{U}) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_2)$ i $\sigma(\mathcal{U}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_2)$. Vrijedi $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}$, pa iz propozicije 3.8 slijedi $\sigma(\mathcal{F}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{U})$. Zbog teorema 3.11 i zatvorenosti σ-algebre na prebrojive unije vrijedi $\mathcal{U} \subseteq \sigma(\mathcal{F}_2)$. Iz propozicije 3.8 slijedi $\sigma(\mathcal{U}) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{F}_2)) = \sigma(\mathcal{F}_2)$.

Ostale jednakosti dokazuju se na sličan način.

□

3.2 Mjera na σ-algebri

Definicija 3.13. *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na skupu X.* ***Mjera na $\mathcal{A}$*** *je svako preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ s ovim svojstvima:*

1. *(**nenegativnost**) $\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$,*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
3. *(σ-**aditivnost** ili **prebrojiva aditivnost**) za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi:*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

*Za $\mu(A)$ kažemo da je **mjera** skupa A. Trojku $(X,\mathcal{A},\mu)$ zovemo **prostor mjere**. Mjera μ je **konačna** ako je $\mu(X) < \infty$. Mjera μ je σ-**konačna** ako se skup X može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne mjere, tj. ako postoji niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ takav da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\mu(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Skup $A \in \mathcal{A}$ je σ-**konačan** s obzirom na mjeru μ ako se može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne mjere.*

Primjer 3.14. *Primjeri mjere:*

a) *Za svaki $A \in \mathcal{A}$ stavimo $\mu(A) = 0$. Ovu mjeru nazivamo trivijalnom mjerom.*

b) *Ako je $A \in \mathcal{A}$ konačan skup s n elemenata, stavimo $\mu(A) = n$. Ako je $A \in \mathcal{A}$ beskonačan skup, stavimo $\mu(A) = +\infty$. Ovu mjeru nazivamo diskretnom mjerom.*

c) *Za točku $x \in X$, funkciju $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiramo formulom*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Ovu mjeru nazivamo Diracovom delta mjerom.

Propozicija 3.15. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Mjera $\mu : A \to [0, \infty]$ ima ova svojstva:*

1. *(monotonost) $(\forall A, B \in \mathcal{A})\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. Ako je $\mu(A) < \infty$, onda je $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

2. *(σ- subaditivnost) Za svaki niz $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

3. *(neprekidnost na rastuće nizove) Za svaki rastući niz $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

4. *(neprekidnost na padajuće nizove) Neka je $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz $\mathcal{A}$. Ako je $\mu(A_1) < \infty$, onda vrijedi*
$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Definicija 3.16. *Neka je X skup, a 2^X njegov partitivni skup.* ***Vanjska mjera*** *na skupu X je svaka funkcija $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ sa sljedećim svojstvima:*

1. *$\mu^*(\emptyset) = 0$,*

2. *(monotonost) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,*

3. *(σ-subaditivnost) za svaki niz $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ skupova iz X vrijedi*
$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Mjera je vanjska mjera ako i samo ako je domena mjere 2^X. Vanjska mjera općenito nije mjera.

Primjer 3.17. *Neka je funkcija $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ zadana formulom*
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$
Lako se provjeri da je μ^* vanjska mjera. Međutim, ako su A_1 i A_2 disjunktni neprazni skupovi, onda je $\mu^*(A_1 \cup A_2) = 1$ i $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = 2$. Dakle, μ^* nije σ-aditivna pa nije mjera.

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere i neka je B fiksan izmjeriv skup iz $\mathcal{A}$. Za svaki skup $A \in \mathcal{A}$ vrijedi:

$$A = A \cap X = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c),$$

pa je iz σ-aditivnosti mjere očito

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c).$$

Vanjska mjera ne mora imati to svojstvo. Ako je $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ i $B \in 2^X$ proizvoljan skup, onda iz svojstva σ-subaditivnosti slijedi

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Definicija 3.18. *Neka je $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X. Za skup $B \subseteq X$ kažemo da je μ^*-izmjeriv ako je*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c), \forall A \subseteq X.$$

Sljedeći teorem koristimo za konstrukciju mnogih mjera.

Teorem 3.19. *(Caratheodory) Neka je $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X. Sa $\mathcal{M}_{\mu^*}$ označimo familiju svih μ^*-izmjerljivih podskupova od X. Tada vrijedi:*

a) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ je σ-algebra na skupu X,

b) restrikcija funkcije μ^* na $\mathcal{M}_{\mu^*}$ je mjera.

Dokaz teorema se može naći u [15, teorem 2.26].

3.3 Lebesgueova mjera

Da bismo definirali Lebesgueovu mjeru, trebamo definirati Lebesgueovu vanjsku mjeru.

Definicija 3.20. *Neka je X neprazan skup. Familiju $\mathcal{C}$ podskupova od X nazivamo σ-**pokrivač** od X ako ima sljedeća svojstva:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{C}$,*
2. *postoji niz $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ članova iz $\mathcal{C}$ takvih da je $X = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$.*

Propozicija 3.21. *Neka je $\mathcal{C}$ neki σ-pokrivač nepraznog skupa X, a τ : $\mathcal{C} \to [0, \infty]$ bilo koja funkcija sa svojstvom $\tau(\emptyset) = 0$. Definirajmo funkciju $\mu_\tau^* : 2^X \to [0, \infty]$ formulom:*

$$\mu_\tau^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i\}$$

gdje se infimum uzima po svim nizovima $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{C}$ takvima da je $A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i$. Tada je funkcija μ_τ^* vanjska mjera na X.

Pomoću prethodne propozicije definirat ćemo Lebesgueovu vanjsku mjeru na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika (a, b), $a \leq b$. Kako je prazan skup $(a, a) = \emptyset \in \mathcal{C}$, te kako se može pisati $\mathbb{R} = \cup_{i=1}^{\infty}(-i, i)$, familija $\mathcal{C}$ je pokrivač skupa $\mathbb{R}$. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$:

$$\tau((a, b)) := b - a, \text{za } a \leq b.$$

Vrijedi $\tau(\emptyset) = \tau((a, a)) = a - a = 0$.

Neka je A podskup od $\mathbb{R}$. Sa $\mathcal{C}_A$ označavamo familiju svih nizova $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $C_i \in \mathcal{C}$, koji pokrivaju skup A, odnosno

$$\mathcal{C}_A := \{((a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}}) : a_i \leq b_i, A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\}.$$

Definirajmo funkciju $\lambda^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ formulom:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C}, A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} C_i\} = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{C}_A\}$$

gdje se infimum uzima po svim nizovima iz $\mathcal{C}_A$. Funkciju λ^* nazivamo **Lebesgueovom vanjskom mjerom na $\mathbb{R}$**.

Propozicija 3.22. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada je*

(i) $\lambda^*([a, b]) = b - a$,

(ii) $\lambda^*([a, b)) = b - a$,

(iii) $\lambda^*((a, b]) = b - a$,

(iv) $\lambda^*((a, b)) = b - a$.

Dokaz. (i) Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Otvoreni interval $(a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2})$ duljine $\tau((a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2})) = b - a + \epsilon$ prekriva segment $[a, b]$, tj.

$$[a, b] \subset (a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2}).$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\lambda^*([a,b]) &= \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i,b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}\} \\
&\leq \tau((a-\frac{\epsilon}{2}, b+\frac{\epsilon}{2})) = b - a + \epsilon.
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti broja $\epsilon > 0$ dobivamo $\lambda^*([a,b]) \leq b - a$.

Preostaje pokazati $\lambda^*([a,b]) \geq b - a$. Neka je $((a_i,b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ bilo koji niz omeđenih otvorenih intervala koji pokrivaju segment $[a,b]$. Segment $[a,b]$ je kompaktan skup pa otvoreni pokrivač $((a_i,b_i)_{i\in\mathbb{N}})$ ima konačan potpokrivač. Neka je $[a,b] \subseteq \cup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$. Matematičkom indukcijom se dokaže da je $b-a \leq \sum_{i=1}^{n}(b_i,a_i)$ pa je $b-a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i,a_i)$. Dakle, za svaki niz $((a_i,b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ vrijedi $b - a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i,a_i)$, odakle slijedi

$$b - a \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i,a_i) : ((a_i,b_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}\} = \lambda^*([a,b]).$$

Slično se dokazuju tvrdnje (ii), (iii) i (iv).

□

Definicija 3.23. *Skup $A \subseteq \mathbb{R}$ je izmjeriv u smislu Lebesguea ako je λ^*-izmjeriv. Takve skupove nazivamo Lebesguovim skupovima.*

$\mathcal{M}_{\lambda^*}$ je familija svih Lebeusgovih podskupova od $\mathbb{R}$. Prema Caratheodoryjevom teoremu $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}$. Restrikcija funkcije λ^* na $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ je **Lebeusgeova mjera na** $\mathbb{R}$. Označavamo je s λ.

Definirajmo Lebeusgueovu vanjsku mjeru na $\mathbb{R}^n$. Volumen otvorenog intervala $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ na $\mathbb{R}^n$ je produkt duljina intervala $I_1, I_2, ..., I_n$ i označavamo ga s $vol(I)$. Tada je $vol(I) = \prod_{i=1}^{n}\lambda(I_i)$, gdje je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$. Prazan skup u $\mathbb{R}^n$ može se zapisati kao $\emptyset = (a,a) \times (-1,1) \times (-1,1) \times ... \times (-1,1)$, a cijeli skup $\mathbb{R}^n$ kao $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty}(-i,i) \times (-i,i) \times ... \times (-i,i)$. Neka je A podskup od $\mathbb{R}^n$. Sa $\mathcal{C}_A$ označavamo familiju svih nizova $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ omeđenih otvorenih intervala u $\mathbb{R}^n$ koji pokrivaju skup A. Funkciju $\lambda_n^* : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0,\infty]$ definiramo formulom

$$\lambda_n^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} vol(I_i) : (I_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A\}.$$

To je Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^n$. Prema Caratheodoryjevom teoremu familija $\mathcal{M}_{\lambda_n^*}$ svih podskupova od $\mathbb{R}^n$ izmjerivih u smislu Lebesguea je σ-algebra na $\mathbb{R}^n$, a restrikcija Lebeusgeove vanjske mjere λ_n^* na σ-algebru $\mathcal{M}_{\lambda_n^*}$ je mjera. Nazivamo je **Lebeusgeova mjera na** $\mathbb{R}^n$ i označavamo s λ_n.

Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}$ izmjeriv je u smislu Lebeusgea, tj. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Prema tome su svi omeđeni intervali iz $\mathbb{R}$ Lebesguovi jer su Borelovi. Isto vrijedi i na skupu $\mathbb{R}^n$.

Primjer podskupa od $\mathbb{R}$ koji nije Lebesgueov prvi je otkrio talijanski matematičar Vitali, pa se skup po njemu naziva Vitalijev skup. Dobivamo ga konstrukcijom iz teorema 3.1.

Cantorov skup je Lebesgueov skup mjere $\lambda(K) = 0$. Taj skup ima važnu ulogu u teoriji skupova i analizi. Konstrukciju započinjemo segmentom $K_0 = [0, 1]$. Segment K_0 podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Dobili smo skup $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Dalje nastavljamo konstrukciju indukcijom po n: iz segmenata $[0, \frac{1}{3}]$ i $[\frac{2}{3}, 1]$ izbacujemo srednje trećine i tako dolazimo do K_2 itd. Cantorov skup $K = \cap_{n \in \mathbb{N}_0} K$ je Borelov, ali ima podskup koji nije Borelov, a jest Lebeusgueov.

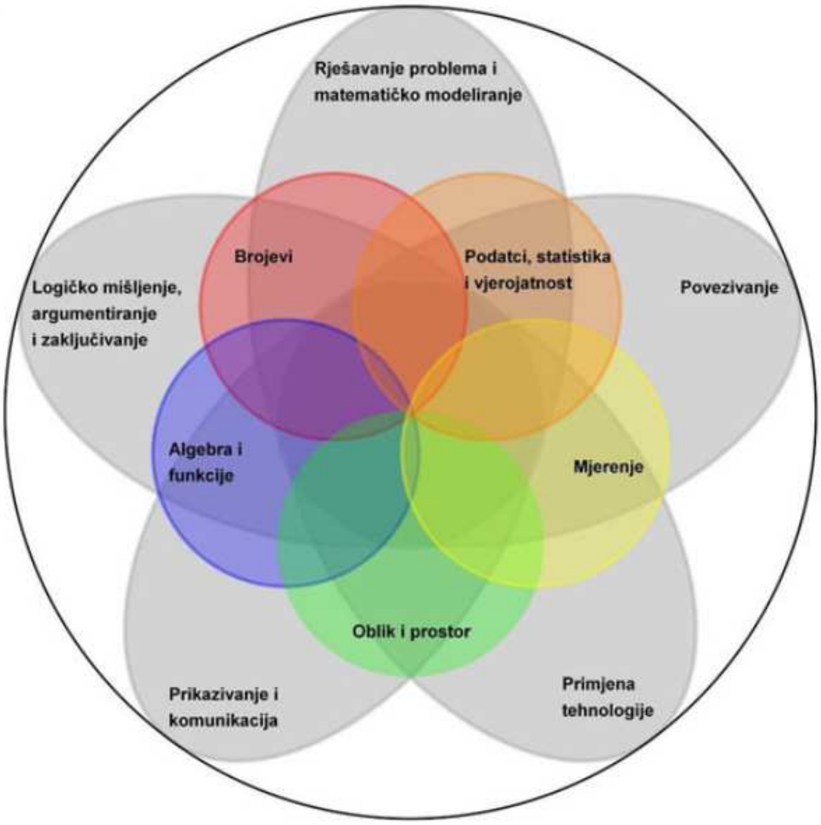
Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^2$ predstavlja moderni pojam površine, dok Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^3$ predstavlja pojam volumena. U nastavku ćemo proučiti kako su ti pojmovi obrađeni na razini osnovne škole i gimnazije.

4 Kurikulum Matematike za osnovne škole i gimnazije

Kurikulum za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimanzije objavljen je u [16]. U sljedećim poglavljima koristit ćemo se podatcima navedenim u tom dokumentu. Primjenjuje se za učenike 1. i 5. razreda osnovne škole i 1. razreda gimnazije od školske godine 2019./2020., za učenike 2., 3., 6. i 7. razreda osnovne škole i 2. i 3. razreda gimnazije od školske godine 2020./2021., a za učenike 4. i 8. razreda osnovne škole i 4. razreda gimnazije primjenjivat će se od školske godine 2021./2022.

Poučavanje matematike tijekom školovanja je strukturirano, pa se velika pozornost posvećuje postupnosti u prihvaćanju i usvajanju matematičkih znanja te uspostavljanju veza među njima. U ovom diplomskom radu proučavamo postupnost u usvajanju pojmova površine i volumena. Pojmovi se uvode vrlo rano, jer ih učenici susreću u svojoj svakodnevici, ali su prilagođeni uzrastu djeteta i njegovim intelektualnim sposobnostima.

Učenje i poučavanje nastavnoga predmeta Matematika ostvaruje se povezivanjem matematičkih procesa i domena. Matematički su procesi: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije. Domene predmeta matematika jesu: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje te podatci, statistika i vjerojatnost. Površina i volumen pripadaju domeni mjerenje.



Slika 1: Matematički procesi i domene kurikuluma (preuzeto iz [16, slika 1]).

Odgojno-obrazovni ishodi kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika opisani su sljedećim elementima:

- odgojno-obrazovni ishod
- razrada ishoda
- odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti "dobar" na kraju razreda
- sadržaji
- preporuke za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda.

U nastavku ćemo pregledati u kojim razredima osnovne škole i gimnazije se obrađuju površina i volumen. U prva dva razreda osnovnoškolskog obrazovanja ne pojavljuju se pojmovi površine i volumena.

4.1 Treći razred osnovne škole

U trećem razredu učenici procjenjuju, mjere i crtaju dužinu zadane duljine i računaju opseg. Učenici se upoznaju s pojmom volumena, dok će pojam površine obraditi u četvrtom razredu. Kod uvođenja pojma volumen učenike upoznajemo s posudama za čuvanje tekućina. Učenike treba osvijestiti da se prelijevanjam iz posude u posudu količina tekućine ne mijenja iako se njezin oblik (visina tekućine u posudi) mijenja. U udžbenicima se pri obradi ove teme koriste tekućine koje učenici susreću u svakodnevnom životu, poput soka od jabuke, mlijeka i ostalih.

Primjeri zadataka iz udžbenika [1]:

- Mirjana je kupila 3 l mlijeka. Ujutro je popila 3 dl toplog mlijeka. Koliko je mlijeka ostalo?
- U kantici je bilo 8 l ulja. Mama je potrošila polovinu. Koliko je litara ulja ostalo? Procijeni koliko je to decilitara. Preostalo ulje prelit će u boce od pola litre. Koliko će joj boca trebati? Procijeni pa izračunaj.

Učenici procjenjuju i prelijevanjem mjere volumene tekućina. Upoznaju se s osnovnom mjernom jedinicom za volumen, odnosno s litrom i njezinom oznakom. Uz pomoć manjih posuda uvodi se decilitar.

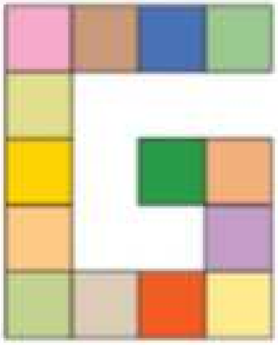
4.2 Četvrti razred osnovne škole

U četvrtom razredu učenik uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima. Težište ishoda je na pojmu površine kao veličine dijela ravnine koji je lik zauzeo, pa se učenici ne koriste formulama. Učenici u kvadratnu mrežu ucrtavaju likove zadane površine, upoznaju standardne mjerne jedinice, odnosno centimetar kvadratni, decimetar kvadratni i metar kvadratni. U vrijeme pisanja diplomskog rada nisu dostupni udžbenici za četvrti razred osnovne škole koji prate novi kurikulum.

4.3 Peti razred osnovne škole

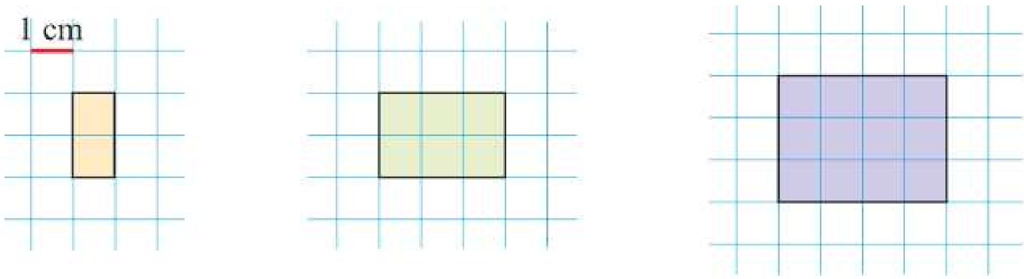
U petom razredu od učenika se očekuje da računa i primjenjuje opseg i površinu likova. Uvode se mjerne jedinice za površinu i njihove oznake, ali bez preračunavanja. Učenik povezuje umnožak dvaju jednakih brojeva s pojmom kvadrata broja i mjernom jedinicom za površinu. Prije samog računanja potrebno je procijeniti površinu nekog lika. Kako bi bolje predočili mjerne jedinice i kasnije bolje procjenjivali, nakon upoznavanja s mjernim jedinicama možemo učenicima postaviti pitanja: U kojim bi kvadratnim mjernim jedinicama izrazili površinu školske ploče, papirnate novčanice ili nekog grada?

Učenik računa površine likova koji su sastavljeni od jediničnih kvadrata.



Slika 2: Lik sastavljen od jediničnih kvadrata (preuzeto iz [24]).

Učenik otkriva i obrazlaže formule za opseg i površinu kvadrata i pravokutnika. Pomoću prebrojavanja jediničnih kvadrata zna izračunati površine pravokutnika sa slike 3. Nakon izmjerene površine učenici mjere duljinu



Slika 3: Otkrivanje formule za površinu (preuzeto iz [11]).

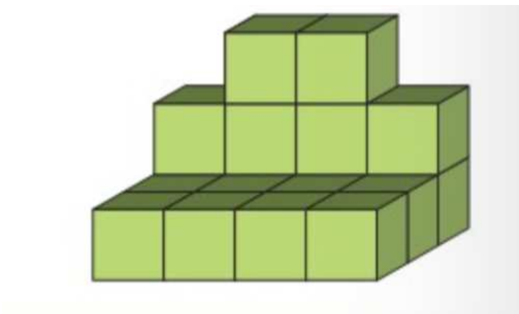
stranica danih pravokutnika i na taj način otkrivaju formulu za površinu. Površina pravokutnika kojemu su susjedne stranice duljine a i b jednaka je $a \cdot b$. Kvadrat je pravokutnik kojemu je $a = b$ pa je formula za površinu $P = a \cdot a$ ili $P = a^2$.

Učenik rješava zadatke sadržajem povezane s učenikovom okolinom, kao na primjer mjerenje površine nogometnog igrališta. Potrebno je učenike poticati da stvaraju crteže sastavljene od geometrijskih likova te im računati opsege i površine. Kod zadataka u kojima je zadana površina i jedna stranica pravokutnika, pri rješavanju se koristimo vezama između operacija, a ne rješavanjem jednadžbi jer to uče u šestom razredu.

Primjeri zadataka iz [24]:

- Nacrtaj dva različita pravokutnika čije su površine 20 cm^2.
- Izračunaj opseg pravokutnika kojemu je zadana: $P = 72$ cm^2 i $a = 8$ cm.
- Izračunaj duljinu stranice kvadrata kojemu je površina 16 cm^2.

Nakon obrade površine, obrađuje se volumen. Od učenika se očekuje da računa i primjenjuje volumen kocke i kvadra. Učenici se upoznaju s mjernim jedinicama za volumen i njihovim oznakama. Učenik povezuje umnožak triju jednakih prirodnih brojeva s pojmom kuba prirodnog broja i mjernom jedinicom za volumen. U zadatcima se ne pojavljuje potreba za preračunavanjem mjernih jedinica. Nakon što su obradili pojam volumena i mjerne jedinice za volumen, rješavaju se zadatci u kojima se računa volumen tijela sastavljenih od jediničnih kocaka (slika 4). Na prikazu geometrijskog tijela u ravnini, izgrađenog od jediničnih kocaka, nisu potpuno uočljive sve jedinične kocke. Učenicima to zna stvarati problem pa se preporuča koristiti programe dinamične geometrije i ostale dostupne interaktivne računalne programe i alate.



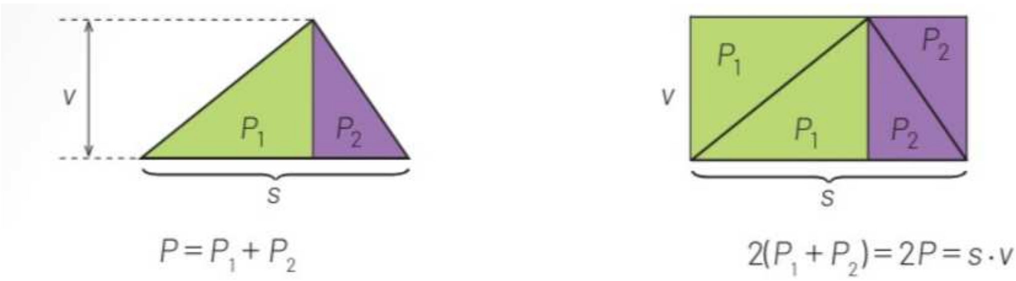
Slika 4: Tijelo sastavljeno od jediničnih kocaka (preuzeto iz [24]).

Učenik otkriva i obrazlaže formulu za volumen kocke i kvadra. Otkrivanje formule je moguće na isti način kao za površinu. Potrebno je prikazati više kvadara sastavljenih od jediničnih kocaka. Prebrojavanjem će izračunati volumen, a zatim izmjeriti bridove i uočiti povezanost. Volumen kvadra jednak je umnošku duljina njegovih bridova iz jednog vrha. Volumen kvadra s bridovima duljine a, b i c je $a \cdot b \cdot c$. Kocka je kvadar kojemu su bridovi iz jednog vrha jednake duljine, pa je formula za volumen $V = a \cdot a \cdot a$ ili $V = a^3$.

U zadatcima se računa volumen kocke i kvadra sa zadanim dulinjama bridova. Određuju se duljine bridova kocke i kvadra zadanih volumena. Primjer iz [24]: Odredi barem tri kvadra volumena 240 l. Na ovom primjeru učenici uočavaju da ima više kvadara jednakog volumena.

4.4 Šesti razred osnovne škole

U nastavnoj temi „Trokut“ obrađuje se površina trokuta. Učenik računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i geometrijskih likova sastavljenih od trokuta, pravokutnika i kvadrata. Nadopunjavanjem pravokutnog trokuta do pravokutnika učenici otkrivaju formulu za površinu pravokutnog trokuta. Nakon toga učenici otkrivaju formulu za površinu općeg trokuta, također nadopunjavanjem do pravokutnika (slika 5).

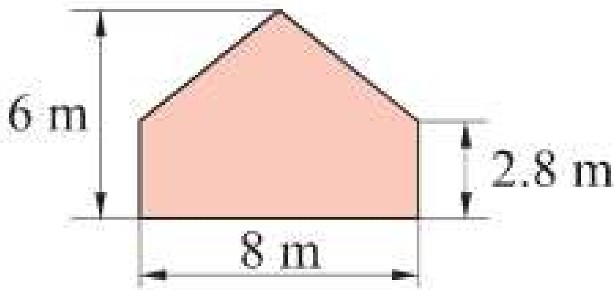


Slika 5: Otkrivanje formule za površinu trokuta (preuzeto iz [25]).

Učenici rješavaju zadatke u kojima je zadana duljina stranice i duljina visine na tu stranicu. U zadatcima u kojima je zadana površina trokuta i duljina stranice ili duljina visine na tu stanicu, nepoznatu veličinu traže uz pomoć veza između operacija, a ne rješavanjem jednadžbi. Učenik računa površinu geometrijskog lika sastavljenog od osnovnih geometrijskih likova (slika 6).

U zadatcima s riječima pojavljuju se problemske situacije iz okoline. Potrebno je izračunati veličinu plahte za šivanje šatora, količinu boje za fasadu kuće i slično.

U nastavnoj temi „Četverokut“ navedeno je da učenik opisuje i crta kvadrat, pravokutnik, paralelogram i romb. U proširenom sadržaju se obrađuje trapez i deltoid. Paralelogram je četverokut kojemu su svake dvije nasuprotne stranice usporedne. Površinu kvadrata i pravokutnika su otkrili u prethodnom razredu, a sada otkrivaju površinu paralelograma. U udžbenicima je prikazano rezanje i premještanje trokuta s jedne strane na drugu do oblika pravokutnika (slika 7) ili dijeljenje pravokutnika na dva trokuta kojima znamo izračunati površinu (slika 8).



Slika 6: Primjer izračunavanja površine (preuzeto iz [12]).

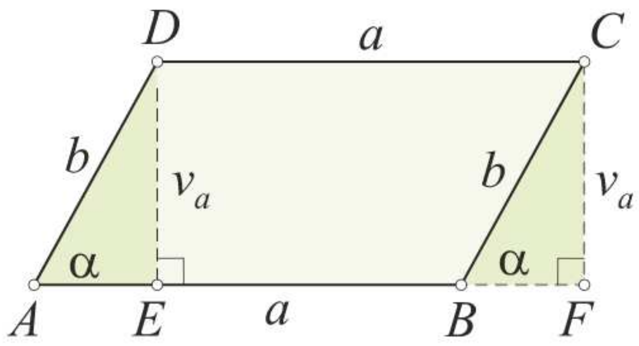
Površina paralelograma jednaka je umnošku duljine njegove stranice i duljine njoj pripadne visine. U zadatcima se traži površina uz zadanu duljinu stranice i duljinu pripadne visine, duljina stranice ako je zadana površina i duljina pripadne visine i slično. Iz [25]: Izračunaj površinu paralelograma $ABCD$ i duljinu visnine v_a ako su zadane duljine stranica $a = 4$ cm i $b = 3.5$ cm te duljina visine $v_b = 2.5$ cm.

Romb je paralelogram kojemu su sve stranice jednakih duljina. Površinu romba računamo prema formuli za površinu paralelograma. Svaki se četverokut može podijeliti na dva trokuta. Primjenom tog podatka učenici računaju površine općih četverokuta. U proširenom sadržaju obrađuje se trapez i njegova površina. Trapez je četverokut kojemu je barem jedan par nasuprotnih stranica usporedan. Dijeljenjem trapeza na dva trokuta, učenici otkrivaju formulu za površinu trapeza (slika 9). Moguće je otkriti i dijeljenjem trapeza po srednjici i preslagivanjem do paralelograma.

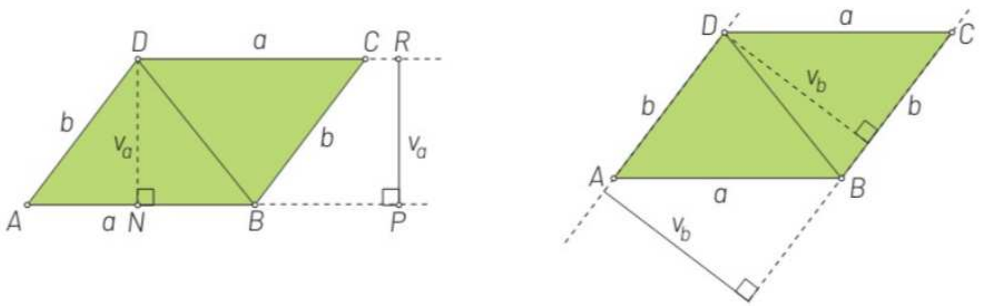
Primjer zadatka iz [12]: Izračunajmo površinu trapeza kojemu su osnovice duljina 42 mm i 5.3 cm, a duljina njegove visine 27 mm. U zadatcima se pojavljuje potreba za preračunavanjem mjernih jedinica za duljinu (km, m, dm, cm, m) i mjernih jedinica za površinu (km^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2).

4.5 Sedmi razred osnovne škole

Učenik računa i primjenjuje opseg i površinu kruga i njegovih dijelova. U nastavnoj jedinici o opsegu kruga učenici su upoznati s brojem π i njegovim svojstvima. Do formule za površinu kruga učenici dolaze rastavljanjem kruga na sukladne kružne isječke. Kada kružne isječke složimo kao na slici 10, dobit ćemo lik koji podsjeća na paralelogram. Što više kružnih isječaka izrežemo, to će dobiveni lik biti bliži paralelogramu. Učenici su u prethodnom



Slika 7: Izračunavanje površine paralelograma premještanjem trokuta (preuzeto iz [12]).



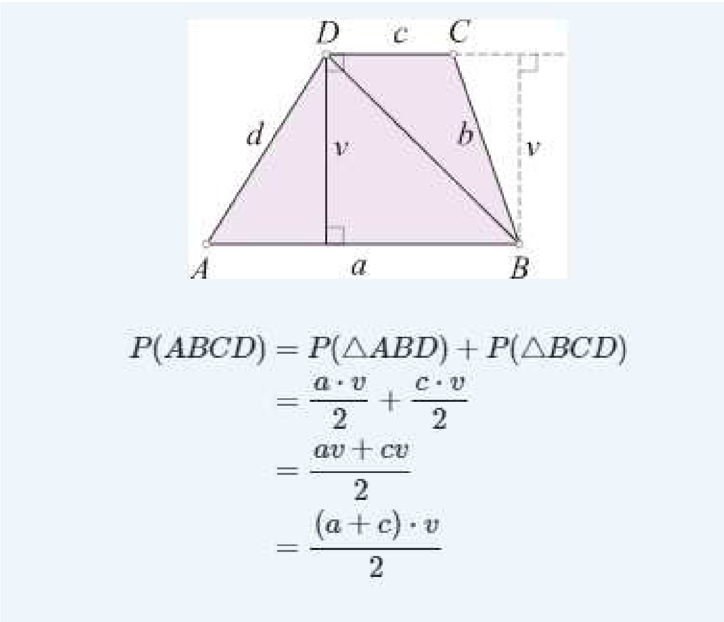
Slika 8: Izračunavanje površine paralelograma dijeljenjem na dva trokuta (preuzeto iz [25]).

razredu upoznati sa površinom paralelograma. Računamo je kao umnožak duljine stranice i visine na tu stranicu. Stranica paralelograma kojeg smo dobili preslagivanjem kružnih isječaka je jednaka polovini opsega kruga, a odgovarajuća visina jednaka je duljini polumjera kruga. Površina kruga je $P = r^2\pi$.

Učenici računaju površine kruga sa zadanom duljinom promjera ili polumjera te duljinu promjera ili polumjera kada je zadana površina kruga.

Primjeri iz [26]: Pozdrav suncu umjetnička je instalacija na zadarskoj rivi. Sunce je prikazano krugom površine 379.94 m^2. Kolika je duljina njegova polumjera i promjera?

Kružni vijenac je dio kruga omeđen dvjema koncentričnim kružnicama.



Slika 9: Površina trapeza (preuzeto iz [12]).

Učenici otkrivaju da se površina kružnog vijenca dobije oduzimanjem površine manjeg kruga od površine većeg kruga. Učenici istražuju i računaju površinu kružnog isječka. Površina kružnog isječka i veličina pridruženoga središnjeg kuta proporcionalne su veličine. Kružnom isječku površine P pridružen je središnji kut α, a cijelom krugu površine $r^2\pi$ središnji kut od 360 stupnjeva. Vrijedi $\frac{P}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$, odakle slijedi $P = r^2\pi\frac{\alpha}{360°}$.

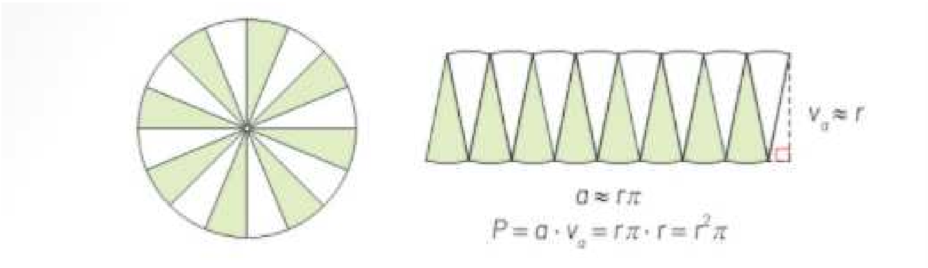
U kurikulumu se naglašava da se kod obrade površine kruga i njegovih djelova ne provjerava tehnika računanja, nego logičko razmišljanje i sposobnost analize problema.

Primjeri zadataka iz [26]:

- Pikado je društvena igra u kojoj je cilj strelicama pogoditi u ploču okruglog oblika promjera 45 cm. Ploča je podijeljena na 20 jednakih kružnih isječaka koji su naizmjenično obojeni crnom i bijelom bojom. Izračunaj površinu jednoga bijelog dijela.

- Kolika je površina prometnoga znaka kvadratnoga oblika čija je stranica 5 cm dulja od polumjera prometnoga znaka kružnog oblika čiji je opseg 188.4 cm?

Preporuča se istražiti povijest broja π i koristiti aproksimacije 3.14 ili $\frac{22}{7}$.



Slika 10: Površina kruga (preuzeto iz [26]).

U sedmom razredu učenici računaju površine mnogokuta. Računaju površine nepravilnih mnogokuta rastavljajući ih na mnogokute čije površine znaju izračunati (kvadrat, pravokutnik, paralelogram i trokut). U zadatcima se često pojavljuju situacije iz svakodnevnog života. Učenici trebaju izračunati površinu stana u obliku nepravilnog mnogokuta te izračunati njegovu cijenu ako znamo kolika je cijena za jedan m^2. Na sličan način zadani su i zadatci sa travnjakom i oranicama. Učenik otkriva, obrazlaže i primjenjuje formulu za površinu pravilnog mnogokuta koristeći se površinom karakterističnog trokuta. Učenik argumentira odabir strategije pri računaju površine mnogokuta u problemskoj situaciji. Naglasak je stavljen na učenikovo logičko razmišljanje i sposobnost analize problema, a ne na tehniku računanja. Preporuča se zadavanje problemske situacije računanja površine koje se tiču problema iz stvarnog života te korištenje programima dinamične geometrije.

4.6 Osmi razred osnovne škole

U osmom razredu obrađuju se geometrijska tijela. Obrađuju se pravilne, uspravne prizme i piramide, valjak i stožac. Kugla se nalazi u proširenom sadržaju. Od učenika se očekuje da opisuje oplošje i volumen nacrtanog geometrijskog tijela, oplošje povezuje s mrežom geometrijskog tijela, uočava i opisuje elemente tijela i veze među njima (uključujući visinu i izvodnice), objašnjava volumen kao mjeru prostora koje zauzima tijelo, primjenjuje računanje oplošja i volumena geometrijskih tijela u problemskim situacijama, istražuje i otkriva odnose volumena prizme i piramide. Da bi učenicima jasnije predočili geometrijska tijela preporuča se izrada modela i korištenje programima dinamične geometrije te ostalim dostupnim interaktivnim računalnim programima i alatima. U vrijeme pisanja diplomskog rada nema izdanih udžbenika za osmi razred koji prate novi kurikulum.

4.7 Prvi razred gimnazije

U prvom razredu srednje škole počinju se pojavljivati dokazi, pa aktivnosti otkrivanja više nisu u prvom planu. U kurikulumu je navedeno da se u proširenom sadržaju obrađuju formule za površinu trokuta s polumjerom upisane i opisane kružnice. Nakon što su upoznati sa četiri karakteristične točke trokuta, dane su formule za površinu i njihovi dokazi. U elektroničkom izdanju udžbenika [28], u lekciji 7.6 dan je pogrešan dokaz sljedećeg teorema. Navedimo ispravan dokaz.

Teorem 4.1. *Ako je u trokutu ABC polumjer opisane kružnice R, a duljine stranica su a, b i c, tada je površina trokuta $P = \frac{abc}{4R}$.*

Dokaz. Neka je $|BC| = a$ i A' točka na opisanoj kružnici dijametralno suprotna vrhu B, tj. takva da dužina BA' prolazi kroz središte S opisane kružnice. Kutovi BAC i $BA'C$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{BC}$ pa vrijedi $\angle BAC = \angle BA'C = \alpha$. Trokut $A'BC$ je pravokutan jer je $\angle BCA'$ kut nad promjerom kružnice, pa vrijedi $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. U trokutu vrijedi $v_c = b \cdot \sin\alpha$. Uvrštavanjem tih jednakosti u formulu za površinu trokuta dobivamo:

$$P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}.$$

□

Iduća dva teorema preuzeta su iz digitalnog izdanja udžbenika [28].

Teorem 4.2. *Ako je u trokutu ABC polumjer upisane kružnice r, a poluopseg trokuta je s, tada je površina trokuta $P = rs$.*

Dokaz. Trokutu ABC upišimo kružnicu. Središte upisane kružnice je U. Povucimo polujere r na stranice trokuta.

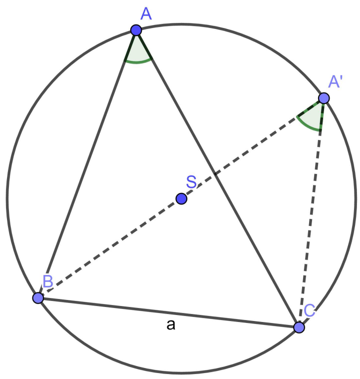
Uočimo trokute ABU, BCU i CAU. Svaki od tih trokuta ima visinu r pa vrijedi

$$P(ABC) = P(ABU) + P(BCU) + P(CAU) = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) = rs.$$

□

Još jedna formula za površinu trokuta koju učenici susreću dobila je ime po grčkom matematičaru Heronu. Učenici u zadatcima primjenjuju Heronovu formulu. U udžbeniku [28] dokazana je pomoću Pitagorina poučka.

Teorem 4.3. *Neka su a,b i c duljine stranica trokuta, a s njegov poluopseg. Tada je $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.*



Slika 11: Dokaz formule za površinu trokuta $P = \frac{abc}{4R}$.

Dokaz. Neka je točka N nožište visine iz vrha C. Formulu ćemo dokazati za tupokutan trokut, a za ostale trokute dokazuje se slično. Uočimo dva pravokutna trokuta ANC i BNC. U svakome od njih izrazimo v_c:

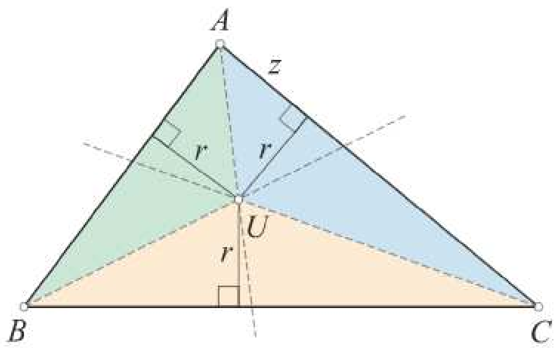
$$v_c^2 = b^2 - x^2,\ v_c^2 = a^2 - (c+x)^2.$$

Izjednačavanjem dobivamo:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c+x)^2, \text{tj. } x = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}.$$

Uvrstimo li x u prvu jednakost za v_c i primjenimo formulu za razliku kvadrata, dobivamo:

$$\begin{aligned}
v_c^2 &= b^2 - \left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2c}\right)^2 = \left(b - \frac{a^2-b^2-c^2}{2c}\right)\left(b + \frac{a^2-b^2-c^2}{2c}\right) \\
&= \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c} \cdot \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c} \\
&= \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4c^2} \\
&= \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}.
\end{aligned}$$



Slika 12: Dokaz formule za površinu trokuta $P = rs$ (preuzeto iz [28]).

Budući da je $a + b + c = 2s$, slijedi $b + c - a = 2(s - a)$, $a + c - b = 2(s - b)$, $a + b - c = 2(s - c)$. Uvrštavanjem slijedi

$$v_c^2 = \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{4c^2}.$$

Korjenovanjem i množenjem s nazivnikom nakon skraćivanja dobivamo

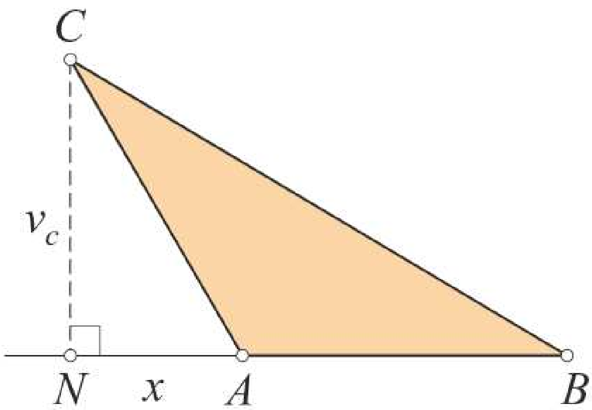
$$\frac{cv_c}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Budući da je $P = \frac{cv_c}{2}$, dokazali smo formulu. □

Pri obradi sličnosti trokuta učenik određuje, obrazlaže i primjenjuje odnose površina, opsega i drugih veličina u sličnim torkutima. Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica, $P' : P = k^2$.

4.8 Drugi razred gimnazije

U drugom razredu gimnazije obrađuju se kružnica i krug. Učenik pomoću proporcionalnosti izvodi formule za duljinu kružnog luka i površinu kružnog isječka. Puni kut ima 360°, pa kutu od 1° odgovara duljina luka koja je 360 puta manja od duljine cijele kružnice, tj. od opsega kruga. Dakle, $l(1^\circ) = \frac{2r\pi}{360^\circ}$, tj. $l(1^\circ) = \frac{r\pi}{180^\circ}$. Ako središnji kut ima α stupnjeva, tada je duljina luka α puta veća od duljine luka koji odgovara luku od 1° te je $l(\alpha) = \frac{r\pi}{180\circ}\alpha$. Na sličan način izvodi se i formula za površinu kružnog isječka. Naime, površina kružnog isječka sa središnjim kutom 1° je 360 puta manja od površine cijelog kruga, tj. $P(1^\circ) = \frac{r^2\pi}{360^\circ}$. No, tada je površina kružnog isječka sa središnjim kutom α stupnjeva, α puta veća od $P(1^\circ)$, tj. $P(\alpha) = \frac{r^2\pi}{360^\circ}\alpha$.



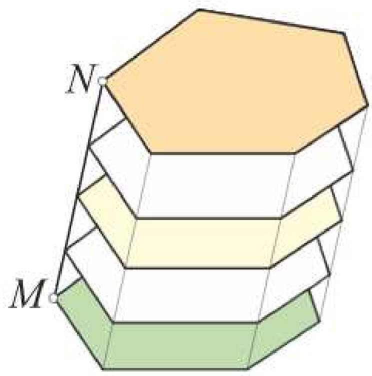
Slika 13: Dokaz Heronove formule (preuzeto iz [28]).

U proširenom sadržaju učenik računa površinu kružnog odsječka. Ako su A i B krajnje točke luka s kutom manjim od 180°, onda pravac AB dijeli isječak na dva dijela, trokut VAB i kružni odsječak određen lukom i tetivom $\overline{AB}$. Površina kružnog odsječka računa se tako da se od površine kružnog isječka oduzme površina trokuta VAB.

Nakon obrade trigonometrije trokuta, primjenom trigonometrijskih funkcija kutova u trokutu i formulom $P = \frac{av_a}{2}$, dolazimo do novih formula za površinu trokuta. Površina trokuta jednaka je polovici umnoška dviju stranica i sinusu kuta između njih: $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

U drugom razredu gimnazije učenici proširuju znanje o poliedrima koje su stekli u osmom razredu osnovne škole. Od učenika se očekuje da računa volumen i oplošje geometrijskih tijela, prepoznaje i opisuje uspravnu prizmu (četverostrana, pravilna šesterostrana), piramidu (četverostrana, pravilna šesterostrana), valjak, stožac i kuglu i računa elemente (duljine bridova, volumene, oplošje, polumjer baze...) prizme, valjka, piramide, stošca, kugle te rotacijskih tijela. U školama s više sati matematike učenik računa elemente krnjih tijela, prepoznaje i opisuje Platonova i Arhimedova tijela. Platonova tijela su poliedri kojima su sve strane sukladni pravilni mnogokuti i kojima iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova. Strane Arhimedovih tijela su pravilni mnogokuti, ali nisu sukladni. Kod otkrivanja formula za volumen preporuča se prelijevanje vode (presipanje riže ili pijeska) iz šuplje piramide/stošca u šuplju prizmu/valjak sukladnih baza i visina. Pri računanju volumena likova geometrijskih tijela često se primjenjuje Cavalierijev princip. Cavalierijev princip glasi: Neka su dana dva geometrijska tijela i ravnina. Ako su svi njihovi presjeci s ravninama usporednim s tom ravninom jednakih površina, onda ta dva tijela imaju jednake volumene.

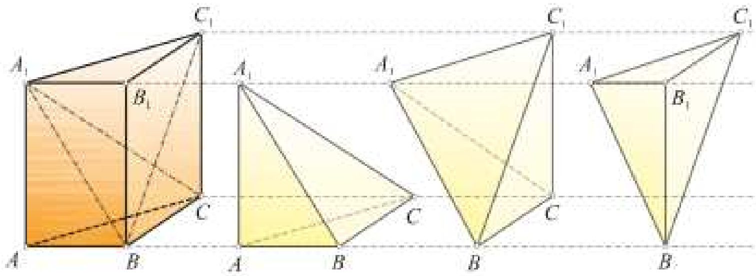
Prizma je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim n-terokutima koji se nalaze u usporednim ravninama i s n paralelograma. Nazivamo je još i n-terostranom prizmom. Prizmu možemo opisati na još jedan način. Možemo zamisliti dužinu $\overline{MN}$ s početnom točkom u jednom vrhu baze i zatim translatirati bazu tako da taj vrh putuje dužinom. Skup svih tako dobivenih točaka je prizma. Zato je presjek prizme ravninom paralelnom s njegovom bazom mnogokut sukladan bazi.



Slika 14: Prizma (preuzeto iz [7]).

Do formule za volumen prizme u udžbenicima se dolazi na sljedeći način. Po Cavalierijevu principu sve prizme koje imaju jednake površine baze i jednake visine imaju jednak volumen. Kocka i kvadar su prizme. Znamo da je volumen kocke $V = a^3$, a volumen kvadra $V = abc$. Uzmimo da je osnovka pravokutnik sa stranicama a i b. Duljina visine mu je c, pa volumen možemo zapsati u obliku $V = Bv$. Baza kocke je kvadrat čija je površine $B = a^2$, a duljina visine je a, pa je $V = Bv$. Dakle, volumen prizme ovisi o površini baze i visini prizme pa formula $V = Bv$ vrijedi za svaku prizmu.

Pomoću Cavalierijeva principa dokazujemo formulu za volumen piramide. Dokaže se da dvije piramide koje imaju baze jednakih površina i jednake visine imaju jednak volumen. Dakle, formula za volumen piramide ne ovisi o vrsti mnogokuta baze već samo o površini baze. Zato možemo uzeti neku jednostavnu piramidu i izračunati njezin volumen. Nacrtajmo trostranu prizmu s osnovkama ABC i $A_1B_1C_1$. Ravninama A_1BC i A_1BC_1 presjeći ćemo je na tri trostrane piramide $ABCA_1$, BCC_1A_1 i $A_1B_1C_1B$. Piramide $ABCA_1$ i



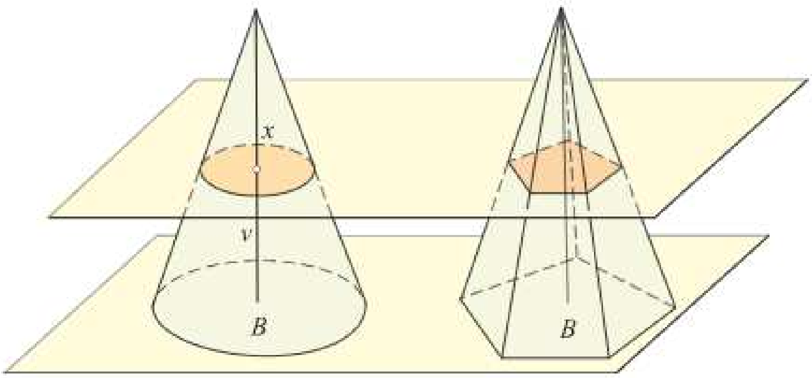
Slika 15: Dokaz formule za volumen piramide (preuzeto iz [7]).

$A_1B_1C_1B$ imaju jednake obujme jer imaju sukladne osnovke ABC i $A_1B_1C_1$ i jednake visine. Usporedimo sad piramide BCC_1A_1 i $A_1B_1C_1B$. Zamislimo da je točka A_1 vrh obiju piramida. Njihove su baze BCC_1 i BB_1C_1 jednakih površina jer su obje polovice paralelograma BCC_1B_1. Visine se podudaraju jer je visina udaljenost od vrha A_1 do ravnine paralelograma BCC_1B_1. Zato i te dvije piramide imaju jednake volumene. Pokazali smo da je volumen svih triju piramida jednak i iznosi trećinu volumena prizme, $V = \frac{Bv}{3}$.

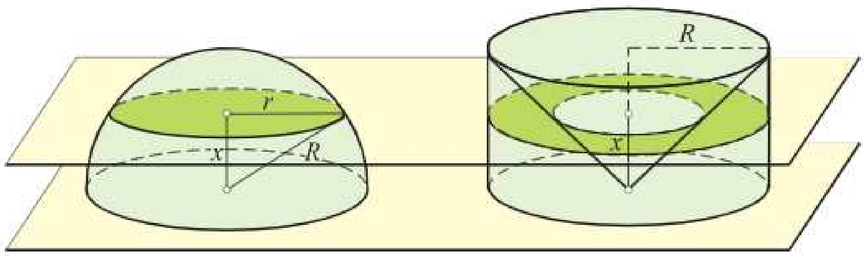
Valjak je tijelo slično prizmi i može se opisati na istovjetan način. Jedina bitna razlika je u osnovkama: osnovka prizme je mnogokut, a osnovka valjka je krug. Zamislimo uz valjak prizmu iste visine v, s bazom površine $B = r^2\pi$. Presjeci valjka i prizme imaju jednake površine pa su im po Cavalierijevu principu jednaki i volumeni. Dakle, valjak i prizma s bazama jednakih površina i jednakim visinama imaju jednake volumene. Volumen uspravnog ili kosog valjak polumjera baze r i visine v je $V = r^2\pi v$.

Formula za volumen stošca u udžbenicima je dobivena primjenom Cavalierijeva principa. Neka su dani stožac polumjera r, visine v i piramida iste visine, a čija osnovka ima jednaku površinu kao i krug koji je osnovka stošca. Budući da su površine osnovaka jednake, slijedi da su i površine presječnih likova jednake, pa su, prema Cavalierijevu principu volumeni stošca i piramide jednaki. Stoga je i volumen stošca jednak trećini umnoška površine osnovke i duljine visine, $V = \frac{1}{3}r^2\pi v$. Volumen kugle izračunava se primjenom Cavalierijeva principa na dva tijela: polukuglu polumjera R i valjak iz kojeg je uklonjen stožac. Polumjer osnovke i visina valjka je R.

Presiječemo li ta dva tijela ravninom udaljenom x od ravnine osnovki, kod polukugle dobivamo krug radijusa $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Kod drugog tijela dobivamo kružni vijenac većeg polumjera R i manjeg polumjera x (vrijedi zbog sličnosti trokuta). Površina presječnog lika kod polukugle je $(R^2 - x^2)\pi$,



Slika 16: Volumen stošca (preuzeto iz [29]).



Slika 17: Volumen kugle (preuzeto iz [29].)

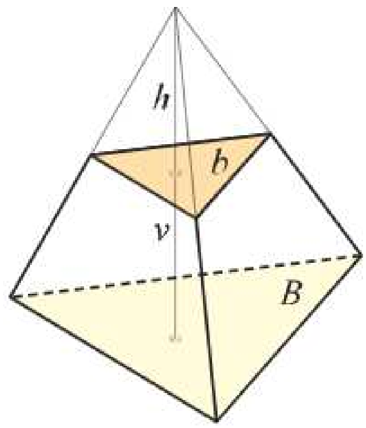
kao i površina kružnog vijenca kod drugog tijela. Dakle, površine su jednake i to vrijedi za svaki x, pa je obujam polukugle jednak obujmu valjka iz kojeg je uklonjen stožac, tj. $V = \frac{2}{3}R^3\pi$. Volumen kugle je $V = \frac{4}{3}R^3\pi$.

Volumeni krnje piramide i krnjeg stošca obrađuje se u školama s više sati matematike. Ako piramidu presiječemo ravninom paralelno njezinoj osnovci, ona će se raspasti na dva dijela od kojih je jedan manja piramida koju zovemo dopunjak. Drugi je dio krnja piramida. Označimo s v visinu krnje piramide (udaljenost ravnina u kojima leže baze B i b). Neka je h visina manje, odrezane piramide. To znači da je visina početne piramide $v + h$.

Baze B i b slični su likovi, s koeficijentom sličnosti $\frac{v+h}{h}$. Zato vrijedi $B : b = (v+h)^2 : h^2$, odnosno $\sqrt{B} : \sqrt{b} = (v+h) : h$. Odavde slijedi:

$$h\sqrt{B} = (v+h)\sqrt{b},$$

$$h = \frac{v\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{v\sqrt{b(\sqrt{B} - \sqrt{b})}}{B - b}.$$



Slika 18: Krnja piramida (preuzeto iz [7]).

Volumen krnje piramide V razlika je volumena dviju piramida s bazama B odnosno b i visinama $v+h$ odnosno h. Zato je

$$V = \frac{B(v+h)}{3} - \frac{bh}{3} = \frac{Bv}{3} + \frac{h}{3}(B-b).$$

Kada uvrstimo izračunatu vrijednost za h:

$$V = \frac{v}{3}(B + \sqrt{Bb} + b).$$

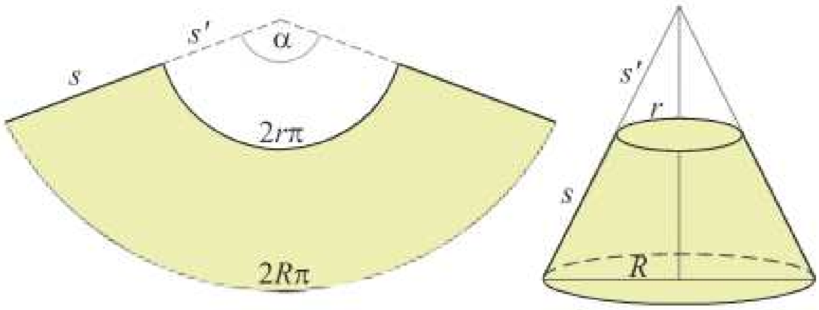
Presijecanjem stošca ravninom paralelnom s ravninom baze dobivamo manji stožac sličan početnom i dio koji nazivamo krnji stožac. Promatramo uspravni krnji stožac. Rezanjem po jednoj izvodnici plašt krnjeg stošca može se prostrijeti u ravninu.

Taj je plašt isječak kružnog vijenca. Duljina većeg luka je $2R\pi$, a duljina manjeg luka $2r\pi$. Zato je površina plašta P razlika površina P_1 i P_2 kružnih isječaka. Označimo privremeno s s' duljinu nepostojećeg dijela polumjera kružnog isječka. Iz sličnosti trokuta imamo

$$s' : r = (s' + s) : R.$$

Odavde ćemo izračunati potrebne veličine: $s' = \frac{sr}{R-r}$ i $s' + s = \frac{sR}{R-r}$. Zato je

$$P = P_1 - P_2 = R\pi(s' + s) - r\pi s' = \pi s(R - r).$$



Slika 19: Krnji stožac (preuzeto iz [29].

4.9 Treći i četvrti razred gimnazije

U trećem razredu srednje škole ne obrađuju se površine i volumeni. U četvrtom razredu srednje škole učenici izračunavaju površinu ispod grafa jednostavnih funkcija rabeći Newton-Leibnizovu formulu i tablicu neodređenih integrala. U školama s više sati matematike pomoću integrala računaju volumene rotacijskih tijela. U vrijeme pisanja diplomskog rada nema izdanih udžbenika za četvrti razred gimnazija koji prate novi kurikukum.

5 Geoploča

Geoploča je plastična ili drvena ploča s čavlićima raspoređenim u kvadratnu mrežu oko kojih je moguće rastezati gumene vrpce. Osmislio ju je egipatski matematičar Caleb Gattegno 1952. godine.

Osim klasične kvadatne geoploče dostupna je i kružna geoploča. Geoploče su dostupne i na internetskim aplikacijama [8] i [9]. Umjesto geoploče možemo koristit točkasti papir. U zadatcima u kojima je potrebno prikazati više likova na geoploči, možemo zajedno koristit i geoploču i točkasti papir, tako da učenici rješenja precrtavaju na točkasti papir.

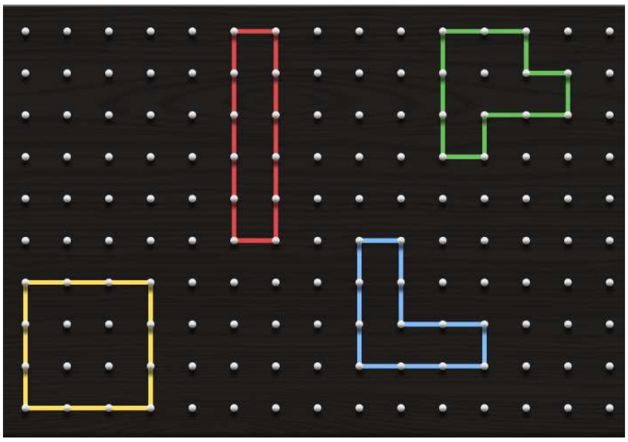
Geoploča je pogodna za korištenje u osnovnoj školi kod učenja opsega, površina, pojma razlomka i svojstava geometrijskih likova. Učenicima omogućava vizualizaciju i kreativnost te ih potiče na istraživanje i analiziranje. Mnogi učenici u višim razredima osnovne škole znaju formule za površinu kvadrata i pravokutnika, ali sam pojam površina ne shvaćaju. Često učenici miješaju pojam opsega i površine i vjeruju da se povećanjem površine lika nužno povećava i opseg. U [5] naveden je problem nerazumijevanja mjernih jedinica za površinu. Naime, kada pitamo učenike da opišu centimetar

Slika 20: Geoploče (preuzeto iz [10]).

kvadratni većina će napisati oznaku bez stvarnog shvaćanja što to znači. Koristeći geoploču učenici će računati površinu lika brojeći jedinične kvadratiće koji prekrivaju lik, pa će im biti jasnije značenje jediničnog kvadrata, a time i značenje centimetra kvadratnog.

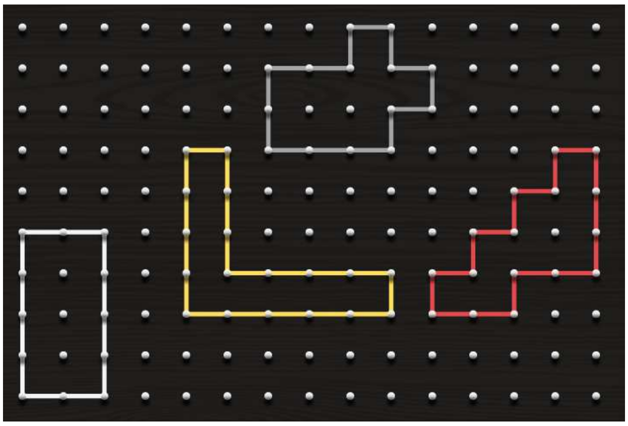
Geoploča je pogodna za učenje površine likova pa ju možemo koristiti u petom razredu za površinu kvadrata i pravokutnika i u šestom razredu za površinu paralelograma i trokuta. Primjeri zadataka za površine pravokutnika i kvadrata:

1. Pomoću geoploče prikaži barem tri lika čiji je opseg 12 cm. Izračunaj površine tih likova.



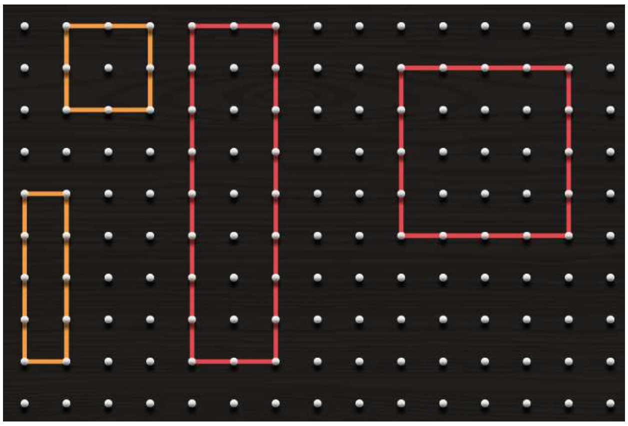
Slika 21: Rješenje zadatka 1.

2. Pomoću geoploče prikaži barem tri lika čija je površina 8 cm^2. Izračunaj opseg tih likova.



Slika 22: Rješenje zadatka 2.

3. Na geoploči prikaži dva para kvadrata i pravokutnika s istom površinom.



Slika 23: Rješenje zadatka 3.

4. Na geoploči prikaži što više kvadrata različitih dimenzija i izračunaj im površine.

5. Na geoploči prikaži pravokutnik kojem je $a = 2$ i $b = 4$. Izračunaj mu opseg i površinu.

6. Pomoću geoploče odredi duljinu nepoznate stranice pravokutnika ako je poznato $a = 4$ cm i $P = 20$ cm^2.

Posljednja dva primjera su klasični zadatci koji se pojavljuju kod obrade površine pravokutnika i kvadrata, dok ostali zadatci potiču učenike na razmišljanje i kreativnost.

Primjeri zadataka za površinu trokuta:

7. Pomoću geoploče možemo otkriti formulu za površinu trokuta nadopunjavanjem do pravokutnika.

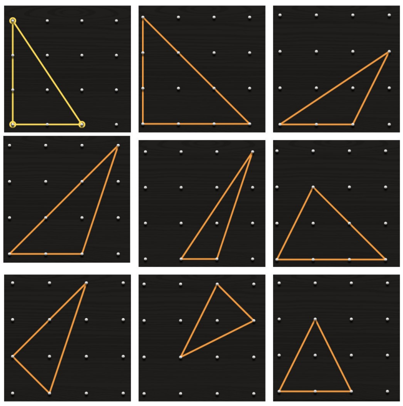
8. Na geoploči 4×4 prikaži dva jednakokračna pravokutna trokuta različitih površina.

9. Na geoploči 4×4 prikaži dva međusobno nesukladna trokuta površine 2 cm^2.

10. Na geoploči 4×4 prikaži sve pravokutne trokute površine veće od 4 cm^2. Nacrtaj odgovarajuće slike na točkasti papir.

11. Na geoploči 4×4 prikaži što više međusobno nesukladnih trokuta koji dodiruju 4 čavlića. Prikaži ih na točkastom papiru i izračunaj im površine.

12. Na geoploči 3×3 sve međusobno nesukladne trokute koji u unutrašnjosti imaju točno jedna čavlić. Prikaži ih na točkastom papiru i izračunaj im površine.



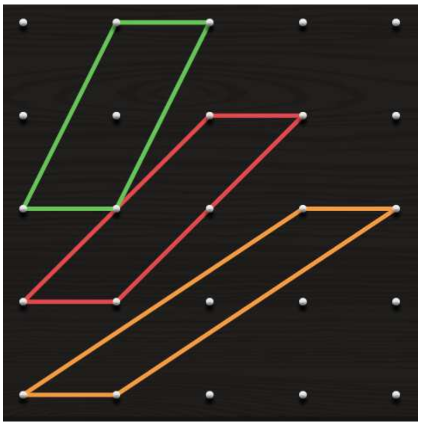
Slika 24: Rješenje zadatka 12.

13. Na geoploči 4×4 prikaži par međusobno sličnih pravokutnih trokuta koji nisu jednakokračni.

Površina i sukladnost trokuta se obrađuju u šestom razredu. Sličnost trokuta se obrađuje u osmom razredu, pa je trinaesti zadatak primjeren za taj razred. Primjeri zadataka za površinu paralelograma:

14. Pomoću geoploče možemo otkriti formulu za površinu paralelograma.

15. Na geoploči 4×4 prikaži tri nesukladna paralelograma duljine osnovice 1 koji imaju jednaku površinu.



Slika 25: Rješenje zadatka 15.

16. Na geoploči 4×4 prikaži tri paralelograma s osnovicom duljine 2 i različite površine.

17. Na geoploči 4×4 prikaži nepravokutni paralelogram najveće moguće površine. Kolika je ta površina?

18. Na geoploči 4×4 prikaži što više međusobno nesukladnih paralelograma. Nacrtaj ih na točkastom papiru i izračunaj im površinu.

Literatura

[1] A. Boras Mandić i dr., *Nina i Tino 3, udžbenik matematike za treći razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2020.

[2] F. M. Bruckler, *Povijest matematike 1-izmijenjeno i dopunjeno izdanje*, Odjel za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2014.

[3] F. M. Bruckler, *Povijest matematike 2*, Odjel za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2009.

[4] V. Čačić, Petnaesto predavanje iz Teorije skupova, dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~veky/B/TS.m15p.06-02-04.pdf` (ožujak, 2021.)

[5] A. Čižmešija, T. Soucie, R. Svedrec, *Primjena geoploče u nastavi matematike*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike,50 (2012.), 25.-39.

[6] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik za prvi razred gimnazija i strukovnih škola*, Element, Zagreb, 2019.

[7] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik za drugi razred gimnazija i strukovnih škola*, Element, Zagreb, 2019.

[8] Geoploča, dostupno na: `https://www.mathplayground.com/geoboard.html` (ožujak 2021.).

[9] Geoploča, dostupno na: `https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/` (ožujak 2021.).

[10] Geoploče u boji, dostupno na: `http://www.idadidacta.hr/geoploce-u-boji-6-kom-6312` (ožujak, 2021.).

[11] G. Gojmerac Dekanić i dr., *Matematika 5, udžbenik za peti razred osnovne škole*, Element, Zagreb 2019.

[12] G. Gojmerac Dekanić i dr., *Matematika 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole*, Element, Zagreb 2019.

[13] G. Gojmerac Dekanić i dr., *Matematika 7, udžbenik za sedmi razred osnovne škole*, Element, Zagreb 2019.

[14] Hilbert's third problem, dostupno na: `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem` (ožujak 2021.).

[15] D. Jukić, *Mjera i integral*, Odjel za matematiku Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2012.

[16] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, Narodne novine 7/2019., dostupno na: `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`

[17] Đ. Paunić, *History of measure theory*, Handbook of measure theory, str. 1–26, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[18] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga*, Zagreb, 1992.

[19] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2, Školska knjiga*, Zagreb, 1995.

[20] T. Soucie, *Geoploča - Aha, to je matematika!*, Alfa, Zagreb, 2018.

[21] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton university, New Jersey, 2005.

[22] R. Svedrec, *Trokuti na geoploči*, Matka: časopis za mlade matematičare, 20, br.77 (2011.), 25.-27.

[23] H. Šikić, *Mjera i integral, bilješke s predavanja* (natipkao i uredio I.Krijan),2012., dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ikrijan/pdfs/nastava/mjera.pdf` (ožujak 2021.).

[24] Z. Šikić i dr., *Matematika 5, udžbenik za peti razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2020.

[25] Z. Šikić i dr., *Matematika 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2020.

[26] Z. Šikić i dr., *Matematika 7, udžbenik za sedmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb, 2020.

[27] S. Štimac, Geometrija i topologija, dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~sonja/Geometrija%20i%20topologija.pdf` (ožujak 2021.).

[28] S. Varošanec, *Matematika 1, udžbenik za prvi razred gimnazija i strukovnih škola*, Element, Zagreb, 2020.

[29] S. Varošanec, *Matematika 2, udžbenik za prvi razred gimnazija i strukovnih škola*, Element, Zagreb, 2020.

[30] Wallace-Bolyai-Gerwien-ov teorem, dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Wallace%E2%80%93Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem (ožujak 2021.).

Sažetak

Na početku diplomskog rada dan je povijesni pregled razvoja površine i volumena. Zatim su definirani ključni pojmovi iz teorije mjere kao što su σ-algebra i mjera na σ-algebri. Definirana je Lebesgueova mjera koja na $\mathbb{R}^2$ predstavlja moderni pojam površine, a na $\mathbb{R}^3$ predstavlja moderni pojam volumena. Zatim je dana analiza obrade pojmova površine i volumena od trećeg razreda osnovne škole do četvrtog razreda gimnazije. Na kraju rada metodički je razrađena obrada opsega i površine s pomoću nastavnog pomagala geoploče.

Summary

At the beginning of the thesis the historical development of area and volume is given. Then, key terms from measure theory such as σ -algebra and measure on σ-algebra are defined. The Lebesgue measure is defined, on $\mathbb{R}^2$ representing the modern notion of area and on $\mathbb{R}^3$ representing the modern notion of volume. Next, the treatment of the concept of area and volume from third grade of elementary school to the fourth grade of high school is analysed. At the end, treatment of perimeter and area with the help of the teaching aid Geoboard is methodically elaborated.

Životopis

Rođena sam 24. lipnja 1995. godine u Zadru. Svoje obrazovanje sam započela 2002. godine u Osnovnoj školi Smiljevac u Zadru. Osmi razred sam završila 2010. godine, te upisala Gimnaziju Vladimira Nazora u Zadru. Po završetku opće gimnazije 2014. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Smjer mijenjam 2015. godine upisujući studij Matematika; smjer: nastavnički. Završetkom studija 2018. godine stječem akademski naziv sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike. Te godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji ove godine završavam.