Möbiusove transformacije

Grubišić, Iva

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Grubišić

MÖBIUSOVE TRANSFORMACIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
Ana Prlić

Zagreb, travanj 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem dragoj mentorici doc. dr. sc. Ani Prlić na pomoći pri pisanju ovoga rada. Hvala joj na uloženom trudu i pristupačnosti.

Hvala mojoj divnoj obitelji što mi je omogućila studiranje, što mi je davala neizmjernu podršku tijekom cijelog mog školovanja i što nikada nije sumnjala u moje sposobnosti i vrijednosti. Posebno Hvala mom bratu na pomoći i strpljenju.

Zahvalna sam na divnim kolegicama bez kojih moj put studiranja ne bi bio ovakav. Hvala im što su mi učinile studiranje ljepšim i lakšim.

Sadržaj

Uvod

Ovaj diplomski rad obrađuje Möbiusovu transformaciju, funkciju kompleksne varijable, nazvanu po njemačkom matematičaru Augustu Ferdinandu Möbiusu. U prvom poglavlju definirat ćemo Möbiusovu transformaciju, njezinu inverznu funkciju te ih smjestiti u proširenu kompleksnu ravninu. Drugo poglavlje opisuje posebne slučajeve Möbiusove transformacije, tj. opisuje transformacije ravnine: translaciju, homotetiju, rotaciju i inverziju. Najveći naglasak stavlja na inverziju i njena svojstva. U trećem poglavlju obradit ćemo temeljno svojstvo Möbiusove transformacije, odnosno dokazat ćemo da Möbiusova transformacija preslikava kružnice u kružnice, pri čemu pravce smatramo kružnicama beskonačnog polumjera. Pokazat ćemo Möbiusovu transformaciju kao kompoziciju translacije, rotacije, homotetije i inverzije. U istom poglavlju ćemo primijeniti dokazano na primjerima. U četvrtom poglavlju odredit ćemo fiksne točke Möbiusove transformacije, pomoću toga odrediti implicitnu formulu te ju primijeniti u različitim primjerima. Obradit ćemo i jedno bitno svojstvo Möbiusove transformacije, svojstvo simetrije. Dokazat ćemo ga i primijeniti u zadacima. Na kraju rada ćemo opisati primjenu i važnost Möbiusove transformacije u različitim područjima znanosti.

Poglavlje 1

Definicija Möbiusove transformacije

1.1 Definicija

Definicija 1.1.1. *Neka su* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *takvi da je* $ad \neq bc$. *Möbiusova transformacija je funkcija* $f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C}$ *oblika*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{1.1}$$

U raznim literaturama možemo pronaći i nazive homografska ili razlomljena linearna transformacija.

Kada uvjet $ad \neq bc$ ne bi bio ispunjen, tada bi funkcija (1.1) bila konstantna. Deriviramo li funkciju (1.1) dobivamo sljedeće

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - bc}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Ukoliko je brojnik jednak nuli, dobivamo $f'(z) = 0$, što povlači da je $f(z)$ konstantna funkcija.

Sada ćemo dokazati da Möbiusova transformacija čuva kutove i orijentaciju. Prije toga navodimo definiciju:

Definicija 1.1.2. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *funkcija klase* C^1 *na* Ω. *Za preslikavanje* f *kažemo da je konformno u točki* $(x, y) \in \Omega$ *ako je* $\det f'(x, y) > 0$ *i ako za svaki par vektora* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq 0$ *vrijedi*

$$\frac{f'(x, y)\overrightarrow{a} \cdot f'(x, y)\overrightarrow{b}}{\left|f'(x, y)\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|f'(x, y)\overrightarrow{b}\right|} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}. \tag{1.2}$$

Neka je $\overrightarrow{a}$ vektor tangente na krivulju Φ u točki (x_0, y_0), tada je vektor tangente na krivulju $f(\Phi)$ u točki $f(x_0, y_0)$ dan s $f'(x_0, y_o)\overrightarrow{a}$. Kako je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos(\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})),$$

uvjet (1.2) *nam govori da* $\cos(\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})) = \cos(\angle(f'(x_0, y_0)\overrightarrow{a}, f'(x_0, y_0)\overrightarrow{b}))$*, tj. da funkcija f čuva kutove u točki (x_0, y_0), dok uvjet $\det f'(x, y) > 0$ osigurava čuvanje orijentacije.*

Definicija 1.1.3. *Kažemo da je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna na Ω ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki skupa Ω.*

Definicija 1.1.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Ukoliko preslikavanje f čuva kutove po veličini i orijentaciji, tada ga nazivamo **konformno preslikavanje**.*

Teorem 1.1.5. *Ako je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna u točki z_0 i $f'(z_0) \neq 0$, tada je funkcija f **konformna** u točki z_0.*

Dokaz teorema nalazi se u [2].

Korolar 1.1.6. *Möbiusova transformacija je konformno preslikavanje.*

Dokaz. Funkcija (1.1) je holomorfna jer je kvocijent holomorfnih funkcija. Uz to smo već pokazali da je $f'(z) \neq 0$. Dakle, preslikavanje je konformno u točki z_0. □

Primjer 1.1.7. *Pokažimo da je funkcija zadana s*

$$f(z) = \frac{(3+i)z + 2}{z + 3i}$$

Möbiusova transformacija.

Rješenje: Da bi funkcija bila Möbiusova transformacija potrebano je provjeriti zadovoljavaju li parametri a, b, c i d uvjet $ad - bc \neq 0$. Parametri u zadanoj funkciji su sljedeći: $a = 3 + i$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = 3i$.

$$ad - bc = (3 + i) \cdot 3i - 2 \cdot 1 = 9i - 3 - 2 = 9i - 5 \neq 0. \tag{1.3}$$

Dakle, funkcija f je Möbiusova transformacija.

1.2 Inverzna funkcija

Teorem 1.2.1. *Möbiusova transformacija zadana s $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takvi da je $ad \neq bc$, je bijekcija iz skupa $\mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$ u skup $\mathbb{C} \backslash \{\frac{a}{c}\}$ i njeno inverzno preslikavanje je također Möbiusova transformacija dana formulom*

$$g(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Kako bismo dokazali da je Möbiusova transformacija f bijekcija i da je g njezin inverz, dovoljno je dokazati da je

$$(f \circ g)(w) = w \quad \text{i} \quad (g \circ f)(z) = z,$$

za sve $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ i za sve $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Imamo

$$(f \circ g)(w) = \frac{a\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right) + b}{c\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right) + d} = \frac{\frac{-adw+ab+bcw-ab}{cw-a}}{\frac{-cdw+cb+cdw-ad}{cw-a}} = \frac{\frac{w(-ad+bc)}{cw-a}}{\frac{cb-ad}{cw-a}} = w, \text{ odnosno } (f \circ g)(w) = w.$$

Nadalje, vrijedi

$$(g \circ f)(z) = \frac{-d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - a} = \frac{\frac{-adz-bd+bcz+bd}{cz+d}}{\frac{acz+bc-acz-ad}{cz+d}} = \frac{\frac{z(bc-ad)}{cz+d}}{\frac{bc-ad}{cz+d}} = z, \text{ odnosno } (g \circ f)(z) = z.$$

□

Uočavamo da je inverzna funkcija Möbiusove transformacije i sama Möbiusova transformacija jer je $(-d)(-a) - bc = da - bc \neq 0$.

1.3 Proširenje domene na $\overline{\mathbb{C}}$

Möbiusovu transformaciju $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ promatrat ćemo kao preslikavanje između proširenih kompleksnih ravnina, tj. kao preslikavanje $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. U tu svrhu proširujemo funkcije

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

do međusobno inverznih bijekcija na proširenoj kompleksnoj ravnini. Promotrimo prvo slučaj kada je $c \neq 0$. Uočimo da vrijedi

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z\to\infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c},$$

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}} f(z) = \lim_{z\to -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(-\frac{d}{c})+b}{c(-\frac{d}{c})+d} = \frac{a(-\frac{d}{c})+b}{-d+d} = \frac{-\frac{ad}{c}+b}{0} = \infty,$$

$$\lim_{z\to\infty} g(w) = \lim_{z\to\infty} \frac{-dw+b}{cw-a} = \lim_{z\to\infty} \frac{-d+\frac{b}{w}}{c-\frac{a}{w}} = \frac{-d}{c},$$

$$\lim_{z\to \frac{a}{c}} g(w) = \lim_{z\to \frac{a}{c}} \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-d(\frac{a}{c})+b}{c(\frac{a}{c})-a} = \frac{-d(\frac{a}{c})+b}{a-a} = \frac{\frac{-ad}{c}+b}{0} = \infty.$$

Funkcija f s $\overline{\mathbb{C}}$ u $\overline{\mathbb{C}}$ definirana u točkama ∞ i $-\frac{d}{c}$ s

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

je bijekcija. Njena inverzna funkcija $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je definirana na sljedeći način:

$$g(\infty) = -\frac{d}{c}, \quad g\left(\frac{a}{c}\right) = \infty.$$

Sada promotrimo slučaj kada je $c = 0$. Uvrstimo li $c = 0$ u (1.1) i (1.4) dobivamo funkcije

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

$$g(w) = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a}.$$

Funkcije f i g proširujemo do međusobno inverznih preslikavanja $f, g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. To činimo na sljedeći način:

$$f(\infty) = \infty$$

$$g(\infty) = \infty.$$

Poglavlje 2

Posebni slučajevi Möbiusove transformacije

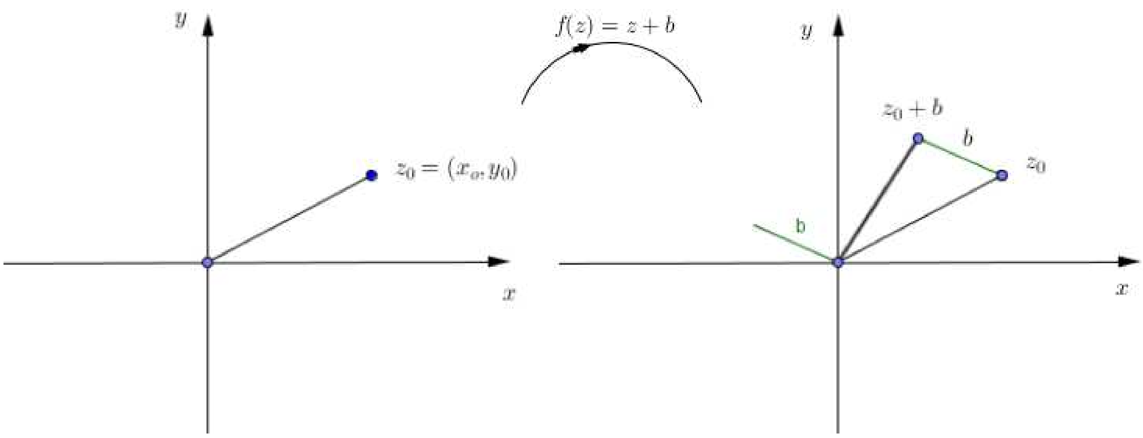
2.1 Translacija, rotacija i homotetija

Translacija

Kada bismo u funkciji (1.1) stavili $a = 1,\ c = 0,\ d = 1$ dobili bismo dobro poznatu linearnu funkciju

$$f(z) = z + b,$$

prikazanu na slici 2.1. Riječ je o translaciji za broj b u kompleksnoj ravnini. To je također Möbiusova transformacija jer je $ad - bc = 1 \cdot 1 - b \cdot 0 = 1 \neq 0$.



Slika 2.1: Translacija za vektor b

Rotacija

Stavimo li u funkciji (1.1) $b = 0,\ c = 0,\ d = 1$ i $|a| = 1$ dobivamo funkciju oblika

$$f(z) = az.$$

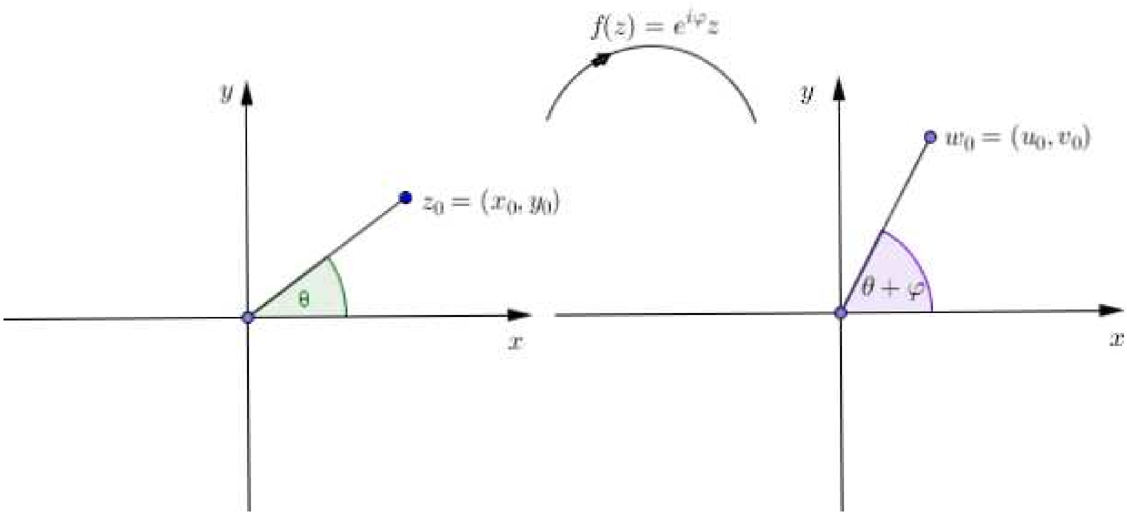
Kompleksne brojeve a i z zapisat ćemo u trigonometrijskom obliku:

$$a = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Sada preslikavanje $f(z)$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} f(z) = az = e^{i\varphi}z &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r(\cos\varphi\cos\theta + i\cos\varphi\sin\theta + i\sin\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) \\ &= r(\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)) \end{aligned}$$

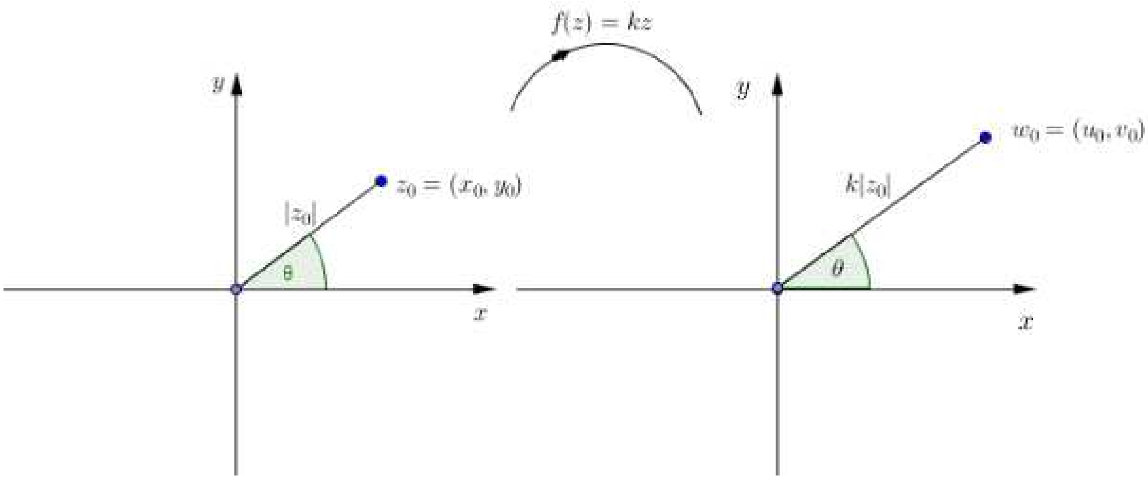
Možemo zaključiti da je funkcija $f(z) = az$, gdje je $a = e^{i\varphi}$, rotacija oko ishodišta za kut φ (slika 2.2).



Slika 2.2: Rotacija za kut φ

Homotetija

Promatramo funkciju $f(z) = kz$, gdje je $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Takvo preslikavanje nazivamo homotetija sa središtem u ishodištu i koeficijentom homotetije k (slika 2.3).



Slika 2.3: Homotetija s koeficijentom k

Definicija 2.1.1. *Transformacija ravnine koja je kompozicija konačno mnogo rotacija, translacija i homotetija naziva se* ***transformacija sličnosti****.*

Definicija 2.1.2. *Funkcija oblika*

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \ a \neq 0$$

naziva se ***afina analitička transformacija****.*

Prikažimo sada funkciju $f(z) = az+b$ kao kompoziciju translacije, rotacije i homotetije. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja a je

$$a = |a|e^{i\varphi}.$$

Neka je $f_1(z) = e^{i\varphi}z$, $f_2(z) = |a|z$, $f_3(z) = z + b$. Tada je $(f_2 \circ f_1)(z) = |a|e^{i\varphi}z = az$ i $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = az + b = f(z)$. Uočimo da je funkcija f_1 rotacija za kut φ, funkcija f_2 homotetija s koeficijentom $k = |a|$, a f_3 translacija za broj b. Iz toga zaključujemo da su sve afine analitičke transformacije transformacije sličnosti.

2.2 Inverzija i simetrija

Promatramo Möbiusovu transformaciju s parametrima $a = 1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 0$.

Definicija 2.2.1. *Preslikavanje $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definirano s*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0, & z = \infty, \\ \infty, & z = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

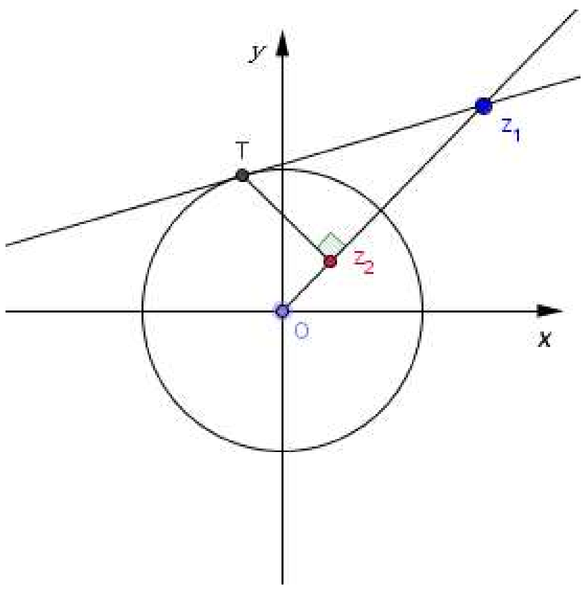
naziva se ***inverzija****.*

Kako bismo objasnili preslikavanje (2.1), potrebno je definirati simetriju u odnosu na jediničnu kružnicu.

Definicija 2.2.2. *Kažemo da su točke z_1 i z_2 simetrične s obzirom na jediničnu kružnicu ako vrijedi*

$$|z_1| \cdot |z_2| = 1 \quad i \quad arg(z_1) = arg(z_2).$$

Opišimo konstrukciju simetričnih točaka z_1 i z_2.

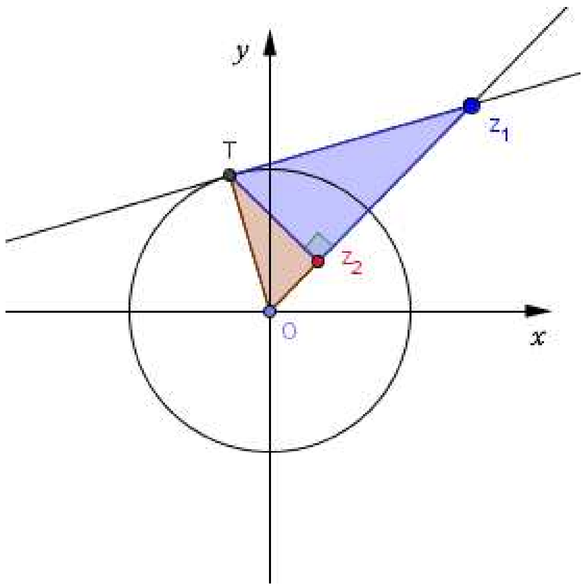


Slika 2.4: Konstrukcija simetričnih točaka

Neka je dana jedinična kružnica i točka z_1 izvan nje. Iz točke z_1 povučemo tangentu na kružnicu i s T označimo diralište tangente i kružnice. Iz točke T spustimo okomicu na polupravac Oz_1. Sjecište okomice i polupravca je točka z_2 koja je simetrična točki z_1. U slučaju da je z_1 unutar kružnice primjenjujemo obratan postupak. Povučemo okomicu iz točke z_1 na polupravac Oz_1. Sjecište okomice i kružnice označimo s T. Zatim povlačimo tangentu iz te točke. Sjecište tangente i polupravca Oz_1 je tražena točka z_2.

Dokažimo sada da su z_1 i z_2 opisane gornjom konstrukcijom zaista simetrične točke. Uočimo da točke z_1 i z_2 leže na istom polupravcu Oz_1 pa je $arg(z_1) = arg(z_2)$. Pokažimo geometrijski da vrijedi $|z_1| \cdot |z_2| = 1$. Promotrimo slične trokute ΔOTz_1 i ΔOz_2T. Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{|Oz_1|}{|OT|} &= \frac{|OT|}{|Oz_2|}, \quad \text{tj.} \\ \frac{|z_1|}{1} &= \frac{1}{|z_2|}, \quad \text{odnosno} \\ |z_1| \cdot |z_2| &= 1. \end{aligned}$$



Slika 2.5: Sličnost trokuta

Neka je Γ jedinična kružnica. Ako je $z_1 \in \Gamma$ tada je z_1 sama sebi simetrična točka. Ako je z_1 unutar Γ, tada je z_2 izvan Γ. Ako je z_1 izvan Γ, tada je z_2 unutar Γ. Posebno, središte kružnice i ∞ smatramo simetričnim točkama u odnosu na kružnicu Γ u kompleksnoj ravnini.

Korolar 2.2.3. *Neka je dana jedinična kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i točka $z_1 = re^{i\varphi}$ $(r > 0, \varphi \in \mathbb{R})$. Tada njoj simetrična točka z_2 s obzirom na kružnicu ima oblik*

$$z_2 = \frac{1}{r}e^{i\varphi} = \frac{1}{re^{-i\varphi}} = \frac{1}{\overline{z_1}}.$$

Dokaz. Zaista,

$$arg(z_2) = arg\left(\frac{1}{\overline{z_1}}\right) = arg\left(\frac{1}{re^{-i\varphi}}\right) = arg\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right) = arg(e^{i\varphi}) = arg(z_1).$$

Nadalje, vrijedi

$$|z_2| \cdot |z_1| = \left|\frac{1}{\overline{z_1}}\right| \cdot |z_1| = \frac{1}{|\overline{z_1}|} \cdot |z_1| = \frac{1}{\cancel{|z_1|}} \cdot \cancel{|z_1|} = 1.$$

□

Označimo sa z_3 točku simetričnu točki z_2 s obzirom na x-os. Tada je

$$z_3 = \overline{z_2} = \overline{\left(\frac{1}{\overline{z_1}}\right)} = \frac{1}{z_1}.$$

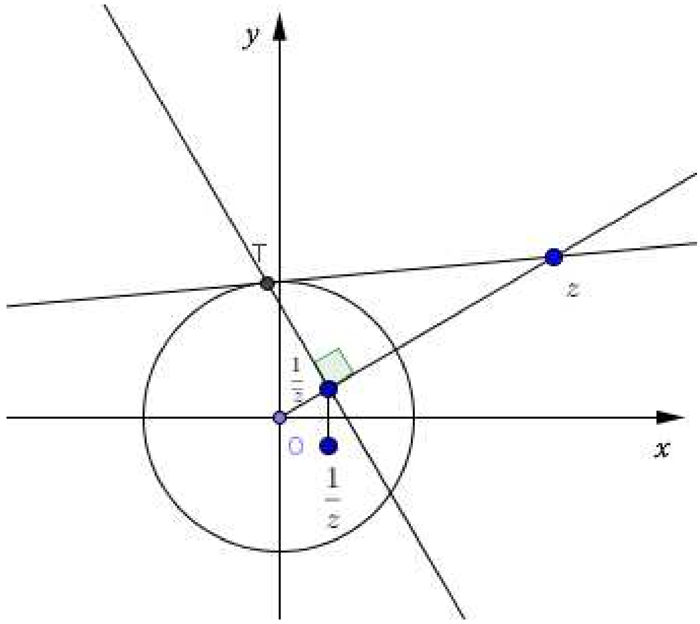
Dakle, inverzija je preslikavanje koje nastaje kao kompozicija simetrije u odnosu na jediničnu kružnicu i simetrije u odnosu na x-os.

Napomena 2.2.4. *Pri konstrukciji točke inverzije nije bitan poredak preslikavanja.*

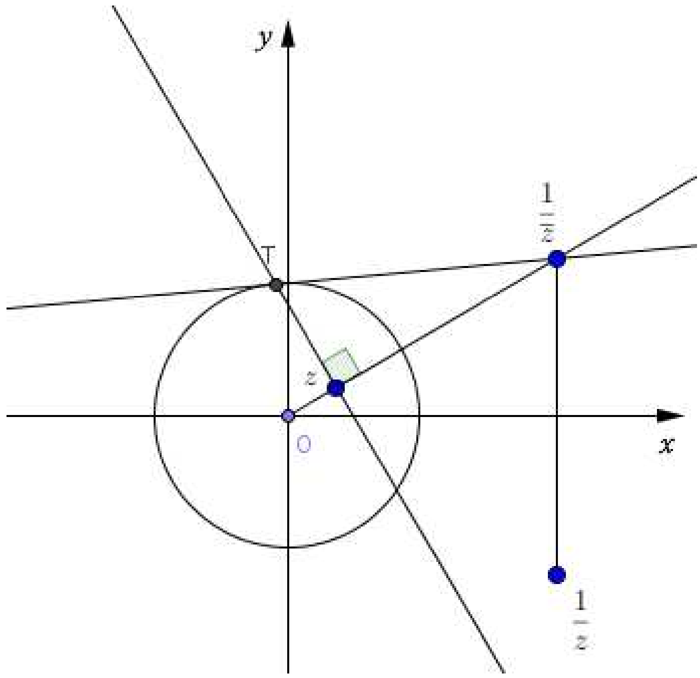
Neka je s_k simetrija s obzirom na jediničnu kružnicu, a s_x simetrija s obzirom na x-os. Tada vrijedi

$$s_k(s_x(z)) = s_k(\overline{z}) = \frac{1}{\overline{\overline{z}}} = \frac{1}{z}, \quad s_x(s_k(z)) = s_x\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \frac{1}{\overline{\overline{z}}} = \frac{1}{z}.$$

Na sljedećim slikama prikazne su konstrukcije inverzije kao kompozicije simetrije u odnosu na jediničnu kružnicu i simetrije u odnosu na x-os.



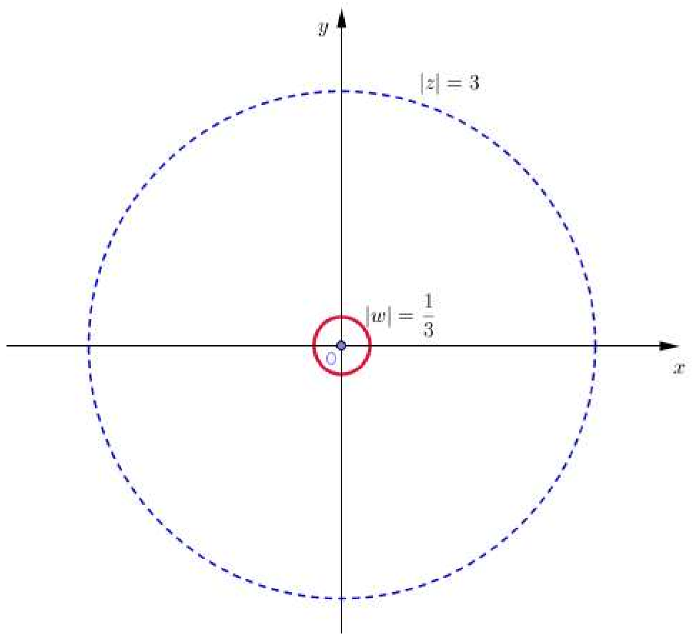
Slika 2.6: Konstrukcija inverzne točke zadane točke z izvan kružnice



Slika 2.7: Konstrukcija inverzne točke zadane točke z unutar kružnice

Primjer 2.2.5. *Nađimo sliku kružnice s jednadžbom* $|z| = 3$ *pri preslikavanju* $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$.

Rješenje: Stavimo $w = \frac{1}{z}$. Tada je $wz = 1$, odnosno $z = \frac{1}{w}$. Iz $|z| = 3$ dobivamo $\left|\frac{1}{w}\right| = 3$, odnosno $|w| = \frac{1}{3}$. Dakle, slika kružnice s jednadžbom $|z| = 3$ pri preslikavanju $f(z) = \frac{1}{z}$ je kružnica čija je jednadžba $|w| = \frac{1}{3}$.



Slika 2.8: Slika kružnice zadane jednadžbom $|z| = 3$ pri inveznom preslikavanju

Propozicija 2.2.6. *Inverzija preslikava pravce i kružnice u pravce ili kružnice.*

Dokaz. Svaka kružnica ili pravac u ravnini zadovoljavaju jednadžbu

$$Ax + By + C + D(x^2 + y^2) = 0, \text{ za neke } A,\ B,\ C,\ D \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Neka je $z = x + iy$ i $w = \frac{1}{z} = u + iv$. Tada možemo pisati:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{u+iv} \cdot \frac{u-iv}{u-iv} = \frac{u}{u^2+v^2} - \frac{v}{u^2+v^2} i. \tag{2.4}$$

Kako je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = \frac{1}{w}$ slijedi:

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = \frac{1}{|w|^2} = \frac{1}{u^2 + v^2}. \tag{2.5}$$

Koristeći rezultate iz (2.3) i (2.4) slijedi

$$x = Rez = Re\frac{1}{w} = \frac{u}{u^2 + v^2}, \tag{2.6}$$

$$y = Imz = Im\frac{1}{w} = \frac{-v}{u^2 + v^2}. \tag{2.7}$$

Uvrstimo li (2.5), (2.6) i (2.7) u (2.2) dobivamo

$$A\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) + B\left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right) + C + D\left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right) = 0.$$

Nakon množenja s $u^2 + v^2$ dobivamo

$$Au - Bv + C(u^2 + v^2) + D = 0,$$

tj.

$$Au - Bv + D + C(u^2 + v^2) = 0,$$

što je također jednadžba kružnice u w-ravnini. □

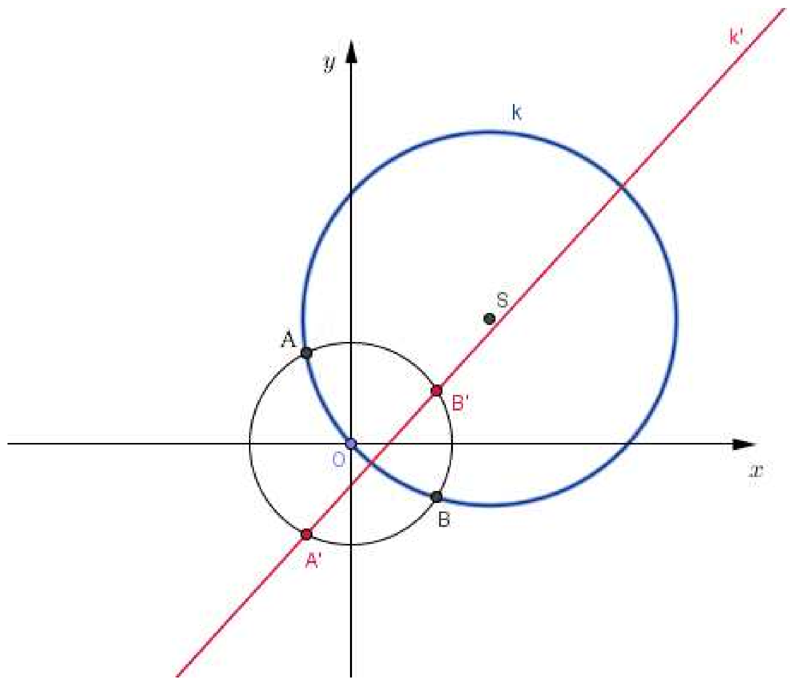
Napomena 2.2.7. *Stavimo li u jednadžbu* (2.2) $D = 0$*,* $C \neq 0$ *i* $A^2 + B^2 \neq 0$ *dobivamo jednadžbu pravca koji se preslika u kružnicu koja prolazi ishodištem* ($\infty \mapsto 0$)*. Stavimo li* $D = 0$*,* $C = 0$ *i* $A^2 + B^2 \neq 0$ *dobivamo jednadžbu pravca kroz ishodište koji se preslika u pravac kroz ishodište.*

Napomena 2.2.8. *Slika kružnice oko ishodišta radijusa većeg od* 1*, pri inverznom preslikavanju, je kružnica radijusa manjeg od* 1*. Slika kružnice oko ishodišta radijusa* 1 *je ta ista kružnica, dok je slika kružnice oko ishodišta radijusa manjeg od* 1 *kružnica radijusa većeg od* 1*.*

Teorem 2.2.9. *Neka je O centar inverzije. Pravac p koji prolazi točkom O praslikava se u samog sebe pri inverznom preslikavanju. Pravac p koji ne prolazi točkom O preslikava se u kružnicu koja prolazi točkom O. Kružnica koja prolazi točkom O preslika se u pravac, a kružnica koja ne prolazi točkom O preslika se u kružnicu.*

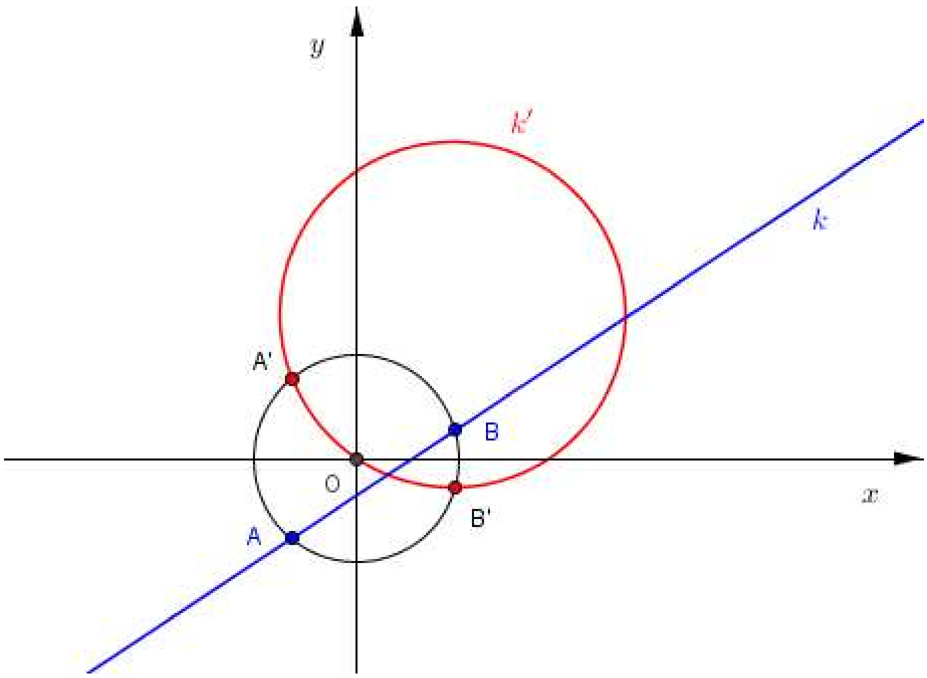
Dokaz teorema (2.2.9) nalazi se u [6].

Slika 2.9 prikazuje kružnicu koja prolazi ishodištem i siječe jediničnu kružnicu u točkama A i B. Kako kružnica prolazi ishodištem, njena slika pri inverznom preslikavanju sadrži točku ∞ ($0 \mapsto \infty$), tj. slika će biti pravac. Dakle, uz točku 0 potrebno je preslikati još barem 2 točke. Kako je inverzija preslikavanje koje nastaje kao kompozicija simetrije u odnosu na jediničnu kružnicu i simetrije u odnosu na x-os, djelujemo tim simetrijama na točke A i B. Slika jedinične kružnice pri simetriji u odnosu na jediničnu kružnicu jest ta ista kružnica, tj. svaka točka kružnice se preslika sama na sebe. Točke A i B leže na jediničnoj kružnici što znači da će se preslikati same na sebe. Možemo zaključiti da je dovoljno točke A i B preslikati osnom simetrijom s obzirom na realnu os. Kako je kružnica oko ishodišta simetrična s obzirom na relanu os, preslikavanjem ćemo opet dobiti točke na jediničnoj kružnici. Pravac ne prolazi kroz ishodište jer kružnica ne sadrži točku ∞ koja se preslika u točku 0. Dakle, slika kružnice koja prolazi ishodištem i siječe jediničnu kružnicu je pravac A'B' koji siječe jediničnu kružnicu i ne sadrži ishodište.



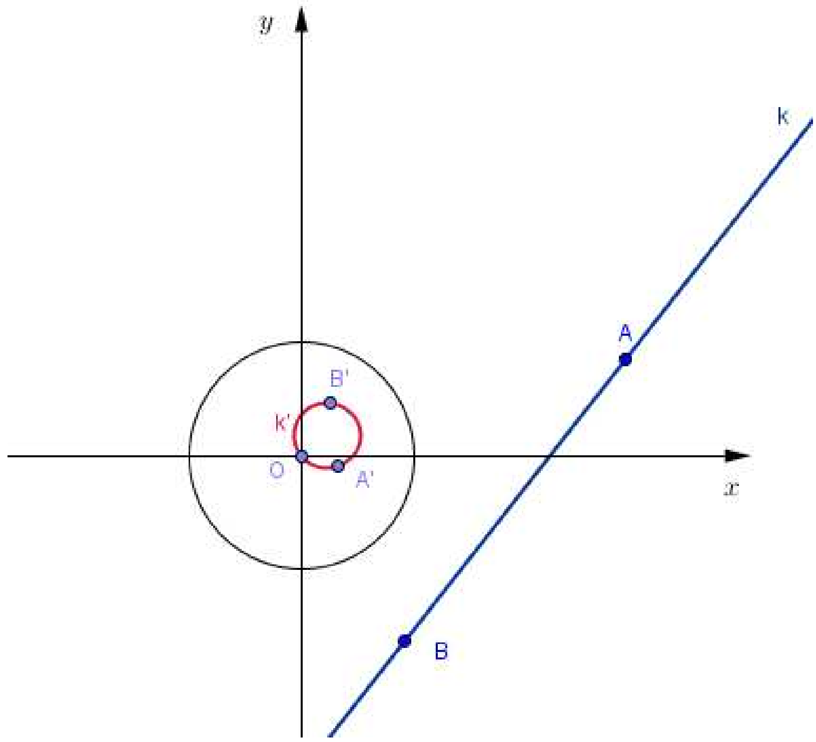
Slika 2.9: Slika kružnice koja prolazi ishodištem i siječe jediničnu kružnicu

Promotrimo sada pravac koji ne prolazi ishodištem i siječe jediničnu kružnicu u točkama A i B. Pravac sadrži točku ∞ koja se inverznim preslikavanjem preslika u ishodište ($\infty \mapsto 0$). Preostaje nam preslikati točke A i B. Kako one leže na jediničnoj kružnici, prema prethodnom opisanom slijedi da se slike A' i B' točaka A i B također nalaze na jediničnoj kružnici. Slike točaka A i B ćemo dobiti preslikavanjem točaka A i B osnom simetrijom s obzirom na realnu os. Dakle, slika pravca će biti kružnica kroz ishodište koja siječe jediničnu kružnicu u točaka A' i B'.



Slika 2.10: Slika pravca koji ne prolazi ishodištem i siječe jediničnu kružnicu

Slika 2.11 prikazuje pravac koji ne prolazi ishodištem i ne siječe jediničnu kružnicu. Kako ne prolazi kroz ishodište, njegova slika neće biti pravac (jedino se ishodište preslika u ∞). Pravac sadrži točku ∞ koja se inverznim preslikavanjem preslika u ishodište, a točke A i B koje se nalaze izvan jedinične kružnice se preslikaju unutar jedinične kružnice. Dakle, slika pravca će biti kružnica kroz ishodište koja ne siječe jediničku kružnicu.



Slika 2.11: Slika pravca koji ne prolazi ishodištem i ne siječe jediničnu kružnicu

Napomena 2.2.10. *Kružnica koja se nalazi izvan jedinične kružnice će se preslikati u kružnicu unutar jedinične kružnice koja ne prolazi ishodištem.*

Da bi slika kružnice prolazila ishodištem, kružnica treba sadržavati točku ∞. Znamo da kružnica ne sadržava točku ∞, dakle njena slika pri inverznom preslikavanju ne prolazi kroz ishodište. Kako kružnica ne prolazi kroz ishodište, njena slika neće biti pravac, već kružnica. Također znamo da se sve točke izvan jedinične kružnice preslikaju unutar i obratno.

Poglavlje 3

Opća Möbiusova transformacija

3.1 Temeljno svojstvo Möbiusove transformacije

Propozicija 3.1.1. *Möbiusova transformacija se može prikazati kao kompozicija translacije, rotacije, homotetije i inverzije.*

Dokaz. Neka je $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbiusova transformacija te $c \neq 0$. Vrijedi

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{az}{c} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{az}{c} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c} - \frac{az + \frac{ad}{c} - az - b}{c\left(z + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Tada w možemo napisati kao kompoziciju sljedećih transformacija:

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = \left|\frac{-ad+bc}{c^2}\right| z,$$

$$f_4(z) = \frac{\frac{-ad+bc}{c^2}}{\left|\frac{-ad+bc}{c^2}\right|} z = e^{iarg(\frac{-ad+bc}{c^2})} z, \quad f_5(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Dakle, vrijedi

$$f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z),$$

odnosno Möbousova transformacija $f(z)$ je kompozicija translacije, inverzije, homotetije, rotacije i još jedne translacije. Ukoliko je $c = 0$ tada funkciju $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ možemo napisati kao kompoziciju funkcija:

$$f_1(z) = \left|\frac{a}{d}\right| z, \quad f_2(z) = \frac{\frac{a}{d}}{\left|\frac{a}{d}\right|} z, \quad f_3(z) = z + \frac{b}{d},$$

tj. kao kompoziciju homotetije, rotacije i translacije. Vrijedi

$$f(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z).$$

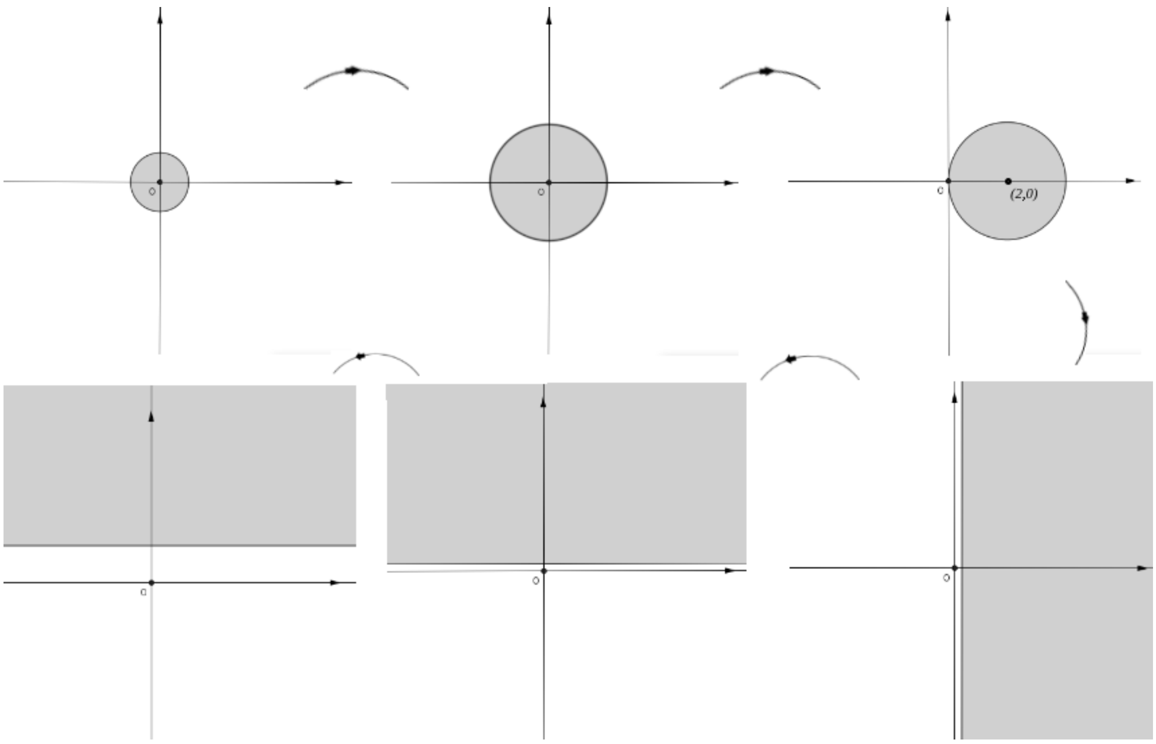
□

Primjer 3.1.2. *Rastavimo Möbiusovu transformaciju* $f(z) = \frac{2iz+3i}{2z+2}$ *na elementarne te preslikajmo jedinični krug zadanom funkcijom.*

Rješenje:

$$f(z) = \frac{2iz + 3i}{2z + 2} = \frac{2z + 3}{2z + 2}i = \frac{2z + 2 + 1}{2z + 2}i = i + \frac{i}{2z + 2}$$

Neka je $f_1(z) = 2z$ homotetija za faktor 2, $f_2(z) = z + 2$ translacija za broj 2, $f_3(z) = \frac{1}{z}$ inverzija, $f_4(z) = iz_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ rotacija za kut $\frac{\pi}{2}$ i $f_5(z) = z + i$ translacija za i. Tada je $f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$. Na sljedećim slikama je prikazano u što će se preslikati jedinični krug pri zadanoj Möbiusovoj transformaciji.



Slika 3.1: Preslikavanje jedničnog kruga Möbiusovom transformacijom

Teorem 3.1.3. *Möbiusova transformacija preslikava kružnice u kružnice.*

Dokaz. Znamo da translacija, rotacija i homotetija preslikavaju kružnice u kružnice. Iz propozicije (2.2.6) slijedi da i inverzija preslikava kružnice u kružnice. Tvrdnja teorema slijedi iz propozicije (3.1.1). □

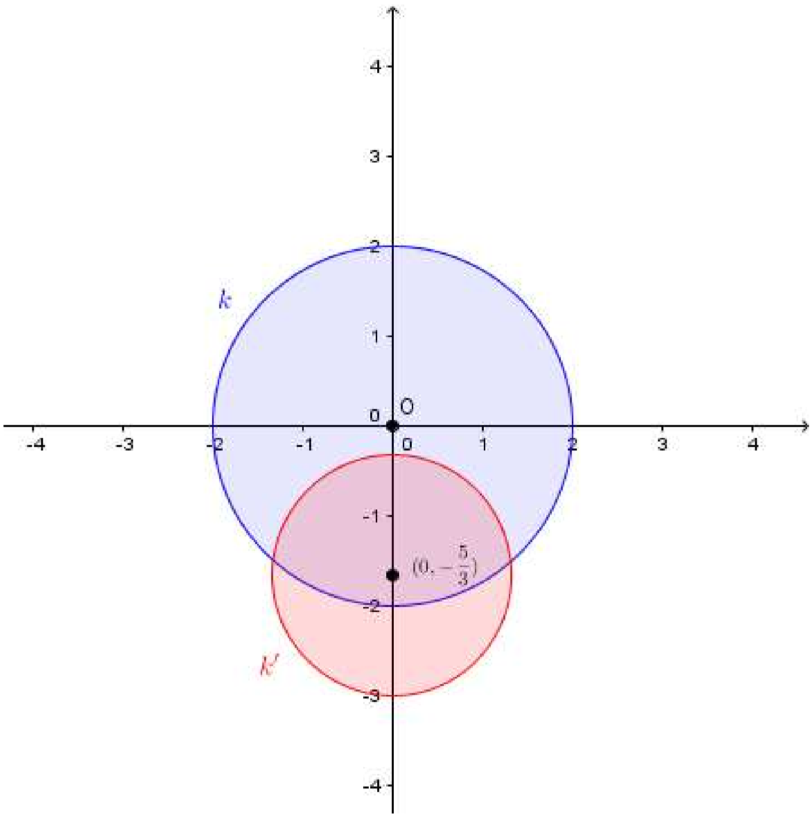
Napomena 3.1.4. *Pravce promatramo kao kružnice beskonačno velikog polumjera. Dakle, pod kružnice ubrajamo kružnice i pravce.*

Primjer 3.1.5. *Neka je zadana Möbiusova transformacija* $f(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$*. Nađimo joj inverz te sliku kružnice s jednadžbom* $|z| = 2$*.*

Rješenje: Prema definiciji Möbiusove transformacije iščitavamo koeficijente: $a = -i$, $b = i$, $c = 1$ i $d = 1$ te ih uvrštavamo u inverz Möbiusove transformacije $f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$. Slijedi

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-w+i}{w+i}.$$

Kako je jednadžba kružnice zadana s $|z| = 2$, dobivamo $|-w+i| = 2|w+i|$. Uvrstimo li $w = u + iv$ u prethodno dobivamo $|-u-iv+i| = 2|u+iv+i|$. Daljnjim sređivanjem dobivamo jednadžbu kružnice $u^2 + (v + \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$ sa središtem u točki $(0, -\frac{5}{3})$ i radijusom $r = \frac{4}{3}$ (slika 3.2).

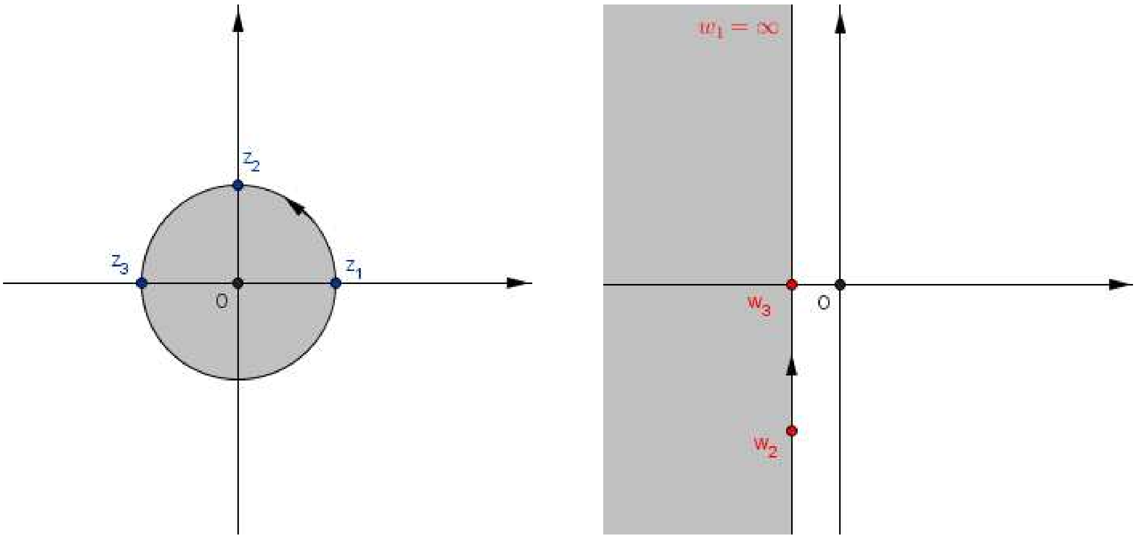


Slika 3.2: Möbiusova transformacija kružnice zadane jednadžbom $|z| = 2$

Kako je kružnica određena trima točaka, za određivanje slike kružnice dovoljno je preslikati tri točke koje ponovno određuju kružnicu. Ono što nas zanima je kamo će se preslikati područje kružnice. Neka je P područje kružnice, a P' slika područja. Bitno je naglasiti da Möbiusova transformacija čuva smjer kružnice. Dakle, ako se područje P pri obilasku kružnice nalazi s desne (lijeve) strane, tada će se područje P' pri obilasku slike kružnice također nalaziti s desne (lijeve) strane. Pogledajmo primjere.

Primjer 3.1.6. *Preslikajmo jedinični krug zadan jednadžbom* $|z| = 1$ *funkcijom* $f(z) = \frac{z+2}{z-1}$.

Rješenje: Odaberemo 3 točke koje se nalaze na kružnici $|z| = 1$. Neka su to točke $z_1 = 1$, $z_2 = i$ i $z_3 = -1$. Zadanim preslikavanjem se točke preslikaju u $w_1 = \infty$, $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ i $w_3 = -\frac{1}{2}$.

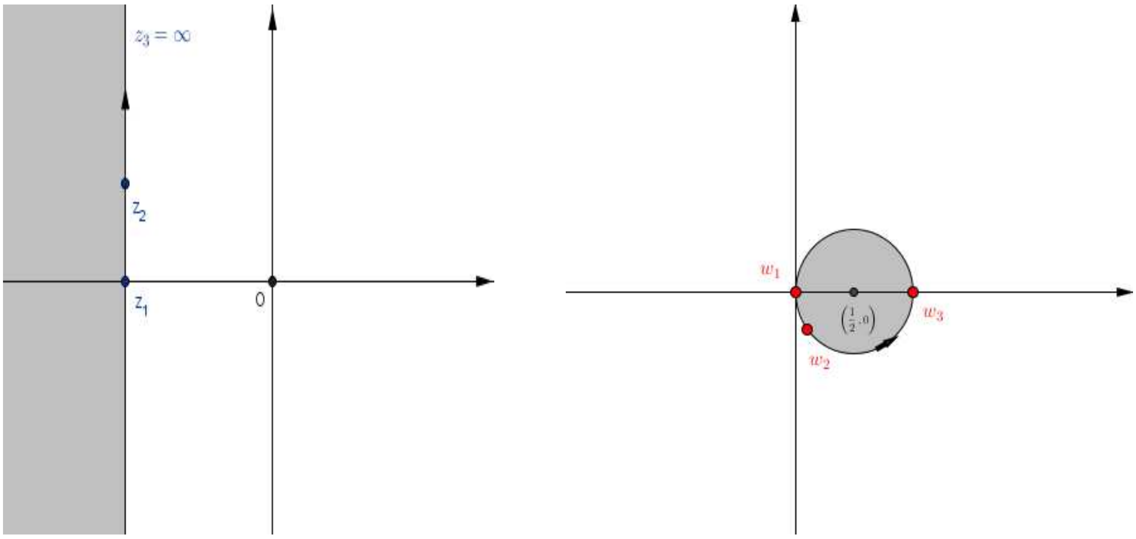


Slika 3.3: Preslikavanje područja jedinične kružnice

Smjer obilaska kružnice je od z_1 do z_3 pa se područje nalazi s lijeve strane. Analogno kod slike kružnice, smjer obilaska je od w_1 do w_3 pa se slika područja nalazi s lijeve strane.

Primjer 3.1.7. *Preslikajmo poluravninu* $Re z < -2$ *funkcijom* $f(z) = \frac{z+2}{z-1}$.

Rješenje: Uz točku ∞ pravac određuju još točno dvije točke. Biramo tri točke s pravca koji određuje zadanu poluravninu, od kojih je jedna točka ∞. Neka to budu točke $z_1 = -2$, $z_2 = -2 + i$ i $z_3 = \infty$. Preslikavanjem zadanom funkcijom dobivamo točke $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$ te kako je $\lim_{z\to\infty} \frac{z+2}{z-1} = 1$ slijedi da je $w_3 = 1$.



Slika 3.4: Preslikavanje područja poluravnine

Poglavlje 4

Implicitni oblik Möbiusove transformacije

Prema teoremu (3.1.3) iz prethodnog poglavlja, znamo da Möbiusova transformacija preslikava kružnice u kružnice. Kružnica je određena trima točaka pa će i njena slika (kružnica) biti određena trima točkama. Ako su z_1, z_2 i z_3 točke na kružnici k i f Möbiusova transformacija, tada slike $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ i $w_3 = f(z_3)$ tih točaka jednoznačno određuju kružnicu $f(k) = k'$.

4.1 Fiksne točke Möbiusove transformacije

Definicija 4.1.1. *Za točku z_0 kažemo da je* ***fiksna točka*** *funkcije f ako je $f(z_0) = z_0$.*

Odredimo fiksne točke Möbiusove transformacije. Promotrimo slučaj kada je preslikavanje (1.1) afino analitičko, tj. oblika $f(z) = az + b$, različito od identitete. Fiksne točke ćemo odrediti rješavajući jednadžbu $f(z_0) = z_0$. Sređivanjem dobivamo

$$z_0 = \frac{b}{1-a}.$$

Ukoliko je $a = 1$, tada preslikavanje f ima jednu fiksnu točku $z_0 = \infty$, a ako je $a \neq 1$ preslikavanje f ima dvije fiksne točke $z_0 = \frac{b}{1-a}$ i $z_0 = \infty$. Dakle, ako je funkcija afina analitička, tada ima jednu ili dvije fiksne točke. Ako funkcija (1.1) nije afina analitička, tj. $c \neq 0$, tada se fiksne točke dobiju rješavanjem jednadžbe $f(z_0) = z_0$, odnosno $\frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0$. Sređivanjem prethodnog izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu po z:

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \tag{4.1}$$

Takva jednadžba ima jedno ili dva rješenja. Još nam preostaje slučaj $f(z) = z$, za svaki $z \in \overline{\mathbb{C}}$. U tom slučaju su sve točke fiksne. Dakle, Möbiusova transformacija različita od identitete ima jednu ili dvije fiksne točke. Time smo dokazali:

Korolar 4.1.2. *Ukoliko Möbiusova transformacija ima tri fiksne točke, ona je identiteta.*

4.2 Implicitna formula

Propozicija 4.2.1. *Kompozicija Möbiusovih transformacija je Möbiusova transformacija.*

Dokaz. Neka su $f_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ i $f_2(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ Möbiusove transformacije. Tada je

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} = \frac{\frac{aez+fa+gzb+hb}{\cancel{gz+h}}}{\frac{cez+cf+gzd+hd}{\cancel{gz+h}}} = \frac{z(ae+gb)+fa+hb}{z(ce+gd)+cf+hd}.$$

Neka su $i = ae + gb,\ j = fa + hb,\ k = ce + gd,\ l = cf + hd \in \mathbb{C}$. Tada je

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{iz + j}{kz + l}$$

također Möbiusova transformacija. Analogno se pokaže za $(f_2 \circ f_1)(z)$. □

Pokažimo sada da postoji točno jedna Möbiusova transformacija koja zadane tri točke z_1, z_2 i z_3 preslikavala u zadane tri točke w_1, w_2 i w_3.

Teorem 4.2.2. *Neka su $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tri međusobno različite točke i $w_1,\ w_2$ i $w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tri međusobno različite točke. Tada postoji jedinstvena Möbiusova transformacija $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ za koju vrijedi*

$$f(z_i) = w_i,\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{4.2}$$

Njezina formula glasi:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{4.3}$$

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost Möbiusove transformacije sa svojstvom (4.2). Neka su f_1 i f_2 Möbiusove transformacije koje zadovoljavaju relaciju (4.2). Prema teoremu (1.2.1) znamo da je f_2^{-1} također Möbiusova transformacija, a prema propoziciji (4.2.1) znamo da je kompozicija Möbiusovih transformacija ponovno Möbiusova transformacija.

Dakle, $f_2^{-1} \circ f_1$ je Möbiusova transformacija. Kako f_2 i f_1 zadovoljavaju relaciju (4.2) slijedi

$$\begin{aligned} f_2^{-1}(f_1(z_1)) &= f_2^{-1}(w_1) = z_1, \\ f_2^{-1}(f_1(z_2)) &= f_2^{-1}(w_2) = z_2, \\ f_2^{-1}(f_1(z_3)) &= f_2^{-1}(w_3) = z_3. \end{aligned}$$

Dakle, $f_2^{-1} \circ f_1$ ima tri fiksne točke, a to znači da je $f_2^{-1} \circ f_1$ identiteta. Možemo pisati $(f_2^{-1} \circ f_1)(z) = z$, za svaki $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Odavde sijedi da je $f_1(z) = f_2(z)$ za svaki $z \in \overline{\mathbb{C}}$, tj. $f_1 = f_2$ i time je dokazana jedinstvenost Möbiusove transformacije sa svojstvom (4.2).

Pokažimo sada da je sa (4.3) dana Möbiusova transformacija f koja zadovoljava relaciju (4.2).

Uočimo da su funkcije

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \quad f_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

Möbiusove transformacije za koje vrijedi:

$$\begin{aligned} f_1(z_1) = 0, \quad f_1(z_2) = \infty, \quad f_1(z_3) = 1, \\ f_2(w_1) = 0, \quad f_2(w_2) = \infty, \quad f_2(w_3) = 1. \end{aligned}$$

Dakle, funkcije f_1 i f_2 preslikavaju zadane točke na realnu os. Možemo zaključiti da je i $f = f_2^{-1} \circ f_1$ Möbiusova transformacija koja zadovoljava relaciju (4.2) jer vrijedi

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f_2^{-1}(f_1(z_1)) = f_2^{-1}(0) = w_1, \\ f(z_2) &= f_2^{-1}(f_1(z_2)) = f_2^{-1}(\infty) = w_2, \\ f(z_3) &= f_2^{-1}(f_1(z_3)) = f_2^{-1}(1) = w_3. \end{aligned}$$

□

Napomena 4.2.3. *U slučaju kada je neki od brojeva u relaciji* (4.3) *jednak* ∞*, tada razlomak u* (4.3) *koji sadrži taj broj u brojniku i u nazivniku treba zamijeniti s* 1*. Uzmimo kao primjer slučaj kada je* $w_1 = \infty$*. Tada razlomak*

$$\frac{w - w_1}{w_3 - w_1}$$

zamijenimo s 1 *jer je*

$$\lim_{w_1 \to \infty} \frac{w - w_1}{w_3 - w_1} = 1.$$

Kako bismo olakšali primjenu teorema, razlikovat ćemo tri specijalna slučaja implicitne formule (4.3). Prvi slučaj je kada preslikavamo pravac u kružnicu, tj. kada je $z_i = \infty$ za neki $i \in \{1, 2, 3\}$. Tada Möbiusova transformacija ima oblik

$$f(z) = w_i \frac{z + \alpha}{z + \beta}. \tag{4.4}$$

Uzmemo li $i = 1$, tj. $z_1 = \infty$ te uvrstimo li u (4.3) dobivamo:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2},$$

jer je

$$\lim_{z_1 \to \infty} \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} = 1.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$w = \frac{w_1 z(w_3 - w_2) - \alpha_1}{z(w_3 - w_2) - \beta_1},$$

gdje je $\alpha_1 = w_1 w_2(z_3 - z_2) - w_1 z_2(w_3 - w_2) - w_2 w_3(z_3 - z_2)$, a $\beta_1 = w_1(z_3 - z_2) - w_3(z_3 - z_2) - z_2(w_3 - w_2) - w_3(z_3 - z_2)$. Dijeljenjem brojnika i nazivnika s $w_3 - w_2 \neq 0$ slijedi

$$w = w_1 \frac{z - \alpha}{z - \beta},$$

gdje je $\alpha = \frac{\alpha_1}{w_3 - w_2}$, a $\beta = \frac{\beta_1}{w_3 - w_2}$. Analogno dobijemo za $i = 2$ i $i = 3$.
Ukoliko preslikavamo kružnicu u pravac tada imamo preslikavanje $z_i \mapsto w_i = \infty$, za neki $i \in \{1, 2, 3\}$. Möbiusova transformacija ima oblik

$$f(z) = \frac{az + b}{z - z_i}. \tag{4.5}$$

Neka je $i = 1$, tj. $w_1 = \infty$. Tada uvrštavnjem u (4.3) dobivamo:

$$\frac{w_3 - w_2}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

jer je

$$\lim_{w_1 \to \infty} \frac{w - w_1}{w_3 - w_1} = 1.$$

Daljnjim sređivanjem dobivamo

$$w = \frac{z a_1 - b_1}{(z - z_1)(z_3 - z_2)},$$

gdje su

$$a_1 = (w_3 - w_2)(z_3 - z_1), \; b_1 = -z_2(w_3 - w_2)(z_3 - z_1).$$

Dijeljenjem brojnika i nazivnika s $z_3 - z_2 \neq 0$ dobivamo traženu funkciju

$$w = \frac{za - b}{z - z_1},$$

gdje je $a = \frac{a_1}{z_3 - z_2}$, a $b = \frac{b_1}{z_3 - z_2}$. Analogno se pokaže za $i = 2$ i $i = 3$.
Zadnji slučaj je kada pravac prelazi u pravac, tj. $z_i = w_i = \infty$, za neki $i \in \{1, 2, 3\}$. Tada Möbiusova transformacija ima oblik

$$f(z) = az + b. \tag{4.6}$$

Pogledajmo ponovno slučaj $i = 1$. Uvrštavamo $z_1 = w_1 = \infty$ u (4.3) te dobivamo

$$\frac{w_3 - w_2}{w - w_2} = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2},$$

jer je

$$\lim_{z_1 \to \infty} \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} = 1 \text{ i } \lim_{w_1 \to \infty} \frac{w - w_1}{w_3 - w_1} = 1.$$

Sređivanjem dolazimo do

$$w(z_3 - z_2) = a_1 z + b_1,$$

gdje su

$$a_1 = w_3 - w_2, \; b_1 = w_2(z_3 - z_2) - z_2(w_3 - w_2).$$

Dijeljenjem s $z_3 - z_2$ dolazimo do tražene funkcije,

$$w = az + b.$$

Primjer 4.2.4. *Nađimo Möbiusovu transformaciju koja preslikava točke* $0, i, \infty$ *redom u točke* $-1, 0, 1$.

Rješenje: Označimo zadane točke sa $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$ i $w_1 = -1$, $w_2 = 0$ i $w_3 = 1$. Kako je $z_3 = \infty$ slijedi da je razlomak $\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ iz relacije (4.3) jednak 1. Preostaje nam ostale točke uvrstiti u formulu

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Dobivamo sljedeće

$$\frac{w + 1}{w} \cdot \frac{1}{2} = \frac{z}{z - i}.$$

Sređivanjem dolazimo do izraza

$$w = \frac{z - i}{z + i},$$

koji je upravo tražena Möbiusova transformacija.
Ovaj zadatak smo mogli riješiti na jednostavniji način, koristeći specijali slučaj formule (4.3). Kako je $z_3 = \infty$ koristimo sljedeći oblik Möbiusove transformacije:

$$f(z) = w_3 \frac{z + \alpha}{z + \beta} = \frac{z + \alpha}{z + \beta}.$$

Nepoznanice α i β ćemo dobiti uvrštavajući preostala dva para zadanih točaka. Uvrstimo li $z_1 = 0$ i $w_1 = -1$, dobivamo

$$\frac{\alpha}{\beta} = -1,$$

uvrstimo li $z_2 = i$ i $w_2 = 0$ dobivamo

$$\frac{i + \alpha}{i + \beta} = 0.$$

Rješavajući jednostavni sustav s dvije nepoznanice, dobivamo $\alpha = -i$ i $\beta = i$ što nas dovodi do Möbiusove transformacije $w = \frac{z-i}{z+i}$.

Primjer 4.2.5. *Odredimo Möbiusovu transformaciju koja preslikava točke* $0, 1+i, 2$ *redom u točke* $0, 2, \infty$. *Odredimo sliku jediničnog kruga* $|z| < 1$ *pri tom preslikavanju.*

Rješenje: Označimo zadane točke sa $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 2$, $w_1 = 0$, $w_2 = 2$ i $w_3 = \infty$. U ovom zadatku preslikavamo kružnicu u pravac ($w_3 = \infty$) pa koristimo oblik

$$f(z) = \frac{az + b}{z - z_3} = \frac{az + b}{z - 2}.$$

Uvrštavanjem $z_1 = 0$ i $w_1 = 0$ dobivamo

$$-\frac{b}{2} = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$b = 0.$$

Uvrštavanjem $z_2 = 1 + i$ i $w_2 = 2$ dobivamo

$$\frac{a(1 + i)}{1 + i - 2} = 2.$$

Sređivanjem izraza dobivamo

$$a = 2i.$$

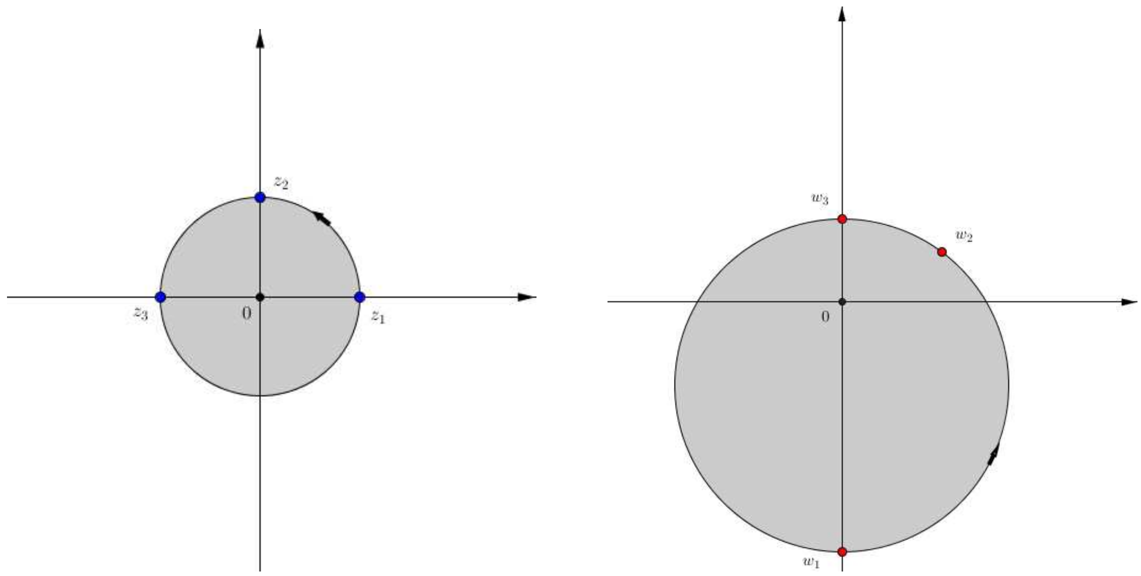
Konačno, tražena Möbiusova transformacija ima oblik

$$w = f(z) = \frac{2iz}{z-2}. \tag{4.7}$$

Preslikajmo sada jediničnu kružnicu dobivenom Möbiusovom transformacijom. Odaberimo 3 točke s jedinične kružnice: $z_1 = 1$, $z_2 = i$ i $z_3 = -1$. Preslikajmo ih funkcijom (4.7):

$$w_1 = f(z_1) = -2i, \quad w_2 = f(z_2) = \frac{4}{5} + \frac{2i}{5}, \quad w_3 = f(z_3) = \frac{2i}{3}.$$

Treba obratiti pozornost na preslikavanje područja. Područje kruga se nalazilo s lijeve strane pri obilasku kružnice pa će se i područje slike kruga nalaziti s lijeve strane pri obilasku slike kružnice.



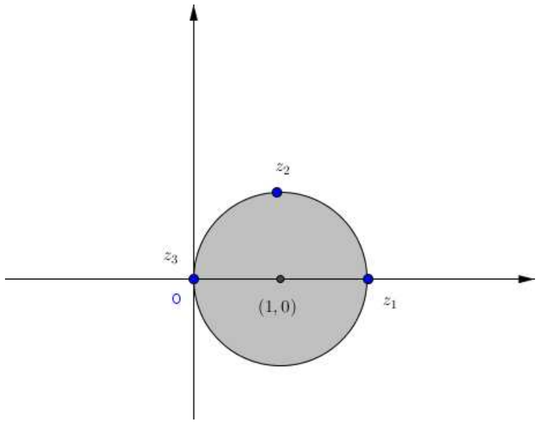
Slika 4.1: Preslikavanje jediničnog kruga $|z| < 1$

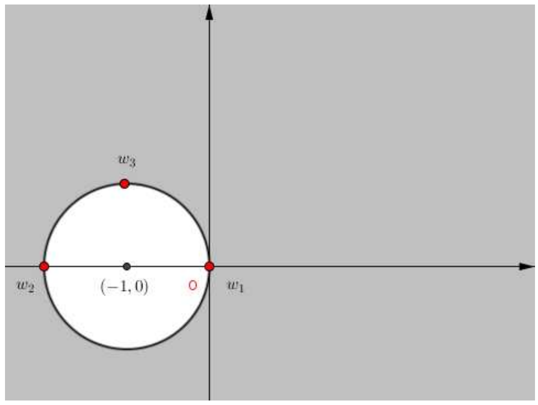
Napomena 4.2.6. *U prethodnim primjerima, Möbiusova transformacija je bila jedinstvena jer je bilo točno određeno koja točka se preslika u koju. U sljedećim primjerima neće biti jedinstvena jer će njen oblik ovisiti o po volji odabranim parovima točaka* (z_i, w_i).

Primjer 4.2.7. *Pronađimo neku Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje* $H = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z-1| < 1\}$ *u područje* $H' = \{w \in \overline{\mathbb{C}} \mid |w+1| > 1\}$.

Rješenje: Uočimo da točke $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 0$ određuju kružnicu $|z - 1| = 1$ tako da se područje H nalazi s lijeve strane pri obilasku kružnice. Točke $w_1 = 0$, $w_2 = -2$,

$w_3 = -1 + i$ određuju kružnicu $|w + 1| = 1$, tako da se područje H' nalazi s lijeve strane pri obilasku kružnice.





Slika 4.2: Preslikavanje područja jedinične kružnice

Kako se radi o preslikavanju kružnice na kružnicu, koristimo formulu (4.3). Uvrštavanjem odabranih parova točaka u formulu

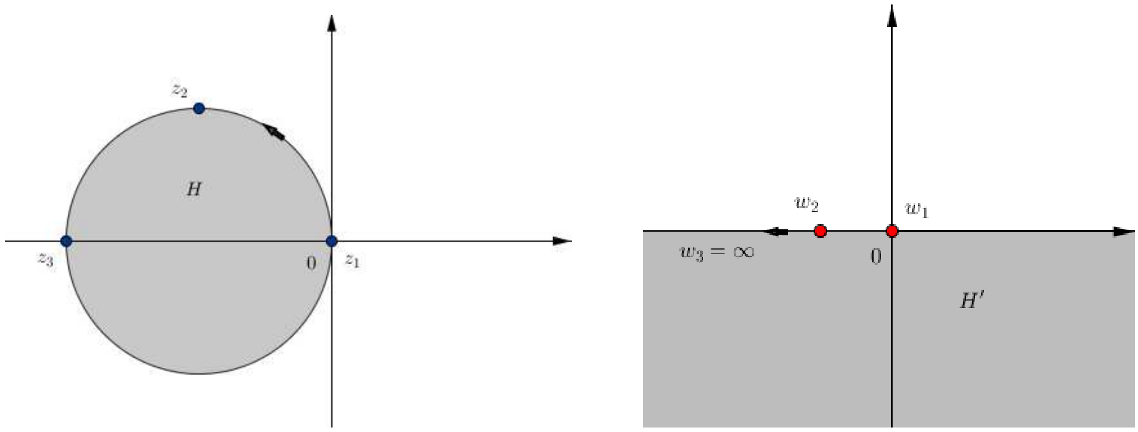
$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

dobivamo Möbiusovu transformaciju koja ima oblik

$$f(z) = \frac{2(1 - i)(2 - z)}{z(3 - i) - 4}.$$

Primjer 4.2.8. *Pronađimo neku Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje* $H = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z + 1| < 1\}$ *u područje* $H' = \{w \in \overline{\mathbb{C}} \mid Im w < 0\}$.

Rješenje: Odabiremo točke na kružnici $|z + 1| = 1$ tako da se pri obilasku kružnice područje H nalazi s lijeve strane. Isto tako odabiremo točke na realnoj osi tako da se područje H' nalazi s lijeve strane pri obilasku realne osi. Neka to budu točke $z_1 = 0$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1$ i $w_1 = 0$, $w_2 = -1$, $w_3 = \infty$. Pogledajmo sliku 4.3.



Slika 4.3: Preslikavanje područja H u područje H'

Ako odaberemo da se točka z_1 preslika u w_1, z_2 u w_2 i z_3 u w_3, tada koristeći formulu (4.5) dobivamo sljedeće:

$$f(z) = \frac{az+b}{z-z_3} = \frac{az+b}{z+2}.$$

Koristeći preostale parove točaka dobivamo sustav s dvije nepoznanice a i b:

$$\frac{b}{2} = 0$$
$$\frac{a(-1+i)+b}{1+i} = -1,$$

čija su rješenja

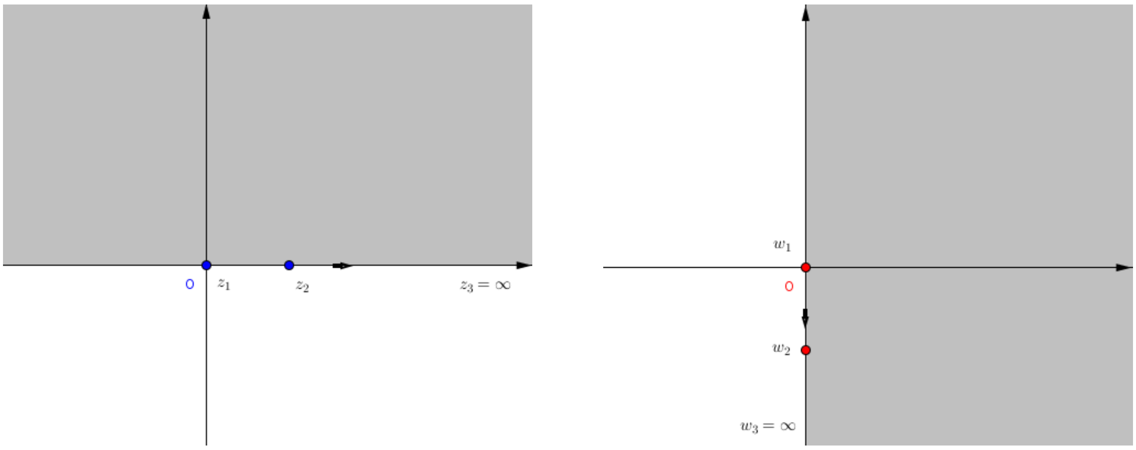
$$a = i, \quad b = 0.$$

Dakle, jedna od traženih Möbiusovih transformacija ima oblik

$$w = f(z) = \frac{zi}{z+2}.$$

Primjer 4.2.9. *Odredimo neku Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje* $H = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid Imz > 0\}$ *u područje* $H' = \{w \in \overline{\mathbb{C}} \mid Rew > 0\}$.

Rješenje: Odaberimo točke $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$ na realnoj osi, a točke $w_1 = 0$, $w_2 = -i$, $w_3 = \infty$ na imaginarnoj osi.



Slika 4.4: Preslikavanje područja H u područje H'

Primijetimo da se radi o preslikavanju pravca u pravac, to znači da ćemo koristiti specijalan slučaj implicitne formule, tj. formulu (4.6). Uvrštavanjem točaka u formulu $f(z) = az + b$ dobivamo sljedeće:

$$b = 0, \quad a = -i.$$

Dakle, jedna od traženih Möbiusova transformacija je oblika

$$f(z) = -iz,$$

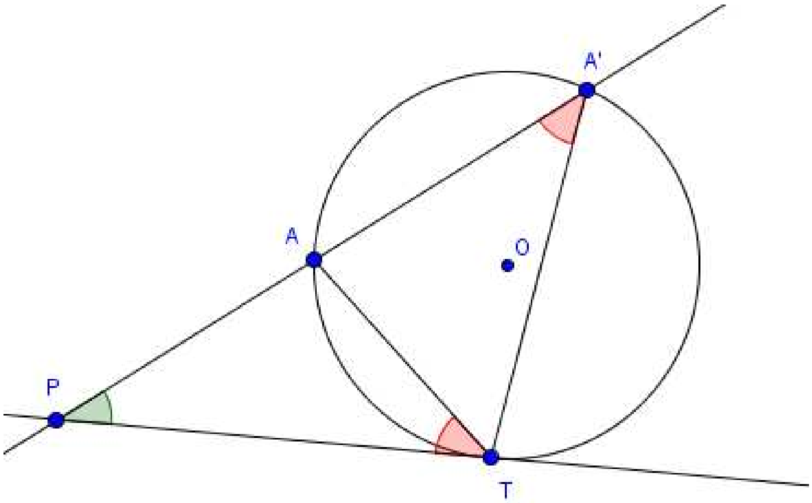
što je zapravo rotacija za $-\frac{\pi}{2}$.

4.3 Svojstvo simetrije Möbiusove transformacije

Kako bismo dokazali svojstvo simetrije Möbiusove transformacije, potrebno je dokazati sljedeće propozicije:

Propozicija 4.3.1. *Neka su A, A' i T točke na kružnici Γ i točka P izvan kružnice takva da leži na pravcu AA'. Točka T je diralište tangente na kružnicu Γ iz točke P ako i samo ako je*

$$|PA| \cdot |PA'| = |PT|^2.$$

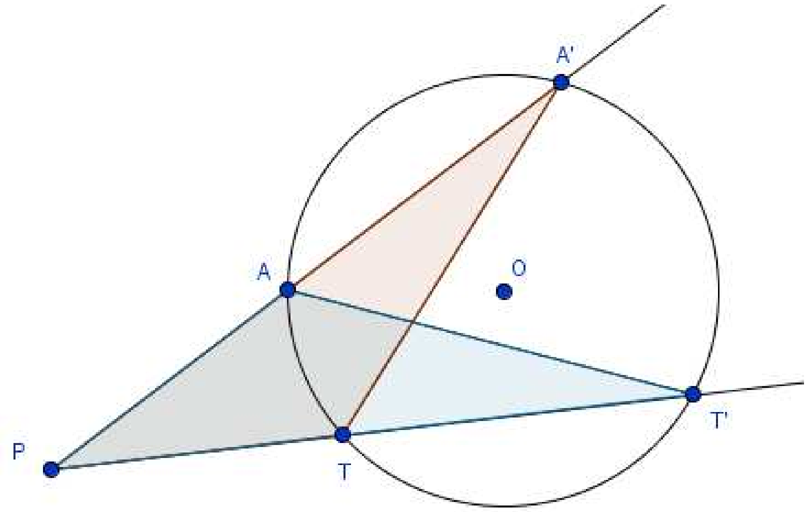


Slika 4.5: Slični trokuti $\Delta PTA'$ i ΔPAT

Dokaz. Pretpostavimo da je T diralište tangente na kružnicu Γ iz točke P. Koristeći teorem o obodnom i središnjem kutu lako dobijemo da su kutovi $\angle PTA$ i $\angle TA'P$ sukladni. Kako su trokuti $\Delta PTA'$ i ΔPAT slični (K-K teorem), slijedi

$$\frac{|PT|}{|PA|} = \frac{|PA'|}{|PT|}, \ tj.$$
$$|PT|^2 = |PA| \cdot |PA'|.$$

Dokažimo i obrat teorema. Neka su A, A' i T točke na kružnici Γ i točka P izvan kružnice takva da leži na pravcu AA' i $|PA| \cdot |PA'| = |PT|^2$. Pretpostavimo suprotno, tj. da točka T nije diralište tangente na kružnicu Γ iz točke P. Tada pravac PT siječe kružnicu u još jednoj točki T'. Pogledajmo sliku 4.6.



Slika 4.6: Slični trokuti $\Delta PT'A$ i $\Delta PTA'$

Koristeći činjenicu da su kutovi nad istom tetivom sukladni, slijedi da su kutovi $\angle PT'A$ i $\angle TA'P$ nad tetivom $\overline{AT}$ sukladni. Kako su trokuti $\Delta PT'A$ i $\Delta PTA'$ slični (K-K teorem), slijedi

$$\frac{|PA|}{|PT'|} = \frac{|PT|}{|PA'|}, \ tj.$$
$$|PA| \cdot |PA'| = |PT| \cdot |PT'| > |PT| \cdot |PT| = |PT|^2,$$

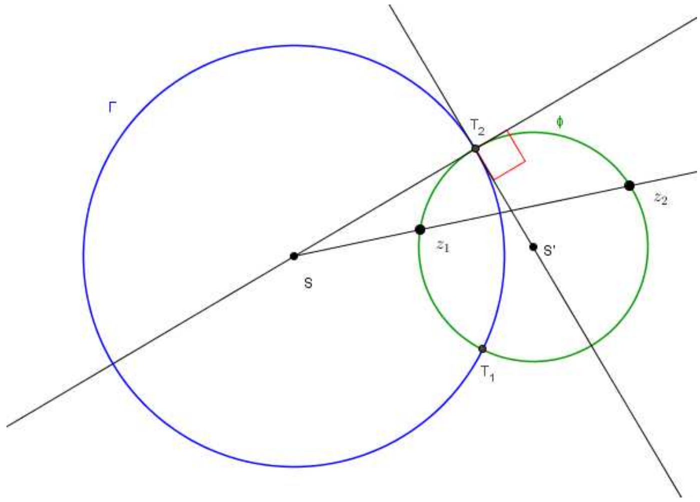
što je u kontradikciji s pretpostavkom

$$|PA| \cdot |PA'| = |PT|^2.$$

Dakle, T je diralište tangente na kružnicu Γ iz točke P. □

Propozicija 4.3.2. *Ako su točke z_1 i z_2 simetrične u odnosu na kružnicu (pravac) Γ, a kružnica (pravac) Φ sadrži točke z_1 i z_2, onda je Γ okomita na kružnicu (pravac) Φ.*

Dokaz. Pogledajmo slučaj kada su Γ i Φ kružnice.



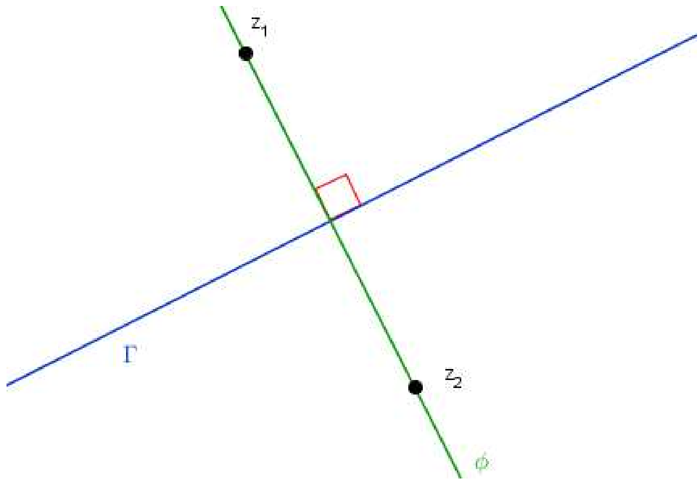
Slika 4.7: Okomite kružnice Γ i Φ

Kako su z_1 i z_2 simetrične točke, slijedi da je

$$|Sz_1| \cdot |Sz_2| = r^2 = |ST_2|^2,$$

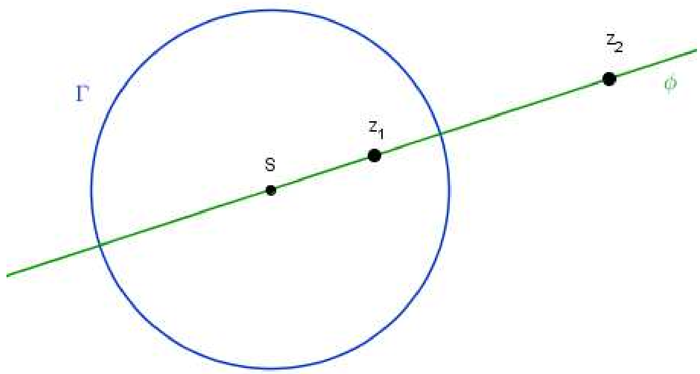
gdje je r polumjer kružnice Γ. Kako je $|Sz_1| \cdot |Sz_2| = |ST_2|^2$, tada prema propoziciji (4.3.1) slijedi da je točka T_2 diralište tangente na Φ iz točke S. Tada su pravci ST_2 i $S'T_2$ okomiti, što znači da su kružnice Γ i Φ okomite. Analogno dobijemo i za drugo sjecište T_2 kružnica Γ i Φ.

Ako su Γ i Φ pravci tada imamo slučaj kao na slici 4.8.



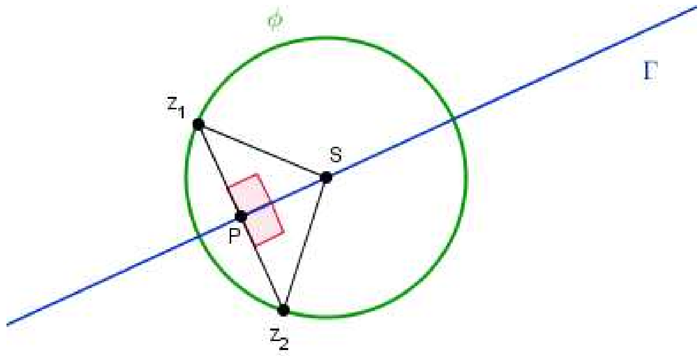
Slika 4.8: Okomiti pravci Γ i Φ

Simetrična točka z_2 točki z_1 s obzirom na Γ dobije se tako što se točka z_1 preslika osnom simetrijom s obzirom na pravac Γ. To povlači da je pravac Φ koji sadrži točke z_1 i z_2 okomit na pravac Γ.
Pogledajmo slučaj kada je Γ kružnica, a Φ pravac.



Slika 4.9: Okomiti kružnica Γ i pravac Φ

Kako simetrične točke s obzirom na kružnicu Γ leže na pravcu kroz središte S kružnice Γ, to znači da pravac Φ kroz z_1 i z_2 prolazi kroz središte kružnice Γ, tj. okomit je na kružnicu Γ.
Posljednji slučaj je kada je Γ pravac, a Φ kružnica.



Slika 4.10: Okomiti pravac Γ i kružnica Φ

Kako bismo dokazali da su pravac Γ i kružnica Φ okomiti, moramo dokazati da se središte kružnice Φ nalazi na pravcu Γ. Točke z_1 i z_2 su simetrične s obzirom na pravac Γ, što znači da su jednako udaljene od pravca. Označimo s P presjek pravaca $z_1 z_2$ i Γ. Uočimo da su trokuti $\triangle z_1 PS$ i $\triangle z_2 PS$ sukladni po $S-S-S$ teoremu, stoga je $\angle z_1 PS = \angle z_2 PS = 90°$ pa je $S \in \Gamma$. □

Pokažimo da vrijedi i obrat:

Propozicija 4.3.3. *Neka su z_1, z_2 i središte S kružnice Γ kolinearne točke i neka je svaka kružnica Φ kroz z_1 i z_2 okomita na Γ u oba presjecišta. Tada su z_1 i z_2 simetrične točke u odnosu na kružnicu Γ.*

Dokaz. Kako je Γ okomita na Φ u oba presjecišta (T_1 i T_2) možemo pisati $\overline{ST_2} \perp \overline{S'T_2}$, gdje je S' središte kružnice Φ. Zaključujemo da je T_2 diralište tangente povučene iz S na Φ, pa je prema propoziciji (4.3.1)

$$|Sz_1| \cdot |Sz_2| = |ST_2|^2 = r^2,$$

gdje je r polumjer kružnice Γ, iz čega slijedi da su točke z_1 i z_2 simetrične u odnosu na kružnicu Γ. □

Propozicija 4.3.4. *Neka su dane točke z_1 i z_2 te pravac Γ tako da vrijedi da je svaka kružnica Φ kroz z_1 i z_2 okomita na Γ. Tada su točke z_1 i z_2 simetrične u odnosu na pravac Γ.*

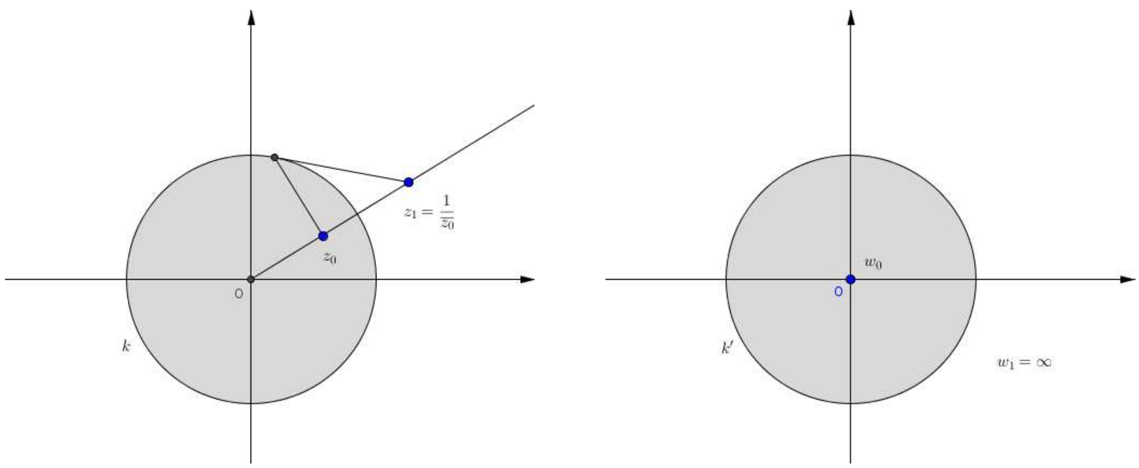
Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da se središta svih kružnica kroz z_1 i z_2 nalaze na pravcu Γ. Isto tako su središta svih kružnica kroz z_1 i z_2 jednako udaljena od točaka z_1 i z_2. Dakle, skup svih točaka jednako udaljenih od z_1 i z_2 je pravac Γ, što znači da je pravac Γ simetrala dužine z_1z_2, tj. točke z_1 i z_2 su simetrične s obzirom na Γ. □

Propozicija 4.3.5. *Möbiusova transformacija čuva simetriju točaka s obzirom na kružnicu (pravac). Ako su točke z_1 i z_2 simetrične s obzirom na kružnicu (pravac) k, tada su i njihove slike w_1 i w_2 simetrične s obzirom na kružnicu (pravac) $f(k) = k'$.*

Dokaz. Neka je f Möbiusova transformacija, k kružnica i točke z_1 i z_2 simetrične u odnosu na kružnicu k. Znamo da je tada i $f(k) = k'$ kružnica ili pravac. Uzmemo li neku kružnicu Γ' kroz točke $w_1 = f(z_1)$ i $w_2 = f(z_2)$, tada je $f^{-1}(\Gamma') = \Gamma$ kružnica ili pravac kroz točke z_1 i z_2. Prema propoziciji (4.3.2) slijedi da su k i Γ međusobno okomite u njihovim presjecima. Kako je Möbiusova transformacija konformno preslikavanje, znamo da f čuva kutove. Iskoristimo li tu činjenicu, zaključujemo da su i kružnice k' i Γ' međusobno okomite. Sada prema propozicijama (4.3.3) i (4.3.4) i proizvoljnosti kružnice Γ' slijedi da su točke w_1 i w_2 simetrične. □

Primjer 4.3.6. *Odredimo neku Möbiusovu transformaciju f koja preslikava područje $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ u područje $H' = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$, tako da je $f(z_0) = 0$, gdje je z_0 točka iz područja H.*

Rješenje:



Slika 4.11: Preslikavanje područja H u područje H’

Iskoristit ćemo svojstvo simetrije Möbiusove transformacije f. Simetrična točka točke z_0 s obzirom na jediničnu kružnicu $k = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid |z| = 1\}$ je točka $z_1 = \frac{1}{\overline{z_0}}$. Svojstvo simetrije nam omogućava pronalazak slike točke z_1. Kako su z_0 i z_1 simetrične točke, to su i $f(z_0) = 0$ i $f(z_1)$ simetrične točke pa zaključujemo da je $f(z_1) = \infty$. Möbiusovu transformaciju $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ možemo pisati kao

$$f(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Kako je $f(z_0) = 0$ i $f(z_1) = \infty$, zaključujemo $z_0 = -\frac{b}{a}$ i $z_1 = -\frac{d}{c}$, tj. funkciju f možemo pisati kao

$$f(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_o}{z - z_1}.$$

Uvrštavanjem $z_1 = \frac{1}{\overline{z_0}}$ dobivamo

$$f(z) = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_o}{z - \frac{1}{\overline{z_0}}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_o}{-\frac{1}{\overline{z_0}}(1 - z\overline{z_0})} = -\frac{a}{c}\overline{z_0} \cdot \frac{z - z_o}{1 - z\overline{z_0}}.$$

Pogledajmo koliko je $|f(z)|$. Ako uzemo da je $l = -\frac{a}{c}\overline{z_0}$ tada možemo pisati

$$|f(z)| = |l| \cdot \left|\frac{z - z_o}{1 - z\overline{z_0}}\right|.$$

Kako je za $z \in k$ $|z| = 1$, slijedi da je

$$|1 - z\overline{z_0}| = |z| \cdot |1 - z\overline{z_0}| = |\overline{z}| \cdot |1 - z\overline{z_0}| = |\overline{z} - \overline{z}z\overline{z_0}| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |z - z_0|.$$

Dobivamo

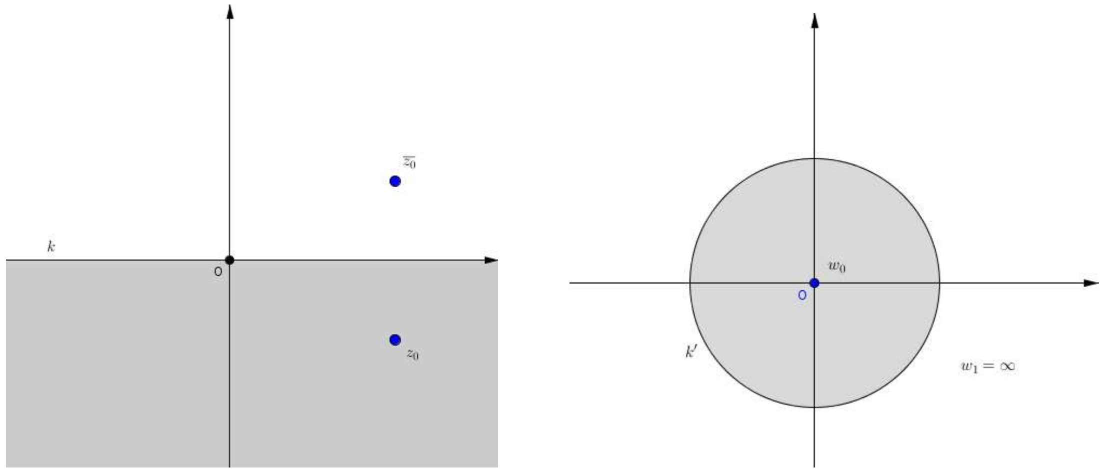
$$|f(z)| = |l| \cdot \left|\frac{z - z_o}{1 - z\overline{z_0}}\right| = |l| \cdot \frac{|z - z_o|}{|1 - z\overline{z_0}|} = |l| \cdot \frac{\cancel{|z - z_o|}}{\cancel{|z - z_o|}} = |l|.$$

Kako je $|f(z)| = 1$, slijedi da je $|l| = 1$, tj. $l = e^{i\varphi}$, za neki $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Dakle, traženo preslikavanje f je dano s

$$f(z) = e^{i\varphi}\frac{z - z_o}{1 - z\overline{z_0}}.$$

Primjer 4.3.7. *Odredimo neku Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje* $H = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid Imz < 0\}$ *u područje* $H' = \{w \in \overline{\mathbb{C}} \mid |w| < 1\}$*, tako da je* $f(z_o) = 0$*, gdje je* z_0 *točka iz područja H.*

Rješenje:



Slika 4.12: Preslikavanje područja H u područje H'

Iz prethodnog primjera znamo da je traženo preslikavanje oblika

$$f(z) = k \cdot \frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Zbog svojstva simetrije znamo da par simetričnih točaka z_0, $z_1 = \overline{z_0}$ s obzirom na x os prelazi u par simetričnih točaka $w_0 = 0$, $w_1 = \infty$. Uvrštavanjem dobivamo

$$f(z) = k \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}.$$

Pri preslikavanju koje tražimo realna os mora prijeći u jediničnu kružnicu. Znamo da za $z \in \mathbb{R}$ vrijedi $z = \overline{z}$ te $|z - z_0| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |z - \overline{z_0}|$. Dakle, za $z \in \mathbb{R}$ imamo

$$|w| = |f(z)| = |k| \cdot \frac{\cancel{|z - \overline{z_0}|}}{\cancel{|z - \overline{z_0}|}} = |k|,$$

a kako je $|w| = 1$ slijedi $|k| = 1$. Konačno, $k = e^{i\varphi}$, za neki $\varphi \in [0, 2\pi]$ i Möbiusova transformacija ima oblik

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}.$$

Primjer 4.3.8. *Odredimo Möbiusovu transformaciju f koja preslikava područje $H = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid Imz > 0\}$ u područje $H' = \{w \in \overline{\mathbb{C}} \mid |w| < 1\}$, tako da je $f(i) = 0$ i $arg f'(i) = \pi$.*

Rješenje: Tražena funkcija će biti oblika

$$f(z) = k \cdot \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}},$$

gdje je $k = e^{i\varphi}$. Ako je točka $z_0 = i$, tada je njena simetrična točka $z_1 = -i$. Tada je $w_0 = 0$ i $w_1 = \infty$. Dakle, tražena funkcija će biti oblika

$$f(z) = k \cdot \frac{z-i}{z+i}.$$

Preostaje nam odrediti $k = e^{i\varphi}$. U tome će nam pomoći derivacije funkcije f:

$$f'(z) = e^{i\varphi}\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2} = e^{i\varphi}\frac{2i}{(z+i)^2}.$$

Tada je

$$f'(i) = e^{i\varphi}\frac{1}{2i} = e^{i\varphi}\frac{2i}{-4} = \frac{1}{2}e^{i\varphi}(-i).$$

Kako je $(-i) = e^{\frac{3\pi}{2}i}$ slijedi da je

$$f'(i) = \frac{1}{2}e^{i(\varphi+\frac{3\pi}{2})}.$$

Dakle, $argf'(i) = \varphi + \frac{3\pi}{2} = \pi$, tj. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Tražena Möbiusova transformacija ima oblik

$$f(z) = \frac{-iz-1}{z+i}.$$

Poglavlje 5

Primjene Möbiusove transformacije

Primjena kompleksnih brojeva je raznolika i vrlo korisna. Pojavljuje se u područjima znanosti kao što su računarstvo, elektrotehnika, biomedicina i mnoga druga. Temelji si na preslikavanju Riemannove sfere[1] na kompleksnu ravninu. Isto tako, Möbiusova transformacija je usko povezana s mnogim matematičkim istraživanjima. Jedno od njih je Einsteinova teorija relativnosti o kojoj ćemo više reći u nastavku.

5.1 Einsteinova teorija relativnosti

U Einsteinovoj teoriji relativnosti, prostor dobiva još jednu dimenziju, tj. prostorne koordinate (x, y, z) se komponiraju s vremenskom koordinatom t te zajedno čine 4-vektor (t, x, y, z) u četverodimenzionalnom prostoru koji još zovemo prostor-vrijeme. Promatraju li dvije osobe isti događaj, njihova opažanja bi se mogla razlikovati. Neki događaj koji promatraju dva promatrača neće rezultirati istim mjerenjima, tj. isti događaj nema iste prostor-vremenske koordinate u različitim inercijskim sustavima. Promatrači se neće složiti s obzirom na vremenske i prostorne koordinate (t_1, x_1, y_1, z_1) u sustavu S i (t_2, x_2, y_2, z_2) u sustavu S' koji se prema sustavu S giba uzduž x osi stalnom brzinom v. Einstein je došao do ideje da namjesti mjerne jedinice tako da brzina svjetlosti bude 1. Tada bi se oba promatrača složila oko vrijednosti

$$t_1^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = t_2^2 - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

Tu dolazimo do Lorentzove transformacije, jer je upravo ona linearna transformacija koja preslikava prostor-vremenske koordinate fizičkog događaja jednog sustava na pripadajuće koordinatama nekog drugog sustava. Lorentzova transformacija osigurava da dva promatrača s konstantnom brzinom čuvaju prostorno-vremenski interval između dva događaja.

[1] Model kompleksne ravnine, kompleksna ravnina kojoj je pridružena točka u beskonačnosti.

Konkretno, svaka Möbiusova transformacije u $\overline{\mathbb{C}}$ je Lorentzova transformacija u prostorvremenu ([7], 123. stranica). Možemo se pitati zašto baš Möbiusova transformacija. Zato što je to konformno preslikavanje, tj. čuva kutove i orijentaciju, kružnice preslikava u kružnice.[7]

Sada ćemo ukratno opisati gdje se sve primjenjuje Möbiusova transformacija na način da se trodimenzionalni objekti svode na jednostavnije dvodimenzionalne objekte.

5.2 „Mapiranje mozga"

Möbiusova transformacija ima svojstva da čuva kutove prilikom preslikavanja sfere na ravninu. Upravo nam je to svojstvo važno ako želimo ljudski mozak prikazati u dvodimenzionalnom obliku, tj. prikazati ga pomoću mapa. Dakle, cilj je kreirati mapu ljudskog mozga. Kako ljudski mozak nije pravilnog oblika, potrebno je ukloniti sve nepravilnosti kako bismo dobili oblik sfere. Proces koji se događa pri preslikavanju sfere na ravnu površinu je takozvan „circle packing". Za provođenje toga procesa potrebna je Möbiusova transformacija, upravo zbog njezinih svojstava. Taj proces je konformno preslikavanje. Stvaraju se krugovi tako da se nikoja dva kruga ne preklapaju, tj. da je svaki krug tangenta susjednom krugu.[4][1]

5.3 Računalna znanost

Möbiusova transformacija ima svoju primjenu i u računalnoj znanosti. Algoritmi temeljeni na matematičkim formulama se vrlo lako implementiraju u kod, tj. programski jezik. Na Vijetnamskoj akademiji znanosti i tehnologije upotijebili su upravo Möbiusovu transformaciju za softver koji se može na različite načine koristiti za određivanje medicinske dijagnoze. Teško je predočiti kako Möbiusova transformacija djeluje, no ona služi kako bi se izračunala maksimalna i minimalna težina danih simptoma. [4]

5.4 Karta svijeta

Za preslikavanje Zemlje na ravnu površinu, tj. preslikavanje trodimenzionalnog objekta na dvodimenzionalni, koristi se Möbiusova transformacija. Proces je sličan kao kod „mapiranja mozga", glavna razlika je što zemljina površina djeluje dosta glatko i pravilno, možemo ju promatrati kao sferu. Znanstvenici su formirali softver koji pomoću Möbiusove transformacije pretvara projekciju Zemlje u sliku u dvodimenzionalnom prostoru. [4]

Bibliografija

[1] Comite, Francesco de: *Circle Packing Explorations.* ridges 2013: Mathematics, Music, Art, Archi-tecture, Culture, 2013, Enschede, Netherlands. pp.399–402.

[2] Čuljak, V.: *Primijenjena matematika.* 2011. `http://www.grad.hr/vera/webnastava/primmatematika/primatsve01.pdf`.

[3] Elezović, N.: *Funkcije kompleksne varijable,.* Element, Zagreb, 2008.

[4] Fiedorowic, A., T. Remkiewicz i Z. Flanagan: *Möbius Transformations.* 2020. `https://www.sntp.ca/3146/projects/ffr.pdf`.

[5] Kraljević, H. i Kurepa S.: *Matematička analiza IV,.* Tehnička Knjiga, Zagreb, 1986.

[6] Šiljak, Harun: *Inverzija.* 2009. `http://arxiv.org/abs/0910.5433`.

[7] T., Needham: *Visual Complex Analysis,.* Oxford University Press, 1997.

Sažetak

Möbiusova transformacija je funkcija kompleksne varijable, definirana na proširenoj kompleksnoj ravnini. Ona je konformno preslikavanje, što znači da čuva kutove i orijentaciju, a njen inverz je također Möbiusova transformacija. Posebni slučajevi Möbiusove transformacije su dobro poznate geometrijske transformacije ravnine: translacija, rotacija, homotetija i inverzija, koje opisujemo u radu. Prije opisa konstrukcije inverzije, spominjemo simetriju s obzirom na jediničnu kružnicu te njezinu konstrukciju, jer je usko vezana uz inverziju. Prikazujemo Möbiusovu transformaciju kao kompoziciju translacije, rotacije, homotetije i inverzije te dokazujemo da ona preslikava kružnice u kružnice, pri čemu pravce smatramo kružnicama beskonačno velikog polumjera. Prije dokaza implicitne formule Möbiusove transformacije, pomoću koje formiramo jedinstvenu Möbiusovu transformacija koja zadane tri točke preslikava u zadane tri točke, dokazujemo da sve Möbiusove transformacije različite od identitete imaju maksimalno dvije fiksne točke. Koristeći impicitnu formulu rješavamo primjere te ih vizualno predočavamo. Möbiusova transformacija ima jedno važno svojstvo koje ima primjenu pri pronalasku transformacije koja preslikava zadano područje u zadano područje. Riječ je o svojstvu simetrije Möbiusove transformacije, koje dokazujemo i primijenjujemo u zadacima. Primjena Möbiusove transformacije ima važnu ulogu u znanosti, temeljenu na preslikavanju Riemannove sfere na kompleksnu ravninu. Koristi se u raznim područjima znanosti, a neka od njih smo opisali u radu.

Summary

A Möbius transformation is a function of a complex variable, defined on an extended complex plane. It is a conformal transformation, meaning that it preserve angles and orientation. The inverse function of a Möbius transformation is also a Möbius transformation. Some special cases of Möbius transformations are well known geometric transformations: translation, rotation, reflection, homothety and inversion, which are described in this work. Before constructing an inverse transformation, it is important to mention the construction of a symmetric point with respect to the unit circle as a part of constructing an inversion. Any Möbius transformation is a composition of translation, rotation, reflection, homothety and inversion. We give a proof that the Möbius transformation maps lines and circles into lines or circles, where we consider a line as a circle with radius equal to infinity. Before the proof of the implicit formula for the mapping, which is used for mapping three distinct points onto three distinct points, we prove that non-identity Möbius transformations have two fixed points. We give examples using the implicit formula and visualize them for better understanding. For finding a transformation witch maps a given area into another given area we apply the symmetry-preserving property of Möbius transformations. That property is proven and used in examples. The Möbius transformation is very useful and has applications in different science fields, based on the mapping the Riemman Sphere to a flat plane. Some of those applications are described here.

Životopis

Rođena sam 30. kolovoza 1996. godine u Virovitici. Osnovnoškolsko obrazovanje sam započela 2003. godine te sam prva četiri razreda završila u Područnoj školi Humljani, dok sam ostale razrede pohađala u Osnovnoj školi Čačinci. Nakon završetka osnovne škole, 2011. godine, upisujem Opću gimnaziju u Srednjoj školi Stjepan Ivšić Orahovica. Srednju školu završavam 2015. godine te iste te godine upisujem preddiplomski studij Matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija 2018. godine, upisujem diplomski studij Matematike, smjer nastavnički, na istom fakultetu.