Redukcija modela vođena podacima

Kroflin, Matej

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matej Kroflin

REDUKCIJA MODELA VOĐENA PODACIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonimir Bujanović

Zagreb, travanj, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Razvoj tehnologije potakao je potrebu za obradom velike količine podataka. Tako je simulacija kompleksnih sustava postala zahtjevnija s obzirom na broj potrebnih podataka kao i veličina tih sustava. Često takvi sustavi nisu eksplicitno dani već su određeni mjerenjem i prikupljanjem podataka kao što su npr. raspršni parametri (scattering parameters). Prilikom rekonstrukcije sustava na temelju mjerenja javljaju se problemi poput: kako efikasno provesti rekonstrukciju sustava, koja je dimenzija sustava itd. U ovom diplomskom radu bit će opisan postupak interpolacije podataka kako bismo dobili temeljni sustav te redukcije sustava na minimalnu dimenziju. Redukcija modela nam mogućuje da se dimenzija sustava znatno umanji te omogući brže procesuiranje.

U prvom poglavlju bit će dan pregled osnovnih definicija i rezultata vezanih za tzv. LTI sustave. Obradit će se pojmovi poput upravljivosti, osmotrivosti, funkcija transfera te minimalna realizacija sustava. Drugo poglavlje se bavi problemom racionalne interpolacije. Dati ćemo definiciju i osnovna svojstva Loewnerove matrice te njenu svrhu u povezivanju podataka s temeljnih sustavom. Zadnji dio rada bavi se općenitim slučajem kada su dani podaci vektori. Prezentirat ćemo neke numeričke rezultate te primjenu metode na velikim podacima.

Poglavlje 1

LTI sustavi

1.1 Upravljivost i osmotrivost

Sljedeće dvije jednadžbe opisuju vrstu dinamičkih sustava koju ćemo promatrati:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = x_0, \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

pri čemu su $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)$ vektorske funkcije takve da

$$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p, t \geq 0.$$

i $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ matrice. Funkcija $\mathbf{u}$ predstavlja ulaz sustava, $\mathbf{y}$ predstavlja izlaz sustava te $\mathbf{x}$ predstavlja stanje sustava. Sustave poput (1.1) označavamo kao uređena četvorka $G = (A, B, C, D)$. Sustav koji ima jedan ulaz i jedan izlaz ($m = p = 1$) nazivamo *SISO (**S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput)* sustav, a sustav koji ima više ulaza i više izlaza ($m > 1, p > 1$) nazivamo *MIMO (**M**ultiple **I**nput **M**ultiple **O**utput)* sustav. U svrhe kasnijih dokaza navodimo eksplicitno rješenje prve jednadžbe sustava (1.1).

Propozicija 1.1.1. *Rješenje jednadžbe sustava*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = x_0$$

je dana s

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

Kažemo da je sustav *linearno vremensko-invarijantni (LTI)* ukoliko vrijedi

- **Linearnost**. Neka su α_1, α_2 skalari te $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ulazi koji daju izlaze redom $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$. Tada ulaz oblika $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$ daje izlaz oblika $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$.

- **Vremenska invarijantnost**. Neka ulaz $\mathbf{u}$ daje izlaz $\mathbf{y}$. Tada ulaz $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(\cdot - \tau)$ daje izlaz $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\cdot - \tau)$.

Sustav (1.1) je upravo LTI sustav. Bitan pojam vezan za LTI sustave jest upravljivost. Kako bismo definirali točno što je upravljivost najprije definiramo što znači da je neko stanje dohvatljivo.

Definicija 1.1.2. *Za fiksan $t > 0$, neka je $\mathbb{X}_t := \{\xi \in \mathbb{R}^n \ : \ $ postoji ulaz $\mathbf{u}$ td. je $\mathbf{x}(t) = \xi\}$. $\mathbb{X}_t$ zovemo* ***skup svih dohvatljivih stanja*** *u trenutku t.*

Sada možemo definirati pojam upravljivosti.

Definicija 1.1.3. *Za sustav* (1.1) *definiramo matricu upravljivosti sa*

$$\mathbf{C}(A, B) := \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Kažemo da je par (A, B) ***upravljiv*** *(eng. controllable) ako je prostor upravljivosti $\mathbf{C}_{A,B} := Im\,\mathbf{C}(A, B) = \mathbb{R}^n$, odnosno ako je rang matrice $\mathbf{C}(A, B)$ jednak n. Nadalje, za $t > 0$ definiramo* ***(konačni) Gramijan upravljivosti***

$$W_t := \int_0^t e^{A\tau} BB^* e^{A^*\tau} d\tau. \tag{1.3}$$

Sljedeći teorem nam daje jaku tvrdnju da zapravo skup $\mathbb{X}_t$ ne ovisi o odabiru vremena $t > 0$, odnosno, ukoliko je neko stanje dohvatljivo u trentku t, ono je dohvaljivo u svakom trenutku.

Teorem 1.1.4. *Za svaki $t > 0$ vrijedi $\mathbb{X}_t = Im\,W_t = Im\,\mathbf{C}_{A,B}$.*

Obratno, možemo promatrati koja su sva moguća početna stanja sustava ukoliko nam je poznat izlaz sustava u nekom trenutku. Svojstvo sustava koji to postiže je osmotrivost.

Definicija 1.1.5. *Kažemo da je par (C, A)* ***osmotriv*** *(eng. observable) na $[0, T]$ ako, za dani $\mathbf{y}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, postoji jedinstveni x_0 takav da je $\mathbf{y}(\tau) = Ce^{A\tau}x_0$. Matricu*

$$\mathbf{O}(C, A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

zovemo matrica osmotrivosti te $\mathbf{N}_{C,A} := Ker\,\mathbf{O}(A, C)$ zovemo neosmotrivi prostor.

Slično kao i kod upravljivosti, par (C, A) je osmotriv ako je matrica osmotrivosti punog ranga. Pojam osmotrivosti je dualan pojmu upravljivosti što se vidi iz sljedeće propozicije.

Propozicija 1.1.6. *(C, A) je osmotriv ako i samo ako je (A^*, C^*) upravljiv.*

Konačno, bitno je istaknuti jedan teorem koji nam omogućuje jednostavniju provjeru upravljivosti odnosno osmotrivosti nekog sustava.

Teorem 1.1.7. *(Popov-Belevich-Hutus test) Par (A, B) je upravljiv ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}\right) = n.$$

Bitno je naglasiti da je skup upravljivih (osmotrivih) sustava gust. Odnosno, za svaki $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ i svaki $\epsilon > 0$ postoje matrice $\Delta A, \Delta B$ takve da je $\|(\Delta A, \Delta B)\| < \epsilon$ i par $(A + \Delta A, B + \Delta B)$ je upravljiv.

1.2 Transformacije sustava

Ponekad je poželjno vršiti transformaciju matrica sustava kako bismo dobili oblik iz kojega možemo vidjeti neka njegova svojstva. Na primjer, kako bismo jednostavnije primijenili test upravljivosti (1.1.7). Neka je $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica. Definiramo $\tilde{\mathbf{x}} = T\mathbf{x}$ te uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= T\dot{\mathbf{x}}(t) = T(A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)) = \overbrace{(TAT^{-1})}^{\tilde{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{(TB)}^{\tilde{B}}\mathbf{u}(t) = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{B}\mathbf{u}(t),\\
\tilde{\mathbf{y}}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) = \overbrace{(CT^{-1})}^{\tilde{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \overbrace{D}^{\tilde{D}}\mathbf{u}(t) = \tilde{C}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{D}\mathbf{u}(t).
\end{aligned}$$

Dakle, sustav (A, B, C, D) ima i realizaciju $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$. Svojstva sustava ostaju ista prilikom transformacije.

Propozicija 1.2.1. *(A, B) je upravljiv ako i samo ako je $(\tilde{A}, \tilde{B})$ upravljiv.*

Dokaz. Uočimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(TAT^{-1})^n = TAT^{-1}TAT^{-1}\cdots TAT^{-1} = TA^nT^{-1}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(TAT^{-1}, TB) &= \begin{bmatrix} TB & (TAT^{-1})TB & (TAT^{-1})^2 & \cdots & (TAT^{-1})^n TB \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} TB & TAB & TA^2B & \cdots & TA^{n-1}B \end{bmatrix}\\
&= T\mathbf{C}(A, B).
\end{aligned}$$

□

Ekvivalentna tvrdnja vrijedi i za osmotrivost. Postavlja se pitanje, postoji li transformacija koordinata tako da se iz dobivene realizacije $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ može uočiti upravljivost odnosno osmotrivost.

Teorem 1.2.2. *Neka je (A, B) takav da je $\dim \mathbf{C}_{A,B} = r$. Tada postoji transformacija koordinata T takva da je*

1. $$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{r\times m}.$$

2. $$\mathbf{C}_{\tilde{A},\tilde{B}} = T\mathbf{C}_{A,B} = Im \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. *Par $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ je upravljiv.*

Dokaz. Najprije pokažimo da je $\mathbf{C}_{A,B}$ $A-$invarijantan. Iz Hamilton-Cayley teorema slijedi da je

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k A^k, \qquad \text{za neke } \lambda_k \in \mathbb{C}^n.$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} A \cdot \operatorname{Im} \mathbf{C}(A, B) &= A \cdot \operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} AB & A^2B & A^3B & \cdots A^nB \end{bmatrix} \\ &\subseteq \operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}_{A,B}. \end{aligned}$$

Sada, neka je U baza za $\mathbf{C}_{A,B}$ te ju nadopunimo sa $\tilde{U}$ do baze za $\mathbb{R}^n$. Definiramo novu matricu $\hat{T} = \begin{bmatrix} U & \tilde{U} \end{bmatrix}$ koja je regularna $n \times n$ matrica. Sada je

$$U = \hat{T} \overbrace{\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}}^{r} \implies \hat{T}^{-1}U = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\mathbf{C}_{A,B}$ $A-$invarijantan, vrijedi da je $AU = U\tilde{A}_{11}$ za neku matricu $\tilde{A}_{11}$. Nadalje, kako $\hat{T}$ čini bazu za $\mathbb{R}^n$ vrijedi $A\tilde{U} = \hat{T}\tilde{A}_2$ gdje je $\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$ za neke matrice A_{21}, A_{22}. Sada imamo

$$\tilde{A} = \hat{T}^{-1} A \hat{T} = \begin{bmatrix} \hat{T}^{-1} U \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Nadalje, uočimo kako je $\operatorname{Im} B \subseteq \mathbf{C}_{A,B}$ dakle $B = U\tilde{B}_1$ za neku matricu $\tilde{B}_1$ pa slijedi

$$\tilde{B} = \hat{T}^{-1} B = \hat{T}^{-1} U B_1 = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, tražena transformacija je $T := \hat{T}^{-1}$. Nadalje, 2) slijedi direktno iz prethodno pokazanog:

$$\mathbf{C}_{\tilde{A},\tilde{B}} = T\mathbf{C}_{A,B} = \hat{T}^{-1}\mathbf{C}_{A,B} = \hat{T}^{-1}\operatorname{Im} U = \hat{T}^{-1}\operatorname{Im}\left(\hat{T} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Za 3) najprije uočimo da vrijedi

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^2 & * \\ 0 & \tilde{A}_{22}^2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^k & * \\ 0 & \tilde{A}_{22}^k \end{bmatrix}.$$

Koristeći tu činjenicu dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kako je $\operatorname{rank}(\mathbf{C}(\tilde{A}, \tilde{B})) = \operatorname{rank}(\mathbf{C}(A, B) = r$ slijedi da je $\operatorname{rank}(\mathbf{C}(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)) = r$ to jest $\mathbf{C}_{\tilde{A}_{11},\tilde{B}_1} = \mathbb{R}^r$ pa je $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ upravljiv. □

Dokaz je kontruktivan pa se lako vidi kako bi se tražena transformacija izračunala i primijenila na sustav. Kažemo da je par $(\tilde{A}, \tilde{B})$ iz prethodnog teorema *u formi upravljivosti*.

1.3 Minimalna realizacija

Prethodno smo definirali transformacije koje ne mijenjaju sustav. Sada formalno definiramo što znači da su dva sustava jednaka, to jest ekvivalentna.

Definicija 1.3.1. *Kažemo da su sustavi $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ i $G_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ ekvivalentni ukoliko za sve ulaze $\mathbf{u}$ i sve $t \geq 0$ vrijedi $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{y}_2(t)$.*

Sljedeća lema je alat koji ćemo koristiti kao provjeru ekvivalentnosti dva sustava.

Lema 1.3.2. *Realizacije $G = (A, B, C, D)$ i $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ su ekvivalentne ako i samo ako je $D = D_1$ i $CA^kB = C_1A_1^kB_1$ za sve $k \geq 0$.*

Dokaz. Iz (1.1.1) znamo da su eksplicitna rješenja dana s

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_1(t) &= \int_0^t C_1e^{A_1(t-\tau)}B_1\mathbf{u}(\tau)d\tau + D_1\mathbf{u}(t) \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$Ce^{At}B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}CA^kB = \sum_{k=0}^{\infty} C_1A_1^kB_1 = C_1e^{A_1t}B_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Dakle, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo da je $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_1(t)$, $\forall t \geq 0$, $\forall u(t) \in \mathbb{R}^n$. Posebno, za $t = 0$ slijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_1(0) &\Longrightarrow D\mathbf{u}(0) = D_1\mathbf{u}(0), && \forall \mathbf{u}(0) \in \mathbb{R}^n \\ &\Longrightarrow (D - D_1)\mathbf{u}(0) = 0, && \forall \mathbf{u}(0) \in \mathbb{R}^n \\ &\Longrightarrow D = D_1. \end{aligned}$$

Sada tvrdimo da je $Ce^{A(t-\tau)}B = C_1e^{A_1(t-\tau)}B_1$ za sve $t - \tau$. U protivnom, postoji $t_0 \geq 0$ u kojemu nisu jednaki. Definiramo $\mathbf{u}(t) := (Ce^{A(t_0+1-t)}B - C_1e^{A_1(t_0+1-t)}B_1)^*$ te vrijedi $\mathbf{u}(1) \neq 0$. Oduzimanjem jednakosti iz $(*)$ za $t = t_0 + 1$ te uvrštavanjem definiranog ulaza dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_0+1} \overbrace{(Ce^{A(t_0+1-\tau)}B - C_1e^{A_1(t_0+1-\tau)}B_1)}^{\mathbf{u}(\tau)^*}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{t_0+1} \mathbf{u}^*(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

To je kontradikcija s pretpostavkom egzistencije t_0 jer $\mathbf{u}^*(1)\mathbf{u}(1) \neq 0$. Kako je $\mathbf{u}(\tau)$ neprekidna u τ funkcija unutar intergrala ne može biti nul matrica. Dakle, $Ce^{A(t-\tau)}B = C_1e^{A_1(t-\tau)}B_1$. Konačno, imamo

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}Ce^{At}B\right|_{t=0^+} = \left.\frac{d^k}{dt^k}C_1e^{A_1t}B_1\right|_{t=0^+} \Longrightarrow CA^kB = C_1A_1^kB_1, \quad \forall k \geq 0.$$

□

Sada navodimo glavni teorem egzistencije minimalne realizacije.

Teorem 1.3.3. *Neka je $G = (A, B, C, D)$ realizacija takva da (A, B) nije upravljiv ili (C, A) nije osmotriv. Tada postoji ekvivalentna realizacija nižeg reda. U protivnom, G je minimalna realizacija.*

Dokaz. $\boxed{\Longrightarrow}$ Pretpostavimo da (A, B) nije upravljiv. Gledamo formu upravljivosti

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definiramo $\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$ i $\tilde{D}_1 = D$. Tvrdimo da je $\tilde{G} = (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, \tilde{D}_1)$ ekvivalentna realizacija nižeg reda.

$$\begin{aligned} CA^kB &= (\tilde{C}T)(T^{-1}\tilde{A}T)^kT^{-1}\tilde{B} \\ &= \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{C}_1\tilde{A}_{11}\tilde{B}_1, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Prema prethodnoj lemi, tvrdnja vrijedi. Analogno se pokaže ukoliko (C, A) nije osmotriv.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je (A, B) upravljiv i (C, A) osmotriv te pretpostavimo da je $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ ekvivalentna realizacija reda $n_1 < n$. Prema prethodnoj lemi tada vrijedi da je $CA^kB = C_1A_1^kB_1$, $\forall k \geq 0$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} CA^{i+j}B \end{bmatrix}_{ij} \\ &= \begin{bmatrix} C_1A_1^{i+j}B_1 \end{bmatrix}_{ij} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_1 \\ \vdots \\ C_1A_1^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uočimo da je rang lijeve strane jednak n dok je rang desne strane manji ili jednak n_1 odnosno strogo manji od n što je u kontradikciji. Dakle, G je minimalna realizacija. □

Bitno je naglasiti kako, prije dokaza, nije očito da se neupravljiva (i neosmotriva stanja) mogu zanemariti u izlazu. Dakle, kao što je pokazano, za računanje minimalne realizacije potrebno je transformacijama odstraniti neupravljiva odnosno neosmotriva stanja.

1.4 Funkcija transfera

Alternativna metoda za promatranje sustava jest da vršimo transformaciju nad relevantnim signalima. Posebno, Laplaceova transformacija funkcije vremena $f(t)$ je definirana s

$$\hat{f}(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

gdje se s nalazu u području od $\mathbb{C}$ za koje intergral konvergira. Time je definirana linearna transformacija između funkcija koje ovise od t i koje ovise o s. Nećemo ulaziti u detalje o funkcijskim prostorima za koje je ova transformacija izvediva, već ćemo samo pretpostaviti da funkcije ne rastu brže od eksponencijalne funkcije. Preciznije, za danu funkciju f pretpostavimo da postoje konstante α i β takve da

$$|f(t)| \leq \beta e^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

U tom slučaju, transformacija je dobro definirana kada je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Osnovno svojstvo jest da, ukoliko vremenska derivacija $\dot{f}(t)$ ima dobro definiranu Laplaceovu transformaciju, ona je dana s

$$s\hat{f}(s) - f(0).$$

Ovo svojstvo se može iskoristiti kako bi se izračunala Laplaceova transformacija polaznog sustava:

$$\begin{aligned} s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}(0) &= A\hat{\mathbf{x}}(s) + B\hat{\mathbf{u}}(s), \\ \hat{\mathbf{y}}(s) &= C\hat{\mathbf{x}}(s) + D\hat{\mathbf{u}}(s). \end{aligned}$$

Posebno, za $\mathbf{x}(0) = 0$, dobivamo direktan odnos izlaza i ulaza

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \tag{1.4}$$

pri čemu se

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

naziva *transfer funkcija* sustava. Ova funkcija je dobro definirana za s takve da matrica $(sI - A)$ ima inverz i, posebno, identitet (1.4) vrijedi u poluravnini $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ gdje su navedene funkcije dobro definirane. Prethodno su funkcije ovisile o vremenu pa to nazivamo *vremenska domena* dok smo Laplaceovom transformacijom prešli u *frekvencijsku domenu*.

Preko transfer funkcija se također može odrediti da li su dva sustava ekvivalentna.

Lema 1.4.1. *Dvije realizacije $G_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ i $G_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ su ekvivalentne ako i samo ako im se transfer funkcije podudaraju, to jest*

$$\hat{G}_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1 = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2 = \hat{G}_2(s)$$

za sve s za koje su inverzi dobro definirani.

Kako bismo promatrali strukturu transfer funkcija, najprije je potrebno analizirati *racionalne funkcije*. Racionalna funkcija je kvocijent dva realna polinoma, generalno oblika

$$\hat{g}(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}, \tag{1.5}$$

gdje su a_k i b_k skalari te m i n prirodni brojevi. Funkcija je realna racionalna funkcija ukoliko su a_k i b_k realni brojevi. Ova funkcija je dobro definirana na cijeloj kompleksnoj ravnini osim u nultočkama nazivnika. Nultočke nazivnika nazivamo *polovi* racionalne funkcije. Kažemo da je racionalna funkcija *prava* ako je $n \geq m$ i *strogo prava* ako je $n > m$. Nama su od interesi uglavnom prave realne racionalne funkcije. Nadalje definiramo red racionalne funkcije.

Definicija 1.4.2. *Red (kompleksnost) skalarne racionalne funkcije $\hat{g}(s)$, definirane s* (1.5) *je*

$$deg(\hat{g}) := \max\{deg\ n, deg\ d\},$$

gdje je $n(s)$ brojnik, a $d(s)$ nazivnik racionalne funkcije $\hat{g}$.

Ponekad se stupanj naziva McMillanov stupanj od $\hat{g}(s)$. Proširujemo pojmove skalarne funkcije na matrični slučaj na sljedeći način: pretpostavimo

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11}(s) & \cdots & \hat{g}_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_{p1}(s) & \cdots & \hat{g}_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

gdje je svaka $\hat{g}_{ij}(s)$ skalarna funkcija. Kažemo da je $\hat{G}(s)$ prava realna racionalna matrična funkcija ukoliko je svaka $\hat{g}_{ij}(s)$ prava realna racionalna funkcija. Vraćajući se na transfer funkciju, bitno je uočiti da je ona upravo racionalna funkcija. Naime, izraz $(sI - A)^{-1}$ se može zapisati kao

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A),$$

gdje je adj$(\cdot)$ adjunkta matrice i formira se preko kofaktora matrice. Dakle, adj$(sI - A)$ je matrica čiji elementi su polinomi reda manjeg od n. Determinanta $\det(sI - A)$ je također polinom (karakteristični polinom od A) te je stupnja n. Dakle, $(sI - A)^{-1}$ je strogo prava realna racionalna matrična funkcija te slijedi da je $C(sI - A)^{-1}B + D$ prava realna racionalna matrična funkcija.

Poglavlje 2

Problem racionalne interpolacije

Neka su dane točke $P = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, N$, pri čemu obje koordinate svake točke pripadaju nekom skalarnom polju ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$). Osnovni problem jest pronaći parametrizaciju svih racionalnih funkcija koje interpoliraju dane točke te kasnije pronaći one minimalnog stupnja, to jest, pronaći racionalnu funkciju najmanjeg stupnja koja poprima dane vrijednosti u danim točkama. Rješenje ovog problema je bitno za interpolaciju funkcije transfera sustava za kojeg su točke dane. U praksi standardna interpolacija nije moguća zbog kompleksnosti računa i velike količine danih podataka.

2.1 Lagrangeova racionalna interpolacija

Ideja pristupa racionalnim funkcijama jest da koristimo formulu koja se koristi za interpolaciju s Lagrangeovim polinomima. Najprije, particionirajmo skup točaka P u dva disjunktna skupa:

$$P_c = \{(\lambda_i, w_i) : i = 1, \dots, k\}, \quad P_r = \{(\mu_j, v_j) : j = 1, \dots q\},$$

gdje smo točke redefinirali kao

$$\begin{cases} \lambda_i = x_i, & w_i = y_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \mu_j = x_{k+j}, & v_j = y_{k+j}, \quad j = 1, \dots, q, \end{cases} \quad k + q = N.$$

Pripadne skupove ćemo nazivati lijevi i desni podaci. Definiramo *Lagrangeovu bazu* za polinome stupnja najviše $k - 1$: za $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q : \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$

$$\mathbf{q}_i(s) = \prod_{\substack{i=1 \\ i' \neq i}}^{k} (s - \lambda_{i'}),\ i = 1, \dots, k.$$

Za konstante $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$, promotrimo funkciju $\phi(s)$ implicitno definiranu sljedećom jednakosti:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\phi(s) - w_i}{s - \lambda_i} = 0, \ \alpha_i \neq 0. \tag{2.1}$$

Rješavanjem za ϕ dobivamo

$$\phi(s) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i w_i}{s-\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{s-\lambda_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i \mathbf{q}_i(s)}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{q}_i(s)}, \quad \alpha_i \neq 0. \tag{2.2}$$

Ovo je *racionalna Lagrangeova interpolacijska formula*. Referenca na Lagrangeovu interpolaciju polinomima jest da ukoliko uzmemo $\alpha_i = \frac{1}{\mathbf{q}_i(\lambda_i)}$ i budući da $\sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{q}_i(s)}{\mathbf{q}_i(\lambda_i)} = 1$, dobivamo

$$\phi(s) = \phi_{\text{lag}}(s) = \sum_{i=1}^{k} w_i \frac{\mathbf{q}_i(s)}{\mathbf{q}_i(\lambda_i)};$$

drugim riječima, racionalna funkcija $\phi(s)$ postaje upravo *Lagrangeov polinom* $\phi_{\text{lag}}(s)$ koji interpolira točke P_c.

U slučaju racionalne funkcije, slobodni parametri α_i mogu se odrediti tako da se postave dodatni uvjeti interpolacije na skup P_r:

$$\phi(\mu_j) = v_j, \quad j = 1, \ldots, q.$$

2.2 Loewnerova matrica

Ključan alat u analizi racionalne interpolacije jest *Loewnerova matrica*. Matrica se konstruira iz lijevih i desnih podataka

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{v_1 - w_1}{\mu_1 - \lambda_1} & \cdots & \frac{v_1 - w_k}{\mu_1 - \lambda_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{v_q - w_1}{\mu_q - \lambda_1} & \cdots & \frac{v_q - w_k}{\mu_q - \lambda_k} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Glavno svojstvo Loewnerovih matrica koje ih povezuje uz racionalne funkcije jest sljedeće:

Lema 2.2.1 (Glavno svojstvo)**.** *Neka je ϕ racionalna funkcija i neka je P skup točaka takav da za sve indekse i vrijedi $y_i = \phi(x_i)$ te x_i nije pol od ϕ. Neka je $\mathbb{L}$ $q \times k$ Loewnerova matrica za neku particiju P_c, P_r od P. Tada vrijedi,*

$$q, k \geq deg\, \phi \implies rank\, \mathbb{L} = deg\, \phi.$$

Slijedi da je tada svaka kvadratna Loewnerova podmatrica reda $deg\, \phi$ regularna.

Ovo je ključan rezultat u daljnjem promatranju. Dokaz ove leme se zasniva na sljedećem rezultatu.

Propozicija 2.2.2. *Neka je* (A, B) *upravljiv i neka su* λ_i, $i = 1, \ldots, r$, *različiti skalari koji nisu svojstvene vrijednosti* $n \times n$ *od matrice* A. *Ako je* $r \geq n$ *tada vrijedi*

$$rank\Big[\, (\lambda_1 I - A)^{-1}B, \ldots, (\lambda_r I - A)^{-1}B \,\Big] = n.$$

Slična propozicija vrijedi i za osmotrivost.

Dokaz Leme 2.2.1. Neka je $(A_\delta, B_\delta, C_\delta)$ minimalna realizacija sustava čija je funkcija transfera ϕ reda n. Tada je

$$\phi(s) = C_\delta(sI - A_\delta)^{-1}B_\delta.$$

To implicira da je

$$(\mathbb{L})_{i,j} = \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j} = -C_\delta(\mu_i I - A_\delta)^{-1}(\lambda_j I - A_\delta)^{-1}B_\delta, \quad i = 1, \ldots, q,\ j = 1, \ldots, k.$$

Posljedično tome, Loewnerovu matricu možemo faktorizirati kao

$$\mathbb{L} = -\mathscr{O}_q \mathscr{R}_k,$$

pri čemu

$$\mathscr{R}_k = \Big[(\lambda_1 I - A)^{-1}B \quad (\lambda_2 I - A)^{-1}B \quad \cdots \quad (\lambda_k I - A)^{-1}B\Big], \quad \mathscr{O}_q = \begin{bmatrix} C(\mu_1 I - A)^{-1} \\ C(\mu_2 I - A)^{-1} \\ \vdots \\ C(\mu_q I - A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Matrica $\mathscr{R}_k$, odnosno $\mathscr{O}_q$, se zove *generalizirana matrica upravljivosti*, odnosno *generalizirana matrica osmotrivosti* koje su pridružene interpolacijskom problemu. Kako su te matrice punog ranga (n), ujedno je i Loewnerova matrica $\mathbb{L}$ ranga n. Kako je svaka Loewnerova podmatrica zapravo Loewnerova matrica nekog podskupa stupaca i redaka, slijedi da ima svojstvo punog ranga. □

2.3 Konstrukcija i realizacija interpolanada

Sada možemo promatrati konstrukciju racionalne funkcije iz danih podataka. U svrhu toga slijedi definicija.

Definicija 2.3.1. *Rang skupa P definiramo kao*

$$rank\, P = \max_{\mathbb{L}} \{ rank\, \mathbb{L} \} = n,$$

pri čemu se maksimum uzima po svim Loewnerovim matricama koje mogu biti formirane iz podataka P.

Uočimo da je rang skupa P a priori nepoznat. Posljedica Leme 2.2.1 jest da je rang svih Loewnerovih matrica koje imaju barem n redaka i n stupaca jednak n. Pretpostavimo da je $2n < N$ i da je $q = n$, tada je $k = N - n > n$ pa je jezgra matrice $\mathbb{L}$ netrivijalna i postoji vektor $\mathbf{c}$ za koji vrijedi

$$\mathbb{L}\mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^k, \quad k = N - n. \tag{2.4}$$

U tom slučaju, matrici $\mathbb{L}$ možemo pridružiti racionalnu funkciju

$$\phi_{\mathbb{L}}(s) = \frac{n_{\mathbb{L}}(s)}{d_{\mathbb{L}}(s)} \tag{2.5}$$

koristeći formulu za Lagrangeov polinom (2.2), gdje je $\alpha_j = \mathbf{c}_j$, to jest,

$$n_{\mathbb{L}}(s) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j w_j}{s - \lambda_j}, \quad d_{\mathbb{L}}(s) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{s - \lambda_j}. \tag{2.6}$$

Racionalna funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ ima sljedeća svojstva:

Lema 2.3.2. *(a) $deg\, \phi_{\mathbb{L}} \leq n < N$.*

(b) Postoji jedinstvena racionalna funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ pridružena svim vektorima c i Loewnerovim matricama $\mathbb{L}$ za koje vrijedi $\mathbb{L}\mathbf{c} = 0$ i $rank\, \mathbb{L} = n$.

(c) Brojnik i nazivnik, $n_{\mathbb{L}}, d_{\mathbb{L}}$ imaju $n - deg\, \phi_{\mathbb{L}}$ zajedničkih faktora oblika $s - \lambda_i$.

(d) $\phi_{\mathbb{L}}$ interpolira točno $N - n + deg\, \phi_{\mathbb{L}}$ točaka iz P.

Potpuni dokaz je vrlo tehnički te za potpuni dokaz čitatelja upućujemo na [2]. U nastavku ćemo pokazato samo neke jednostavnije slučajeve tvrdnji (a) i (d).

Dokaz. (a) Tvrdimo da za matricu $\mathbb{L}$ ranga jednakom q možemo odabrati vektor $\mathbf{c}$ oblika $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_q, c_{q+1}, 0, \ldots, 0)$ pri čemu je $c_i \neq 0$ za sve $i = 1, \ldots, q + 1$. Najprije particioniramo $\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_1 & * \end{bmatrix}$ gdje je $\mathbb{L}_1 \in \mathbb{C}^{q \times (q+1)}$. Rang matrice $\mathbb{L}_1$ iznosi q, pa mora imati netrivijalnu jezgru. Neka je $\mathbf{c}_1 = (c_1, c_2, \dots, c_{q+1})$ ne-nul vektor iz $\operatorname{Ker}\mathbb{L}_1$. Sada imamo da je funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ pridružena vektoru $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, 0, \dots, 0)$ reda najviše q. Ukoliko se promatra $\mathbf{c}$ koji ima više od $q+1$ ne-nul elemenata, onda dokaz postane netrivijalan.

Pokažimo sada da tako dobivena funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ interpolira u svim točkama $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Zbog $\mathbb{L}\mathbf{c} = 0$ slijedi da za sve $i = 1, \dots, q$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{q+1} c_j \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j} = 0. \tag{2.7}$$

Funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ je onda konstruirana ovako:

$$\phi_{\mathbb{L}}(s) = \frac{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j w_j}{s-\lambda_j}}{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j}{s-\lambda_j}}. \tag{2.8}$$

Analogno dokazu Leme 2.3.2(d) se vidi da vrijedi $\phi_{\mathbb{L}}(\mu_i) = v_i$, za sve $i = 1, \dots, q$, te $\phi_{\mathbb{L}}(\lambda) = w_i$, za sve $i = 1, \dots, q+1$. Sada ćemo pokazati da ovaj isti $\phi_{\mathbb{L}}$ interpolira sve točke, tj. da vrijedi i $\phi_{\mathbb{L}}(\lambda_i) = w_i$, za sve $i = q+2, \dots, k$.

Uzmimo neki od tih preostalih λ, bez smanjenja općenitosti, λ_k. Napravimo novu Loewnerovu matricu $\hat{\mathbb{L}}$ dimenzija $(q+1) \times (q+1)$ tako da ispod $\mathbb{L}_1$ dodamo još jedan redak sa $(\mu_{q+1}, v_{q+1}) = (\lambda_k, w_k)$. Po pretpostavci, rang ove matrice je ponovno n, to jest q, pa je zadnji redak linearna kombinacija prvih q redaka, odnosno, postoje $\xi_1, \dots, \xi_q$ koji nisu svi nula takvi da za sve $j = 1, \dots, q$ vrijedi

$$\frac{v_{q+1} - w_j}{\mu_{q+1} - \lambda_j} = \frac{w_k - w_j}{\lambda_k - \lambda_j} = \sum_{j=1}^{q} \xi_i \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j},$$

odnosno

$$\frac{w_j}{\lambda_k - \lambda_j} = \frac{w_k}{\lambda_k - \lambda_j} - \sum_{j=1}^{q} \xi_i \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j}.$$

Uvrstimo sada $s = \lambda_k$ u (2.8):

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathbb{L}}(\lambda_k) &= \frac{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j w_j}{\lambda_k - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j}{\lambda_k - \lambda_j}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{q+1} c_j \Big(\frac{w_k}{\lambda_k - \lambda_j} - \sum_{i=1}^{q} \xi_i \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j} \Big)}{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j}{\lambda_k - \lambda_j}} \\
&= \frac{w_k \sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j}{\lambda_k - \lambda_j} - \sum_{i=1}^{q} \xi_i \sum_{j=1}^{q+1} c_j \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j}{\lambda_k - \lambda_j}} \\
&= \frac{w_k \sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j}{\lambda_k - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{c_j}{\lambda_k - \lambda_j}} \\
&= w_k
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. Ovdje smo za predzadnju jednakost iskoristili (2.7).

(d) Pretpostavimo da je $\deg \phi_{\mathbb{L}} = q = n$. Dakle, potrebno je dokazati da $\phi_{\mathbb{L}}$ interpolira sve točke skupa P. Po pretpostavci postoji vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k)$, pri čemu je $c_i \neq 0$ za sve $i = 1, \ldots, k$, koji je pridružen toj racionalnoj funkciji koja je dana s formulom

$$\phi_{\mathbb{L}}(s) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{c_j w_j}{s - \lambda_j}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{s - \lambda_j}}. \tag{2.9}$$

Zbog $\mathbb{L}\mathbf{c} = 0$ slijedi da za sve $i = 1, \ldots, q$ vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j} = 0. \tag{2.10}$$

Po konstrukciji, funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ zadovoljava jednakost (2.1) pa zbog (2.10), vidimo da $\phi_{\mathbb{L}}(\mu_i) = v_i$, za sve $i = 1, \ldots, q$. Formulu (2.9) možemo zapisati kao

$$\phi_{\mathbb{L}}(s) = \frac{\sum_{j=1}^{k} c_j w_j \prod_{l \neq j} (s - \lambda_l)}{\sum_{j=1}^{k} c_j \prod_{l \neq j} (s - \lambda_l)}.$$

Sada lako vidimo da za sve $i = 1, \ldots, k$ dobivamo da je $\phi_{\mathbb{L}}(\lambda_i) = w_i$ što je i trebalo pokazati.

$\square$

Kao posljedicu Leme (2.3.2) i Leme (2.2.1), dobivamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.3.3. *Racionalna funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ interpolira sve dane točke ako i samo ako $\deg \phi_{\mathbb{L}} = n$, odnosno, ako i samo ako su sve Loewnerove matrice reda $n \times n$ koje se mogu formirati iz podataka P regularne.*

Sada smo spremni navesti, bez dokaza, glavni rezultat vezan za konstrukciju.

Teorem 2.3.4. *Neka je P skup točaka veličine N, te neka je $\operatorname{rank} P = n$.*

(a) Ako je $2n < N$ i sve kvadratne Loewnerove matrice veličine n koje mogu biti formirane iz skupa P su regularne, tada postoji jedinstvena interpolacijska funkcija minimalnog stupnja ϕ^{min} takva da je $\deg \phi^{min} = n$.

(b) Inače, $\phi^{min}(s)$ nije jedinstven i $\deg \phi^{min} = N - n$.

Korolar 2.3.5. *Uz pretpostavke Teorema 2.3.4 (a), dopustivi stupnjevi racionalne funkcije ϕ su n i svi prirodni brojevi jednaki ili veći od $N - n$. U suprotom, ako vrijede pretpostavke (b) dijela Teorema 2.3.4, to jest $2n > N$, dopustivi stupnjevi su svi prirodni brojevi veći ili jednaki $N - n$.*

Napomena 2.3.6. *(a) Ukoliko je $2n = N$ onda je jedino rješenje $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ pa funkcija $\phi_{\mathbb{L}}$ iz (2.5) ne postoji te vrijedi (b) dio teorema.*

(b) Kako bismo razlikovali slučaj (a) i (b) Teorema 2.3.4 potrebno je samo provjeriti regularnost $2n + 1$ Loewnerovih matrica. Za dokaz pogledati [1].

(c) Neka je dan skup P i dopustivi stupanj $r \in \mathbb{N}$ racionalne funkcije. Za konstrukciju funkcije potrebno je formirati bilo koju Loewnerovu matricu s $r + 1$ stupaca,

$$\mathbb{L}_r \in \mathbb{R}^{(N-r-1)\times(r+1)}$$

i odrediti parametrizaciju svih vektora $\mathbf{c}_r$ takvih da vrijedi $\mathbb{L}_r\mathbf{c}_r = 0$. Parametrizacija svih racionalnih funkcija je onda dana s $\phi_{\mathbb{L}_r}(s) = \frac{n_{\mathbb{L}_r}(s)}{d_{\mathbb{L}_r}(s)}$. Ako je $r \geq N - n$ onda se moramo pobrinuti da brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih faktora; ovo je slučaj za gotovo sve $\mathbf{c}_r$. Preciznije, $2r + 1 - N$ parametara koji parametriziraju sve $\mathbf{c}_r$ ne smiju se nalaziti na hiperravninama definirane s

$$\mathbf{d}_{\mathbb{L}_r}(\lambda_i) = 1,\ i = 1, \ldots, r + 1.$$

Budući da uvijek možemo osigurati da $\mathbf{c}_r$ linearno ovisi o tim parametrima, uistinu se radi o hiperravninama.

U prethodnoj Lemi, bilo je potrebno eksplicitno računati vektor **c** kako bismo dobili **a**. Pokažimo sada kako možemo dobiti realizaciju sustava preko vektora **c** kao rješenje sustava $\mathbb{L}\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Pretpostavimo sada da je $k = q + 1$ i podsjetimo se da je racionalna funkcija $\phi(s)$ dana s (2.2):

$$\phi(s) = \frac{\sum_{i=1}^{q+1} \beta_i \mathbf{q}_i(s)}{\sum_{i=1}^{q+1} \alpha_i \mathbf{q}_i(s)}, \quad \beta_i = \alpha_i w_i.$$

Definiramo

$$\mathbf{J}_{lag}(\xi; q) = \begin{bmatrix} \xi - x_1 & x_2 - \xi & & & \\ \xi - x_1 & 0 & x_3 - \xi & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \xi - x_1 & & & 0 & x_{q+1} - \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times (q+1)}$$

gdje, radi jednostavnosti, pretpostavljamo da je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, i

$$\mathbf{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q+1}],\ \mathbf{b} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{q+1}] \in \mathbb{R}^{1 \times (q+1)}$$

Tada imamo sljedeći rezultat.

Lema 2.3.7. *Sljedeća trojka čini predstavlja jednu realizaciju od ϕ:*

$$\mathbf{C} = \mathbf{b},\ \Phi(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{lag}(s; q) \\ \mathbf{a} \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \mathbf{e}_{q+1},$$

to jest, $\phi(s) = \mathbf{C}\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}$, pri čemu je $x_i = \lambda_i$, $i = 1, \dots, q+1$. Dimenzija realizacije je $q+1$ te je sustav upravljiv i osmotriv, to jest, matrice $[\Phi(s), \mathbf{B}]$ i $[\Phi(s)^T, \mathbf{C}^T]$ su punog ranga za sve s, ukoliko brojnik i nazivnik od ϕ nemaju zajedničkih faktora.

Dokaz. S obzirom da je $\mathbf{B} = \mathbf{e}_{q+1}$, bitno je samo gledati posljednji stupac od Φ^{-1} koji je određen s

$$\mathbf{r}(s) := \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(s) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{q+1} \end{bmatrix} \mathbf{d}^{-1}(s)$$

gdje je $\mathbf{d}(s) := \sum_{i=1}^{q+1} \alpha_i \mathbf{q}_i(s)$ nazivnik racionalne funkcije. Prema tome slijedi

$$\mathbf{C}\Phi(s)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{r}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{q+1} \beta_i \mathbf{q}_i(s)}{\sum_{i=1}^{q+1} \alpha_i \mathbf{q}_i(s)}.$$

Pokažimo sada da je dani sustav upravljiv. Pretpostavimo suprotno, to jest, pretpostavimo da postoji ne-nul $\mathbf{v}$ takav da za sve s vrijedi da je

$$\mathbf{v}\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}-\lambda I & \mathbf{B}\end{bmatrix}=0. \qquad \text{za neki } \lambda\in\mathbb{C}.$$

Uočimo da tada iz $0=\mathbf{vB}=\mathbf{ve}_{q+1}$ dobivamo da je $v_{q+1}=0$. Zbog toga posljednji redak od Φ u jednadžbi $\mathbf{v}(\mathbf{\Phi}-\lambda I)=0$ možemo ignorirati. Nakon množenja dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$v_{i-1}(x_i-s)-v_i\lambda_i, \qquad i=2,\dots q+1.$$

Sada, redom za $i=q+1,q,\dots,2$ dobivamo da je $v_q=v_{q-1}=\cdots=v_1=0$ što je kontradikcija s time da je $\mathbf{v}$ ne-nul vektor, dakle, sustav je upravljiv. Na sličan način se pokaže da je sustav osmotriv. □

Pokažimo sada izvod realizacije bez računanja vektora $\mathbf{c}$. Neka su dani lijevi podaci (μ_i,v_i), $i=1,\dots,q$, i desni podaci (λ_j,w_j), $j=1,\dots,q{+}1$ i neka je $\mathbb{L}\in\mathbb{C}^{q\times(q+1)}$ pripadajuća Loewnerova matrica. Pretpostavimo da je svaka $q\times q$ Loewnerova matrica regularna, time postoji jedinstvena racionalna funkcija stupnja q koja interpolira podatke. Najprije particionirajmo matricu Loewnerovu matricu

$$\mathbb{L}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbb{L}} & \boldsymbol{l}\end{bmatrix}, \quad \mathbb{L}\in\mathbb{C}^{q\times(q+1)}, \quad \hat{\mathbb{L}}\in\mathbb{C}^{q\times q}, \quad \boldsymbol{l}\in\mathbb{C}^{q}. \tag{2.11}$$

Također, definiramo *Loewnerovu matricu s jednostranim pomakom*

$$\mathbb{L}_\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1\frac{v_1-w_1}{\mu_1-\lambda_1} & \cdots & \lambda_k\frac{v_1-w_k}{\mu_1-\lambda_k}\\ \vdots & \ddots & \cdots\\ \lambda_1\frac{v_q-w_1}{\mu_q-\lambda_1} & \cdots & \lambda_k\frac{v_q-w_k}{\mu_q-\lambda_k}\end{bmatrix}.$$

Kasnije ćemo definirati generaliziranu pomaknutu Loewnerovu matricu koja igra važnu ulogu u tangencijalnoj interpolaciji.

Lema 2.3.8. *Za $k=q+1$ definiramo matricu $\mathbb{J}=\begin{bmatrix}\mathbb{I}\\ -\mathbf{1}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{(q+1)\times q}$ gdje je $\mathbb{I}$ jedinična matrica dimenzije q i $\mathbf{1}$ vektor-redak jedinica duljine q. Particioniramo $\mathbb{L}$ kao i u* (2.11)*. Sa $\mathbf{W}=[w_1,w_2,\dots,w_{q+1}]$ i $\mathbf{V}=[v_1,v_2,\dots,v_q]^T$ pridružena realizacija je dana s*

$$\mathbf{H}(s)=w_{q+1}-(s-\lambda_{q+1})(\mathbf{W}\mathbb{J})[(s\mathbb{L}-\mathbb{L}_\Lambda)\mathbb{J}]^{-1}\boldsymbol{l} \tag{2.12}$$

Ukoliko je interpolirajuća racionalna funkcija prava, tada se može zapisati kao

$$\mathbf{H}(s)=(\mathbf{W}\mathbb{J})[(s\mathbb{L}-\mathbb{L}_\Lambda)\mathbb{J}]^{-1}\mathbf{V}. \tag{2.13}$$

Prije dokaza leme potrebno je iskazati *Sherman-Morrison-Woodbury* formulu:

$$\begin{aligned}
\left(A - uv^T\right)^{-1} &= A^{-1} + \frac{1}{1 - v^T A^{-1} u} A^{-1} u v^T A^{-1} \quad \Big/ \cdot u \\
\implies \left(A - uv^T\right)^{-1} u &= A^{-1} u + \frac{A^{-1} u v^T A^{-1} u}{1 - v^T A^{-1} u} \\
\implies \left(A - uv^T\right)^{-1} u &= \frac{A^{-1} u - \cancel{A^{-1} u v^T A^{-1} u} + \cancel{A^{-1} u v^T A^{-1} u}}{1 - v^T A^{-1} u} \\
\implies \left(A - uv^T\right)^{-1} u &= \frac{1}{1 - v^T A^{-1} u} A^{-1} u
\end{aligned}$$

Dokaz. Podsjetimo se da, za dane $\mathbb{L}$ i $\mathbf{c}$ takve da $\mathbb{L}\mathbf{c} = \mathbf{0}$, je pripadna interpolacijska funkcija dana s

$$\phi(s) = \frac{n_{\mathbb{L}}(s)}{d_{\mathbb{L}}(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{q+1} \frac{\alpha_i w_i}{s - \lambda_i}}{\sum_{i=1}^{q+1} \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i}}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha_{q+1} = 1$. Tada sustav $\mathbb{L}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ možemo zapisati kao $\left[\hat{\mathbb{L}} \quad l\right]\left[\alpha_1, \ldots, \alpha_q, 1\right]^T = \mathbf{0}$, to jest, $\left[\alpha_1, \ldots, \alpha_q\right]^T = -\hat{\mathbb{L}}^{-1} l$. Tako su brojnik i nazivnik dani sljedećim izrazima

$$\begin{aligned}
(s - \lambda_{q+1}) n_{\mathbb{L}}(s) &= w_{q+1} - (s - \lambda_{q+1})\left[w_1, \ldots, w_q\right]\left(\operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right]\right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{-1} l, \\
(s - \lambda_{q+1}) d_{\mathbb{L}}(s) &= 1 - (s - \lambda_{q+1})\left[1, \ldots, 1\right]\left(\operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right]\right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{-1} l.
\end{aligned}$$

Posljedično je onda njihov kvocijent dan s

$$\phi(s) = w_{q+1} - \frac{\left[w_1 - w_{q+1}, \ldots, w_q - w_{q+1}\right]\left(\operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right]\right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{-1} l}{1 - (s - \lambda_{q+1})\left[1, \ldots, 1\right]\left(\operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right]\right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{-1} l}. \qquad (*)$$

Nadalje, prema prethodno iskazanoj Sherman-Morrison-Woodbury formuli za $A = \operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right]$, $v = (s - \lambda_{q+1})\left[1, \ldots, 1\right]^T$ te $\mathbf{u} = \hat{\mathbb{L}}^{-1} l$ imamo da je

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right]\right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{-1} l}{1 - (s - \lambda_{q+1})\left[1, \ldots, 1\right]\left(\operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right]\right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{-1} l} \\
&= \left(\operatorname{diag}\left[s - \lambda_1, \ldots, s - \lambda_q\right] - (s - \lambda_{q+1}) \hat{\mathbb{L}}^{-1} l \left[1, \ldots, 1\right]\right)^{-1} \hat{\mathbb{L}}^{-1} l \\
&= \left[(s\mathbb{L} - \mathbb{L}_\Lambda)\mathbb{J}\right]^{-1} l.
\end{aligned}$$

Zajedno s izrazom (∗), upravo dobivamo izraz (2.12). Sličnim postupkom dobivamo i drugi rezultat leme. □

2.4 Greška aproksimacije

Sada ćemo odrediti grešku prilikom aproksimacije interpolacijske funkcije dobivenu iz formula (2.4), (2.5) i (2.6). Neka je

$$\mathbb{L}\mathbf{c} = \mathbf{e},$$

pri čemu $\mathbf{e}$ nije nužno nul vektor. Koristeći izvedene formule, promotrimo racionalnu funkciju $\hat{\mathbf{H}}$ dobivenu uvrštavanjem $\alpha_i = c_i$:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i w_i}{s-\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{s-\lambda_i}}.$$

Nadalje, slijedi

$$v_i - \hat{\mathbf{H}}(\mu_i) = \frac{\mathbf{e}_i}{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{\alpha_j}{\mu_j-\lambda_j}}$$

Stoga, ukoliko je $\mathbf{c}$ desni singularni vektor koji pripada najmanjoj singularnoj vrijednosti od $\mathbb{L}$, σ_{q+1}, to jest $\mathbb{L}\mathbf{c} = \sigma_{q+1}\mathbf{x}$, gdje je $\mathbf{x}$ je pripadajući lijevi singularni vektor, iz izraza dobivamo

$$v_i - \hat{\mathbf{H}}(\mu_i) = \sigma_{q+1} \frac{\mathbf{x}_i}{\sum_{j=1}^{q+1} \frac{\alpha_j}{\mu_j-\lambda_j}} \implies \|v_i - \hat{\mathbf{H}}(\mu_i)\| \leq \frac{\sigma_{q+1}}{|\sum_{j=1}^{q+1} \frac{\alpha_j}{\mu_j-\lambda_j}|}.$$

Neka je $\mathbf{H}(s)$ egzaktna funkcija transfera, tada je greška dana formulom u [6]:

$$\|\mathbf{H}(s) - \hat{\mathbf{H}}(s)\| \leq \Delta(s) \max_s \left\| \frac{d\mathbf{H}(s)}{ds} \right\|, \ \Delta(s) = \frac{\sum_{i=1}^{q+1} |x_i|}{|\delta(s)|}, \ \delta(s) = \sum_{i=1}^{q+1} \frac{\alpha_j}{s - \lambda_i},$$

za $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $s \in [\lambda_1, \lambda_{q+1}]$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{q+1}$ i x_i definiran prethodno. Derivacija od $\mathbf{H}(s)$ je dana s

$$\frac{d\mathbf{H}(s)}{ds} = -\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-2}\mathbf{B}.$$

Ocjena na grešku je dobra za interpolaciju jer je Δ faktor u izrazu jednak nuli za $s = \lambda_i$. Međutim, općenito gornja granica može biti slaba, iako i dalje dobro prikazuje oblik greške.

Poglavlje 3

Vektorska redukcija modela

3.1 Tangencijalna interpolacija

U ovom poglavlju prezentirat ćemo općenitiji problem *tangencijalne interpolacije*. Sada se pretpostavlja da su izmjereni podaci $y_1, \ldots, y_N$ vektori iz $\mathbb{C}^p$, $p > 1$ za razliku od prethodnih poglavlja gdje smo pretpostavili da je $p = 1$. Nadalje, sustave koje ćemo promatrati će biti oblika

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = x_0, \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje, ukoliko je matrica E regularna, množenjem slijeva s E^{-1} dobivamo sustav (1.1). Ovakvi sustavi se nazivaju DAE (*Differential-algebraic-equation*) ukoliko je matrica E singularna i omogućuju promatranje šire grupe sustava. Nadalje, bitno svojstvo DAE sustava jest da se matrica D može integrirati unutar sustava, to jest, pretvoriti u sustav gdje je $D = 0$. To možemo učiniti na sljedeći način. Napravimo QR faktorizaciju matrice D

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2, \text{ gdje je } \mathbf{D}_1 \in \mathbb{C}^{p\times\rho}, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{C}^{\rho\times m}$$

i $\rho = \operatorname{rank} \mathbf{D}$. Sada slijedi da je

$$\mathbf{E}_\delta = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \\ & 0_\rho \end{bmatrix}, \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & -\mathbb{I}_\rho \end{bmatrix}, \mathbf{B}_\delta = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_\delta = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}$$

realizacija istog sustava bez člana $\mathbf{D}$, ali je ona i višeg reda. Razlog uklanjanja $\mathbf{D}$ je zato što Loewnerov algoritam upravo konstruira sustav bez tog člana.

Prethodno smo za inicijalne podatke imali samo (skalarne) vrijednosti λ_i, μ_j, w_i i v_j. Dodatno, sada imamo i tzv. *tangencijalne smjerove*.

Neka su dani redom desni i lijevi *tangencijalni* podaci:

$$(\lambda_i; \mathbf{r}_i, \mathbf{w}_i), i = 1, \ldots, k, \quad (\mu_j; \mathbf{l}_j^*, \mathbf{v}_j^*), j = 1, \ldots, q,$$

pri čemu je $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^m$ i $\mathbf{l}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbb{C}^p$ za sve indekse i i j. Dodatno, pretpostavljamo da vrijedi:

$$\mathbf{l}_j^* \mathbf{H}(\mu_j) = \mathbf{v}_j^*, \qquad \mathbf{H}(\lambda_i)\mathbf{r}_i = \mathbf{w}_j,$$

za transfer funkciju $\mathbf{H}$. Uočimo da za $p = 1$ te $\mathbf{l}_j = 1, \mathbf{r}_i = 1$ dobivamo upravo skalarni slučaj, pa teoriju koju dalje proučavamo u vektorskom slučaju, možemo usporediti i primijeniti i u skalarnom. Desne podatke organiziramo kao

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{\Lambda} & = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_k] \in \mathbb{C}^{k \times k} \\ \mathbf{C} & = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k] \in \mathbb{C}^{m \times k} \\ \mathbf{W} & = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k] \in \mathbb{C}^{p \times k} \end{array}\right\}, \tag{3.2}$$

te lijeve podatke organiziramo kao

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{M} & = \operatorname{diag}[\mu_1, \ldots, \mu_q] \in \mathbb{C}^{q \times q} \\ \mathbf{L}^* & = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \ldots, \mathbf{l}_q] \in \mathbb{C}^{p \times q} \\ \mathbf{V}^* & = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_q] \in \mathbb{C}^{m \times q} \end{array}\right\}, \tag{3.3}$$

Primijetimo da su $\mathbf{v}_i^* \mathbf{r}_j$ i $\mathbf{l}_i^* \mathbf{w}_j$ skalari. Konstruiramo sada *Loewnerovu* i *pomaknutu Loewnerovu* matricu. Najprije, Loewnerovu matricu za tangencijalne podatke definiramo ovako:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_1^* \mathbf{r}_1 - \mathbf{l}_1^* \mathbf{w}_1}{\mu_1 - \lambda_1} & \cdots & \frac{\mathbf{v}_1^* \mathbf{r}_k - \mathbf{l}_1^* \mathbf{w}_k}{\mu_1 - \lambda_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathbf{v}_q^* \mathbf{r}_1 - \mathbf{l}_q^* \mathbf{w}_1}{\mu_q - \lambda_1} & \cdots & \frac{\mathbf{v}_q^* \mathbf{r}_k - \mathbf{l}_q^* \mathbf{w}_k}{\mu_q - \lambda_k} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Lako se može provjeriti da $\mathbb{L}$ zadovoljava Sylvestrovu jednadžbu

$$\mathbf{M}\mathbb{L} - \mathbb{L}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{VR} - \mathbf{LW}. \tag{3.5}$$

Pomaknuta (shifted) Loewnerova matrica je dana s

$$\mathbb{L}_s = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 \mathbf{v}_1^* \mathbf{r}_1 - \mathbf{l}_1^* \mathbf{w}_1 \lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} & \cdots & \frac{\mu_1 \mathbf{v}_1^* \mathbf{r}_k - \mathbf{l}_1^* \mathbf{w}_k \lambda_k}{\mu_1 - \lambda_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_q \mathbf{v}_q^* \mathbf{r}_1 - \mathbf{l}_q^* \mathbf{w}_1 \lambda_1}{\mu_q - \lambda_1} & \cdots & \frac{\mu_q \mathbf{v}_q^* \mathbf{r}_k - \mathbf{l}_q^* \mathbf{w}_k \lambda_k}{\mu_q - \lambda_k} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

i ona slično zadovoljava Sylvestrovu jednadžbu

$$\mathbf{M}\mathbb{L}_s - \mathbb{L}_s\mathbf{\Lambda} = \mathbf{MVR} - \mathbf{LW\Lambda}. \tag{3.7}$$

Prva posljedica ovih jednakosti jest sljedeća propozicija.

Propozicija 3.1.1. *Vrijede sljedeće jednakosti*

$$\mathbb{L}_s - \mathbb{L}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \qquad \mathbb{L}_s - \mathbf{M}\mathbb{L} = \mathbf{L}\mathbf{W}.$$

Dokaz. Množeći jednadžbu (3.5) s desna s $\mathbf{\Lambda}$ i oduzimajući od jednadžbe (3.7) dobivamo

$$(\mathbb{L}_s - \mathbb{L}\mathbf{\Lambda} - \mathbf{V}\mathbf{R})\mathbf{\Lambda} - \mathbf{M}(\mathbb{L}_s - \mathbb{L}\mathbf{\Lambda} - \mathbf{V}\mathbf{R}) = 0.$$

Kako $\mathbf{\Lambda}$ i $\mathbf{M}$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti, rješenje ove Sylvestrove jednadžbe je nul-matrica. Prema tome dobivamo prvu traženu jednakost. Za drugu jednakost, na sličan način pomnožimo jednadžbu (3.5) s lijeva s $\mathbf{M}$ te oduzmemo ju od jednadžbe (3.6) te uz isti zaključak dobivamo drugu traženu jednakost. □

Loewnerovu matricu i njenu pripadnu pomaknutu Loewnerovu matricu zajedno nazivamo *Loewnerov par*. Neka su podaci (3.2) i (3.3) dobiveni iz transfer funkcije $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}_\delta(s\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1}\mathbf{B}_\delta$ dimenzije $p \times m$ uz $\mathbf{A}, \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definiramo sljedeće matrice:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{O}_q &= \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^*\mathbf{C}_\delta(\mu_1\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{l}_q^*\mathbf{C}_\delta(\mu_q\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{q\times n} \\ \mathscr{R}_k &= \begin{bmatrix} (\lambda_1\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1}\mathbf{B}_\delta\mathbf{r}_1 & \cdots & (\lambda_k\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1}\mathbf{B}_\delta\mathbf{r}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times k} \end{aligned}\right\}. \tag{3.8}$$

Slično kao i u skalarnom slučaju, te matrice nazivamo *generalizirana tangencijalna matrica osmotrivosti* i *generalizirana tangencijalna matrica upravljivosti*. Loewnerov par konstruiran iz tangencijalnih podataka može se prikazati preko prethodno definiranih matrica. Naime, za dane lijeve $\mathbf{v}_j^* = \mathbf{l}_j^*\mathbf{H}(\mu_j)$ i desne $\mathbf{w}_i = \mathbf{H}(\lambda_i)\mathbf{r}_i$ podatke imamo

$$\begin{aligned} (\mathbb{L})_{j,i} &= \frac{\mathbf{v}_j^*\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_j^*\mathbf{w}_i}{\mu_j - \lambda_i} = \frac{\mathbf{l}_j^*\mathbf{H}(\mu_j)\mathbf{r}_i - \mathbf{l}_j^*\mathbf{H}(\lambda_i)\mathbf{r}_i}{\mu_j - \lambda_i} \\ &= -\mathbf{l}_j^*\mathbf{C}_\delta(\mu_j\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1}\mathbf{E}_\delta(\lambda_i\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1}\mathbf{B}_\delta\mathbf{r}_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}_s)_{j,i} &= \frac{\mu_j\mathbf{v}_j^T\mathbf{r}_i - \lambda_i\mathbf{l}_j^T\mathbf{w}_i}{\mu_j - \lambda_i} = \frac{\mu_j\mathbf{l}_j^*\mathbf{H}(\mu_j)\mathbf{r}_i - \lambda_i\mathbf{l}_j^*\mathbf{H}(\lambda_i)\mathbf{r}_i}{\mu_j - \lambda_i} \\ &= -\mathbf{l}_j^*\mathbf{C}_\delta(\mu_j\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1}\mathbf{A}_\delta(\lambda_i\mathbf{E}_\delta - \mathbf{A}_\delta)^{-1}\mathbf{B}_\delta\mathbf{r}_i. \end{aligned}$$

Odnosno, koristeći definiciju u (3.8) dobivamo

$$\mathbb{L} = -\mathscr{O}_q\mathbf{E}_\delta\mathscr{R}_k, \quad \mathbb{L}_s = -\mathscr{O}_q\mathbf{A}_\delta\mathscr{R}_k.$$

Kako bismo dalje nastavili s teorijom Loewnerovog para, potrebno je definirati pojam regularnosti matričnog para.

Definicija 3.1.2. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kvadratne matrice. Matrični par (A, B) je* ***singularan*** *ako je $det(A - \lambda B) = 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, odnosno ako je $det(\alpha A - \beta B) = 0$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. U suprotnom, kažemo da je matrični par (A, B)* ***regularan****.*

Sada možemo predstaviti glavni rezultat vezan za interpolaciju koristeći Loewnerov par.

Teorem 3.1.3. *Pretpostavimo da je $k = q$ i neka je $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$ regularni Loewnerov par takav da nema μ_i i λ_j kao svojstvene vrijednosti.*

(a) Četvorka

$$\mathbf{E}_\delta = -\mathbb{L},\ \mathbf{A}_\delta = -\mathbb{L}_s,\ \mathbf{B}_\delta = \mathbf{V},\ \mathbf{C}_\delta = \mathbf{W} \tag{3.9}$$

čini minimalnu realizaciju funkcije koja interpolira podatke, odnosno,

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{W}(\mathbb{L}_s - s\mathbb{L})^{-1}\mathbf{V} \tag{3.10}$$

je racionalna interpolacija podataka.

(b) Ukoliko rješenje nije jedistveno, tada sva rješenje jednakog (McMillan) stupnja su dana parametrizacijom

$$\mathbf{E} = -\mathbb{L},\ \mathbf{A} = -(\mathbb{L}_s + \mathbf{LKR}),\ \mathbf{B} = \mathbf{V} - \mathbf{LK},\ \mathbf{C} = \mathbf{W} - \mathbf{KR},\ \mathbf{D} = \mathbf{K}, \tag{3.11}$$

pri čemu je parametar $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{p\times m}$.

Dokaz. (a) Pomnožimo li jednadžbu (3.5) sa s i oduzmemo od (3.7) dobivamo

$$\mathbf{M}(\mathbb{L}_s - s\mathbb{L}) - (\mathbb{L}_s - s\mathbb{L})\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{M} - s\mathbb{I})\mathbf{VR} - \mathbf{LW}(\mathbf{\Lambda} - s\mathbb{I}).$$

Množeći tu jednadžbu s kanonskim vektorom $\mathbf{e}_i$ s desna i postavljajući $s = \lambda_i$ dobivamo

$$(\mathbf{M} - \lambda_i\mathbb{I})(\mathbb{L}_s - \lambda_i\mathbb{L})\mathbf{e}_i = (\mathbf{M} - \lambda_i\mathbb{I})\mathbf{V}\mathbf{r}_i \implies$$
$$(\mathbb{L}_s - \lambda_i\mathbb{L})\mathbf{e}_i = \mathbf{V}\mathbf{r}_i \implies \mathbf{W}\mathbf{e}_i = \mathbf{W}(\mathbb{L}_s - \lambda_i\mathbb{L})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{r}_i.$$

Dakle, $\mathbf{w}_i = \mathbf{H}(\lambda_i)\mathbf{r}_i$. Ovime je pokazana tangencijalna interpolacija s desna. Kako bi se pokazalo da vrijedi interpolacija slijeva, polaznu jednadžbu pomnožimo slijeva s $\mathbf{e}_j^T$ i postavimo $s = \mu_j$. Na sličan način dobivamo $\mathbf{v}_j^* = \mathbf{l}_j^*\mathbf{H}(\mu_j)$ Kako bismo dokazali minimalnost realizacije, dovoljno je (prema Teoremu 1.3.3) dokazati da je sustav upravljiv i osmotriv. Najprije pokažimo da je sustav upravljiv. Pretpostavimo da postoji vektor $\mathbf{v}$ takav da je

$$\mathbf{v}^* \begin{bmatrix} \mathbb{L}_s - \lambda\mathbb{L} & \mathbf{V} \end{bmatrix} = 0, \qquad \text{za neki } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Po pretpostavci, jasno je da je $\mathbf{v}$ svojstveni vektor Loewnerovog para, te $\mathbf{v}^*\mathbb{L}_s = \lambda\mathbf{v}^*\mathbb{L}$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Iz $\mathbf{v}^*\,\mathbf{V} = 0$ i Propoziciji 3.1.1 dobivamo da je

$$\mathbf{v}^*\mathbb{L}_s = v^*\mathbb{L}\mathbf{\Lambda} \implies \mathbf{v}^*\mathbb{L}(\lambda\mathbb{I} - \mathbf{\Lambda}) = 0.$$

Slijedi da je λ u spektru od $\mathbf{\Lambda}$ ili $\mathbf{v}^*\mathbb{L}_s = \mathbf{v}^*\lambda\mathbb{L} = 0$. Oba slučaja su kontradikcija s uvjetom da je par $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$ regularan. Konačno, kako bismo dokazali da je realizacija upravljiva, potrebno je da je matrica $\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbb{L} & \mathbf{V} \end{bmatrix}$ punog ranga. Kada to ne bi vrijedilo, onda bi postajao vektor $\mathbf{v}$ takav da je $\mathbf{v}^* \begin{bmatrix} -\mathbb{L} & \mathbf{V} \end{bmatrix} = 0$. Prema Propoziciji 3.1.3 vidimo da je to kontradikcija s regularnošću Loewnerovog para. Dakle, dana realizacija je upravljiva. Osmotrivost se pokazuje na sličan način te je time dokazano da je realizacija minimalna.

(b) Za $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p\times m}$, jednadžbe (3.5) i (3.7) mogu biti zapisane kao

$$\mathbf{M}\mathbb{L} - \mathbb{L}\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{V} - \mathbf{LK})\mathbf{R} - \mathbf{L}(\mathbf{W} - \mathbf{KR}),$$
$$\mathbf{M}(\mathbb{L}_s + \mathbf{LKR}) - (\mathbb{L}_s + \mathbf{LKR})\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}(\mathbf{V} - \mathbf{LK})\mathbf{R} - \mathbf{L}(\mathbf{W} - \mathbf{KR})\mathbf{\Lambda}.$$

Ponavljanjem postupka kao u (a) za nove vrijednosti

$$\bar{\mathbb{L}}_s = \mathbb{L}_s + \mathbf{LKR},\ \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V} - \mathbf{LK},\ \bar{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \mathbf{KR}$$

dobivamo traženi rezultat.

□

3.2 Slučaj suvišnih podataka

Razmotrimo slučaj kada je dano više podataka nego što je potrebno, što je i očekivano u stvarnosti. To znači da ne vrijedi pretpostavka regularnosti Loewnerovog para $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$. To jest, kada bismo izvršili direktnu interpolaciju, sustav ne bi bio minimalnog stupnja već znatno većeg. Kao što je pokazano u [4], u ovom slučaju, problem ima rješenje ukoliko vrijedi

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \xi\mathbb{L} - \mathbb{L}_s \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{L}_s \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{L}_s \end{bmatrix} = r \tag{3.12}$$

za neki $r \in \mathbb{N}$ i za sve $\xi \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_q\}$. Promotrimo, sada, *dekompoziciju na singularne vrijednosti (SVD)*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{L}_s \end{bmatrix} = \mathbf{Y}\Sigma_l\tilde{\mathbf{X}}^T, \quad \begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{L}_s \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}\Sigma_r\mathbf{X}^T, \tag{3.13}$$

pri čemu su $\Sigma_l, \Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{q\times r}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k\times r}$.

Teorem 3.2.1. *Neka su matrice $\mathbf{E}_\delta, \mathbf{A}_\delta \in \mathbb{R}^{r\times r}, \mathbf{B}_\delta \in \mathbb{R}^{r\times m}, \mathbf{C}_\delta^{p\times r}$, dane s*

$$\mathbf{E}_\delta = -\mathbf{Y}^T\mathbb{L}\mathbf{X},\ \mathbf{A}_\delta = -\mathbf{Y}^T\mathbb{L}_s\mathbf{X},\ \mathbf{B}_\delta = \mathbf{Y}^T\mathbf{V},\ \mathbf{C}_\delta = \mathbf{W}\mathbf{X}. \tag{3.14}$$

Tada četvorka $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{A}_\delta, \mathbf{B}_\delta, \mathbf{C}_\delta)$ čini jednu realizaciju stupnja $\nu = \operatorname{rank}\mathbb{L}$ koja interpolira dane podatke. Matrice $\mathbf{E}_\delta, \mathbf{A}_\delta, \mathbf{B}_\delta, \mathbf{C}_\delta$ nazivamo projicirane matrice.

Nadalje, u slučaju egzaktnih podataka, sljedeća propozicija opisuje jedno svojstvo Loewnerovih matrica.

Propozicija 3.2.2. *Iz gornje konstrukcije dobivamo*

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbb{L} = \mathbb{L},\ \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbb{L}_s = \mathbb{L}_s,\ \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{V} = \mathbf{V}, \tag{3.15}$$

$$\mathbb{L}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbb{L},\ \mathbb{L}_s\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbb{L}_s,\ \mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{W}. \tag{3.16}$$

Propozicija 3.2.3. *Originalni par $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$ i projicirani par $(\mathbf{A}_\delta, \mathbf{E}_\delta)$ imaju iste netrivijalne svojstvene vrijednosti.*

Dokaz. Neka je $(\mathbf{z}, \lambda)$ svojstveni par od $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$. Tada $\mathbb{L}_s\mathbf{z} = \lambda\mathbb{L}\mathbf{z} \implies$

$$\mathbb{L}_s\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{z} = \lambda\mathbb{L}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{z} \implies \underbrace{\mathbf{Y}^T\mathbb{L}_s\mathbf{X}}_{-\mathbf{A}_\delta}\mathbf{X}^T\mathbf{z} = \lambda\underbrace{\mathbf{Y}^T\mathbb{L}\mathbf{X}}_{-\mathbf{E}_\delta}\mathbf{X}^T\mathbf{z}.$$

Prema tome je $(\mathbf{X}^T\mathbf{z}, \lambda)$ svojstveni par od $(\mathbf{A}_\delta, \mathbf{E}_\delta)$.

Analogno se vidi da ako je $(\mathbf{z}, \lambda)$ svojstveni par od $(\mathbf{A}_\delta, \mathbf{E}_\delta)$, tada je $(\mathbf{X}\mathbf{z}, \lambda)$ svojstveni par od $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$. □

Sljedeći rezultat pokazuje da projekcije ne moraju biti nužno odabrane kao što su $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ definirane u (3.13).

Propozicija 3.2.4. *Neka su $\mathbf{\Phi}$ i $\mathbf{\Psi}$ takvi da su $\mathbf{X}^T\mathbf{\Phi}$ i $\mathbf{\Psi}^T\mathbf{Y}$ kvadratne i regularne matrice. Tada,*

$$(\mathbf{Y}^T\mathbb{L}\mathbf{X}, \mathbf{Y}^T\mathbb{L}_s\mathbf{X}, \mathbf{Y}^T\mathbf{V}, \mathbf{W}\mathbf{X}) \quad i \quad (\mathbf{\Phi}^T\mathbb{L}\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}^T\mathbb{L}_s\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}^T\mathbf{V}, \mathbf{W}\mathbf{\Psi})$$

su ekvivalentne realizacije istog sustava.

Dokaz. Neka je $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{N\times k}$ (3.15) implicira da je $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbb{L} = \mathbf{\Phi}^T\mathbb{L}$. Slično, neka je $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{N\times k}$, (3.16) implicira da je $\mathbb{L}\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{\Psi} = \mathbb{L}\mathbf{\Psi}$. Kombinirajući te dvije relacije dobivamo

$$\underbrace{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{Y}}_{\mathbf{T}_1}\mathbf{Y}^T\mathbb{L}\mathbf{X}\underbrace{\mathbf{X}^T\mathbf{\Psi}}_{\mathbf{T}_2} = \mathbf{\Phi}^T\mathbb{L}\mathbf{\Psi} \implies \mathbf{T}_1\mathbf{Y}^T\mathbb{L}\mathbf{X}\mathbf{T}_2 = \mathbf{\Phi}^T\mathbb{L}\mathbf{\Psi}.$$

Slično, imamo

$$\mathbf{T}_1\mathbf{Y}^T\mathbb{L}_s\mathbf{X}\mathbf{T}_2 = \mathbf{\Phi}^T\mathbb{L}_s\mathbf{\Psi},\ \mathbf{T}_1\mathbf{Y}^T\mathbf{V} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{V},\ \mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{T}_2 = \mathbf{W}\mathbf{\Psi}.$$

Stoga, regularnost matrica $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$ implicira da su pripadne četvorke ekvivalentne. □

U konstrukciji realizacije Loewnerovim algoritmom, član $\mathbf{D}$ je ugrađen u ostale matrice realizacije. Ekstrakcija člana $\mathbf{D}$ zahtjeva svojstvenu dekompoziciju Loewnerovog para $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$ (vidi Primjer 3.4.1).

Realne Loewnerove matrice

Uz pretpostavku da je nepoznati sustav realan, kako bismo dobili rješenje koje nema kompleksne vrijednosti, potrebno je da je dani skup podataka zatvoren na konjugiranje. Također je bitno da su podaci poredani tako članovi konjugiranih parova dolaze jedan za drugim . Tada $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \mathbf{W}, \mathbf{V}$ sadrže kompleksno konjugirane podatke. U tu svrhu, potrebno je koristiti blok dijagonalnu matricu $\mathbf{J}$ koja sadrži blokove $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ na dijagonali. Za realne podatke, blok se sastoji samo od 1×1 matrice s vrijednosti 1. Cilj je dobiti $\mathbb{L}^{\mathbf{R}}, \mathbb{L}_s^{\mathbf{R}}$ s realnim vrijednostima. Najprije formiramo $\mathbb{L}^{\mathbf{C}}, \mathbb{L}_s^{\mathbf{C}}$ s kompleksnim vrijednostima koje zatim množimo s $\mathbf{J}, \mathbf{J}^*$:

$$\mathbb{L}^{\mathbf{R}} = \mathbf{J}^*\mathbb{L}^{\mathbf{C}}\mathbf{J},\ \mathbb{L}_s^{\mathbf{R}} = \mathbf{J}^*\mathbb{L}_s^{\mathbf{C}}\mathbf{J}.$$

3.3 Polovi i nule

Pretpostavimo da su neke od vrijednosti $(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_j)$ u (3.3) i (3.2) beskonačnost ili nule. To znači da pripadna točka interpolacije predstavlja pol ili nultočku interpolacijskog polinoma kojeg želimo konstruirati. Taj uvjet se lako može integrirati u Loewnerov okriv s prikladnim definicijama $\mathbf{r}_i, \mathbf{w}_i$ ili $\mathbf{l}_j, \mathbf{v}_j$. U prvom slučaju $\mathbf{r}_i = 0$ ili $\mathbf{l}_j = 0$ povlači da je λ_i ili μ_j pol, dok slučaj $\mathbf{w}_i = 0$ ili $\mathbf{v}_j = 0$ povlači da je λ_i ili μ_j nultočka interpolacijske funkcije.

Pretpostavimo, na primjer, da za dane podatke vrijedi $\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$, za $i = 1, \ldots, k$, odnosno $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Tada, iz (3.4) i (3.6) dobivamo $\mathbb{L}_s = \mathbb{L}\mathbf{\Lambda}$. Iz toga slijedi da su λ_i, $i = 1, \ldots, k$, svojstvene vrijednosti para $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$ te su, uz pretpostavku da je $\mathbb{L}$ regularna, polovi interpolacijske funkcije

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{W}(\mathbb{L}_s - s\mathbb{L})^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{W}\mathbb{L}^{-1}(s\mathbb{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{res}_i}{s - \lambda_i}$$

gdje $\mathbf{res}_i = (\mathbf{w}\mathbb{L}^{-1})_i \mathbf{v}_i^T$ je rezidual koji odgovara polu λ_i.

3.4 Algoritam

Sada možemo predstaviti algoritam koji, za dane podatke, daje aproksimaciju reducirane dimenzije

---

Algoritam 1: (Loewnerov algoritam)

- **Ulaz:** $(\mu_i, \mathbf{l}_i, \mathbf{v}_i)$, $i = 1, \dots, q$ i $(\lambda_j, \mathbf{r}_j, \mathbf{w}_j)$, $j = 1, \dots, k$.

1. Izgradi Loewnerov par $(\mathbb{L}_s, \mathbb{L})$ prema (3.6) i (3.4). Neka su te matrice dimenzija $q \times k$.
2. Izračunaj dimenziju minimalne realizacije i pripadni (McMillan) stupanj:
   (a) Ako vrijede uvjeti iz (3.12), r je dimenzija pripadajuće realizacije.
   (b) U tom slučaju $r = \operatorname{rank} \mathbb{L}$ je (McMillanov) stupanj pripadajuće realizacije.
3. Prema (3.13), odredi matrice $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ te četvorku $\mathbf{E}_\delta, \mathbf{A}_\delta, \mathbf{B}_\delta, \mathbf{C}_\delta$ koristeći (3.14).
4. Ako $r = \operatorname{rank} \mathbb{L}$, dobivena transfer funkcija je strogo prava.
5. Ako je $r > \operatorname{rank} \mathbb{L}$, potrebno je odrediti postoji li $\mathbf{D}$ ili polinomni član. Odredi generalizirane svojstvene vrijednosti para $(\mathbf{A}_\delta, \mathbf{E}_\delta)$.
   (a) Ukoliko je svojstvena vrijednost u beskonačnost mnogostruka i pripadni svojstveni potprostor iste dimenzije, $\mathbf{D}$ postoji.
   (b) Ukoliko postoji Jordanovih blokova u beskonačnosti, tada postoji polinomni član.

Primjer 3.4.1. *Rekonstruirajmo funkciju*

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

danu sljedećim mjerenjima:

$$\mathbf{\Lambda} = diag \begin{bmatrix} i & -i & 3i & -3i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2i & -2i & 4i & -4i \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{w}_1 = \overline{\mathbf{w}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} - \frac{i}{5} & 2 \\ -\frac{1}{5} - \frac{2i}{5} & -i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_3 = \overline{\mathbf{w}}_4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{13} - \frac{3i}{13} & 2 \\ -\frac{1}{13} - \frac{2i}{39} & -\frac{i}{3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = \overline{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} - \frac{i}{4} & 2 \\ -\frac{1}{8} - \frac{i}{8} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 = \overline{\mathbf{v}}_4 = \begin{bmatrix} \frac{11}{10} - \frac{i}{5} & 2 \\ -\frac{1}{20} - \frac{i}{40} & -\frac{i}{4} \end{bmatrix}.$$

Za $\mathbf{R} = \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *dobivamo sljedeće tangencijalne podatke*

$k = 4,$
$\{\lambda, \mathbf{r}, \mathbf{w}\} = \{(i, \mathbf{e}_1, \mathbf{H}(i)\mathbf{e}_1), (-i, \mathbf{e}_1, \mathbf{H}(-i)\mathbf{e}_1), (3i, \mathbf{e}_2, \mathbf{H}(3i)\mathbf{e}_2), (-3i, \mathbf{e}_2, \mathbf{H}(-3i)\mathbf{e}_2)\}$
$q = 4,$
$\{\mu, \mathbf{l}, \mathbf{v}\} = \{(2i, \mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_1^T\mathbf{H}(2i)), (-2i, \mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_1^T\mathbf{H}(-2i)), (4i, \mathbf{e}_2^T, \mathbf{e}_2^T\mathbf{H}(4i)), (-4i, \mathbf{e}_2^T, \mathbf{e}_2^T\mathbf{H}(-4i))\}.$

Iz tih podataka dobivamo kompleksne matrice $\mathbb{L}^{\mathbf{C}}, \mathbb{L}_s^{\mathbf{C}}, \mathbf{W}^{\mathbf{C}}, \mathbf{V}^{\mathbf{C}}$. Kako bismo dobili realne matrice, koristimo matricu $\mathbf{J} = \mathrm{blkdiag}(\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{J}})$[1], gdje je $\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ te računamo

$$\mathbb{L}^{\mathbf{R}} = \mathbf{J}^*\mathbb{L}^{\mathbf{C}}\mathbf{J}, \mathbb{L}_s^{\mathbf{R}} = \mathbf{J}^*\mathbb{L}_s^{\mathbf{C}}\mathbf{J}, \mathbf{W}^{\mathbf{R}} = \mathbf{W}^{\mathbf{C}}\mathbf{J}, \mathbf{V}^{\mathbf{R}} = \mathbf{J}^*\mathbf{V}^{\mathbf{C}}.$$

kako bismo dobili

$$\mathbb{L}^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & -\frac{1}{50} & 0 & 0 \\ \frac{2}{25} & \frac{21}{100} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{L}_s^{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 4 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{25} & \frac{2}{25} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}^{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} & 4 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}^{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

[1]MATLAB funkcija koja konstruira blok dijagonalnu matricu

Odmah slijedi da je rank $\mathbb{L}^{\mathbf{R}} = 2$, rank $\mathbb{L}_s^{\mathbf{R}} = 2$, dok je rang od $\begin{bmatrix} \mathbb{L}^{\mathbf{R}} & \mathbb{L}_s^{\mathbf{R}} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} \mathbb{L}^{\mathbf{R}} \\ \mathbb{L}_s^{\mathbf{R}} \end{bmatrix}$ jednak 3. Dakle, dimenzija minimalne realizacije (uključujući član $\mathbf{D}$) je jednaka tri, dok je McMillanov stupanj jednak 2. Dakle, moramo projicirati realizaciju (koja je trenutno reda 4) na realizaciju reda 3. Odaberemo projekcije

$$\mathbf{Y}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prema (3.14) dobivamo

$$\mathbf{E}_\delta = \begin{bmatrix} \frac{8}{25} & -\frac{4}{25} & \frac{2}{25} \\ -\frac{71}{150} & -\frac{1}{75} & -\frac{173}{300} \\ \frac{7}{30} & \frac{2}{15} & \frac{31}{60} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{16}{25} & \frac{8}{25} & -\frac{4}{25} \\ \frac{32}{25} & -\frac{16}{25} & \frac{8}{25} \\ -\frac{24}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{21}{5} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{21}{20} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{4} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{28}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{22}{5} \\ -\frac{22}{15} & \frac{26}{15} & \frac{22}{15} \end{bmatrix}.$$

Kako bismo izlučili član $\mathbf{D}$, nastavljamo na sljedeći način. Par $(\mathbf{A}_\delta, \mathbf{E}_\delta)$ ima dvije konačne svojstvene vrijednosti $-2, 0$ te beskonačnost. Matrice desnih i lijevih generaliziranih svojstvenih vektora matričnog para (A, B) su dane s

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -13 & 1 & -7 \\ -14 & 2 & -11 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$\mathbf{T}_2\mathbf{E}_\delta\mathbf{T}_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{36}{25} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}_2\mathbf{A}_\delta\mathbf{T}_1 = \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{72}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -72 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{C}_\delta\mathbf{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{36}{5} & 0 & 18 \\ \frac{18}{5} & 2 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}_2\mathbf{B}_\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \hline 8 & 16 \end{array}\right].$$

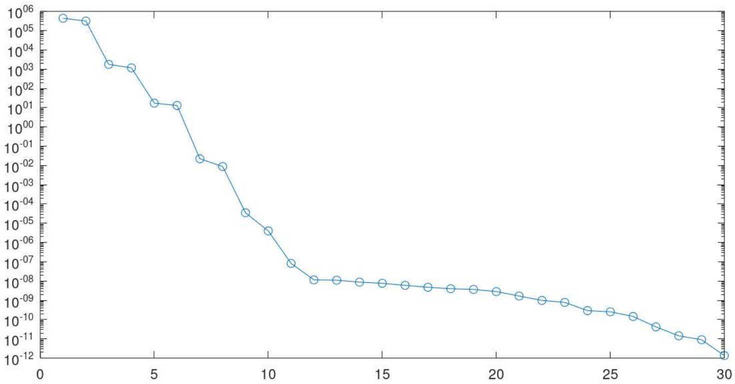
Invertiranjem postupka s početka poglavlja kojim smo originalno uklonili član **D**, dobivamo minimalnu realizaciju reda 2 koja je dana s

$$\mathbf{E} = -\mathrm{diag}\left[\frac{36}{25}, \frac{1}{2}\right], \ \mathbf{A} = \mathrm{diag}\left[\frac{72}{25}, 0\right], \ \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\frac{36}{5} & 0 \\ \frac{18}{5} & 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 18 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.5 Numerički primjeri

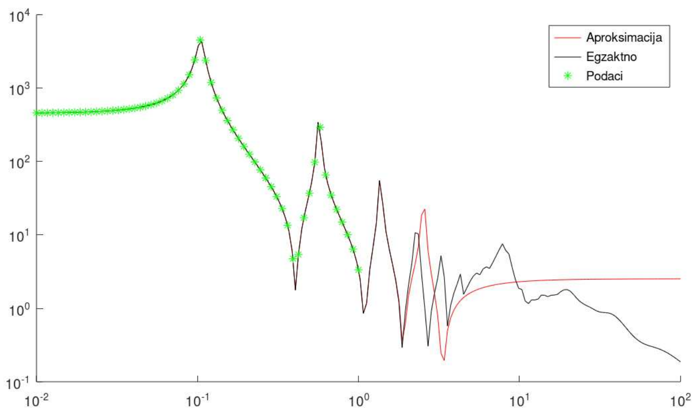
Uklještena šipka

Promotrimo model uklještene šipke dobiven prostornom diskretizacijom pripadne parcijalne diferencijalne jednadžbe (vidi [8]). Ulaz u sustav predstavlja sila nanešena na slobodni kraj šipke, a izlaz predstavlja rezultirajući pomak. Originalni SISO sustav je reda $n = 348$. Najprije odaberemo 60 logaritamski razmaknutih interpolacijskih točaka $(s_i)_i$ na intervalu $[0.01, 1]i$. Nadalje, uzmemo vrijednosti funkcije transfera danog sustava $\mathbf{H}(\mathbf{s}) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B \in \mathbb{C}$ u tim točkama. Uz pretpostavku da su polazni podaci dani na prethodno opisani način, htjeli bismo rekonstruirati model nižeg reda koji aproksimira transfer funckiju originalnog sustava. Slika 3.1 predstavlja singularne vrijednosti Loewnerove matrice $\mathbb{L} \in \mathbb{C}^{30\times 30}$ koju konstruiramo iz danih podataka. Uočimo da, ukoliko uzmemo redukciju reda 12, dobivamo aproksimaciju matrice s greškom 10^{-8}.



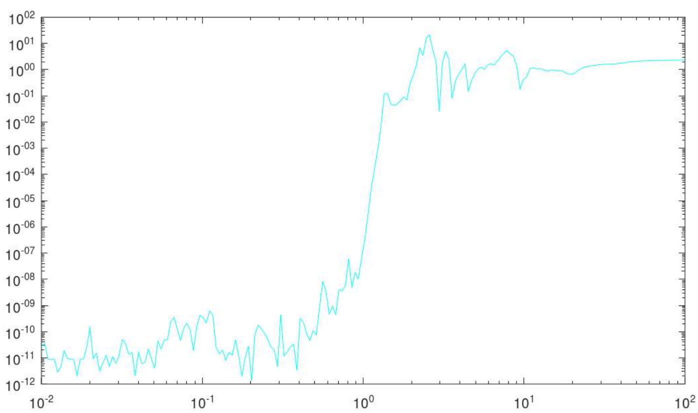
Slika 3.1: Singularne vrijednosti Loewnerove matrice

Sljedeće usporedimo frekvencijske odzive originalnog sustava reda 348 i aproksimacijskog sustava. Na slici 3.2 vidimo da je sustav dobro aproksimiran unutar raspona polaznih podataka.



Slika 3.2: Frekvencijski odzivi

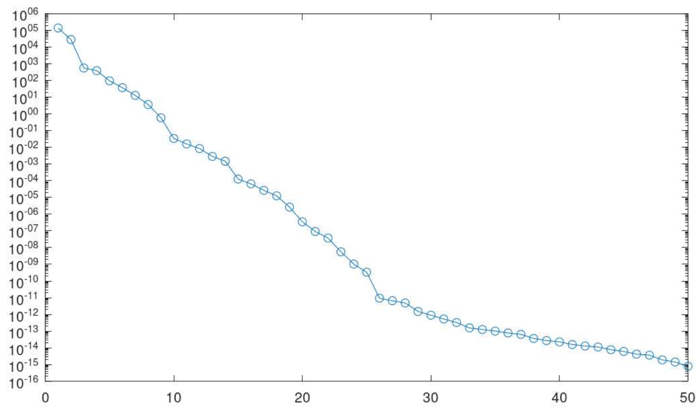
Na Slici 3.3 je prikazana greška frekvencijskih odziva. Primijetimo da relativna greška aproksimacije stagnira oko 10^{-10} za niže frekvencije, a zatim se postupno povećava kako izlazimo iz područja polaznih podataka.



Slika 3.3: Greška aproksimacije u frekvencijskoj domeni

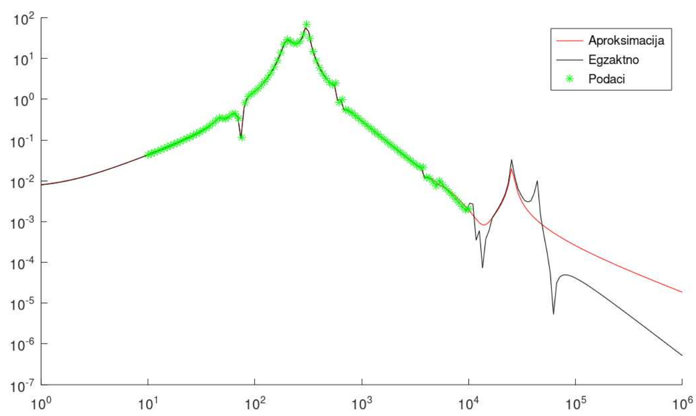
Model CD-player

Promotrimo model CD-playera iz [8]. Mehanizam se sastoji od kraka na kojemu je leća postavljena pomoću dvije vodoravne lisnate opruge. Rotacija koju vrši krak u horizontalnoj razvnini omogućuje očitavanje spiralnih diskova i ovješena leća se koristi za fokusiranje točke na disku (vidi Sliku 9 u [8]). Originalni sustav je reda $n = 120$ te ima $m = 2$ ulaza i $p = 2$ izlaza. Najprije odaberemo 100 logaritamski razmaknutih točaka unutar intervala $[10^1, 10^5]i$. Slika 3.4 predstavlja singularne vrijednosti matrice $\begin{bmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{L}_s \end{bmatrix}$. Uočimo da, ukoliko uzmemo redukciju reda 25, dobivamo aproksimaciju matrice s greškom 10^{-11}.



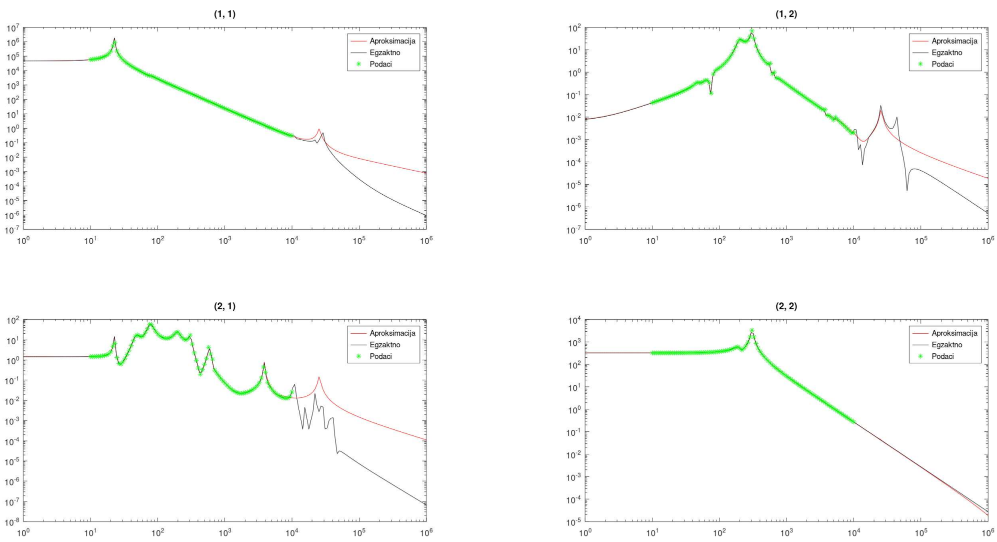
Slika 3.4: Singularne vrijednosti Loewnerovog para

Sljedeće, usporedimo frekvencijski odziv originalnog sustava reda 120 s aproksimacijom koja je reda 25. Na Slici 3.5 prikazan je odnos frekvencijskih odziva originalnog sustava i aproksimacije koji pripada drugom ulazu i prvom izlazu na intervalu $(10^0, 10^6)i$.



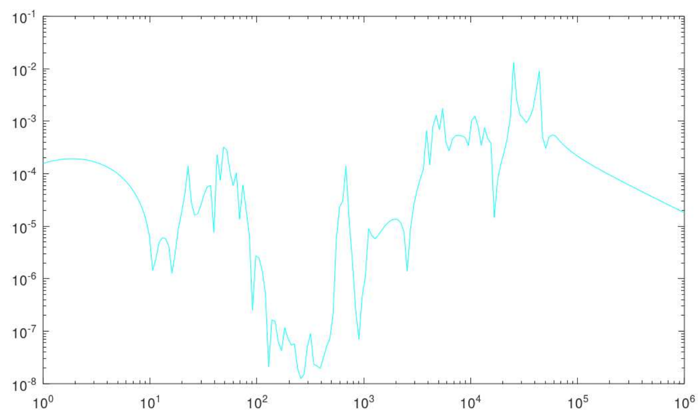
Slika 3.5: Frekvencijski odziv (2, 1)

Za sve parove ulaza/izlaza, primijetimo kako je odziv dobro aproksimiran u području iz kojega su uzeti polazni podaci (Slika 3.6).



Slika 3.6: Frekvencijski odzivi za sve parove ulaz/izlaz

Posebno, na Slici 3.7 možemo vidjeti apsolutnu razliku frekvencijskih odziva koji pripada paru ulaz/izlaz (2, 1).



Slika 3.7: Greška aproksimacije u frekvencijskoj domeni za (2, 1)

Bibliografija

[1] A.C.Antoulas, A.C.Ionita i S.Lefteriu, *On two-variable rational interpolation*, Linear Algebra and its Applications **436** (2012), br. 8, 2902–2912.

[2] A.C.Antoulas i B.D.Q.Anderson, *On The Scalar Rational Interpolation Problem*, IMA Journal of Mathematical Control & Information **3** (1986), br. 2-3, 61–79.

[3] A.C.Ionita i A.C.Antoulas, *Data-driven parametrized model reduction in the Loewner framework*, SIAM **36** (2014), br. 3, 12751–12752.

[4] A.J.Mayo i A.C.Antoulas, *A framework for the solution of the generalized realization problem*, Linear Algebra and its Applications **425** (2007), br. 2-3, 635–648.

[5] G.E. Dullerud i F.G. Paganini, *A Course in Robust Control Theory*, Springer, 2010.

[6] L.Knockaert, *A simple and accurate algorithm for barycentric rational interpolation*, IEEE **15** (2008), 156–157.

[7] P.Benner, M.Ohlberger, A.Cohen, K.E.Wilcox i K.Wilcox, *Model Reduction and Approximation: Theory and Algorithms*, SIAM, 2017.

[8] Y.Chahlaoui i P.V.Dooren, *A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems*, 2002, `http://slicot.org/20-site/126-benchmark-examples-for-model-reduction`.

Sažetak

Ovaj rad se bavi redukcijom modela vođenom podacima koja koristi Loewnerovu matricu i njena svojstva.

U prvom poglavlju su definirani osnovni pojmovi vezani uz teoriju sustava te su navedeni neki glavni rezultati te teorije.

U drugom poglavlju definira se problem racionalne interpolacije. U nastavku su opisana glavna svojstva i rezultati vezani za Loewnerovu matricu . Na kraju poglavlja proučena je veza Loewnerove matrice i iz nje izvedene racionalne funkcije te je izvedena greška aproksimacije interpolacijske funkcije.

U posljednjem poglavlju je obrađen općenitiji slučaj tangencijalne interpolacije i definiran je pojam Loewnerov par. Naveden je općeniti algoritam za redukciju modela pomoću Loewnerovog para. Također su pokazani rezultati primjene algoritma na sustave većih dimenzija čiji su podaci javno dostupni u [8].

Summary

This thesis deals with the processing of model reduction using the Loewner matrix and its properties.

The first chapter defines the basic concepts related to system theory and presents some main results of that theory.

The second chapter defines the problem of rational interpolation. The main properties and results related to the Loewner matrix are described. At the end of the chapter, the connection between the Loewner matrix and the rational function is studied, and the error of approximation of the interpolation function is derived.

In the last chapter, a more general case of tangential interpolation is treated and the Loewner pair is defined.A generalized algorithm for model reduction using the Loewner pair is presented. Finally, numerical results demonstrate the effectiveness of the algorithm by applying it to publicaly available [8] systems of larger dimension.

Životopis

Rođen sam 22. svibnja 1996. godine u Osijeku. Pohađao sam Osnovnu školu Mladost u Osijeku, a srednjoškolsko obrazovanje sam stekao u srednjoj školi III. gimnazija Osijek. Nakon završetka programa gimnazije 2015. godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Po završetku preddiplomskog studija 2018. godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu.