

# Foton-mlaz kutne korelacije u proton-proton i proton-jezgra sudarima na visokim energijama

---

**Vivoda, Eric Andreas**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:391607>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-21**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Eric Andreas Vivoda

FOTON-MLAZ KUTNE KORELACIJE U  
PROTON-PROTON I PROTON-JEZGRA  
SUDARIMA NA VISOKIM ENERGIJAMA

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Eric Andreas Vivoda**

Diplomski rad

**Foton-mlaz kutne korelacije u  
proton-proton i proton-jezgra  
sudarima na visokim energijama**

Voditelj diplomskog rada: doc.dr.sc. Sanjin Benić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2021.

Zahvaljujem se svojoj obitelji i svima koji su svojim postojanjem omogućili da postanem to što jesam.

Posebno bih ovdje istaknuo svog mentora Sanjina koji mi je u svakom trenutku bio na raspolagju tijekom izrade ovog rada, prijatelja Antona jer mi nesebično prenosi svoje bogato znanje već dugi niz godina i, naravno, moju Alisu bez koje bi sve ovo bilo nemoguće. Od srca vam hvala. Ovo je za vas i zbog vas.

## Sažetak

Dvočestične kutne korelacije u proton-proton ( $p+p$ ) te proton-jezgra ( $p+A$ ) sudarima na visokim energijama nose potencijalni potpis kolektivne valne funkcije gluona unutar protona ili jezgre poznate pod nazivom Staklasti kondenzat boje. U ovom će se radu promatrati kutne korelacije između fotona i mlaza, odnosno visokoenergetskog kvarka ili antikvarka nastalih u  $p+p$  odnosno  $p+A$  sudarima na visokim energijama i centralnim rapiditetima gdje su relevantni udjeli impulsa partona unutar projektila i mete mali. Prvo ćemo opisati formalizam Staklastog kondenzata boje te ćemo nakon toga objasniti kako doći do udarnog presjeka za produkciju kvarka, antikvarka i fotona. Taj će nam udarni presjek biti početna točka da bismo došli do udarnog presjeka za produkciju kvarka i fotona. Na analogni način, krećući od udarnog presjeka za produkcija kvarka i antikvarka izvesti ćemo udarni presjek za produkciju kvarka. Unutar aproksimacije vodećeg logaritma numerički ćemo demonstrirati nuklearnu ovisnost foton-kvark udarnog presjeka o azimutalnom kutu između izlaznih čestica.

Ključne riječi: Staklasti kondenzat boje, Fizika malog  $x$ -a, Kutne korelacije

# Photon-Jet Angular Correlations in Proton-Proton and Proton-Nucleus Collisions at High Energies

## Abstract

Two-particle angular correlations in proton-proton (p+p) and proton-nucleus (p+A) collisions at high energies may indicate collective nature of gluons within proton or nucleus known as Color Glass Condensate. This thesis explores angular correlations between photon and jet, i.e. high-energy quark or antiquark produced in p+p or p+A collisions at high energies and central rapidities where relevant momentum fractions of partons inside projectile and target are small. Our first task is to define the framework of Color Glass Condensate, and then describe how one could calculate differential cross section for production of quark, antiquark and photon. This cross section will be our starting point in subsequent calculation of cross section for photon-quark production. In the same fashion, starting from differential cross section for quark-antiquark production, we will derive cross section for quark production. We will also demonstrate nuclear dependence of photon-quark cross section on the azimuthal angle in the leading-log approximation. Those calculations will be done numerically.

Keywords: Color Glass Condensate, Small x Physics, Angular Correlations

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Kvantna kromodinamika . . . . .	4
1.1.1	Asimptotska sloboda . . . . .	5
1.1.2	Zatočenje boje . . . . .	6
1.2	Duboko neelastično raspršenje . . . . .	7
1.2.1	Fizika malog $x$ kao Fizika visokih energija . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Staklasti kondenzat boje</b>	<b>12</b>
2.1	Gusto-rijetka aproksimacija . . . . .	15
2.2	Yang-Mills jednadžbe . . . . .	16
2.3	Diferencijalni udarni presjek za produkciju $q\bar{q}\gamma$ . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Diferencijalni udarni presjek za <math>\bar{q}\gamma</math> produkciju</b>	<b>22</b>
3.1	Matrični element za $q\bar{q}\gamma$ emisiju u granici $q \cdot k_\gamma \rightarrow 0$ . . . . .	22
3.2	Matematički <i>intermezzo</i> : integral po faznom prostoru kvarka . . . . .	30
3.3	Račun diferencijalnog udarnog presjeka za $\bar{q}\gamma$ produkciju . . . . .	34
3.3.1	Fragmentacijski doprinos $d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{frag}$ . . . . .	34
3.3.2	Direktni doprinos $d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{dir}$ . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Diferencijalni udarni presjek za <math>\bar{q}</math> produkciju</b>	<b>39</b>
4.1	Matrični element za $q\bar{q}$ emisiju u granici $q \cdot p \rightarrow 0$ . . . . .	39
4.2	Fragmentacijski doprinos $d\sigma_{\bar{q}}^{frag}$ . . . . .	44
4.3	Direktni doprinos $d\sigma_{\bar{q}}^{dir}$ . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Model igračke</b>	<b>46</b>
5.1	Numerički rezultati . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>49</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Grupa SU(3)</b>	<b>50</b>
<b>B</b>	<b>Koordinate svjetlosnog stošca</b>	<b>51</b>

<b>C</b>	<b>Formula za skalarni produkt <math>q \cdot k_\gamma</math></b>	<b>53</b>
<b>D</b>	<b>2d Fourierov transformat logaritma</b>	<b>55</b>
	<b>Literatura</b>	<b>56</b>



# 1 Uvod

Tijekom druge polovice 20. stoljeća naglo je procvatala moderna fizika elementarnih čestica. To su vrijeme fizičari poput Feynmana i Wignera uvelike posvetili razvijanju matematičko-fizičkog alata pomoću kojeg se mogu objasniti mnogi fenomeni na kvantnoj razini, *kvantne teorije polja*. Postoji povećani broj legitimnih kvantnih teorija polja koje se koriste u struci od kojih svakako vrijedi spomenuti skalarne teorije koje su zaslužne za opis Higgsovog bozona i ostalih skalarnih čestica. Međutim, daleko su najvišu slavu stekle *kvantna elektrodinamika* i *kvantna kromodinamika*. Kvantna elektrodinamika je teorija koja opisuje kako se elektromagnetizam ponaša na najsitnijim skalama. Kod ove je teorije posebno to što je ona nevjerojatno precizna i točna. Naime, eksperimentalno izmjeren *giromagnetski faktor* elektrona se tek na četvrtoj decimali [1] razlikuje od onog koji izračunamo u kvantnoj elektrodinamici<sup>1</sup>. Također, ne treba ni spomenuti da se promatranjem klasičnog limesa teorije svodimo na Coulombov potencijal.

Iako iznimno elegantna, kvantna elektrodinamika ne može objasniti zbivanja u atomskoj jezgji i hadronima gdje vladaju pravila kvantne kromodinamike. Kvantna kromodinamika je teorija koja opisuje jaku silu, tj. silu koja drži protone i ostale hadrone na okupu i ona je, očekivano, puno manje istražena od kvantne elektrodinamike. Glavni alat teorije polja je perturbativni račun koji se provodi uz pomoć Feynmanovih dijagrama. Grubo govoreći, neka je teorija perturbativna ako viši redovi računa smetnje konačnoj amplitudi doprinose manje od nižih redova. Mjera perturbativnosti je tipično jačina konstante veze neke teorije. Ako je konstanta veze veća od jedan viši redovi doprinose više nego niži te nema smisla provoditi račun smetnje. Još jedno zanimljivo svojstvo je to da konstante veza ovise o energijskoj skali na kojoj vršimo eksperiment (više će o tome biti riječ u idućem odjeljku) te će stoga neke teorije biti perturbativne u nekom režimu, a neupotrebljive u nekom drugom režimu. Na primjer, kvantna elektrodinamika gubi svojstvo perturbativnosti za energije reda veličine  $10^{246}$  GeV-a [2]. Kako se radi o energiji većoj od ukupne mase pohranjene u vidljivom Svemiru, ne moramo se bojati za perturbativnost kvantne elektrodinamike. Međutim, kod kromodinamike je priča malo drukčija. Kvantna kromodinamika je perturbativna za visoke energije, ali nije perturbativna na niskim energijama. To je

---

<sup>1</sup>Radi se o vrijednosti giromagnetskog faktora dobivenog u prvom redu računa smetnje. Dodatne popravke bi rezultirale još većom točnošću.

jako zanimljivo svojstvo jer je to jedina teorija čiji lagranžijan imamo, ali nismo u stanju vršiti račune na proizvoljnim skalama. Iz tog se razloga kvantna kromodinamika dijeli u dvije skupine:

1. Perturbativna kvantna kromodinamika koja se bavi hadronima koji su ubrzani na jako visoke energije te gdje se može koristiti standardna procedura računa smetnje
2. Neperturbativna kvantna kromodinamika koja se bavi s hadronima na niskoj energiji.

Mi ćemo u ovom radu raditi u formalizmu *Staklastog kondenzata boje* (eng. Color Glass Condensate, CGC). To je teorijski aspekt perturbativne kromodinamike u kojem se pretpostavlja da su ubrzani hadroni u većoj mjeri sastavljeni od gluona [3]. Hipoteza da je CGC univerzalno stanje materije svakog hadrona na dovoljno visokim energijama se aktivno istražuje na današnjim sudarivačima RHIC-u (Relativistic Heavy Ion Collider) i LHC-u (Large Hadron Collider), te čini jedan od primarnih ciljeva budućeg EIC-a (Electron-Ion Collider). Temeljna predikcija CGC-a je postojanje nove dinamički generirane skale kromodinamike, tzv. saturacijske skale  $Q_S$  koja je grubo govoreći proporcionalna gustoći gluona unutar hadrona [3]. Glavni je zadatak ovog rada proučiti proces koji bi mogao nositi potpis u eksperimentalnom potvrđivanju postojanja takvog stanja materije. Naime, mi ćemo promatrati foton-mlaz (odnosno visoko-energetski kvark) kutne korelacije u p+p odnosno p+A sudarima u sustavu centra impulsa i u ultrarelativističkoj granici. Razlog zašto želimo da foton bude u izlaznom stanju je taj što njime ne dolazi do procesa hadronizacije te on djeluje kao čista proba za ovaj eksperiment. Mogle bi se promatrati i dvofotonske kutne korelacije, ali produkcija dva fotona je potisnuta za  $\alpha_e$  (konstanta fine strukture) u odnosu na produkciju jednog fotona pa su takvi procesi manje vjerojatni. Ako odaberemo tipični postav sudara tako da  $z$ -os odgovara osi duž koje se projektil i meta kreću, odnosno duž koje se dešava sudar, naivno bismo očekivali da se izlazne čestice raspršuju pod azimutalnim kutem  $\pi$ . Naime, unutar konvencionalnog kolinearnog perturbativnog QCD-a partoni se unutar protona također gibaju kolinearno tako da u najnižem redu računa smetnje imamo obični  $2 \rightarrow 2$  proces uslijed kojeg dano predviđanje slijedi kao posljedica očuvanja impulsa u transverzalnoj ravnini (okomitoj na os sudara). Međutim, CGC formalizam predviđa da gluonske distribu-

cijske funkcije postaju ovisne i o transverzalnom impulsu  $\mathbf{k}_\perp$  gdje je tipični  $\mathbf{k}_\perp$  upravo reda veličine  $Q_S$  [3]. To očito vodi na razmazivanje singulariteta u dvočestičnim korelacijama na kutu  $\pi$ . Drugim rječima, međustanje prije nastanka fotona i kvarka ima određeni transverzalni impuls koje je dobilo od sudara s nakupinom gluona. Također, istom logikom očekujemo da bi razmazivanje trebalo biti očitije u pA sudaru nego u pp sudaru jer je jezgra gušća (zbog većeg broja partona koji zrače gluone). Stoga, cilj nam je doći do udarnog presjeka za produkciju kvarka i fotona i vidjeti kako se on ponaša na kutu  $\pi$  za p+A i p+p sudare.

Da bismo došli do udarnog presjeka, nužno je pokriti neke teorijske osnove. U idućem ćemo odjeljku ukratko opisati kvantnu kromodinamiku. Navesti ćemo najbitnije rezultate i vidjeti zašto teorija nije perturbativna na niskim energijama. Nakon toga ćemo ukratko objasniti *Duboko neelastično raspršenje*. To je jedan od najosnovnijih eksperimenata pomoću kojeg nastojimo detaljnije otkrivati strukturu hadrona. Osim toga, teorijsko razmatranje tog procesa služi za definiciju vrlo korisnih *Partonskih distribucijskih funkcija* i novih vrlo korisnih fizikalnih veličina. Nastavno na taj eksperiment, motivirat ćemo *fiziku malog  $x$* <sup>2</sup>. Vidjet ćemo zašto je mali  $x$  ekvivalent visokim energijama na kojima možemo koristiti perturbativni pristup. U tom ćemo duhu motivirati i CGC. Ukratko ćemo opisati osnovne principe i pokazati kako se pomoću klasičnih Yang-Mills jednadžbi pronalazi klasično gluonsko polje unutar jezgre. To će nam polje omogućiti da pronađemo kvarkovski propagator na toj pozadini. Jednom kada damo uvid u sve nove fizikalne pojmove moći ćemo napisati diferencijalni udarni presjek za produkciju  $q\bar{q}\gamma$  koji je izveden u [4] te predstavlja početnu točku ovog rada. Sljedeći će nam korak biti pokazati da se u kolinearnoj granici, u kojoj se kvark i foton emitiraju kolinearno, matrični element za produkciju  $q\bar{q}\gamma$  svodi na matrični element emisije  $\bar{q}\gamma$  te nakon toga regularizirani udarni presjek  $q\bar{q}\gamma$  integrirati po faznom prostoru kvarka. Na taj ćemo način dobiti diferencijalni udarni presjek za produkciju  $\bar{q}\gamma$ . Ovaj ćemo udarni presjek normalizirati udarnim presjekom za produkciju antikvarka i na taj način dobiti konačnu eksperimentalno provjerljivu formulu.

---

<sup>2</sup>Ovdje se misli na Bjorkenov  $x_B$ .

## 1.1 Kvantna kromodinamika

Kvantna kromodinamika (u nastavku QCD) je kvantna teorija polja koja opisuje jednu od četiri fundamentalne sile Svemira, jaku silu, zaslužnu za formiranje hadrona i atomskih jezgara. Za razliku od kvantne elektrodinamike (u nastavku QED) koja se temelji na pravilima U(1) grupe, QCD u svojoj pozadini ima neabelovu SU(3) grupu. Kaže se da je QCD SU(3) baždarna teorija.

Jedan od osnovnih rezultata teorije Lievih grupa je taj da grupa SU(N) ima  $N^2 - 1$  generatora. Budući da je za QCD  $N=3$ , jaka sila ima 8 baždarnih bozona, gluona. Gluoni<sup>3</sup> su čestice koje hadrone drže u cijelini. Kao što svaka čestica ima aditivni kvantni broj elektromagnetskog naboja koji govori kako će se ta čestica ponašati u vanjskom elektromagnetskom polju, tako i svaka čestica ima kvantni broj koji opisuje kako se ona ponaša u polju jake sile. Taj se kvantni broj naziva naboj boje<sup>4</sup>, što je upravo i razlog za samo ime teorije. Također, postoje tri naboja boje: crvena, zelena i plava (u nastavku r, g, b) te stoga kvarkovski spinor okusa f u prostoru boje prikazujemo kao vektor:

$$\Psi_f = \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_g \\ \Psi_b \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Kako je jaka sila zaslužna za interakcije unutar nukleona, za očekivati je da leptoni (elementarne čestice koje u prirodi nalazimo slobodne) nemaju naboj boje, što je i eksperimentalno potvrđeno. Jedan od najzanimljivijih aspekata QCD-a dolazi upravo zbog nekomutativnosti generatora. Naime, upravo zbog tog svojstva, u QCD-u imamo samointerakciju gluona. Odnosno, drugim rječima, i sami gluoni su *obojeni*. Da bismo to detaljnije promotрили, prvo moramo uvesti lagranžijan QCD-a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_q \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_f \bar{\Psi}_f^a (i \not{D}_{ab} - m_f \delta_{ab}) \Psi_f^b, \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdje indeksi  $a$  i  $b$  označavaju sumaciju u prostoru boje. Kovarijantna derivacija  $D$  je

---

<sup>3</sup>glue=ljepilo.

<sup>4</sup>chromos=boja.

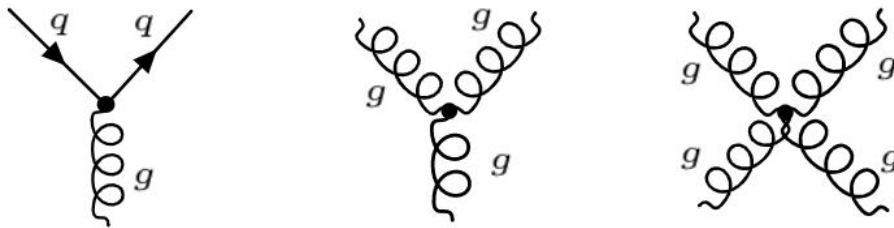
definirana na sljedeći način:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \quad (1.3)$$

gdje  $g$  predstavlja konstantu vezanja QCD-a analognu naboju  $e$  u lagranžijanu QED-a. Vektor  $A_\mu$  predstavlja gluonsko polje te je ono dano kao linearna kombinacija svih generatora  $SU(3)$ <sup>5</sup>,  $A_\mu = A_\mu^a T^a$ . Još jedna razlika QED-a i QCD-a je ta da je u QED-u komponenta polja  $A_\mu$  broj, a u QCD-u je to  $3 \times 3$  matrica. Tenzor  $F_{\mu\nu}^a$  nazivamo tenzorom jakosti gluonskog polja (u literaturi se često koristi i oznaka  $G_{\mu\nu}^a$ ) te je on definiran kao:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_{b\mu} A_{c\nu}. \quad (1.4)$$

Strukturne konstante  $f_{abc}$  definirane su u dodatku. Ovdje je samo bitno naglasiti da one proizlaze zbog nekomutativnosti generatora. Trag ovog tenzora predstavlja Yang-Mills dio lagranžijana QCD-a. On je analogan Maxwelllovom članu u lagranžijanu QED-a te se iz njega pomoću Euler - Lagrange jednadžbi mogu izvesti tzv. Yang-Mills jednadžbe. Očito je da će Yang-Mills dio lagranžijana dovesti do vezanja tipa  $A^3$  i  $A^4$  te su to upravo članovi samointerakcije gluona. Stoga, osim klasičnog QCD vrha koji uključuje dva fermiona i gluon, pojavljuju se još i vrhovi s tri i četiri gluona. Svi su oni zajedno prikazani na slici (1.1). U iduća ćemo dva odjeljka navesti još dva vrlo



Slika 1.1: QCD vrhovi.

zanimljiva aspekta QCD-a: asimptotsku slobodu i zatočenje boje.

### 1.1.1 Asimptotska sloboda

U svakoj renormalizabilnoj teoriji polja postoji postupak pod nazivom renormalizacija naboja. Postupak se provodi na način da se resumira propagator medijatora sile pomoću jednočestično ireducibilnih dijagrama. Na taj se način efektivno promijeni

<sup>5</sup>Za detaljniju analizu  $SU(3)$  pogledati dodatak.

propagator. Međutim, trik je da tu "promjenu" u propagatoru pridružimo naboju koji stoji uz vrh dijagrama. Na taj način propagator zadržava isti oblik, ali naboj mijenja svoju vrijednost i ovisi o skali na kojoj promatramo sustav. Kako je naboj u direktnoj vezi s konstantom veze određene teorije, dobivamo tzv. *kliznu konstantu veze*. Ukoliko nam je poznata konstanta veze  $\alpha$  na skali  $\mu$ , na skali  $q$  nju ćemo dobiti pomoću formule [2]:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{B}{4\pi}\alpha(\mu^2)\ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)}. \quad (1.5)$$

Parametar  $B$  ovisi o teoriji koju razmatramo. U QED-u je u prvom redu računa smetnje njegova vrijednost dana s  $\frac{4}{3}$  [1]. Moguće je, dakle, primijetiti da konstanta veze raste s porastom energije propagatora. To znači da postoji energija nakon koje QED nije perturbativan jer je konstanta veze prevelika. Ta se energija naziva Landauov pol teorije. Srećom, za QED je ta energija nedostižna te se ne moramo brinuti za neperturbativnost teorije. S druge strane, u QCD-u je priča dijametralno suprotna. Za parametar  $B$  u QCD-u dobivamo [2]:

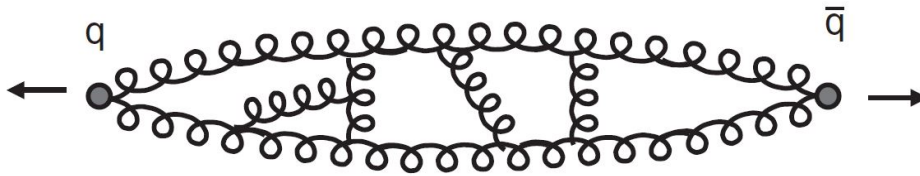
$$B_{QCD} = \frac{2}{3}N_f - \frac{11}{3}N_c, \quad (1.6)$$

gdje  $N_f$  predstavlja broj aktivnih okusa kvarkova, a  $N_c$  broj boja. Vidimo da je  $B_{QCD} < 0$  za 3 boje i za manje od 17 aktivnih okusa (zasad poznajemo samo 6 okusa). Stoga, konstanta veze opada s porastom energije, a divergira kako se energija približava nuli. Iz tog je razloga perturbativni QCD moguće provoditi samo na visokim energijama te ćemo mi taj postupak provoditi i u ovom radu. Na niskim energijama nije moguće provoditi račun smetnje jer svaki sljedeći red doprinosi više od prethodnog što, naravno, nema smisla. Postoje različiti modeli koji se dotiču neperturbativnog QCD-a, ali oni nisu tema ovog rada. Još ćemo promotriti zatočenje boje, što je zasad nedokazana pretpostavka QCD-a.

### 1.1.2 Zatočenje boje

U prirodi zasad nije pronađen slobodni kvark niti slobodni gluon. Kako se vjeruje, razlog tome je hipoteza o zatočenju boje koja govori da slobodne čestice moraju biti bezbojne, tj. moraju biti singlet u prostoru boje. Kvarkovi i gluoni nose boju zbog čega njih nikada nećemo samostalno opaziti. Dokazom ove hipoteze bili biste

nagrađeni s ni manje ni više nego milijun dolara jer je ona jedan od 7 milenijskih problema Clay instituta<sup>6</sup> [5]. Iako ne postoji rigorozni dokaz ove slutnje, postoji jedan lijepi ilustrativni primjer prikazan na slici (1.2). koji ukazuje zašto bi to bilo



Slika 1.2: Hipoteza zatočenja. Preuzeto iz [2].

tako. Naime, zamislimo da kao na slici imamo kvark i antikvark koje pokušavamo razdvojiti. Udaljavanjem kvarkova, oni stvaraju nekakvu gluonsku tubu. Budući da gluoni mogu i međusobno interagirati, energija pohranjena u toj tubi raste vrlo brzo. Pohranjena energija je približno dana formulom [2]:

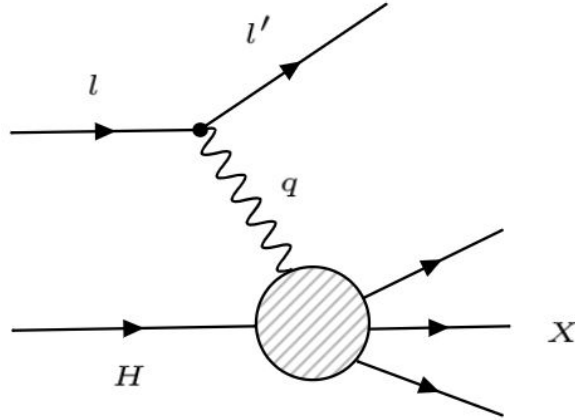
$$U(r) = kr, \quad (1.7)$$

gdje je  $r$  udaljenost kvarka i antikvarka, a  $k$  velika konstanta. Na taj će način u jednom trenutku u tubi biti dovoljno energije da nastane novi  $q\bar{q}$  par koji će se onda s početnim kvarkovima povezati u dva mezona te na taj način nećemo dobiti slobodan kvark.

## 1.2 Duboko neelastično raspršenje

Iako zbog zatočenja boje kvarkove i gluone nikada u prirodi ne možemo pronaći same, oni su sastavni dio kompozitnih čestica, tzv. hadrona. Izrazito nam je zanimljivo promatrati strukturu takvih čestica jer na taj način možemo dobiti neke fundamentalne informacije o njenim sastavnicama. Jedan od najpoznatijih eksperimenata koji nastoji prodrijeti u dubinu hadrona i dati nam informacije o raspodjeli određenih fizikalnih veličina (kao što su impuls, spin itd.) unutar njega je *Duboko neelastično raspršenje* (eng. Deep inelastic scattering, DIS). Glavni je dio ovog eksperimenta taj da metu (objekt koji želimo istražiti; najčešće se radi o protonu) gađamo sa snopom leptona (najčešće elektrona) kao što je prikazano na slici (1.3). Lepton koji nailazi na metu emitirati će virtualni foton koji će potom reagirati s metom. Međutim, glavna

<sup>6</sup>Radi se o najtežem načinu za zaraditi milijun dolara.



Slika 1.3: Duboko neelastično raspršenje.

ideja ovog procesa je da taj foton ne reagira s cijelom metom, već samo s jednim njenim dijelom, *partonom*. U partonskoj se slici hadron sastoji od manjih podčestica koje su prozване partonima. Naravno, za očekivati je da će partoni biti usko povezani s kvarkovima i gluonima koji su sastavni dio svih hadrona. Jednom kada završi reakcija fotona i partona, početni hadron se raspadne na dijelove i taj dio izlaznog stanja označavamo s  $X$ . Stoga, striktno govoreći, DIS je sljedeći proces:

$$lH \rightarrow l'X, \quad (1.8)$$

gdje  $l$  predstavlja ulazni, a  $l'$  izlazni lepton, dok  $H$  predstavlja hadron, a  $X$  konačno stanje hadrona. Bitno je napomenuti da mjerni uređaji u ovom eksperimentu detektiraju samo konačno stanje leptona i na temelju njega dobivaju informacije o partonskoj strukturi. Postoji mnogo korisnih kinematičkih varijabli koji se koriste u ovom eksperimentu [6] od kojih vjerojatno najvažniju funkciju ima Bjorkenov  $x_B$ :

$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \quad (1.9)$$

gdje je  $Q^2 = -q^2$  tzv. virtualnost fotona, a  $P$  i  $q$  su četveroimpulsi ulaznog hadrona i fotona respektivno. Bjorkenov  $x_B$  nam daje informaciju o tome koliki je udio impulsa hadrona imao parton koji je reagirao s fotonom u ovom eksperimentu. Da bismo to vidjeli, zamislimo da parton koji reagira s fotonom nosi impuls  $p^+ = xP^+$ , gdje je  $P$  već definiran impuls mete, a s "+" smo označili koordinatu svjetlosnog stošca (vidi dodatak B). Nakon reakcije će parton imati impuls  $q + xP$ . Kvadriranjem ove relacije i uzimanjem ultrarelativističke granice odmah vidimo da vrijedi:  $x = x_B$ . Osim  $x$ ,



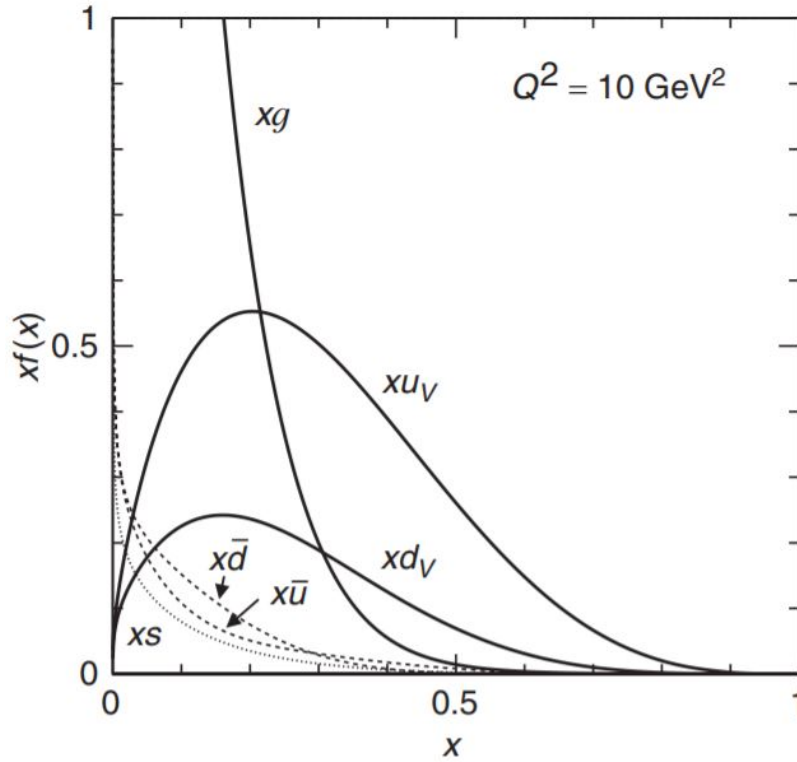
važnu ulogu ima i varijabla:

$$y = \frac{E - E'}{E}, \quad (1.10)$$

gdje je  $E$  energija upadnog, a  $E'$  izlaznog leptona. Očito je da nam ova varijabla daje informaciju o tome koliko je energije lepton izgubio. U literaturi se ova varijabla često naziva i neelastičnost. Prije no što krenemo dalje, korisno je spomenuti da je diferencijalni udarni presjek za ovaj proces izračunat u skoro svakom udžbeniku iz čestične fizike [2]. Ovdje nećemo dati taj rezultat nego ćemo samo spomenuti da se on može napisati u terminima funkcija strukture hadrona iz kojih možemo vrlo jednostavno dobiti informacije o ukupnom naboju i magnetskom dipolnom momentu pohranjenom u hadronu.

Partoni koji se nalaze u meti za virtualni se foton čine kao slobodne čestice. Razlog tome je taj što je vremenska skala hadronizacije QCD-a puno veća od  $\frac{1}{Q}$ , što je vremenska skala interakcije upadnog virtualnog fotona. Ta je opservacija motiv da se partonima u meti pridodaju određene distribucijske funkcije, tzv. *Partonske distribucijske funkcije* (PDF). One nam daju informaciju koji udio impulsa mete pripada kvarkovima  $f_q$ , a koji gluonima  $f_g$ . U literaturi [2] također postoje jednadžbe koje vežu PDF-ove s funkcijama strukture pa i njih možemo saznati iz eksperimenta. Prvo konkretno mjerenje tih funkcija bilo je napravljeno na ubrzivaču HERA te su ti rezultati prikazani na slici (ta slika prikazuje ovisnost  $x f$  o  $x$ ) (1.4). Treba napomenuti da su u ovim distribucijskim funkcijama uzeti u obzir i kvarkovi mora koji u hadronu neprestano nastaju i nestaju zbog tvorbe virtualnih parova iz gluona. Slika (1.4) je glavni razlog zašto smo uopće spomenuli DIS u ovome radu. Naime, primijetite da ukoliko puštamo varijablu  $x$  prema nuli, gluonska distribucijska funkcija počinje naglo rasti. Upravo je ta opservacija navela fizičare da uvedu efektivnu teoriju CGC-a koju ćemo u nastavku objasniti. No prije nego što se krenemo baviti CGC-om, okvirno ćemo pokazati zašto se pri malim  $x$ -vima događa to da gluoni dominiraju u hadronima.

Da bismo to vidjeli, poslužit ćemo se jednom od evolucijskih jednadžbi QCD-a, tzv. Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (ili praktičnije DGLAP) jednadžbom. To je jednadžba koja evoluira PDF-ove u ovisnosti o  $\ln(Q^2)$ . U [7] je dan puni oblik te jednadžbe. Mi ćemo ovdje uzeti samo doprinos na malom  $x$  (u literaturi je detaljno



Slika 1.4: Izmjerena ovisnost partonskih distribucijskih funkcija o Bjorkenovom  $x$ . Preuzeto iz [2].

objašnjeno kako se na malom  $x$  svodimo upravo na ovu jednadžbu) [7]:

$$\frac{d}{d\ln(Q^2)} f_g(x, Q^2)x = \frac{\alpha_s N_C}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{x}{z} f_g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right), \quad (1.11)$$

gdje je  $\alpha_s$  konstanta veze jake sile, a  $N_C = 3$ . Ova jednadžba je primjer integro-diferencijalne jednadžbe gdje se nepoznata funkcija nalazi i pod operatorom derivacije i pod integralom. Njeno rješenje također možemo pronaći u literaturi te je ono dano s [7]:

$$xf_g(x, Q^2) = xf_g(x, Q_0^2) I_0 \left( 2\sqrt{\frac{\alpha_s N_C}{\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \ln \frac{1}{x}} \right), \quad (1.12)$$

gdje  $I_0$  predstavlja modificiranu Besselovu funkciju, a  $Q_0^2$  referentnu energetska skalu. Budući da je asimptotski razvoj modificirane Besselove funkcije eksponencijalna funkcija, jednostavno vidimo da će  $f_g$  imati ovisnost tipa  $f_g(x, Q^2) \propto \frac{1}{x^a}$ , gdje je  $a$  pozitivna konstanta. Ovime smo "opravdali" rezultate eksperimenta prikazane na slici (1.3) koji ukazuju na to da  $f_g$  jako raste oko malog  $x$ . Raditi u režimu malog  $x$  zapravo je ekvivalentno činjenici da radimo na visokim energijama. Visoke energije zahtijevaju i velike akceleracije, a kako akcelerirane čestice koje nose boju mogu zračiti gluone,

u akceleriranom hadronu možemo očekivati povećani broj gluona.

### 1.2.1 Fizika malog $x$ kao Fizika visokih energija

U literaturi se često spominje ekvivalentnost pojmova "Fizika malog  $x$ " i "Fizika visokih energija". Da bismo opravdali ekvivalentnost dvaju naziva, dovoljno je uočiti da vrijedi:

$$x_B = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m^2}, \quad (1.13)$$

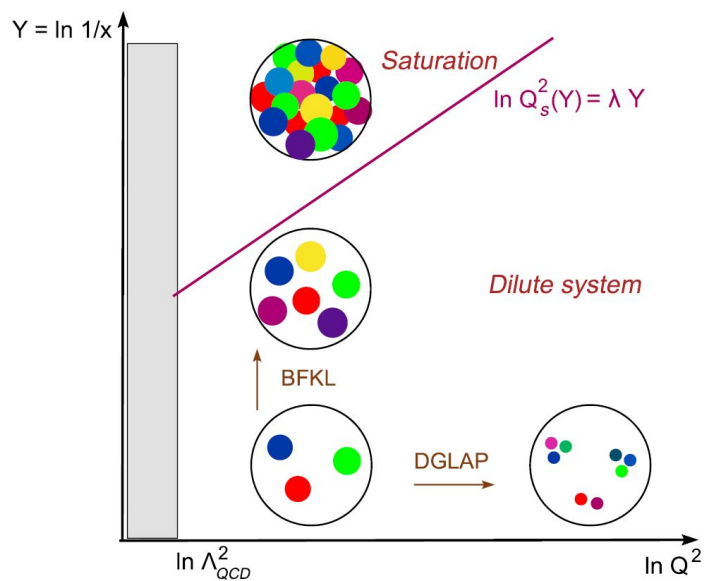
gdje je  $W^2 = (q + P)^2$  kvadrat energije sudara, a  $m$  masa mete. Uzimanjem ultrarelativističke granice i uvjeta  $W^2 \gg Q^2$  odmah vidimo da je za velike energije  $x_B$  mali. Ovime je opravdana ekvivalencija dvaju naziva.

## 2 Staklasti kondenzat boje

U prethodnom smo poglavlju zaključili da struktura hadrona (u nastavku protona) ovisi o energijskoj skali na kojoj vršimo mjerenje. Iz DGLAP jednadžbe [7] može se pokazati da ukoliko držimo  $x$  fiksnim, a  $Q^2$  i  $s$  (gdje je  $s$  pripadna Mandelstamova varijabla) puštamo da teži u beskonačnost<sup>7</sup>, u sustavu beskonačnog impulsa protona (eng. Infinite momentum frame, IMF) on izgleda kao razrijeđen sustav kvarkova i gluona. Ključna je riječ ovdje "razrijeđen". Naime, iako je pri velikim energijama broj partona unutar protona ogroman, njihova je transversalna površina mala (proporcionalna je  $\frac{1}{Q^2}$ ), stoga je i dalje veliki dio protona neokupiran. Takvo ponašanje ilustrirano je na donjem desnom dijelu slike (2.1). Drugi dio slike prikazuje evoluciju u varijabli rapiditeta:

$$Y = \ln \left( \frac{1}{x} \right), \quad (2.1)$$

uz uvjet da je  $Q^2$  fiksiran, a  $x \rightarrow 0$  i  $s \rightarrow \infty$ <sup>8</sup>. U ovom limesu neće postojati veličina koja



Slika 2.1: Fazni dijagram QCD-a. Preuzeto iz [8]

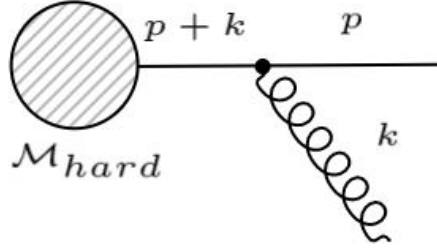
će smanjiti transversalnu površinu partona, ali će njihov broj rasti u granici malog  $x$ . Naivno gledajući, u ovom bismo limesu dobili udarni presjek koji je proporcionalan  $\frac{1}{x^a}$ ,  $a > 0$  (može se pokazati da su udarni presjeci proporcionalni PDF-ovima) što ne bi bilo u skladu s *Froissartovom granicom* koja zbog unitarnosti teorije garantira da on može rasti najbrže kao logaritamska funkcija [7]. Iz tog razloga možemo zaključiti

<sup>7</sup>Ovo je tzv. Bjorkenova granica.

<sup>8</sup>Tzv. Regge-Gribova granica.

da broj gluona unutar mete ne može neograničeno rasti, odnosno da se u nekom trenutku u evoluciji mora saturirati. Proces koji dovodi do njihove saturacije naziva se rekombinacija te ćemo njega sada pogledati malo detaljnije.

Pokažimo prvo da ćemo procesom zakočnog zračenja moći dobiti divergenciju broja gluona u protonu. Feynmanov dijagram zračenja jednog gluona prikazan je na slici (2.2). Na slici  $\mathcal{M}_{hard}$  predstavlja tvrdi matrični element koji nas trenutačno ne



Slika 2.2: Zakočno zračenje jednog gluona.

zanima. Također, biramo da je impuls kvarka koji zrači<sup>9</sup> jednak  $p = (p^+, 0, \mathbf{0}_\perp)$ , a impuls izračenog gluona je  $k = (k^+, k^-, \mathbf{k}_\perp)$ . Izračeni gluoni isto imaju svoj udio impulsa  $x$ . U slučaju malog  $x$ , diferencijalna vjerojatnost emisije jednog takvog gluona iznosi [7]:

$$dP \propto \frac{\alpha_s C_R}{\pi^2} \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp dx}{\mathbf{k}_\perp^2 x}, \quad (2.2)$$

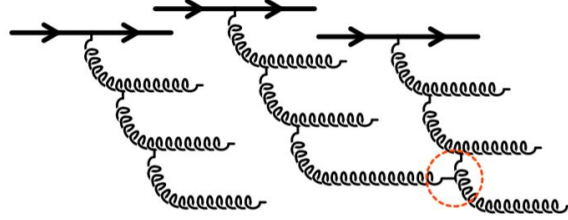
gdje je  $C_R$  vrijednost Casimirove invarijante u  $SU(N_C)$  za reprezentaciju izvora zračenja: jednak je  $N_C$  za gluone i  $\frac{N_C^2-1}{2N_C}$  za kvarkove. Ova se formula, naravno, može izvesti pomoću Feynmanovih pravila. Integracijom po  $\mathbf{k}_\perp$  od  $k_\perp = \Lambda_{QCD}$  do nekog određenog  $k_\perp = Q$  (odabrali smo da gornja granica integracije bude energija vanjske probe) lagano dobivamo sljedeću jednadžbu [7]:

$$x \frac{dN_g(\mathbf{k}_\perp^2)}{dx} = \frac{\alpha_s C_R}{\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right), \quad (2.3)$$

koja nam daje očekivani broj gluona s transverzalnim impulsom manjim od  $Q$  i s udjelom impulsa  $x$  emitiranih s početnog valentnog kvarka. Veličina  $N_g$  naziva se *multiplicitet gluona*. Međutim, u QCD-u je moguća i kaskadna emisija gluona prikazana na slici (2.3). Svaka sljedeća kaskada na slici potisnuta je za faktor  $\alpha_s$ , ali iz izraza za diferencijalnu vjerojatnost emisije gluona očito je da su na malom  $x$  takvi doprinosi

<sup>9</sup>Gluone mogu zračiti i sami gluoni, ali radi jednostavnosti ovdje promatramo samo kvarkove.

zapravo relevantni. Faktor koji stoji uz  $n$ -tu kaskadu je dan s:  $\frac{1}{n!}(\alpha_s Y)^n$ . Stoga, ako je  $-\alpha_s \ln x$  reda veličine 1 moramo resumirati po svim kaskadama, a ne ih promatrati kao smetnju. Resumacija će reproducirati eksponencijalnu funkciju u rapiditetu, što će odgovarati tome da broj gluona raste s  $\frac{1}{x^a}$ , gdje je  $a > 0$ . Pažljiviji pristup ovoj analizi koji, na primjer, uključuje kliznu konstantu vezanja vodi na evolucijsku jednadžbu po varijabli  $x$ , Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) jednadžbu. Sada je



Slika 2.3: Kaskadna emisija gluona lijevo i rekombinacija desno. Preuzeto iz [9].

očito da pri malim  $x$  broj gluona jako raste. Pitanje je koji mehanizam osigurava da gluonski PDF-ovi ipak ne divergiraju u takvom režimu. Odgovor se krije na drugom dijelu slike (2.3). Naime, jednom kada broj gluona u protonu dosegne značajnu vrijednost, valne funkcije gluona počinju se preklapati. Tada možemo očekivati da će doći do nelinearnog efekta rekombinacije dva gluona jer nam to dopušta neabelovost QCD-a. Kroz ravnotežu emisije i rekombinacije, broj gluona u protonu se saturira. Učestalost reakcije za rekombinaciju je dana s [7]:

$$\Gamma_{gg \rightarrow g} = \frac{x f_g(x, Q^2)}{\pi R^2} \frac{\alpha_s N_C}{N_C^2 - 1} \frac{1}{Q^2}, \quad (2.4)$$

gdje je  $R$  radijus protona. Rekombinacija postaje bitan proces jednom kada je ta učestalost reda 1. Energetska skala  $Q_s$  na kojoj to vrijedi, naziva se *skala saturacije* te vidimo da ona ovisi o  $x$  točno na način da reproducira pravac prikazan na slici (2.1). U režimu saturacije BFKL evolucijsku jednadžbu zamjenjuje Balitsky-Kovchegov (BK) [10] jednadžba koja uzima u obzir upravo te rekombinacijske efekte te zbog kojih je udarni presjek u skladu s Froissartovom granicom. Stoga, saturacijska skala je upravo ona vrijednost  $Q^2$  pri kojoj je za neki zadani  $x$  promatrani sustav najgušće zaposjednut gluonima. Sada smo u mogućnosti napisati što je točno CGC.

Osnovna ideja CGC-a temelji se na tome da razdvojimo stupnjeve slobode na brze izvore boje gustoće  $\rho$  i spora klasična dinamička polja gluona  $A^\mu$ . Polja možemo smatrati klasičnima zbog ogromne količine gluona koja zasjenjuje kvantne efekte.

Način na koji to radimo vrlo je jednostavan. Svi gluoni u kaskadi koji imaju impuls  $k^+$  manji od neke zadane skale razdvajanja  $\Lambda^+$  pripadaju gluonskom polju. S druge strane gluoni s većim  $x$ , a koji imaju impuls  $k^+ > \Lambda^+$  pripadaju brzom izvoru boje. Brzi partoni u prvoj aproksimaciji tvore struju  $J^\mu$  koja djeluje kao izvor boje. Taj izvor generira klasično polje  $A^\mu$  koje dobivamo rješavanjem klasičnih Yang-Mills jednadžbi. Taj će postupak biti opisan malo kasnije. Iz Heisenbergove relacije neodređenosti slijedi da je vrijeme života partona proporcionalno njegovom udjelu impulsa  $x$ :  $\Delta x^+ \propto \frac{1}{p^-} = \frac{2xP^+}{p_\perp^2}$ , gdje je  $P$  ukupan impuls, a  $p = xP$ . Kako gluoni koji tvore klasično polje imaju manji  $x$  od partona koji tvore struju boje, njihove su vremenske skale puno manje, tj. za njih gluoni na vrhu kaskade imaju ulogu zamrznutog izvora boje. Slična svojstva posjeduju i spinska stakla pa se iz tog razloga pojavljuje riječ "staklo" u ovom modelu. "Kondenzat" u nazivu modela predstavlja nakupinu gluona, a "boja" samo daje do znanja da se radi o QCD fenomenu. U idućem ćemo odjeljku ukratko opisati *gusto-rijetku* aproksimaciju te ćemo nakon toga ukratko proučiti kako se rješavaju klasične Yang-Mills jednadžbe za polje  $A^\mu$ .

## 2.1 *Gusto-rijetka aproksimacija*

Prije no što objasnimo rješavanje Yang-Mills jednadžbi, bilo bi korisno da ukratko ilustriramo aproksimaciju koju ćemo koristiti u pA sudaru, tzv. *gusto-rijetku aproksimaciju* (eng. "dilute-dense approximation"). Ona se zasniva na tome da u sustavu centra impulsa pA sudara jezgra sadržava puno više gluona od protona. To možemo vrlo jednostavno vidjeti iz jednadžbe (2.4). Naime, u slučaju jezgre desnu stranu te relacije moramo pomnožiti s atomskim brojem  $A$  što vodi na partonsku distribucijsku funkciju jezgre. S druge strane, u nazivniku imamo radijus jezgre za koji se može uzeti da je  $R_A = RA^{\frac{1}{3}}$ , gdje je  $R$  radijus protona. Sada je očito da vrijedi proporcionalnost između saturacijske skale jezgre i saturacijske skale protona. Kako je faktor proporcionalnosti jednak  $A^{\frac{1}{3}}$ ,  $(Q_S^A)^2 = A^{\frac{1}{3}}(Q_S^p)^2$ , jezgra će saturirati na većim  $x$ -evima od protona. Fizikalno to i ima smisla jer jezgra ima više izvora zračenja od protona. Ključ aproksimacije je taj da gustoću boje protona tretiramo kao smetnju na pozadini jezgre.

## 2.2 Yang-Mills jednadžbe

Cilj ovog poglavlja je objasniti kako dolazimo do Feynmanovih pravila na pozadini klasičnog polja koje proizvodi brza jezgra. Prvi nam je zadatak, naravno, doći do tog polja. Radit ćemo u prije spomenutoj, gusto-razrijeđenoj aproksimaciji. Yang-Mills jednadžbe za polje  $A^\mu$  dane su s [11]:

$$[D_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu, \quad (2.5)$$

gdje je  $D_\mu$  operator kovarijantne derivacije zadan u adjungiranoj reprezentaciji:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - ig[A_\mu, F^{\mu\nu}], \quad (2.6)$$

a tenzor jakosti gluonskog polja  $F^{\mu\nu}$  je dan u (1.4). Struji kao izvoru u jednadžbi doprinose dva člana, jedan od jezgre i jedan od protona. Motivirajmo prvo njen oblik promatrajući struju protona. Analogno vrijedi i za struju jezgre (samo u suprotnom smjeru). Neka se proton giba u + smjeru s jako velikim impulsom  $p^+$ . Iz Heisenbergove relacije neodređenosti slijedi da je  $\Delta x^- \propto \frac{1}{p^+} \approx 0$ . Dakle, neodređenost struje u – smjeru jako je mala te možemo aproksimirati:  $J^\nu \propto \delta(x^-)$ . Naboj se nalazi na + osi, stoga vrijedi  $J^\nu \propto \delta^{\nu+}$ . Već smo argumentirali da iz razloga što su njihove vremenske skale puno manje, gluoni koji se nalaze u klasičnom polju izvor vide kao nekakvu zamrznutu boju. Stoga, za potrebe rješavanja Yang-Mills jednadžbi možemo aproksimirati da struja ne ovisi o + koordinati. Sve zajedno, za struju u pA sudaru gdje se proton giba u + smjeru, a jezgra u – smjeru možemo pisati:

$$J^\nu = g\delta(x^-)\delta^{\nu+}\rho_p(\mathbf{x}_\perp) + g\delta(x^+)\delta^{\nu-}\rho_A(\mathbf{x}_\perp), \quad (2.7)$$

gdje gusto-rijetka aproksimacija sada znači da uzimamo  $\rho_A \gg \rho_p$ . Sada kada imamo struje, možemo opisati kako se iterativno rješavaju Yang-Mills jednadžbe. Ansatz jednadžbe je:

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{(m,n)}, \quad (2.8)$$

gdje  $A_{(m,n)}$  predstavlja član reda  $\rho_p^m \rho_A^n$ . Doprinos proporcionalan  $\rho_p^m$  i svim redovima u  $\rho_A$  označavamo s:  $A_{(m,\infty)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_{(m,n)}$ . Lagano se može pokazati da je nultom



redu  $\rho_p$  rješenje  $A_{(0,i)}$  jednako za sve redove u gustoći  $\rho_A$  [11]:

$$A_{(0)}^\mu \equiv A_{(0,\infty)}^\mu = A_{(0,1)}^\mu = -g\delta^{\mu-}\delta(x^+)\frac{1}{\nabla_\perp^2}\rho_A(\mathbf{x}_\perp). \quad (2.9)$$

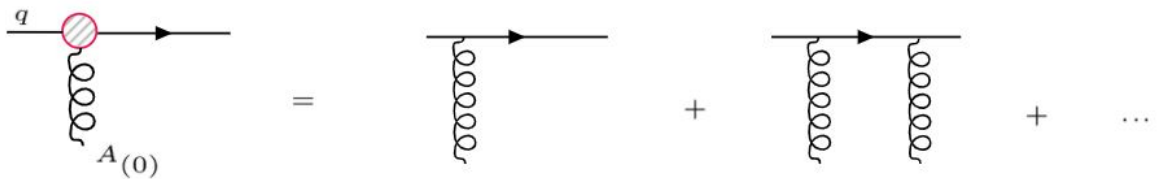
Jednadžba (2.9) predstavlja polje jezgre te ćemo cijelu teoriju graditi na ovoj pozadini. Da bismo došli do udarnog presjeka za produkciju  $q\bar{q}\gamma$  trebat će nam kvarkovski propagator u ovom polju. Po definiciji propagatora, to će biti Greenova funkcija jednadžbe gibanja. Dakle, radi se o Greenovoj funkciji za Diracovu jednadžbu s vanjskim poljem  $A_{(0)}^\mu$ . Taj je izvod detaljno napravljen u [12]. Ovdje navodimo samo njegovo rješenje:

$$S_{(0)}(x, y) = S_F(x - y) + i\theta(x^+)\theta(-y^+) \int d^4z \delta(z^+) [U(\mathbf{z}_\perp) - 1] S_F(x - z) \gamma^+ S_F(z - y) - i\theta(-x^+)\theta(y^+) \int d^4z \delta(z^+) [U^\dagger(\mathbf{z}_\perp) - 1] S_F(x - z) \gamma^+ S_F(z - y) \quad (2.10)$$

i vidimo da se u izrazu pojavljuje slobodni fermionski Feynmanov propagator  $S_F(x - y)$ . Raspršenje se događa u  $z^+ = 0$ , a ono se može dogoditi samo ako su  $x^+$  i  $y^+$  različitog predznaka što je vidljivo zbog  $\theta$  funkcija. Osim toga, pojavljuje se i objekt  $U(\mathbf{z}_\perp)$  koji se naziva Wilsonova linija. Njena je definicija dana s [4]:

$$U(\mathbf{x}_\perp) = \mathcal{P}_+ \exp \left[ ig \int_{-\infty}^{+\infty} dz^+ A_{(0)}^-(z^+, \mathbf{x}_\perp) \cdot T \right], \quad (2.11)$$

gdje  $\mathcal{P}$  označava operator uređenja po stazi. Ukoliko razvijemo ovaj objekt, zbog eksponencijalne funkcije dobivamo nešto oblika:  $1 + A + A^2 + \dots$ . U propagatoru se pojavljuje  $U(\mathbf{z}_\perp) - 1$  zbog čega ova jedinica "pokradi" jedinicu iz razvoja. Stoga, Wilsonova linija predstavlja višestruku interakciju partona iz protona na klasičnom polju jezgre. Takvu efektivnu interakciju prikazujemo na slici (2.4). Wilsonove linije



Slika 2.4: Wilsonova linija kao resumacija raspršenja valentnog kvarka na klasičnom polju jezgre. Osim kvarka tu se može naći i gluon iz protona. Crveni vrh ne predstavlja QCD vrh nego resumaciju.

igraju ključnu ulogu u CGC fizici, što će uskoro biti demonstrirano.

Osim kvarkovskog propagatora treba nam još i informacija kako se gluon iz protona ponaša u pozadini klasičnog polja jezgre. Da bismo ju dobili, moramo riješiti Yang-Mills jednadžbu u prvom redu gustoće protona  $\rho_p$ . Taj je postupak također dan u [11]. Tamo vidimo da je gluonsko polje protona u pozadini jezgre opet izraženo pomoću Wilsonovih linija. Također, pojavljuje se i vektor  $C^\mu$  koji je u bliskoj vezi s *Lipatovim vertexom* koji efektivno uzima u obzir različite doprinose gluon-gluon raspršenja (ovdje se radi o trostrukom gluonskom vrhu zajedno sa zakočnim zračenjem). Sada je očito da u CGC fizici temeljnu ulogu imaju Wilsonove linije. Zapravo, najvažniju ulogu imaju korelacije Wilsonovih linija koje na neki način možemo smatrati poopćenjem PDF-ova unutar CGC formalizma. Te korelacije dobivamo kada kvadriramo amplitudu  $\mathcal{M}$  koju izračunamo pomoću Feynmanovih pravila. Jedna od tih korelacija je tzv. *dipol*:

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}_\perp, \mathbf{y}_\perp) = \frac{1}{N_C} \langle \text{Tr}[U(\mathbf{x}_\perp)U^\dagger(\mathbf{y}_\perp)] \rangle_{\rho_A}. \quad (2.12)$$

Dipol je fundamentalni gradivni blok svih procesa koji u svojoj pozadini imaju CGC fiziku. Vidimo da smo u njegovu definiciju uvrstili i operator usrednjenja po gustoćama. Njega ćemo sada objasniti.

Kada u ovom modelu izračunamo amplitudu za neki proces, krajnji će rezultat ovisiti o  $\rho_A$  i  $\rho_p$ . Međutim, ne možemo a priori znati te funkcije. Razlog tome je što se ne može znati gdje se točno neki izvor boje (kvark ili gluon) nalazi u protonu ili jezgri. Zbog svojstva zatočenja boje, izvori unutar različitih nukleona su međusobno nekorelirani te ih stoga modeliramo kao slučajne varijable koje, po Centralnom graničnom teoremu, za veliki broj izvora boje teže u normalnu, Gaussovu distribuciju. Ovo je ideja McLerran-Venugopalan (MV) [13] modela po kojem ćemo mi raditi. U njemu je korelacijska funkcija dva izvora boje proporcionalna delta funkciji [14]. Na kraju svakog računa treba usrednjiti po izvorima boje, a formula za usrednjenje dana je pomoću funkcionalne integracije [15]:

$$\langle O \rangle = \int [D\rho_p][D\rho_A] W_p[x_0^p, \rho_p] W_A[x_0^A, \rho_A] O[\rho_p, \rho_A]. \quad (2.13)$$

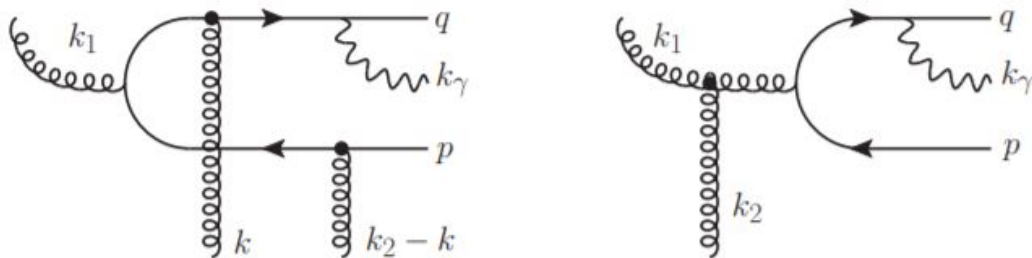
Iz ovog se razloga pojavljuje usrednjenje i u definiciji dipola. Parametar MV modela, odnosno faktor proporcionalnosti u korelacijskoj funkciji dva izvora boje, se može

dovesti u vezu s tzv. inicijalnom saturacijskom skalom, čime je formiran početni uvjet za evoluciju u  $x$ . Dipol tako evoluira po BK jednađbi [10].

Sada imamo sve potrebno da bismo opisali kako doći do udarnog presjeka za produkciju fotona, kvarka i antikvarka. Napomenimo samo prije toga da ćemo u sljedećem računu promatrati dominantni gluonski kanal. Razlog tome je taj što akceleratori (RHIC, LHC) rade na dovoljno velikim energijama, odnosno malim  $x$ -evima gdje gluonske distribucijske funkcije dominiraju. U najnižem redu računa smetnje raditi će se o procesu za produkciju kvarka, antikvarka i fotona na što ćemo se usredotočiti u narednom odjeljku.

### 2.3 Diferencijalni udarni presjek za produkciju $q\bar{q}\gamma$

Sada kada smo ugrubo opisali kako se u formalizmu CGC-a računaju amplitude za različite ishode pA sudara, možemo motivirati i udarni presjek za  $q\bar{q}\gamma$  produkciju. Feynmanovi dijagrami za ovaj su proces prikazani na slici (2.5). Lijevi dijagram prikazuje slučaj u kojem se gluon iz protona raspada na  $q\bar{q}$  par koji se onda raspršuje na polju jezgre te koji izbaci foton. Račun amplitude tog procesa provodi se pomoću kvarkovskog propagatora danog u (2.10). Desni dijagram prikazuje raspršenje gluona iz protona na polju jezgre. Nakon raspršenja, gluon se raspada na  $q\bar{q}$  par koji emitira foton. Prije no što krenemo dalje, u tablici (2.1) smo definirali sve 4-impulse



Slika 2.5: Feynmanovi dijagrami za  $q\bar{q}\gamma$  produkciju. Lijevi dijagram prikazuje gluon iz protona koji emitira  $q\bar{q}$  par koji se raspršuje na jezgrinom polju. Desni dijagram prikazuje gluon iz jezgre koji se raspršuje na polju te tek onda tvori par  $q\bar{q}$ . Ovdje još fale doprinosi za emisiju fotona s antikvarka i s virtualnih parova prije u procesu. Preuzeto iz [16].

koji se koriste u nastavku. Osim ovih, često se koristi i 4-impuls  $P = k_1 + k_2 = p + q + k_\gamma$  koji predstavlja ukupan impuls konačnog stanja. Računanjem gornjih Feynmanovih dijagrama u ovom formalizmu možemo dobiti amplitudu za produkciju  $q\bar{q}\gamma$ , što je napravljeno u članku [4], gdje je još izračunat i diferencijalni udarni presjek. Dobivena

$k_1$ : 4-impuls gluona iz protona	$q$ : 4-impuls kvarka
$k_2$ : 4-impuls gluona iz jezgre	$p$ : 4-impuls antikvarka
$k_\gamma$ : 4-impuls izlaznog fotona	$k$ : 4-impuls Wilsonove linije $U$

Tablica 2.1: Oznake svih 4-impulsa koje koristimo u nastavku.

formula glasi:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{q\bar{q}\gamma} = & \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dq^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{2q^+} \frac{dk_\gamma^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_\gamma^+} \sum_f \frac{16\pi\alpha_e\alpha_s^2 q_f^2}{C_F} \times \\
& \times \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \Theta(k_\gamma, q, p).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Suma po indeksu  $f$  predstavlja sumu po okusima kvarkova,  $q_f$  njihov elektromagnetski naboj u jedinicama  $e$ , a  $C_F$  je kvadratični Casimirov operator  $SU(N_C)$  grupe koji iznosi  $\frac{N_C^2-1}{2N_C}$ . Indeksi u integralu naznačuju integraciju po transverzalnom faznom prostoru s mjerom  $\frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2}$ . Funkcije  $\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)$  i  $\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})$  određene su distribucijske funkcije povezane s dipolima, a time i s Wilsonovim linijama. Konkretno, unutar spomenutog MV modela, u vodećem redu razvoja po  $\frac{1}{N_C}$  one su dane s [14]:

$$\begin{aligned}
\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp) &= \pi R_A^2 \frac{N_C k_{2\perp}^2}{4\alpha_s} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_{2\perp} - \mathbf{k}_\perp) \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_\perp) \\
\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp}) &= \pi R_p^2 \frac{N_C k_{1\perp}^2}{4\alpha_s} \mathcal{N}_{p,Y_p}(\mathbf{k}_{1\perp}),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

gdje  $\tilde{\mathcal{N}}$  predstavlja 2D Fourierov transformat dipola u fundamentalnoj, a  $\mathcal{N}$  u adjungiranoj reprezentaciji. Ovdje se koristila translacijska invarijantnost da se argumentira da je dipol iz (2.12) funkcija samo  $x_\perp - y_\perp$  pa je impuls u (2.15) pripadna varijabla u Fourireovom prostoru. Funkcija  $\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})$ , kao i  $\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)$ , očito ovisi o rapiditetu (a samim time i o  $x$ ) i o transverzalnom impulsu. Varijable  $Y_A$ , odnosno  $Y_p$  su dane s:

$$Y_A = \ln \frac{1}{x_A} \quad Y_p = \ln \frac{1}{x_p}, \tag{2.16}$$

gdje je  $x_A = \frac{k_2^-}{\sqrt{s}}$ ,  $x_p = \frac{k_1^+}{\sqrt{s}}$  i gdje je  $s$  energija sudara, a  $k_1^+ = q^+ + p^+ + k_\gamma^+$  i  $k_2^- = q^- + p^- + k_\gamma^-$ . Maksimumi tih funkcija se za dani  $x$  nalaze na saturacijskoj skali kao što se može vidjeti u [11]. Ostalo je još samo objasniti matrični element

$\Theta(k_\gamma, q, p)$ . On je dan s:

$$\Theta(k_\gamma, q, p) = - \sum_{spinovi} |\bar{u}(q)\epsilon_\mu^*(k_\gamma)T^\mu v(p)|^2, \quad (2.17)$$

gdje je  $T^\mu = T_g^\mu + T_{q\bar{q}}^\mu$ , suma odgovarajućih vrhova sa slike (2.5). Varijabla *spinovi* po kojoj se sumira naznačuje sumu po spinovima kvarka i antikvarka te sumu po fotonskoj polarizaciji. Ti su vrhovi dani u [16] u jednadžbama (8)-(13), gdje su uzete u obzir sve moguće kombinacije emisije fotona. Sada smo u mogućnosti iz ovog udarnog presjeka izračunati diferencijalni udarni presjek za produkciju  $\bar{q}\gamma$ .

### 3 Diferencijalni udarni presjek za $\bar{q}\gamma$ produkciju

Jednom kada razumijemo strukturu diferencijalnog udarnog presjeka za tvorbu  $q\bar{q}\gamma$ , možemo se posvetiti glavnom zadatku ovog rada, a to je račun udarnog presjeka za produkciju  $\bar{q}\gamma$ . Taj je udarni presjek dan kao integral diferencijalnog udarnog presejka za  $q\bar{q}\gamma$  produkciju po faznom prostoru kvarka:

$$d\sigma_{\bar{q}\gamma} = \int \frac{dq^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{2q^+} (2\pi)^3 2q^+ \frac{d\sigma_{q\bar{q}\gamma}}{dq^+ d^2\mathbf{q}_\perp}. \quad (3.1)$$

Ovaj je integral divergentan zbog dijela faznog prostora u kojem se izlazni foton i kvark emitiraju kolinearno ( $q \cdot k_\gamma = 0$ ). Njega ćemo regularizirati na način da ćemo mu dodati i oduzeti matrični element za produkciju  $q\bar{q}\gamma$ , ali u kolinearnoj granici. Na taj će način naš udarni presjek efektivno postati suma dva doprinosa:

$$d\sigma_{\bar{q}\gamma} = d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{dir} + d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{frag}. \quad (3.2)$$

Prvi doprinos, tzv. direktni doprinos, bit će početni udarni presjek od kojeg smo oduzeli divergentni doprinos. Drugi doprinos, tzv. fragmentacijski doprinos, predstavlja dio udarnog presjeka koji je povezan s fragmentacijom kvarka u foton te on sadrži fragmentacijsku funkciju koju ćemo definirati kasnije. Prvi nam je, dakle, zadatak razviti matrični element za  $q\bar{q}\gamma$  produkciju u granici  $q \cdot k_\gamma \rightarrow 0$ .

#### 3.1 Matrični element za $q\bar{q}\gamma$ emisiju u granici $q \cdot k_\gamma \rightarrow 0$

Da bismo pronašli tu granicu, poslužiti ćemo se jednim trikom. Vrh  $T^\mu$  koji se pojavljuje u matričnom elementu (2.17) opet ćemo zapisati kao sumu dva doprinosa:

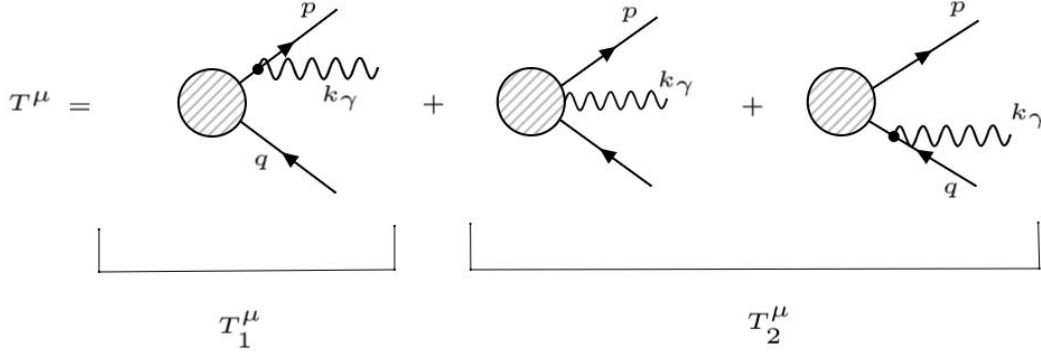
$$T^\mu = T_1^\mu + T_2^\mu, \quad (3.3)$$

ali sada na način da vrh  $T_1^\mu$  sadrži kolinearni doprinos jer se u njemu foton emitira s kvarka. Drugi član,  $T_2^\mu$ , sadrži sve ostale doprinose koji ne sadrže kolinearnu divergenciju. Takav rastav prikazan je na slici (3.1). Osim ovog rastava, u nastavku ćemo koristiti i činjenicu da vrh  $T_1^\mu$  možemo napisati pomoću fermionskog Feynmanovog propagatora i vrha  $T = T_g + T_{q\bar{q}}$ . Taj je vrh ekvivalentan onima sa slike (2.5), jedino što u izlaznom stanju nema fotona, dakle to je vrh za produkciju  $q\bar{q}$  ([15],

jednadžba: (38)). Ovisnost koja povezuje  $T_1^\mu$  i  $T$  dana je s:

$$T_1^\mu = \gamma^\mu \frac{\not{q} + \not{k}_\gamma}{(q + k_\gamma)^2} T, \quad (3.4)$$

gdje nismo pisali konstantu QED veze.



Slika 3.1: Dijagrami  $T_1^\mu$  i  $T_2^\mu$ . Prvi dijagram predstavlja član koji sadrži kolinearno divergentni doprinos jer se foton emitira s kvarka.

U kolinearnoj granici (gledamo samo doprinose koji će doprinijeti kolinearnoj divergenciji) sumu po fotonskoj polarizaciji iz relacije (2.17) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{polarizacije}} |\bar{u}(q)T^\mu \epsilon_\mu^*(k_\gamma)^* v(p)|^2 &\rightarrow -g_{\mu\nu} [(\bar{u}T_1^\mu v)(\bar{u}T_1^\nu v)^* \\ &+ (\bar{u}T_1^\mu v)(\bar{u}T_2^\nu v)^* \\ &+ (\bar{u}T_2^\mu v)(\bar{u}T_1^\nu v)^*]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Na desnoj smo strani ispuštali ovisnost spinora o impulsima te ćemo to raditi i nadalje. Primijetite da nema člana proporcionalnog s  $T_2 T_2^\dagger$  jer on ne sadrži kolinearnu divergenciju. Sada ćemo pokazati da izraz iz sume (3.5) u kolinearnoj granici možemo napisati samo u terminima vrha  $T_1^\mu$ , ali da umjesto metričke koristimo sumaciju po fizikalnim stupnjevima slobode.

**Tvrđnja 1.** Matrični element (3.5) koji sadrži samo kolinearno divergentne doprinose može se u kolinearnoj granici napisati samo pomoću vrha  $T_1^\mu$  i to tako da vrijedi:

$$\sum_{\text{polarizacije}} |\bar{u}(q)T^\mu \epsilon_\mu^*(k_\gamma)^* v(p)|^2 \rightarrow d_{\mu\nu} (\bar{u}T_1^\mu v)(\bar{u}T_1^\nu v)^*, \quad (3.6)$$

gdje je tenzor  $d_{\mu\nu}$  dan s [17]:

$$d_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu^\gamma + n_\nu k_\mu^\gamma}{(k_\gamma \cdot n)}, \quad (3.7)$$

a vektor  $n^\mu$  je u u baždarenju svjetlosnog stošca dan s  $n^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_\perp)$ . Taj je tenzor zapravo suma po fizikalnim polarizacijama fotona.

*Dokaz.* Dokaz se provodi na način da se pokaže da se lijeva strana izraza (3.6) u kolinearnom limesu ( $k^\mu = \beta q^\mu$  gdje je  $\beta$  konstanta) svodi na lijevu stranu izraza (3.5). Prvo što možemo uočiti je to da je član koji stoji uz  $T_1 T_1^\dagger$  trivijalno isti u oba izraza jer njega množi samo metrika. Stoga, ideja nam je pokazati da se sumandi:

$$\frac{n_\mu k_\nu^\gamma}{n \cdot k_\gamma} (\bar{u} T_1^\mu v) (\bar{u} T_1^\nu v)^* + \frac{n_\nu k_\mu^\gamma}{n \cdot k_\gamma} (\bar{u} T_1^\mu v) (\bar{u} T_1^\nu v)^* \quad (3.8)$$

svode na zadnja dva sumanda iz (3.5). Koristeći Wardov identitet ( $k^\mu \bar{u} T_\mu v = 0$ ) izraz (3.8) možemo napisati u terminima članova proporcionalnih s  $T_1 T_2^\dagger$ :

$$-\frac{n_\mu k_\nu^\gamma}{n \cdot k_\gamma} (\bar{u} T_1^\mu v) (\bar{u} T_2^\nu v)^* - \frac{n_\nu k_\mu^\gamma}{n \cdot k_\gamma} (\bar{u} T_2^\mu v) (\bar{u} T_1^\nu v)^*. \quad (3.9)$$

Dovoljno je promatrati samo prvi član jer je analiza za drugi analogna. Dakle, moramo pokazati da se u kolinearnom limesu prvi član svodi na:  $-g_{\mu\nu} (\bar{u} T_1^\mu v) (\bar{u} T_2^\nu v)^*$ . Sada koristimo rastav vrha  $T_1^\mu$  pomoću vrha  $T$ , tj. jednadžbu (3.4). Pomoću te jednadžbe izraz za prvi član iz (3.9) postaje:

$$-\frac{n_\mu k_\nu^\gamma}{(k_\gamma \cdot n)} \frac{1 + \beta}{(q \cdot k_\gamma)^2} \bar{u} (\gamma^\mu \not{q} T) v (\bar{u} T_2^\nu v)^*. \quad (3.10)$$

Osnovni alati Cliffordove algebre nalažu da vrijedi:  $\gamma^\mu \not{q} = 2q^\mu - \not{q} \gamma^\mu$ . Međutim, u ultrarelativističkom limesu možemo zanemariti član oblika  $\bar{u} \not{q} \dots$  jer je on proporcionalan masi zbog jednadžbe gibanja. Sve skupa, za prvi član dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{n_\mu k_\nu^\gamma}{n \cdot k_\gamma} (\bar{u} T_1^\mu v) (\bar{u} T_1^\nu v)^* &\rightarrow -2 \frac{(q \cdot n)}{(k_\gamma \cdot n)} q_\nu \frac{\beta(1 + \beta)}{(q \cdot k_\gamma)^2} (\bar{u} T v) (\bar{u} T_2^\nu v)^* \\ &\rightarrow -2 q_\nu \frac{(1 + \beta)}{(q \cdot k_\gamma)^2} (\bar{u} T v) (\bar{u} T_2^\nu v)^* \\ &\rightarrow -g_{\mu\nu} \frac{(1 + \beta)}{(q \cdot k_\gamma)^2} (\bar{u} \gamma^\mu \not{q} T v) (\bar{u} T_2^\nu v)^* \\ &\rightarrow -g_{\mu\nu} (\bar{u} T_1^\mu v) (\bar{u} T_2^\nu v)^*, \end{aligned} \quad (3.11)$$



što je upravo izraz koji smo morali dobiti iz relacije (3.5). Analogni izvod vrijedi i za drugi član tako da ga ovdje nećemo provoditi. Ovime smo dokazali tvrdnju. Q.E.D.

Ova će nam tvrdnja biti od velike koristi u nastavku računa. Zasad smo u ko-linearnoj granici prosumirali izraz (2.17) po polarizaciji fotona i dobili izraz (3.6). Sljedeći nam je korak provesti sumaciju po spinu kvarka:

$$\sum_s d_{\mu\nu}(\bar{u}T_1^\mu v)(\bar{u}T_1^\nu v)^*, \quad (3.12)$$

gdje  $s$  u sumi označava spin kvarka  $u$ . Da bismo to učinili, prvo moramo izračunati kompleksni konjugat koji se pojavljuje. Taj kratki račun koristi standardne operacije koje pronalazimo u Diracovoj algebri:

$$\begin{aligned} (\bar{u}T_1^\nu v)^* &= (\bar{u}T_1^\nu v)^\dagger = v^\dagger T_1^{\dagger\nu} \bar{u}^\dagger = \\ &= v^\dagger T_1^{\dagger\nu} \gamma^0 u = \bar{v} \bar{T}_1^\nu u, \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdje je  $\bar{T}_1^\nu = \gamma^0 T_1^\mu \gamma^0$ . Sada možemo iskoristiti relaciju potpunosti Diracovih spinora koja u ultrarelativističkom limesu glasi:  $\sum_s u\bar{u} = \not{q}$ . Ovime smo efektivno obavili sumaciju po spinu te dobili izraz:

$$d_{\mu\nu} \bar{v} \bar{T}_1^\nu \not{q} T_1^\mu v. \quad (3.14)$$

Međutim, cilj nam je ovaj izraz napisati u malo rafiniranijem obliku koji ćemo kasnije moći koristiti u daljnjim računima. Također, pokazat ćemo da je cijeli matrični element proporcionalan:  $\frac{1}{(q \cdot k_\gamma)}$ . Prvo ćemo ponovno iskoristiti jednadžbu (3.4) i vrh  $T_1^\mu$  izraziti pomoću vrha  $T$ . U ultrarelativističkoj granici se ta formula svodi na:

$$T_1^\mu = \frac{1}{2q \cdot k_\gamma} \gamma^\mu (\not{q} + \not{k}_\gamma) T. \quad (3.15)$$

Definiramo li Diracov konjugat vrha  $T$  na analogni način kao i za vrh  $T_1^\mu$  ( $\bar{T} = \gamma^0 T^\dagger \gamma^0$ ), trivijalno dobivamo:  $\bar{T}_1^\mu = \frac{1}{2q \cdot k_\gamma} (\bar{T} (\not{q} + \not{k}_\gamma) \gamma^\mu)$ . Sve skupa dobivamo:

$$\sum_s d_{\mu\nu} (\bar{u}T_1^\mu v)(\bar{u}T_1^\nu v)^* = \frac{1}{4(q \cdot k_\gamma)^2} \bar{v} \bar{T} \underbrace{d_{\mu\nu} (\not{q} + \not{k}_\gamma) \gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu (\not{q} + \not{k}_\gamma)}_{= \mathcal{C}} T v, \quad (3.16)$$

gdje smo definirali izraz  $\mathcal{C}$  te ćemo radi preglednosti prvo njega sada raspisati. Ko-

risteći antikomutacijske relacije gamma matrica taj izraz vrlo jednostavno možemo dobiti u obliku:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & 4d_{\mu\nu}(q^\mu + k_\gamma^\mu)(q^\nu + k_\gamma^\nu)\not{q} + d_{\mu\nu}\gamma^\nu(\not{q} + \not{k}_\gamma)\not{q}(\not{q} + \not{k}_\gamma)\gamma^\mu \\ & - d_{\mu\nu}(\not{q} + \not{k}_\gamma)\not{q}2(q^\mu + k_\gamma^\mu) - d_{\mu\nu}2(q^\nu + k_\gamma^\nu)\not{q}(\not{q} + \not{k}_\gamma)\gamma^\mu. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nadalje, iskoristit ćemo ultrarelativistički limes ( $\not{q}^2 = q^2 = m^2 = 0$ ) kao i simetričnost tenzora  $d_{\mu\nu}$  da bismo gornji izraz mogli napisati kao sumu tri doprinosa:

$$\mathcal{C} = \underbrace{4d_{\mu\nu}(q^\mu + k_\gamma^\mu)(q^\nu + k_\gamma^\nu)\not{q}}_{= \mathcal{C}_1} + \underbrace{d_{\mu\nu}\gamma^\nu \not{k}_\gamma \not{q} \not{k}_\gamma \gamma^\mu}_{= \mathcal{C}_2} + \underbrace{(-2d_{\mu\nu}(q^\mu + k_\gamma^\mu)[\gamma^\nu \not{k}_\gamma \not{q} + \not{q} \not{k}_\gamma \gamma^\nu])}_{= \mathcal{C}_3}. \quad (3.18)$$

Prije no što raspišemo svaki od ova tri člana ponaosob, podsjetit ćemo samo da vektor  $n^\mu$  ima samo – komponentu. Iz tog razloga, skalarni produkt proizvoljnog vektora  $a$  i  $n$  daje kao rezultat  $a^+$  (dodatak B). Sada raspisujemo  $\mathcal{C}_1$  koristeći definiciju tenzora  $d_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = & 4 \left( -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(k_\gamma \cdot n)} \right) (q^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu + k^\mu q^\nu + k^\mu k^\nu) \not{q} \\ = & -4(k_\gamma + q)^2 \not{q} + \frac{4}{(k_\gamma \cdot n)} [(q \cdot n)(k_\gamma \cdot q) + (k_\gamma \cdot n)(q \cdot k_\gamma) \\ & + (q \cdot n)(k_\gamma \cdot q) + (k_\gamma \cdot n)(k_\gamma \cdot q)] \\ = & \cancel{-8(k_\gamma \cdot q) \not{q}} + \cancel{8(k_\gamma \cdot q) \not{q}} + 8 \frac{q \cdot n}{k_\gamma \cdot n} (k_\gamma \cdot q) \not{q} \\ = & 8 \frac{q^+}{k^+} \not{q}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vrlo sličan raspis svodi  $\mathcal{C}_2$  na rafiniraniji oblik:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & d_{\mu\nu}\gamma^\nu \not{k}_\gamma \not{q} \not{k}_\gamma \gamma^\mu \\ = & 2(k_\gamma \cdot q) d_{\mu\nu}\gamma^\nu \not{k}_\gamma \gamma^\mu \\ = & 2(k_\gamma \cdot q) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(k_\gamma \cdot n)} \right) (\gamma^\nu \not{k}_\gamma \gamma^\mu) \\ = & -2(k_\gamma \cdot q) \gamma_\mu \not{q} \gamma^\mu \\ = & 4(k_\gamma \cdot q) \not{q}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

U drugom smo redu koristili antikomutacijska pravila gamma matrica te svojstvo da je  $\not{k}_\gamma^2 = k_\gamma^2 = 0$ . Budući da drugi član u trećem redu daje iste takve doprinose,

njega smo mogli zanemariti. U zadnjem smo redu samo još iskoristili da vrijedi:  $\gamma_\mu \not{k}_\gamma \gamma^\mu = -2\not{k}_\gamma$ . Još moramo izračunati  $\mathcal{C}_3$ . Uočimo prvo da drugi član u uglatoj zagradi u definiciji  $\mathcal{C}_3$  iz jednadžbe (3.18) zbog antikomutacijskih relacija možemo napisati kao:

$$\gamma^\nu \not{k}_\gamma \not{q} = 2k^\nu \not{q} - 2q^\nu \not{k} + 2(q \cdot k_\gamma) \gamma^\nu - \not{q} \not{k}_\gamma \gamma^\nu. \quad (3.21)$$

Ovo nam omogućuje da u uglatoj zagradi izraza za  $\mathcal{C}_3$  definiranog u jednadžbi (3.18) zadnji član pokratimo sa zadnjim članom iz prethodnog izraza. Sve zajedno imamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 &= -4 \left( -g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{(k_\gamma \cdot n)} \right) (q^\mu + k^\mu) [k^\nu \not{q} - q^\nu \not{k} + (q \cdot k_\gamma) \gamma^\nu] \\ &= +4[(k_\gamma \cdot q) \not{q} - \cancel{(q \cdot k_\gamma) \not{k}_\gamma} + (q \cdot k_\gamma) \not{q} + \cancel{(q \cdot k_\gamma) \not{k}_\gamma}] \\ &\quad - \frac{4}{k_\gamma \cdot n} [(n \cdot q) k_\nu + (n \cdot k_\gamma) k_\nu + (k_\gamma \cdot q) n_\nu] [k^\nu \not{q} - q^\nu \not{k} + (q \cdot k_\gamma) \gamma^\nu] \\ &= 8(q \cdot k_\gamma) \not{q} - \frac{4}{k_\gamma \cdot n} [-\cancel{(n \cdot q)(k_\gamma \cdot q) \not{k}_\gamma} + \cancel{(n \cdot q)(k_\gamma \cdot q) \not{k}_\gamma} - \cancel{(n \cdot k_\gamma)(k_\gamma \cdot q) \not{k}_\gamma} \\ &\quad + \cancel{(n \cdot k_\gamma)(k_\gamma \cdot q) \not{k}_\gamma} + (n \cdot k_\gamma)(k_\gamma \cdot q) \not{q} - (n \cdot q)(k_\gamma \cdot q) \not{k}_\gamma + (k_\gamma \cdot q)^2 \not{q}]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Preostala dva člana u uglatoj zagradi možemo eliminirati iz sljedećih razloga:

1. Zadnji član koji je proporcionalan  $(k_\gamma \cdot q)^2$  možemo eliminirati jer on neće dati doprinos tipa kolinearne divergencije. Naime, u izrazu (3.16) vidimo da u nazivniku stoji isti takav doprinos koji će se onda pokratiti te dati konačan član koji nas ne interesira u kolinearnom limesu.
2. Zbog istog argumenta kolinearnog limesa ostala se dva člana pokrate budući da su u tom limesu jednaki<sup>10</sup>.

Ovom opservacijom dobivamo da je  $\mathcal{C}_3$  jednak samo prvom članu i iznosi:

$$\mathcal{C}_3 \rightarrow 8(q \cdot k_\gamma) \not{q}. \quad (3.23)$$

Prije nego što napišemo ukupan izraz za  $\mathcal{C}$ , definirat ćemo jednu novu veličinu koja će se pojavljivati odsad pa nadalje. Radi se o impulsnom udjelu fotona unutar kvarka

---

<sup>10</sup> $k^\mu = \beta q^\mu$ .

sa kojeg se foton emitira te je definiran na način:

$$z = \frac{k_\gamma^+}{k_\gamma^+ + q^+}. \quad (3.24)$$

Pomoću njega, za veličinu  $\mathcal{C}$  možemo pisati:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 \\ &= 4(k_\gamma \cdot q) \left[ 2\frac{\not{q}}{z} + \not{k}_\gamma \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Vidimo da se u ovom izrazu pojavljuju i kontrahirani impuls kvarka i kontrahirani impuls fotona. Međutim, ako su te dvije čestice emitirane kolinearno, uvijek možemo izraziti impuls jedne preko impulsa druge. Iskoristimo li uvjet kolinearnosti ( $k_\gamma^\mu = \beta q^\mu$ ), za čas možemo pomoću jednadžbe (3.24) dobiti  $\not{q}$  kao funkciju  $\not{k}$  i  $z$ . Ubacivanjem te relacije u izraz (3.25) dobivamo konačan oblik za  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C} \rightarrow 4(k_\gamma \cdot q) \frac{\not{k} 1 + (1-z)^2}{z}. \quad (3.26)$$

Ovdje vidimo da se pojavila tzv. funkcija cijepanja (eng. splitting function) kvarka u foton [18]:

$$P_{q\gamma} = \frac{1 + (1-z)^2}{z} \quad (3.27)$$

te pomoću nje izraz za matrični element prosumiran po polarizaciji fotona i spinu kvarka postaje:

$$\sum_s d_{\mu\nu}(\bar{u}T_1^\mu v)(\bar{u}T_1^\nu v)^* \rightarrow \frac{1}{(k_\gamma \cdot q)} P_{q\gamma}(z) \bar{v} \bar{T} \frac{\not{k}_\gamma}{z} T v. \quad (3.28)$$

Da bismo dobili matrični element  $\Theta$  u granici kolinearne kvark-foton emisije, sve što trebamo napraviti je prosumirati ovaj izraz još po spinu antikvarka. U tu se svrhu koristi standardni Casimirov trik:

$$\begin{aligned} \Theta(k_\gamma, q, p)|_{(q \cdot k_\gamma = 0)} &= \sum_{s'} \frac{1}{(k_\gamma \cdot q)} P_{q\gamma}(z) \bar{v} \bar{T} \frac{\not{k}_\gamma}{z} T v \\ &= \frac{1}{(k_\gamma \cdot q)} P_{q\gamma}(z) \text{Tr}[(-\not{p}) \bar{T} \frac{\not{k}_\gamma}{z} T]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Možemo uočiti da smo dobili matrični element koji bismo dobili da smo promatrali

proces produkcije  $q\bar{q}$  (to je zapisano u vrhu  $T$ ). Jedina je distinkcija ta što smo umjesto kvarka u konačnom stanju dobili foton impulsa  $\frac{k_\gamma}{z}$  koji predstavlja zbrojeni impuls kvarka i fotona  $q + k_\gamma$  u kolinearnoj granici. Također, bitno je uočiti da je cijeli matrični element divergentan kao  $\frac{1}{q \cdot k_\gamma}$ , a ne kao  $\frac{1}{(q \cdot k_\gamma)^2}$  što bismo naivno očekivali iz relacije (3.16).

U ovom smo odjeljku zasad uspješno pokazali da se u kolinearnoj granici matrični element za  $q\bar{q}\gamma$  svodi na faktoriziranu formu:

$$\Theta(k_\gamma, q, p) \rightarrow \frac{1}{(k_\gamma \cdot q)} P_{q\gamma}(z) \Xi \left( \frac{k_\gamma}{z}, p \right), \quad (3.30)$$

gdje je  $\Xi \left( \frac{k_\gamma}{z}, p \right) = \text{Tr}[p\bar{T}\frac{k_\gamma}{z}T]$  matrični element za  $q\bar{q}$  produkciju. Zaključujemo stoga da je udarni presjek divergentan u granici  $q \cdot k_\gamma \rightarrow 0$  te ga moramo regularizirati. Fizikalna pozadina divergencije je emisija fotona kolinearno s kvarkom. Ovakve kolinearne divergencije su nefizikalne te se apsorbiraju u tzv. fragmentacijske funkcije. To su neperturbativni objekti, analogni distribucijskim funkcijama te se mogu protumačiti kao vjerojatnost nalaženja hadrona (u ovom slučaju fotona) unutar partona. Sljedeći nam je zadatak regularizirati izraz za udarni presjek iz relacije (2.14). Način na koji se to radi je da matričnom elementu  $\Theta(k_\gamma, q, p)$  u tom izrazu dodamo i oduzmemo isti taj matrični element u kolinearnoj granici:

$$\Theta(k_\gamma, q, p) \rightarrow \left( \Theta(k_\gamma, q, p) - \frac{P_{q\gamma}(z)}{q \cdot k_\gamma} \Xi \left( \frac{k_\gamma}{z}, p \right) \right) + \frac{P_{q\gamma}(z)}{q \cdot k_\gamma} \Xi \left( \frac{k_\gamma}{z}, p \right). \quad (3.31)$$

Prvi član, koji je dan u zagradama bit će konačan jer smo njemu oduzeli kolinearno divergentni doprinos. Taj dio udarnog presjeka nazvat ćemo *direktnim* i označavati s  $d\sigma^{dir}$ . Drugi će dio predstavljati doprinos koji sadrži samo kolinearnu divergenciju. Njega ćemo zvati *fragmentacijski* udarni presjek  $d\sigma^{frag}$  iz razloga koji će uskoro biti jasan. Zbroj fragmentacijskog i direktnog dijela naziva se *inkluzivni* udarni presjek. Sada se možemo posvetiti računanju fragmentacijskog i direktnog dijela udarnog presjeka za produkciju  $\bar{q}\gamma$ . Međutim, korisno je prije toga napraviti jedan matematički *intermezzo* u kojem ćemo izvesti dva jako bitna izraza koja će se pojaviti u integriranju po faznom prostoru kvarka.

### 3.2 Matematički intermezzo: integral po faznom prostoru kvarka

U ovom ćemo odjeljku izračunati integrale potrebne za nastavak izvoda diferencijalnog udarnog presjeka. Preciznije, te integrale nećemo izračunati do kraja, već ćemo izvesti korisne relacije koje ćemo upotrebljavati u nastavku. Napominjemo da je izvod sličan ovome dan i u [19], ali budući da su nadolazeći integrali krucijalni za nastavak, ovdje dajemo cijeli izvod. Konkretno, radi se o integralu dipola kojeg množi kolinearno divergentni faktor  $\frac{1}{q \cdot k_\gamma}$ . Općenitosti radi, nećemo integrirati dipol, nego ćemo umjesto njega koristiti generičnu funkciju  $F$ . Generični integral koji nastojimo izračunati je:

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^2 \mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{F(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\gamma\perp})}{q \cdot k_\gamma}. \quad (3.32)$$

Prvi nam je korak skalarni produkt  $q \cdot k_\gamma$  napisati samo pomoću transverzalnih komponenta impulsa. To je moguće napraviti zbog ultrarelativističkog limesa, a taj je izvod proveden u dodatku C. Formula koja se na kraju dobije dana je s:

$$\frac{1}{q \cdot k_\gamma} = \frac{2(1-z)}{z} \frac{1}{(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\gamma\perp} - \frac{1}{z}\mathbf{k}_{\gamma\perp})^2}. \quad (3.33)$$

Stoga, uvodeći prikladnu supstituciju integral iz (3.32) postaje:

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^2 \mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} F(\mathbf{p}_\perp + \frac{1}{z}\mathbf{k}_{\gamma\perp}) \frac{2(1-z)}{z} \frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2}. \quad (3.34)$$

Nakon inverzne Fourier transformacije funkcije  $F$  integral postaje:

$$\mathcal{I} = \frac{2(1-z)}{z} \int d^2 \mathbf{x}_\perp F(\mathbf{x}_\perp) e^{i \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \cdot \mathbf{x}_\perp} \underbrace{\int \frac{d^2 \mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^{i \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\mathbf{p}_\perp^2}}_{\mathcal{J}(\mathbf{x}_\perp)}. \quad (3.35)$$

Sada je jasno da je prvo pametnije posvetiti se integralu  $\mathcal{J}(\mathbf{x}_\perp)$ . Njemu se pristupa na način da se uvede tzv. Schwingerova parametrizacija definirana u [20]:

$$(\mathbf{p}_\perp^2)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} e^{-x \mathbf{p}_\perp^2}. \quad (3.36)$$

Primijetite da ova parametrizacija nije ništa drugo nego pametno napisana Gamma funkcija. Pomoću nje integral  $\mathcal{J}$  poprima oblik pogodan za svođenje na potpuni

kvadrat:

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_\perp) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dy y^{\alpha-1} \int \frac{d^2 \mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-y\mathbf{p}_\perp^2 + i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} \Big|_{\alpha=1}. \quad (3.37)$$

Integral po  $\mathbf{p}_\perp$  ćemo izračunati dimenzionalnom regularizacijom u  $D$  dimenzija te ćemo na kraju uzeti da je  $D = 2 - 2\epsilon$ . Na kraju ćemo vidjeti da će taj integral divergirati kao  $\frac{1}{\epsilon}$ . Također, ovdje moramo uvesti i dimenzionalni regulator  $\mu^{2-D}$  koji pazi na dimenzionalnost integrala [18]. Jednom kada to sve napravimo i kada eksponent svedemo na potpuni kvadrat, sve što nam preostaje je izračunati klasični Gaussov integral čiji izračun ovdje preskačemo. Nakon kratkog raspisa dobiva se:

$$\int \frac{d^2 \mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-y\mathbf{p}_\perp^2 + i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} = \frac{\mu^{2-D}}{(2\pi)^D} e^{-\frac{\mathbf{x}_\perp^2}{4y}} \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{D}{2}}. \quad (3.38)$$

Ovaj se izraz sada ubacuje u izraz (3.37) te za ukupan integral  $\mathcal{J}(\mathbf{x}_\perp)$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}_\perp) &= \frac{\mu^{2-D}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \left(\frac{\mathbf{x}_\perp^2}{4}\right)^{\alpha - \frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} - \alpha\right) \Big|_{\alpha=1, D=2-2\epsilon} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(4\pi \frac{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2}{4}\right)^\epsilon \Gamma(-\epsilon). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sljedeći je korak razviti ovaj izraz po malom  $\epsilon$ . Razvoj gamma funkcije dan je s [18]:

$$\Gamma(-\epsilon) \approx -\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E, \quad (3.40)$$

gdje je  $\gamma_E$  Euler-Mascheronijeva konstanta, a razvoj faktora s  $\epsilon$  u eksponentu je:

$$\left(4\pi \frac{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2}{4}\right)^\epsilon \approx 1 + \epsilon \left(\ln(4\pi) + \ln\left(\frac{\mathbf{x}_\perp^2 \mu^2}{4}\right)\right). \quad (3.41)$$

Kombinirajući ta dva razvoja lagano dobivamo konačan izraz za  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_\perp) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \frac{c_0^2}{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2} \right], \quad (3.42)$$

gdje smo uveli dvije nove oznake (radimo u tzv. MŠ pristupu):

$$\frac{1}{\hat{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \quad \text{i} \quad c_0 = 2e^{-\gamma_E}. \quad (3.43)$$

Zadržali smo samo konačne doprinose i one koji divergiraju kao  $\frac{1}{\epsilon}$  jer svi ostali propadaju u granici kada  $\epsilon \rightarrow 0$ . Uzimajući sve dosad izvedeno u obzir, početni integral

definiran u (3.32) sada postaje:

$$\mathcal{I} = \frac{1-z}{z} \frac{1}{(2\pi)} \int d^2\mathbf{x}_\perp F(\mathbf{x}_\perp) \left[ -\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \left( \frac{c_0^2}{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2} \right) \right] e^{i \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \cdot \mathbf{x}_\perp}. \quad (3.44)$$

Ovo je jako bitna relacija koja će nam biti od koristi kada budemo integrirali diferencijalni udarni presjek za  $q\bar{q}\gamma$  produkciju po faznom prostoru kvarka.

Sada ćemo se posvetiti samo drugom članu u uglatoj zagradi, tj. zanima nas:

$$\frac{1}{(2\pi)} \int d^2\mathbf{x}_\perp F(\mathbf{x}_\perp) \ln \left( \frac{c_0^2}{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2} \right) e^{i \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \cdot \mathbf{x}_\perp}. \quad (3.45)$$

Za početak radimo iste korake kao i prije. Prvo funkciju  $F$  napišemo preko Fourierovog transformata, a zatim uvedemo adekvatnu supstituciju da bismo za promatrani integral dobili:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2\mathbf{q}_\perp F \left( \mathbf{q}_\perp + \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \right) \int d^2\mathbf{x}_\perp \ln \left( \frac{c_0^2}{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2} \right) e^{-i\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}. \quad (3.46)$$

Integral po  $\mathbf{x}_\perp$  ima oblik 2D Fourierovog transformata logaritamske funkcije. U dodatku (D) je izveden malo općenitiji oblik takvog integrala. Mi ćemo ovdje iskoristiti to rješenje za  $\zeta = 0$  i dobiti:

$$\int d^2\mathbf{x}_\perp \ln \left( \frac{c_0^2}{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2} \right) e^{-i\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp} = 4\pi \left( \frac{1}{\mathbf{q}_\perp^2} - \delta^{(2)}(\mathbf{q}_\perp) \int \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{\mathbf{p}_\perp^2} e^{i\mathbf{f}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp} \right), \quad (3.47)$$

gdje je  $|\mathbf{f}_\perp| \equiv \frac{c_0}{\mu}$ . Uvrštavanjem ovog izraza u (3.46) za početni integral iz (3.45) dobivamo:

$$\frac{1}{\pi(2\pi)} \left[ \int \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{\mathbf{q}_\perp^2} F \left( \mathbf{q}_\perp + \frac{1}{z} \mathbf{k}_{\gamma\perp} \right) - \int \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{\mathbf{q}_\perp^2} F \left( \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \right) e^{(i\mathbf{f}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp)} \right]. \quad (3.48)$$

Drugi dio ovog izraza može se povezati s Besselovom funkcijom:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{\mathbf{q}_\perp^2} F \left( \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \right) e^{(i\mathbf{f}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp)} = \\ & = \int_0^\infty \frac{q_\perp dq_\perp}{q_\perp^2} F \left( \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \right) \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\mathbf{f}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp \cos \phi} \\ & = \int \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{\mathbf{q}_\perp^2} F \left( \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \right) J_0 \left( \frac{c_0}{\mu} q_\perp \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$



Kombinirajući gornje izraze za integral iz (3.45) dobivamo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)} \int d^2 \mathbf{x}_\perp F(\mathbf{x}_\perp) \ln \left( \frac{c_0^2}{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2} \right) e^{i \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \cdot \mathbf{x}_\perp} = \\ & = 2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2 \mathbf{q}_\perp^2} \left[ F \left( \mathbf{q}_\perp + \frac{1}{z} \mathbf{k}_{\gamma\perp} \right) - J_0 \left( \frac{c_0}{\mu} \mathbf{q}_\perp \right) F \left( \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Kombiniranjem ovog izraza s (3.44) možemo izvesti još jednu jako bitnu relaciju koju ćemo koristiti u nastavku. Konkretno, to je relacija koja divergenciju  $\frac{1}{\hat{\epsilon}}$  prikazuje kao integral po faznom prostoru kvarka gdje je podintegralna funkcija Besselova funkcija.

Ta je relacija dana s:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1-z}{z} \left( -\frac{1}{\hat{\epsilon}} \right) = \int_{\mathbf{q}_\perp} \frac{1}{q \cdot k_\gamma} J_0 \left( c_0 \frac{|\mathbf{q}_\perp - \frac{1-z}{z} \mathbf{k}_{\gamma\perp}|}{\mu} \right), \quad (3.51)$$

gdje strogo govoreći jednakost ima smisla kada se desna strana protumači u  $D$  dimenzija. Ovime završavamo matematičku ekskurziju te se sada vraćamo na račun udarnog presjeka za  $\bar{q}\gamma$  produkciju.

### 3.3 Račun diferencijalnog udarnog presjeka za $\bar{q}\gamma$ produkciju

U izrazu (3.1) smo dali formulu po kojoj ćemo dobiti diferencijalni udarni presjek za produkciju  $\bar{q}\gamma$ . U ovom ćemo odjeljku detaljno provesti taj račun i iskoristiti formule (3.44) i (3.51) izvedene u prethodnom odjeljku. Prvo što moramo napraviti je u formulu (3.1) uvrstiti definiciju udarnog presjeka za produkciju  $q\bar{q}\gamma$  danu u (2.14):

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\bar{q}\gamma} &= \int \frac{dq^+}{(2\pi)2q^+} (2\pi)^3 2q^+ \int_{\mathbf{q}_\perp} \frac{d\sigma_{q\bar{q}\gamma}}{dq^+ d^2\mathbf{q}_\perp} \\
&= \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dk_\gamma^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_\gamma^+} \int \frac{dq^+}{(2\pi)2q^+} (2\pi)^3 2q^+ \times \\
&\int_{\mathbf{q}_\perp} \sum_f \frac{16\pi\alpha_e\alpha_s^2 q_f^2}{C_F} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \times \\
&\times \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \Theta(k_\gamma, q, p).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Sljedeći je korak matrični element  $\Theta$  napisati na način dan u (3.31). Na taj ćemo način efektivno dobiti dva integrala. Prvi će integral predstavljati direktni dio udarnog presjeka koji ne sadrži divergenciju, a drugi doprinos će biti fragmentacijski. S obzirom na to da je potrebno više računa kako bismo došli do fragmentacijskog doprinosa, prvo ćemo njega izračunati.

#### 3.3.1 Fragmentacijski doprinos $d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{frag}$

Sada nam je zadatak doći do fragmentacijskog doprinosa udarnom presjeku. Koristeći jednačbe (3.31) i (3.52), vidimo da je on dan s:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{frag} &= \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dk_\gamma^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_\gamma^+} \int \frac{dq^+}{(2\pi)2q^+} (2\pi)^3 2q^+ \times \\
&\times \int_{\mathbf{q}_\perp} \sum_f \frac{16\pi\alpha_e\alpha_s^2 q_f^2}{C_F} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \times \\
&\times \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \frac{P_{q\gamma}(z)}{q \cdot k_\gamma} \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

U svrhu preglednosti, integral po transverzalnem faznom prostoru provodimo tako da ne pišemo članove koji ne ovise o  $\mathbf{q}_\perp$ . Jedina se ovisnost o transverzalnem impulsu  $\mathbf{q}_\perp$  krije u funkciji  $\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)$  i ta ovisnost dolazi zbog sačuvanja impulsa. Iz jednačbe (2.15) vidimo da je taj doprinos zapravo skriven u dipolnoj funkciji

$\tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_{2\perp} - \mathbf{k}_\perp)$ , stoga se integral po transverzalnem faznom prostoru koji moramo izračunati svodi na:

$$\pi R_A^2 \frac{N_C}{4\alpha_S} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_\perp) \int_{\mathbf{q}_\perp} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_{2\perp} - \mathbf{k}_\perp) \frac{P_{q\gamma}(z)}{q \cdot k_\gamma} \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right), \quad (3.54)$$

i gdje je jedina ovisnost o  $\mathbf{q}_\perp$  skrivena u nazivniku i dipolnoj funkciji. Integral se najlakše provodi tako da se dipolna funkcija pomoću Fourierovog transformata i očuvanja impulsa prvo napiše u koordinatnoj bazi na način:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_{2\perp} - \mathbf{k}_\perp) = \int d^2\mathbf{x}_\perp \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{x}_\perp) e^{i\mathbf{x}_\perp \cdot (\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\gamma\perp})} e^{i\mathbf{x}_\perp \cdot (\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_\perp)}. \quad (3.55)$$

Na taj način integral iz (3.54) poprima oblik:

$$\pi R_A^2 \frac{N_C}{4\alpha_S} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_\perp) \int d^2\mathbf{x}_\perp \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{x}_\perp) e^{i\mathbf{x}_\perp \cdot (\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_\perp)} P_{q\gamma}(z) \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right) \int_{\mathbf{q}_\perp} \frac{e^{i\mathbf{x}_\perp \cdot (\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\gamma\perp})}}{q \cdot k_\gamma}. \quad (3.56)$$

Preostali integral po faznom prostoru kvarka trivijalan je jer smo njega već definirali u (3.32) te izveli u (3.44) uz zamjenu do sada generične funkcije  $F$  s eksponencijalnom funkcijom:  $F(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\gamma\perp}) \rightarrow e^{i\mathbf{x}_\perp \cdot (\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\gamma\perp})}$ . Uvrštavanjem te formule dobivamo:

$$\begin{aligned} & \pi R_A^2 \frac{N_C}{4\alpha_S} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_\perp) \int d^2\mathbf{x}_\perp \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{x}_\perp) e^{i\mathbf{x}_\perp \cdot (\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_\perp)} P_{q\gamma}(z) \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right) \times \\ & \times \frac{1-z}{z} \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{\hat{\epsilon}} + \ln \frac{c_0^2}{\mu^2 \mathbf{x}_\perp^2} \right] e^{i\frac{k_{\gamma\perp}}{z} \cdot \mathbf{x}_\perp}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dio s logaritmom ćemo pokratiti s istim takvim dijelom u direktnom udarnom presjeku pa ga ni nećemo pisati u nastavku. Divergentni se dio također pojavljuje i u fragmentacijskom i u direktnom udarnom presjeku, ali ideja je njega u ta dva doprinosa napisati na dva različita načina. U fragmentacijskom dijelu divergenciju  $-\frac{1}{\hat{\epsilon}}$  mijenjamo s fragmentacijskom funkcijom kvarka u foton koja je dana s [21]:

$$-\frac{P_{q\gamma}(z)}{\hat{\epsilon}} = D_{q\gamma}(z) \frac{2\pi}{q_f^2 \alpha_e}, \quad (3.58)$$

gdje je  $D_{q\gamma}(z)$  fragmentacijska funkcija kvarka u foton. Preostali integral po  $\mathbf{x}_\perp$  u jednadžbi (3.57) sada ima ulogu Fourierove transformacije dipolne funkcije. Uvrštavajući izvedeni integral po transverzalnem faznom prostoru kvarka u (3.53), za fragmenta-

cijski dio diferencijalnog udarnog presjeka  $\bar{q}\gamma$  zasad dobivamo:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{\text{frag}} &= \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dk_{\gamma^+}}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_{\gamma^+}} \int_0^\infty \frac{dq^+}{(2\pi)2q^+} \sum_f \frac{16\pi\alpha_e\alpha_s^2 q_f^2}{C_F} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \times \\
&\times \pi R_A^2 \frac{N_C}{4\alpha_S} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_\perp) D_{q\gamma}(z) \frac{2\pi}{q_f^2 \alpha_e} \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right) \frac{1-z}{(2\pi)z} \times \\
&\times \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}\left(\frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} + \mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_\perp\right).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Integraciju po  $q^+$  provodimo tako da uvedemo supstituciju fotonskog impulsnog udjela:  $z = \frac{k_{\gamma^+}}{k_{\gamma^+} + q^+}$ . To nam omogućava da diferencijal zamijenimo s:  $dq^+ = -k_{\gamma^+} \frac{dz}{z^2}$ . Osim toga imamo i relaciju  $\frac{k^+}{q^+} = \frac{z}{1-z}$ . Također, granice se pomiču na sljedeći način:  $0 \rightarrow 1$  i  $\infty \rightarrow 0$  te ćemo njih okrenuti pomoću minusa iz diferencijala. Nakon što uvrstimo sve što smo naveli i pokratimo sve članove, za fragmentacijski dio udarnog presjeka produkcije  $\bar{q}\gamma$  dobivamo:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{\text{frag}} &= \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dk_{\gamma^+}}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_{\gamma^+}} \int_0^1 \frac{dz}{z^2} \sum_f D_{q\gamma}(z) \frac{4\alpha_s^2}{C_F} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \times \\
&\times \pi R_A^2 \frac{N_C}{4\alpha_S} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_\perp) \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right) \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}\left(\frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} + \mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_\perp\right).
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Uvrštavanjem definicije funkcije  $\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)$  iz jednadžbe (2.15) konačno dobivamo:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{\text{frag}} &= \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dk_{\gamma^+}}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_{\gamma^+}} \int_0^1 \frac{dz}{z^2} \sum_f D_{q\gamma}(z) \frac{4\alpha_s^2}{C_F} \times \\
&\times \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right).
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Kompletnosti radi dajemo i formulu koja povezuje ovaj udarni presjek s udarnim presjekom za produkciju  $q\bar{q}$  para i koja je dana s [15]:

$$\begin{aligned}
d\sigma_{q\bar{q}} &= \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dq^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{2q^+} \left[ \frac{4\alpha_s^2}{C_F} \times \right. \\
&\times \left. \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \frac{\Phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \Xi(q, p) \right].
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Relacija koja ih veže je:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{\text{frag}} &= \sum_f \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dk_\gamma^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_\gamma^+} \int_0^1 \frac{dz}{z^2} D_{q\gamma}(z) \times \\ &\times \left[ 2q^+(2\pi)^3 2p^+(2\pi)^3 \frac{d\sigma_{q\bar{q}}}{dq^+ d^2\mathbf{q}_\perp dp^+ d^2\mathbf{p}_\perp} \right]_{q=\frac{k_\gamma}{z}}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Integracija po  $z$  predstavlja zapravo integraciju po dijelu faznog prostora koji nam govori koliki udio impulsa ima foton koji je emitiran kolinearno s kvarkom. Ovime završavamo izvod fragmentacijskog doprinosa te u nastavku izvodimo  $d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{\text{dir}}$ .

### 3.3.2 Direktni doprinos $d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{\text{dir}}$

Direktni dio udarnog presjeka zapravo se može odmah napisati. Sve što ćemo napraviti je to da ćemo divergenciju  $-\frac{1}{\epsilon}$  koja će doći integracijom matričnog elementa  $\Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right)$  i kolinearno divergentnog nazivnika  $q \cdot k_\gamma$  po transverzalnom faznom prostoru kvarka zamijeniti s integracijom Besselove funkcije po transverzalnom faznom prostoru. U tu se svrhu primjenjuje formula (3.51). Kada sve to lijepo posložimo, za direktni udarni presjek dobivamo:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\bar{q}\gamma}^{\text{dir}} &= \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dk_\gamma^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{2k_\gamma^+} \sum_f \frac{16\pi\alpha_e\alpha_s^2 q_f^2}{C_F} \int \frac{dq^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{2q^+} \times \\ &\times \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \left[ \frac{\Phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \Theta(k_\gamma, q, p) - \right. \\ &\left. - \frac{\Phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \frac{\mathbf{k}_{\gamma\perp}}{z} + \mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_{1\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} J_0\left(c_0 \frac{|\mathbf{q}_\perp - \frac{1-z}{z}\mathbf{k}_{\gamma\perp}|}{\mu}\right) \frac{P_{q\gamma}(z)}{q \cdot k_\gamma} \Xi\left(\frac{k_\gamma}{z}, p\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ovime smo zapravo završili izvod diferencijalnog udarnog presjeka za produkciju  $\bar{q}\gamma$ . Preostali se integrali u fragmentacijskom i direktnom udarnom presjeku rješavaju numerički, o čemu će više riječi biti u posljednjem odjeljku. Međutim, u eksperimentalnom se postavu ovakav izraz normalizira na udarni presjek za produkciju tzv. vodeće čestice u ovom procesu (čestica s najvećim impulsom) za koju ćemo mi uzeti da je to antikvark. Takva normalizacija vodi funkciji koju nazivamo *koeficijentom*

korelacije, a on je dan s [22]:

$$CP(\Delta\phi_{\bar{q}\gamma}) = \frac{\frac{d\sigma_{\bar{q}\gamma}}{d^2\mathbf{k}_{\gamma\perp}d\eta_{\gamma}d^2\mathbf{p}_{\perp}d\eta_{\bar{q}}}(\Delta\phi_{\bar{q}\gamma})}{\frac{d\sigma_{\bar{q}}}{d^2\mathbf{p}_{\perp}d\eta_{\bar{q}}}}, \quad (3.65)$$

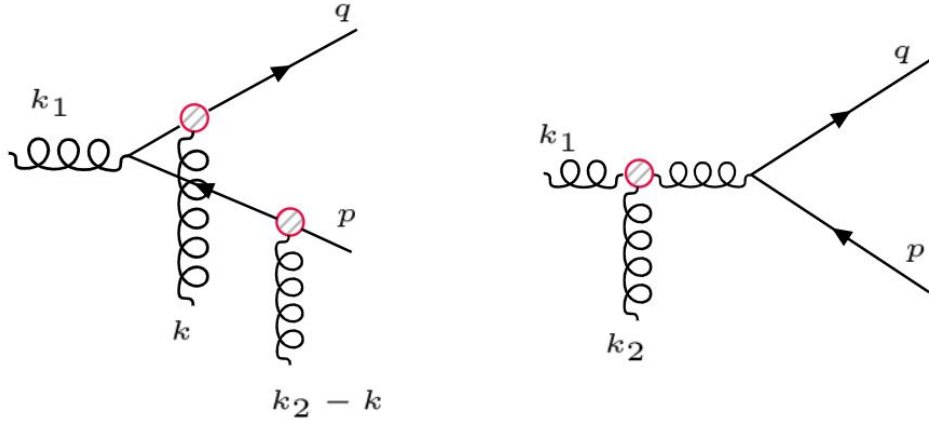
koja nam govori o kutnoj korelaciji između fotona i antikvarka. Primijetite da smo + komponente impulsa zamijenili rapiditetom:  $\frac{dk^+}{k^+} \rightarrow d\eta$ . Jedina ovisnost o kutu između antikvarka i fotona krije se u brojniku pa ovom normalizacijom nismo izgubili nikakvu informaciju o kutnim korelacijama između njih. Međutim, normalizacija će pokratiti određene neodređenosti koje nastaju pri produkciji antikvarka. Za dobivanje ukupnog koeficijenta korelacije trebamo izračunati još nazivnik u ovom izrazu. Da bismo došli do udarnog presjeka za produkciju antikvarka, moramo provesti sličan postupak kao u ovom poglavlju. Jedina razlika je ta što nam sada početni udarni presjek neće biti onaj za produkciju  $q\bar{q}\gamma$ , već onaj za produkciju  $\bar{q}q$  dan u (3.62). Dakle, prvo ćemo pronaći matrični element za  $q\bar{q}$  produkciju u kolinearnoj granici. Zatim ćemo taj matrični element dodati i oduzeti matričnom elementu  $\Xi(q, p)$  za produkciju  $q\bar{q}$  te definirati fragmentacijski i direktni doprinos. Integrali koji će se pojavljivati identični su pa ćemo te rezultate reciklirati.

## 4 Diferencijalni udarni presjek za $\bar{q}$ produkciju

Cilj ovog odjeljka praktički je ponoviti račun iz prethodnog odjeljka, ali sada za slučaj kolinearne emisije kvarka i antikvarka u produkciji  $q\bar{q}$ . S obzirom na to da postoje određene suptilnosti u kojima će se račun razlikovati, vrijedi ovaj račun napraviti zasebno. Kronologija je takva da ćemo prvo naći matrični element  $\Xi(q, p)$  u kolinearnom limesu, a nakon toga izračunati fragmentacijski i direktni doprinos produkciji antikvarka tako što ćemo integrirati po faznom prostoru kvarka.

### 4.1 Matrični element za $q\bar{q}$ emisiju u granici $q \cdot p \rightarrow 0$

Dijagrami koji doprinose produkciji  $q\bar{q}$  para prikazani su na slici (4.1). Matrične



Slika 4.1: Dijagrami za  $q\bar{q}$  produkciju.

elemente koji proizlaze iz ovih dijagrama označit ćemo s:  $\Xi(q, p) = 2\Xi_{g,q\bar{q}} + \Xi_{g,g} + \Xi_{q\bar{q},q\bar{q}}$ , a iz literature [23] će nam trebati samo:

$$\begin{aligned}
 \Xi_{g,q\bar{q}} &= \frac{4}{(q \cdot p)(2p^+ \mathbf{a}_\perp^2 + 2q^+ \mathbf{b}_\perp^2)} [\mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp (q^+ (C \cdot p) + p^+ (C \cdot q) - C^+ (q \cdot p)) \\
 &\quad + C^+ (-(\mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp)(\mathbf{b}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp) + (\mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp)(\mathbf{b}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp)) \\
 &\quad + p^+ ((\mathbf{a}_\perp \cdot C_\perp)(\mathbf{b}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp) - (\mathbf{b}_\perp \cdot C_\perp)(\mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp)) \\
 &\quad + q^+ (-(\mathbf{a}_\perp \cdot C_\perp)(\mathbf{b}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp) + (\mathbf{b}_\perp \cdot C_\perp)(\mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp)], \\
 \Xi_{g,g} &= \frac{2(p \cdot C)(q \cdot C) - (q \cdot p)C^2}{(q \cdot p)^2},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdje su  $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{q}_\perp - \mathbf{k}_\perp$ ,  $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{k}_{2\perp} - \mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_\perp$ , a  $C^\mu$  je Lipatov verteks definiran s [16]:

$$\begin{aligned} C^+(q+p, \mathbf{k}_{1\perp}) &= q^+ + p^+ - \frac{k_{1\perp}^2}{q^- + p^-} \\ C^-(q+p, \mathbf{k}_{1\perp}) &= \frac{(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{q}_\perp - \mathbf{k}_{1\perp})^2}{q^+ + p^+} - q^- - p^- \\ C_\perp(q+p, \mathbf{k}_{1\perp}) &= \mathbf{q}_\perp + \mathbf{p}_\perp - 2\mathbf{k}_{1\perp}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

sa svojstvom:

$$(q+p) \cdot C = 0. \quad (4.3)$$

Vrlo se jednostavno može pokazati da se u kolinearnoj granici vrh  $\Xi_{g,q\bar{q}}$  svodi na nešto konačno jer se u brojniku faktorizira  $q \cdot p$  koji onda pokrati taj isti član u nazivniku. Sada ćemo pokazati da se isti takav član faktorizira i u brojniku matričnog elementa  $\Xi_{g,g}$  pa će on pokratiti kvadrat tog člana u nazivniku te ćemo dobiti divergenciju tipa  $1/(q \cdot p)$ . Iz tog ćemo razloga moći koristiti prijašnje integrale. Da bismo to pokazali, prvo moramo izračunati skalarni produkt  $C \cdot q$  u kolinearnom limesu. Prije no što se uhvatimo u koštac s time, definirajmo udio impulsa kvarka kao:

$$z_q = \frac{q^+}{q^+ + p^+}. \quad (4.4)$$

Ideja nam je sada skalarni produkt  $(q \cdot C)$  napisati samo pomoću transverzalnih komponenta impulsa i  $z_q$ . Koristeći ultrarelativistički limes i činjenicu da su kvark i antikvark na ljusci mase,  $q^-$  i  $p^-$  mijenjamo s:

$$q^- \rightarrow \frac{q_\perp^2}{2q^+} \quad p^- \rightarrow \frac{p_\perp^2}{2p^+}. \quad (4.5)$$

Također, vrlo jednostavno možemo pokazati da vrijedi i:

$$\frac{q^-}{q^- + p^-} = \frac{1 - z_q}{1 - z_q \left(1 - \frac{p_\perp^2}{q_\perp^2}\right)}. \quad (4.6)$$

Ovdje je samo bitno napomenuti da ćemo u trenutku kada budemo izvodili diferencijalni udarni presjek za produkciju  $\bar{q}$ , veličinu  $z_q$  zamijeniti veličinom  $z_p$  koja je dana kao  $1 - z_q$  i predstavlja udio impulsa antikvarka. Razlog tome je što će nam izrazi biti jednostavniji s tom varijablom. Sve skupa, skalarni produkt  $C \cdot q$  možemo napisati u



sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
C \cdot q &= \frac{q_{\perp}^2}{2} \frac{1 - z_q}{z_q} - \frac{1 - z_q}{1 - z_q \left(1 - \frac{p_{\perp}^2}{q_{\perp}^2}\right)} k_{1\perp}^2 + z_q (\mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{k}_{1\perp})^2 \\
&\quad - \frac{p_{\perp}^2}{2} \frac{z_q}{1 - z_q} - \mathbf{q}_{\perp} \cdot (\mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{p}_{\perp} - 2\mathbf{k}_{1\perp}) \\
&= q_{\perp}^2 \left( \frac{1 - z_q}{2z_q} + z_q - 1 \right) + p_{\perp}^2 \left( z_q - \frac{z_q}{2(1 - z_q)} \right) + (2z_q - 1) \mathbf{q}_{\perp} \cdot \mathbf{p}_{\perp} \\
&\quad + k_{1\perp}^2 \left( z_q - \frac{1 - z_q}{1 - z_q \left(1 - \frac{p_{\perp}^2}{q_{\perp}^2}\right)} \right) - \mathbf{q}_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{1\perp} (2z_q - 2) - 2z_q \mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{1\perp}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Nakon kratke, vrlo jednostavne algebre prva tri člana u drugom dijelu izraza (4.7) možemo napisati u obliku:

$$\frac{2z_q - 1}{2z_q(z_q - q)} (z_q \mathbf{p}_{\perp} - (1 - z_q) \mathbf{q}_{\perp})^2 \equiv \frac{2z_q - 1}{2z_q(z_q - q)} \mathbf{v}_{\perp}^2, \tag{4.8}$$

gdje smo radi jednostavnosti definirali transverzalni vektor  $\mathbf{v}_{\perp}$ . Nadalje, trivijalno vidimo da i zadnja dva člana iz tog izraza faktoriziraju vektor  $\mathbf{v}_{\perp}$ . Preostaje još jedino vidjeti hoće li ga faktorizirati i član proporcionalan s  $k_{1\perp}^2$ . Da bismo to vidjeli, eksplicitno ćemo raspisati taj član:

$$\begin{aligned}
k_{1\perp}^2 \left( z_q - \frac{1 - z_q}{1 - z_q \left(1 - \frac{p_{\perp}^2}{q_{\perp}^2}\right)} \right) &= k_{1\perp}^2 \frac{z_q(1 - z_q)q_{\perp}^2 + z_q^2 p_{\perp}^2 - (1 - z_q)q_{\perp}^2}{(1 - z_q)q_{\perp}^2 + z_q p_{\perp}^2} \\
&= k_{1\perp}^2 \frac{z_q \mathbf{p}_{\perp} + (1 - z_q) \mathbf{q}_{\perp}}{(1 - z_q)q_{\perp}^2 + z_q p_{\perp}^2} \cdot (z_q \mathbf{p}_{\perp} - (1 - z_q) \mathbf{q}_{\perp}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Uspjeli smo postići da se izraz (4.7) može napisati kao skalarni produkt dva transverzalna vektora od kojih je jedan  $\mathbf{v}_{\perp}$ . Provodeći sličnu analizu kao u dodatku C, možemo pokazati da je  $\mathbf{v}_{\perp}$  proporcionalan skalarnom produktu  $q \cdot p$ :

$$2q \cdot p = \frac{1}{z_q(1 - z_q)} (z_q \mathbf{p}_{\perp} - (1 - z_q) \mathbf{q}_{\perp})^2, \tag{4.10}$$

što znači da će u kolinearnom limesu  $\mathbf{v}_{\perp}^2$  težiti u nulu. Iz tog ćemo razloga u izrazu za skalarni produkt  $q \cdot C$  zadržati samo članove linearne u  $\mathbf{v}_{\perp}$ . Stoga, za skalarni

produkt razvijen do prvog reda u vektoru  $\mathbf{v}_\perp$  dobivamo:

$$C \cdot q \rightarrow \mathbf{v}_\perp \cdot \left( -2\mathbf{k}_{1\perp} + k_{1\perp}^2 \frac{2(1-z_q)\mathbf{q}_\perp}{(1-z_q)q_\perp^2 + z_qp_\perp^2} \right). \quad (4.11)$$

U drugom smo članu zamijenili  $z_q\mathbf{p}_\perp$  sa  $\mathbf{v}_\perp + (1-z_q)\mathbf{q}_\perp$  i zanemarili  $\mathbf{v}_\perp^2$ . Iluminativno je još iskoristiti kolinearni limes u nazivniku tog člana. Jednom kada to napravimo, izraz za skalarni produkt možemo napisati u konačnom obliku:

$$C \cdot q \rightarrow 2 \left( -\mathbf{k}_{1\perp} + \frac{k_{1\perp}^2}{q_\perp^2} z_q \mathbf{q}_\perp \right) \cdot (z_q \mathbf{p}_\perp - (1-z_q)\mathbf{q}_\perp). \quad (4.12)$$

Sljedeći nam je korak izvesti  $(q \cdot C)^2$  i usrednjiti ga po kutu. Taj nam član treba jer se on nalazi u brojniku matičnog elementa  $\Xi_{g,g}$  jednom kada iskoristimo (4.3). Za usrednjeni kvadrat skalarnog produkta dobivamo:

$$(C \cdot q)^2 \rightarrow 2 \left( -\mathbf{k}_{1\perp} + \frac{k_{1\perp}^2}{q_\perp^2} z_q \mathbf{q}_\perp \right)^2 (z_q \mathbf{p}_\perp - (1-z_q)\mathbf{q}_\perp)^2. \quad (4.13)$$

U zadnjoj smo jednakosti samo iskoristili činjenicu da je usrednjeni kosinus po periodu jednak  $\frac{1}{2}$ . Sve zajedno dobivamo:

$$(C \cdot q)^2 \rightarrow 2(z_q \mathbf{p}_\perp - (1-z_q)\mathbf{q}_\perp)^2 \frac{k_{1\perp}^2 \left( \frac{\mathbf{q}_\perp}{z_q} - \mathbf{k}_{1\perp} \right)^2}{\left( \frac{\mathbf{q}_\perp}{z_q} \right)^2}. \quad (4.14)$$

Ovaj izraz možemo prikazati pomoću kvadrata Lipatovog verteksa. Naime, koristeći komponente dane u (4.2), vrlo jednostavno dobivamo  $C^2$ . U kolinearnom limesu on iznosi:

$$C^2 \left( \frac{q}{z_q}, \mathbf{k}_{1\perp} \right) = -4 \frac{k_{1\perp}^2 \left( \frac{\mathbf{q}_\perp}{z_q} - \mathbf{k}_{1\perp} \right)^2}{\left( \frac{\mathbf{q}_\perp}{z_q} \right)^2}. \quad (4.15)$$

Vidimo da (kombiniranjem izraza (4.10), (4.14) i (4.15)) u kolinearnom limesu usrednjeni kvadrat skalarnog produkta možemo napisati kao produkt skalarnog produkta  $(q \cdot p)$  i kvadrata Lipatovog verteksa:

$$(C \cdot q)^2 \rightarrow -(q \cdot p) z_q (1-z_q) C^2. \quad (4.16)$$

Sada možemo bez problema napisati matični element  $\Xi_{g,g}$  u terminima kvadrata Lipatovog verteksa. Budući da vrijedi (3.16), za taj matični element pišemo:

$$\Xi(p, q) \rightarrow \frac{2z_q(1-z_q)C^2 - C^2}{(q \cdot p)} = -\frac{C^2}{(q \cdot p)}(z_q^2 + (1-z_q)^2). \quad (4.17)$$

Možemo uočiti da smo opet dobili divergenciju tipa  $\frac{1}{(q \cdot p)}$  kao što smo i najavili. U svrhu slaganja s literaturom, matični ćemo element napisati u malo drukčijem obliku:

$$\Xi(p, q) \rightarrow \frac{1}{(q \cdot p)} T_R P_{gq}(z_q) X\left(\frac{q}{z_q}\right), \quad (4.18)$$

gdje je  $P_{gq}$  funkcija cijepanja gluona u kvark:  $P_{gq} = z_q^2 + (1-z_q)^2$ ,  $T_R$  je numerički faktor koji u našem slučaju iznosi  $\frac{1}{2}$ , a  $X\left(\frac{q}{z_q}\right)$  je matični element za produkciju gluona i glasi:

$$X\left(\frac{q}{z_q}\right) = 8\mathbf{k}_{1\perp}^2 \frac{\left(\frac{\mathbf{q}_\perp}{z_q} - \mathbf{k}_{1\perp}\right)^2}{\left(\frac{\mathbf{q}_\perp}{z_q}\right)^2}. \quad (4.19)$$

U idućem ćemo poglavlju izvesti diferencijalni udarni presjek za produkciju antikvarka tako što ćemo integrirati po faznom prostoru kvarka. Iz tog ćemo razloga, koristeći kolinearnost, ovaj matični element zapisati kao funkciju impulsa antikvarka  $p$ . Također, vidimo da je izraz (4.18) simetričan na zamjenu  $z_q \rightarrow (1-z_q)$  pa će radi elegantinijeg izraza to biti funkcija od  $z_p \equiv 1-z_q$ . Uvrštavajući potrebne supstitucije, veličina  $X$  postaje:

$$X\left(\frac{p}{z_p}\right) = 8\mathbf{k}_{1\perp}^2 \frac{\left(\frac{\mathbf{p}_\perp}{z_p} - \mathbf{k}_{1\perp}\right)^2}{\left(\frac{\mathbf{p}_\perp}{z_p}\right)^2}. \quad (4.20)$$

Sada imamo sve alate potrebne za izračun fragmentacijskog i direktnog dijela udarnog presjeka za produkciju antikvarka.

## 4.2 Fragmentacijski doprinos $d\sigma_{\bar{q}}^{frag}$

Prvo ćemo se posvetiti izračunu fragmentacijskog dijela udarnog presjeka. Izvodu će se pristupiti na identičan način kao izvodu fragmentacijskog dijela udarnog presjeka za  $\bar{q}\gamma$  produkciju, jedino što ćemo sada krenuti od udarnog presjeka za  $q\bar{q}$  produkciju danog u (3.62) koji ćemo radi preglednosti ponovno napisati:

$$d\sigma_{q\bar{q}} = \frac{dp^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{p}_\perp}{2p^+} \frac{dq^+}{(2\pi)^3} \frac{d^2\mathbf{q}_\perp}{2q^+} \left[ \frac{4\alpha_s^2}{C_F} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \Xi(q, p) \right]. \quad (4.21)$$

Početni je korak da matičnom elementu  $\Xi(q, p)$  dodamo i oduzmemo isti takav matični element, ali u kolinearnom limesu. U prethodnom smo odjeljku pokazali da će u tom limesu značajnu ulogu imati samo:  $\Xi_{g,g}\left(\frac{p}{z_p}\right)$ , pa je jedina zamjena koju radimo:

$$\Xi(q, p) \rightarrow \left( \Xi(g, p) - \frac{1}{(q \cdot p)} T_R P_{gq}(z_p) X\left(\frac{p}{z_p}\right) \right) + \frac{1}{(q \cdot p)} T_R P_{gq}(z_p) X\left(\frac{p}{z_p}\right). \quad (4.22)$$

Sada možemo definirati fragmentacijski dio udarnog presjeka za produkciju antikvarka. On je dan kao integral izraza (3.62) po faznom prostoru kvarka uz zamjenu  $\Xi(q, p) \rightarrow \frac{1}{(q \cdot p)} T_R P_{gq}(z_p) X\left(\frac{p}{z_p}\right)$ :

$$d\sigma_{\bar{q}}^{frag} = \frac{dp^+ d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^3 2p^+} \int \frac{dq^+ d^2\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^3 2q^+} \left[ \frac{4\alpha_s^2}{C_F} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{T_R}{q \cdot p} P_{gq}(z_p) X\left(\frac{p}{z_p}\right) \right]. \quad (4.23)$$

Integral po faznom prostoru možemo uzeti iz prethodnog poglavlja. Opet izostavimo dio s logaritmom jer se on pokrati s istim tim dijelom iz direktnog doprinosa. Također, član  $-\frac{1}{\hat{\epsilon}}$  opet ćemo zamijeniti s fragmentacijskom funkcijom, ali ovoga puta s fragmentacijskom funkcijom gluona u kvark (ona je jednaka fragmentacijskoj funkciji gluona u antikvark zbog simetričnosti u  $z_p$  i  $1 - z_p$ ):

$$D_{gq}(z_p) = \frac{\alpha_s}{2\pi} T_R P_{gq}(z_p) \left( -\frac{1}{\hat{\epsilon}} \right). \quad (4.24)$$

Bitna razlika između fragmentacijske funkcije kvarka u foton i fragmentacijske funkcije gluona u kvark je ta da se u potonjoj pojavljuje  $\alpha_S$  zbog čega će cijeli izraz za udarni presjek produkcije  $\bar{q}$  biti potisnut za  $\frac{1}{\alpha_S}$ . Jednom kada provedemo taj integral po transverzalnem faznom prostoru, ostaje nam još integral po  $+$  komponenti:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\bar{q}}^{frag} &= \frac{\pi R_A^2 N_C}{C_F} \frac{dp^+ d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2 2p^+} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}(\mathbf{k}_\perp) \times \\ &\times \int \frac{dq^+}{(2\pi)2q^+} \tilde{\mathcal{N}}_{A,Y_A}\left(\frac{\mathbf{p}_\perp}{z_p} - \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_\perp\right) D_{gq}(z_p) X\left(\frac{p}{z_p}\right) \frac{1-z_p}{z_p}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Integracija po  $q^+$  provodi se tako da  $q^+$  zamijenimo s  $z_p$  na isti način kao u prethodnom poglavlju. Na taj način integral koji preostaje jednak je:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\bar{q}}^{frag} &= \frac{1}{4\pi\alpha_s} \frac{dp^+ d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^2 2p^+} \frac{4\alpha_s^2}{C_F} \int_0^1 \frac{dz_p}{z_p^2} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \times \\ &\times \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} D_{gq}(z_p) X\left(\frac{p}{z_p}\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Još nam je preostalo doći do direktnog doprinosa.

### 4.3 Direktni doprinos $d\sigma_{\bar{q}}^{dir}$

Direktni doprinos je, kao i ranije, puno jednostavnije dobiti jer sve što trebamo napraviti je opet zamijeniti divergenciju  $\frac{-1}{\epsilon}$  integralom Besselove funkcije po transverzalnem faznom prostoru kvarka. Jednom kada to napravimo i kada sve lijepo posložimo, dobivamo izraz:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\bar{q}}^{dir} &= \frac{dp^+ d^2\mathbf{p}_\perp}{(2\pi)^3} \frac{4\alpha_s^2}{C_F} \int \frac{dq^+ d^2\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^3 2q^+} \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_\perp} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp})}{k_{1\perp}^2} \frac{\phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_\perp)}{k_{2\perp}^2} \times \\ &\times \left[ \Xi(q, p) - \frac{T_R}{q \cdot p} P_{gq}(z_p) X\left(\frac{p}{z_p}\right) J_0\left(c_0 \frac{|\mathbf{q}_\perp - \frac{1-z_p}{z_p} \mathbf{p}_\perp|}{\mu}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ovime smo izveli sve potrebne udarne presjeke te se sada možemo posvetiti kutnim korelacijama između izlaznih čestica.

## 5 Model igračke

Izračunali smo sve potrebno te se sada možemo posvetiti kutnim korelacijama fotona i antikvarka. Kao što smo već u uvodu spomenuli, očekujemo da razmazivanje naivno očekivanog singulariteta na kutu  $\pi$  bude veće u slučaju pA sudara nego u pp sudaru. Razlog tome je što pretpostavljamo da će gluoni iz jezgre predati veći transversalni impuls zato jer im je gustoća veća. U ovom ćemo radu promotriti model u kojem zanemarujemo direktne dijelove udarnih presjeka i u brojniku i u nazivniku izraza (3.65). Glavni razlog zašto posežemo za ovim modelom je pojednostavljenje računa. Za detaljniji opis treba uzeti u obzir i direktni doprinos, što će se svakako napraviti u nastavku istraživanja. Međutim, fizikalno očekujemo da će fragmentacijski foton ostaviti jači signal u mjernom uređaju jer se radi o procesu  $2 \rightarrow 2$ . Stoga, iako model služi da bismo si pojednostavili račune, on svakako ima i određenu fizikalnu podlogu. Uzimajući to u obzir, formula koja će se koristiti u nastavku je:

$$CP(\Delta\phi_{q\gamma}) = \frac{\frac{d\sigma_{q\gamma}^{frag}}{d^2\mathbf{k}_{\perp}d\eta_{\gamma}d^2\mathbf{p}_{\perp}d\eta_{\bar{q}}}(\Delta\phi_{q\gamma})}{\frac{d\sigma_{\bar{q}}^{frag}}{d^2\mathbf{p}_{\perp}d\eta_{\bar{q}}}}. \quad (5.1)$$

Uvrštavanjem izvedenih fragmentacijskih udarnih presjeka dobivamo konačnu formulu čije integrale rješavamo numerički:

$$CP(\Delta\phi_{q\gamma}) = \frac{\alpha_S \int_0^1 \frac{dz}{z^2} D_{q\gamma}(z) \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_{\perp}} \frac{\varphi_p(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp}) \phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_{\perp}) \Xi\left(\frac{k_{\gamma}}{z}, p\right)}{k_{1\perp}^2 k_{2\perp}^2}}{(2\pi)^2 \int_0^1 \frac{dz_p}{z_p^2} D_{gq}(z_p) \int_{\mathbf{k}_{1\perp}\mathbf{k}_{\perp}} \frac{\varphi(Y_p, \mathbf{k}_{1\perp}) \phi_A^{q\bar{q},g}(Y_A, \mathbf{k}_{2\perp}, \mathbf{k}_{\perp}) X\left(\frac{p}{z_p}\right)}{k_{1\perp}^2 k_{2\perp}^2}}. \quad (5.2)$$

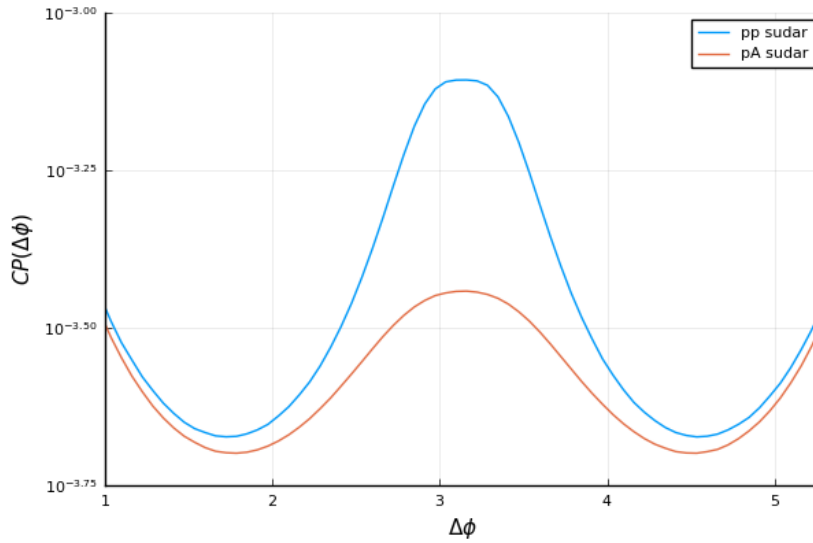
Možete primijetiti da smo izostavili sumu po okusima. To je zato što smo pretpostavili da znamo o kojem je izlaznom antikvarku riječ (kaže se da je kvark označen, eng. "tag").

Da bismo vidjeli veće razmazivanje na kutu  $\pi$  za pA sudar u odnosu na pp sudar, sve što trebamo napraviti je nacrtati graf funkcije  $CP$  iz relacije (5.2) za ta dva sudara. Sudar dva protona može se rekonstruirati iz sudara jezgre i protona na način da kažemo da je i polje jezgre maleno (radi se o tzv. rijetko-rijetko aproksimaciji) te na taj način efektivno dobivamo pp sudar. Ono što se zapravo razvija su dipoli dobiveni pomoću Wilsonovih linija. To je eksplicitno napravljeno u kodu pomoću kojeg ćemo izračunati  $CP$ , no to ovdje nećemo provoditi. Sada ćemo predstaviti

rezultat numeričkog izračuna čime ćemo završiti ovaj rad.

## 5.1 Numerički rezultati

Glavni je cilj ovog odjeljka predstaviti rezultate za  $CP(\Delta\phi)$  u okolini kuta  $\pi$  za pA i pp sudar. U tu se svrhu koristio već postojeći kod<sup>11</sup> koji je napisan u programskom paketu *Julia* te u kojem je korištena Vegas rutina integracije. Primjer grafa koji se dobiva pomoću ovog koda dan je na slici (5.1). Uzeli smo da su rapiditeti fotona



Slika 5.1: Ovisnost koeficijenta korelacije o kutu za pA i pp sudar.

i antikvarka jednaki 0. Za energiju sudara smo uzeli vrijednost od  $\sqrt{s} = 5$  TeV-a što je tipična LHC energija za p+A sudare. Vrijednosti transverzalnih impulsa moraju biti maksimalno 10-20 GeV-a tako da relevantni x unutar protona i jezgre bude mali. Za njihov relativni impuls (odnosno razliku njihovih impulsa) uzimamo da je reda veličine saturacijske skale LHC-a koja približno iznosi:  $Q_S \approx 1$  GeV. Stoga smo za konkretni primjer odabrali  $|\mathbf{k}_{\gamma\perp}| = 4$  GeV-a i  $|\mathbf{p}_{\perp}| = 5$  GeV-a. Dipoli koji se pojavljuju u izračunima dobivaju se rješavanjem Balitsky-Kovchegovljevih evolucijskih jednadžbi [24, 25] sa rubnim uvjetima specificiranim u [26], specijalno omjer početnih saturacijskih skala jezgre i protona se uzima da je  $Q_{S,A}^2 = 3Q_{S,p}^2$ . Za fragmentacijsku funkciju se koristila aproksimacija vodećeg logaritma. Drugim rječima, divergenciju  $-\frac{1}{\epsilon}$  iz definicije fragmentacijske funkcije smo zamijenili s  $\ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}$ , a za  $Q$  smo uzeli impuls vodeće čestice, antikvarka. Rezultat koji smo dobili savršeno potvrđuje našu slutnju. Dobili smo veće razmazivanje singulariteta kod pA sudara. Također, možemo

<sup>11</sup>Zahvaljujem se mentoru na kodu.

vidjeti da korelacijska funkcija raste kako se približavamo kutu 0 i  $2\pi$ . Ta je divergencija zapravo posljedica kolinearne emisije antikvarka i fotona. Izračunom koeficijenta korelacije  $CP$  dobili smo rezultate koji bi se načelno mogli eksperimentalno potvrditi na LHC-u. Naravno, za realističniju predikciju kutnih korelacija treba uzeti u obzir i direktni doprinos, promatrati produkciju hadrona a ne kvarkova, te uzeti u obzir i druge potencijalne doprinose udarnom presjeku za koje se očekuje da igraju manju ulogu na LHC energijama no svejedno su važni za kvantitativno predviđanje. Njihovim potvrđivanjem dobili bismo jako lijep potpis za postojanje CGC-a. Upravo je to jedan od primarnih ciljeva novog Elektron-jezgra sudarivača (eng. Electron-Ion Collider) koji uskoro kreće s gradnjom [27].

Za kraj, napomenimo još samo da smo sve račune mogli raditi tako da se kvark nalazi u izlaznom stanju i da je foton emitiran kolinearno s antikvarkom. Naravno, u tom bismo slučaju trebali integrirati po faznom prostoru antikvarka. Svi bi rezultati i svi zaključci ostali nepromijenjeni u tom slučaju.



## 6 Zaključak

U ovom smo radu ukratko opisali jedan relativno novi pristup perturbativnoj kromodinamici, Staklasti kondenzat boje, za koji se pretpostavlja da bi trebao biti univerzalno stanje hadrona na visokim energijama i za kojim se aktivno traga na RHIC-u i LHC-u. Glavna motivacija tom pristupu bila nam je ta da se na visokim energijama u hadronima i jezgrama u većoj mjeri nalaze gluoni. Iz tog smo razloga posegnuli za klasičnim opisom polja jezgre i opisali kako izgleda dinamika kvarkova i gluona na toj pozadini. Nakon što smo fizikalno objasnili njegovu strukturu, ukratko smo objasnili kako doći do udarnog presjeka za produkciju  $q\bar{q}\gamma$ . Taj nam je udarni presjek bio polazna točka da bismo našli udarni presjek za produkciju  $\bar{q}\gamma$ . Do njega smo došli promatrajući kolinearnu granicu emisije kvarka i fotona te integrirajući po faznom prostoru kvarka. Primjetili smo da postoje dva doprinosa udarnom presjeku: fragmentacijski i direktni. Da bismo doveli ovaj izraz u vezu s eksperimentalnim veličinama, trebali smo još izračunati i udarni presjek za  $\bar{q}$  produkciju. Do njega smo došli tako što smo udarni presjek za  $q\bar{q}$  produkciju promatrali u kolinearnoj granici emisije kvarka i antikvarka te integrirajući po faznom prostoru kvarka. Jednom kada smo imali oba udarna presjeka, mogli smo izračunati koeficijent korelacije u modelu u kojem smo zanemarivali direktne doprinose. Račun smo proveli numeričkim putem u programskom paketu *Julia*. Dobiveni rezultati ukazivali su na to da je naša početna slutnja bila ispravna, odnosno da je razmazivanje singulariteta na kutu  $\pi$  veće kod  $pA$  sudara nego kod  $pp$  sudara. Eksperimentalno potvrđivanje ovakvog ponašanja udarnog presjeka bio bi jako lijep potpis za postojanje Staklastog kondenzata boje.

Jedan od prvih sljedećih koraka u nastavku istraživanja je uključiti i direktne doprinose udarnih presjeka u račun. Osim toga, moguće je promatrati i različita izlazna stanja kao što su, na primjer, različiti hadroni.

# Dodaci

## Dodatak A Grupa SU(3)

Grupa SU(3) prvi je put uvedena u fiziku 1961. godine da bi se objasnila simetrija između tri okusa kvarka  $u$ ,  $d$  i  $s$ , tzv.  $SU(3)_f$ . Iako se odmah znalo da je ta simetrija samo približna, ona je poslužila kao odskočna daska za fundamentalnu simetriju kvantne kromodinamike  $SU(3)_C$ . Ta simetrija garantira da je lagranžijan QCD-a invarijantan na transformacije:

$$\Psi_f = \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_g \\ \Psi_b \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_g \\ \Psi_b \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

gdje je  $\Psi_f$  okusni triplet, a  $U$  matični prikaz elementa grupe SU(3).

U fundamentalnoj matičnoj reprezentaciji, SU(3) je grupa  $3 \times 3$  unitarnih matrica sa svojstvom da vrijedi  $\det(U) = 1$ . Kako za grupu SU(N) postoji  $N^2 - 1$  generatora, u slučaju  $N = 3$  imat ćemo 8 generatora. Također, SU(3) je neabelova grupa i njeni generatori u fundamentalnoj reprezentaciji zadovoljavaju komutacijske relacije dane s:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (\text{A.2})$$

gdje su  $f^{abc}$  realne, antisimetrične strukturne konstante. Osim toga, u fundamentalnoj reprezentaciji vrijedi i:

$$\text{Tr}(T^a) = 0 \quad (\text{A.3})$$

te

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (\text{A.4})$$

Generatori su u fundamentalnoj reprezentaciji dani s  $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ , gdje su  $\lambda^a$  Gell-Manove matrice dane u [2]. Osim fundamentalne, često se koristi i adjungirana reprezentacija pomoću  $8 \times 8$  matrica definiranih s:

$$(t^a)^{bc} = if^{abc}. \quad (\text{A.5})$$

## Dodatak B Koordinate svjetlosnog stošca

Koordinatni sustav svjetlosnog stošca vrlo je pogodan za probleme u fizici visokih energija. On je definiran na način da miješa vremensku i treću prostornu (z) komponentu 4-vektora:

$$\begin{aligned} v^\mu &= (v^0, v^1, v^2, v^3) = (v^+, v^-, \mathbf{v}_\perp) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 + v^3), \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 - v^3), v^1, v^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Matrica transformacije iz kanonskog Minkowski prostorvremena u koordinate svjetlosnog stošca je:

$$\mathbf{T}_{LC} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Sada nam je trivijalno pronaći metriku Minkovskog u ovom koordinatnom sustavu:

$$g_{LC} = \mathbf{T}_{LC} \eta \mathbf{T}_{LC}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Osim ovoga, zanimljivo je pogledati i kako izgleda potisak u  $z$  smjeru u ovom sustavu. Koristeći transformaciju koordinata u kanonskom sustavu ( $\theta$  predstavlja rapiditet):

$$\begin{aligned} v^0 &\rightarrow v'^0 = \cosh \theta v^0 + \sinh \theta v^3 \\ v^3 &\rightarrow v'^3 = \sinh \theta v^0 + \cosh \theta v^3 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

možemo jednostavno naći transformaciju  $+$  i  $-$  komponenta:

$$\begin{aligned} v^+ &\rightarrow v'^+ = (\cosh \theta + \sinh \theta) v^+ = e^\theta v^+ \\ v^- &\rightarrow v'^- = (\cosh \theta - \sinh \theta) v^- = e^{-\theta} v^-. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Budući da je  $(\cosh \theta + \sinh \theta)(\cosh \theta - \sinh \theta) = 1$ , za bilo koja je dva vektora veličina  $v^+w^-$  invarijantna na potisak u  $z$  smjeru. Jednom kada znamo metriku, trivijalno je raspisati i skalarni produkt dva vektora u ovom sustavu. On je dan s:

$$\begin{aligned} v \cdot w &= g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = g_{LC}^{\mu\nu} v_\mu^{LC} W_\nu^{LC} \\ &= v^+w^- + v^-w^+ - \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{w}_\perp. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Napomenimo još samo da je konvencija da se varijablu  $k^-$  naziva energijom, gdje je  $k$  neki 4-impuls. Shodno tome, varijabla  $x^+$  često se naziva vremenskom varijablom.

## Dodatak C Formula za skalarni produkt $q \cdot k_\gamma$

U ovom nam je dodatku cilj izvesti koeficijente  $\alpha$  i  $\beta$  u formuli:

$$q \cdot k_\gamma = (\alpha(z)q_\perp + \beta(z)k_{\gamma\perp})^2. \quad (\text{C.1})$$

Impulsni udio fotona poznat je od ranije i iznosi:

$$z = \frac{k_\gamma^+}{k_\gamma^+ + q^+} \quad \rightsquigarrow \quad 1 - z = \frac{q^+}{k_\gamma^+ + q^+}. \quad (\text{C.2})$$

Koristeći formulu za skalarni produkt u koordinatama svjetlosnog stošca i definiciju impulsnog udjela fotona, skalarni produkt  $q \cdot k_\gamma$  možemo pisati u obliku:

$$\begin{aligned} q \cdot k_\gamma &= q^+ k_\gamma^- + q^- k_\gamma^+ - q_\perp k_{\gamma\perp} \\ &= (1 - z)(q^+ + k_\gamma^+) k_\gamma^- + z(q^+ + k_\gamma^+) q^- - q_\perp k_{\gamma\perp}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Nadalje, možemo uočiti da u ultrarelativističkom limesu (to jest u limesu u kojemu zanemarujemo  $x^2 = m_x^2$ ) vrijedi:

$$x^+ x^- = \frac{1}{2}(x^0 + x^3)(x^0 - x^3) = \frac{1}{2}(x^2 + x_\perp^2) = \frac{x_\perp^2}{2}. \quad (\text{C.4})$$

Jednadžbu (C.3) možemo, stoga, u ultrarelativističkom limesu pisati u obliku:

$$q \cdot k_\gamma = \frac{1}{2}(1 - z)k_{\gamma\perp}^2 + (1 - z)q^+ k_\gamma^- + \frac{z}{2}q_\perp^2 + z k_\gamma^+ q^- - q_\perp k_{\gamma\perp}. \quad (\text{C.5})$$

Da bismo dobili samo transverzalne koordinate, radit ćemo postupak iterativne supstitucije. Dakle, postupno ćemo uvrštavati supstitucije:  $q^+ = (1 - z)(q^+ + k_\gamma^+)$  i  $k_\gamma^+ = z(q^+ + k_\gamma^+)$  te uzimati u obzir ultrarelativistički limes, odnosno (C.4). U beskonačnoj iteraciji dobivamo geometrijske redove<sup>12</sup> u varijabli  $z$  koji množe kvadrate transverzalnih impulsa. Konkretno, dobivamo:

$$q \cdot k_\gamma = \frac{q_\perp^2}{2}[z + z^2 + \dots] + \frac{k_{\gamma\perp}^2}{2}[(1 - z) + (1 - z)^2 + \dots] - q_\perp k_{\gamma\perp}. \quad (\text{C.6})$$

<sup>12</sup>Ovu ćemo formulu dokazati na kraju dodatka.

Nakon sumacije geometrijskih redova i još par algebarskih manipulacija dobivamo da su koeficijenti  $\alpha$  i  $\beta$  iz (C.1) dani s:

$$\alpha(z) = \pm \sqrt{\frac{z}{2(1-z)}} \quad \beta(z) = \mp \sqrt{\frac{1-z}{2z}}, \quad (\text{C.7})$$

gdje je uzeto u obzir da ta dva koeficijenta moraju imati međusobnu fazu  $(-1)$ . Iz ovih je relacija sada trivijalno izvesti jednakost koju koristimo pri računu integrala po faznom prostoru kvarka:

$$\frac{1}{q \cdot k_\gamma} = \frac{2(1-z)}{z} \frac{1}{(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{k}_{\gamma\perp} - \frac{1}{z}\mathbf{k}_{\gamma\perp})^2}. \quad (\text{C.8})$$

Kompletnosti radi, ovdje ćemo još samo dokazati formulu (C.6), to jest pokazati ćemo kako izgleda  $n$ -ti red iteracije nakon čega puštanjem  $n$  u beskonačno dobivamo traženi izraz.

**Tvrđnja 2.** *U ultrarelativističkom limesu i  $n$ -tom redu iteracije formula za skalarni produkt  $q \cdot k_\gamma$  glasi:*

$$q \cdot k_\gamma = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (1-z)^j k_{\gamma\perp}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n z^j q_\perp^2 - \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{k}_{\gamma\perp} + (1-z)^n q^+ k^- + z^n k^+ q^-. \quad (\text{C.9})$$

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom. Za  $n=1$  svodimo se na formulu (C.5) čime je baza indukcije pokazana. Korak indukcije provodi se tako da se još jednom uvrsti  $q^+ = (1-z)(q^+ + k^+)$  i  $k^+ = z(q^+ + k^+)$  te se koristi ultrarelativistički limes (C.4). Nakon tog uvrštavanja odmah dobivamo:

$$q \cdot k_\gamma = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (1-z)^j k_{\gamma\perp}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} z^j q_\perp^2 - \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{k}_{\gamma\perp} + (1-z)^{n+1} q^+ k^- + z^{n+1} k^+ q^-. \quad (\text{C.10})$$

Ovime je dokazana pretpostavka tvrdnje. Kako je  $z \in \langle 0, 1 \rangle$ , puštanjem limesa  $n \rightarrow \infty$  sume postaju geometrijski redovi, a zadnja dva člana propadnu. Ovime smo dokazali (C.6). Q.E.D.

## Dodatak D 2d Fourierov transformat logaritma

U ovom ćemo dodatku izvesti 2d Fourierov transformat logaritamske funkcije. Konkretno, pokazat ćemo da vrijedi:

$$I = \frac{1}{4\pi} \int d^2 \mathbf{q}_\perp e^{-i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \ln \frac{(\mathbf{q}_\perp - \zeta' \mathbf{k}_\perp)}{k_\perp^2} = \delta^{(2)}(\mathbf{r}_\perp) \int \frac{d^2 \mathbf{r}'_\perp}{r_\perp'^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp} - \frac{1}{r_\perp^2} e^{-i\zeta' \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}, \quad (\text{D.1})$$

gdje su sada svi vektori proizvoljni, a  $\zeta'$  je realni broj. Najnetrivijalniji je korak u ovom izvodu napisati logaritamsku funkciju kao limes modificirane Besselove funkcije druge vrste. Naime, iz razvoja modificirane Besselove funkcije druge vrste možemo uočiti da vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} K_0(x) = -\ln(x) + \ln(2) - \gamma_E. \quad (\text{D.2})$$

Stoga, logaritam u integralu možemo napisati kao:

$$\ln \frac{(\mathbf{q}_\perp - \zeta' \mathbf{k}_\perp)}{k_\perp^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2[K_0(ak_\perp) - K_0(a|\mathbf{q}_\perp - \zeta' \mathbf{k}_\perp|)]. \quad (\text{D.3})$$

Uvrstimo (D.3) u (D.1) da bismo dobili:

$$I = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int d^2 \mathbf{q}_\perp e^{-i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} [K_0(ak_\perp) - K_0(a|\mathbf{q}_\perp - \zeta' \mathbf{k}_\perp|)]. \quad (\text{D.4})$$

Prvi dio uglate zagrade ne ovisi o integracijskoj varijabli pa će on nakon integracije stajati uz delta funkciju. U drugom ćlanu radimo supstituciju:  $\mathbf{q}_\perp - \zeta' \mathbf{k}_\perp \rightarrow \mathbf{p}_\perp$ . Sve to skupa daje:

$$I = 2\pi \delta^{(2)}(\mathbf{r}_\perp) \lim_{a \rightarrow 0^+} K_0(ak_\perp) - e^{i\zeta' \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \lim_{a \rightarrow 0} \int d^2 \mathbf{p}_\perp e^{-i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} K_0(ap_\perp). \quad (\text{D.5})$$

Fourierov transformat modificirane Besselove funkcije drugog reda može se pronaći u literaturi<sup>13</sup> [28]:

$$K_0(ak_\perp) = \int \frac{d^2 \mathbf{r}'_\perp}{2\pi} \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp}}{r_\perp'^2 + a^2}. \quad (\text{D.6})$$

Koristeći ovu formulu te puštanjem limesa  $a \rightarrow 0$ , za tren dobivamo:

$$I = \delta^{(2)}(\mathbf{r}_\perp) \int \frac{d^2 \mathbf{r}'_\perp}{r_\perp'^2} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp} - \frac{1}{r_\perp^2} e^{-i\zeta' \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}. \quad (\text{D.7})$$

<sup>13</sup>Zanimljivo je uočiti da se radi o Lorentzijanu.

## Literatura

- [1] Ilakovac, A. (2020). *Teorija polja 1 & 2, skripta*. Zagreb: Prirodoslovno - matematički fakultet.
- [2] Thomson, M. (2013). *Modern Particle Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] McLerran, L. (2008). A Brief Introduction to the Color Glass Condensate and the Glasma. *38th International Symposium on Multiparticle Dynamics*.
- [4] Benić, S., Fukushima, K., Garcia-Montero, O. & Venugopalan, R. (2017). Probing gluon saturation with next-to-leading order photon production at central rapidities in proton-nucleus collisions. *J. High Energy Phys.*, 1, 115-143.
- [5] Jaffe A. M. & Witten E. (2000). *Quantum Yang-Mills Theory*. Clay Mathematics Institute. <https://www.claymath.org/millennium-problems/yang-mills-and-mass-gap>
- [6] Jaffe, R. L. (1996). Spin, twist and hadron structure in deep inelastic processes. *Ettore Majorana International School of Nucleon Structure: 1st Course: The Spin Structure of the Nucleon*.
- [7] Kovchegov, Y. & Levin, E. (2012). *Quantum Chromodynamics at High Energy*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] Gelis, F., Iancu, E., Jalilian-Marian, J. & Venugopalan, R. (2010). *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 60(1), 463–489.
- [9] Gelis, F. (2013). Color Glass Condensate and Glasma. *Int. J. Mod. Phys. A* 28(01), 1330001.
- [10] Balitsky, I. (1996). Operator expansion for high-energy scattering. *Nucl. Phys. B* 463(1), 99–157.



- [11] Blaizot, J. P., Gelis, F. & Venugopalan, R. (2004). High-energy pA collisions in the color glass condensate approach. 1. Gluon production and the Cronin effect. *Nucl. Phys. A*, 743, 13-56.
- [12] McLerran, L. & Venugopalan, R. (1999). Fock space distributions, structure functions, higher twists, and small  $x$ . *Phys. Rev. D*, 59(9), 094002.
- [13] McLerran, L. & Venugopalan, R. (1994). Computing Quark and Gluon Distribution Functions for Very Large Nuclei. *American Physical Society (APS)* 49(5), 2233–2241.
- [14] Lappi, T. (2003). Production of gluons in the classical field model for heavy ion collisions. *Phys. Rev C*, 67(5), 054903.
- [15] Blaizot, J. P., Gelis, F. & Venugopalan, R. (2004). High-energy pA collisions in the color glass condensate approach. 2. Quark production. *Nucl. Phys. A*, 743, 57-91.
- [16] Benić, S. & Dumitru A. (2018). Prompt photon - jet angular correlations at central rapidities in p+A collisions. *Phys. Rev. D*, 97(1), 014012.
- [17] Fukushima, K. & Hidaka, Y. (2008). Two Gluon Production and Longitudinal Correlations in the Color Glass Condensate. *Nucl. Phys. A*, 813, 171-197.
- [18] Peskin, M. E. & Schroeder, D.V. (1995). *An Introduction To Quantum Field Theory*. Reading: Addison-Wesley.
- [19] Chirilli, G. A., Xiao, B.-W. & Yuan, F. (2012). Inclusive Hadron Productions in pA Collisions. *Phys. Rev. D*, 86, 054005.
- [20] Sameshima, R. D. (2019). *On Different Parametrizations of Feynman Integrals*. Doktorski rad. New York: City University of New York.
- [21] Owens, J. F. (1986) Large Momentum Transfer Production of Direct Photons, Jets, and Particles. *Rev. Mod. Phys.*, 59(465).
- [22] Kolbe, I., Roy, K., Salazar, F., Schenke, B. & Venugopalan, R. (2021). Inclusive prompt photon-jet correlations as a probe of gluon saturation in electron-nucleus scattering at small  $x$ . *J. High Energy Phys.*, 1, 052.

- [23] Ma, Y. Q., Venugopalan, R., Watanabe, K. & Zhang, H. F. (2018)  $\psi(2S)$  versus  $J/\psi$  suppression in proton-nucleus collisions from factorization violating soft color exchanges. *Phys. Rev. C* 97(1), 014909.
- [24] Balitsky, I. (1996). Operator expansion for high-energy scattering. *Nucl. Phys. B* 463(1), 99–157.
- [25] Kovchegov, Y. V. (1999). Small- $x$   $F_2$  Structure Function of a Nucleus Including Multiple Pomeron Exchanges. *American Physical Society (APS)* 60(3), 034008.
- [26] Dusling, K., Gelis, F., Lappi, T. & Venugopalan, R. (2010). Long range two-particle rapidity correlations in A+A collisions from high energy QCD evolution. *Nucl. Phys. A* 836(1-2), 159–182.
- [27] The Electron-Ion Collider. <https://www.bnl.gov/eic/goals.php>
- [28] Zaslavski, D. (2014). *Probing Hadron Structure in Proton-Nucleus Collisions*. Doktorski rad. Eberly: The Pennsylvania State University.