Fizika u infracrvenom području energija

Orešković, David

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

David Orešković

Fizika u infracrvenom području energija

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

David Orešković

Diplomski rad

Fizika u infracrvenom području energija

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Larisa Jonke

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2021.

Prije svega, htio bih se zahvaliti svojoj mami koja mi je pružala neizmjernu podršku u pisanju ovog rada, kao i tokom čitavog studija. Također, htio bih se zahvaliti svojoj mentorici dr. sc. Larisi Jonke što mi je omogućila istraživanje ove izuzetno zanimljive teme i u svakom trenutku bila spremna pomoći.

Sažetak

U ovom radu su analizirane trokutne relacije koje povezuju dinamiku fizikalnih teorija u infracrvenom (IR) spektru energija. Vrhovi IR trokuta se odnose na mekane teoreme, asimptotske simetrije i memorijske efekte te veza između njih "odjekuje" kroz mnogo područja fizike s bezmasenim česticama. Ovdje je istražena struktura dvaju vrhova IR trokuta u gravitaciji; konkretnije, pokazano je da su asimptotske simetrije i mekani teoremi povezani Wardovim identitetom. Prvo je napravljena konstrukcija Carter-Penroseovih dijagrama prostor-vremena Minkowskog budući da su isti pogodni za analizu trajektorija bezmasenih čestica u asimptotski ravnim prostorima. Data je rigorozna definicija buduće i prošle svjetlosne beskonačnosti kao trodimenzionalnih površina na kojima bezmasene čestice završavaju i započinju svoje putanje te su iste parametrizirane s prikladnim setom koordinata. U četvrtom poglavlju je prvo analizirana Bondi-Sachsova metrika, nakon čega su raspisane Einsteinove jednadžbe iskazane preko koeficijenata spomenute metrike. Nametnuti su rubni uvjeti koji čuvaju asimptotsku ravnost i pronađena rješenja Einsteinovih jednadžbi u prostornoj beskonačnosti. Koristeći ova rješenja, istražena je forma asimptotskih generatora difeomorfizama te je na temelju istih uočeno postojanje beskonačno očuvanih naboja asociranih s translacijama u prostor-vremenu. Analiza asimptotskih simetrija je završena s izvodom supertranslacijskog Wardovog identiteta koji povezuje S-matrične elemente sa i bez umetanja niskoenergetskog gravitona. U petom poglavlju je uveden formalizam kojim je opisana gravitacija kao efektivna teorija polja. Dan je kratki uvod u gravitacijske valove i provedena fizikalna interpretacija određenih veličina definiranih u četvrtom poglavlju. Ovdje je ukratko opisan i treći vrh infracrvenog trokuta, odnosno gravitacijski memorijski efekt. Poglavlje je zaključeno s kvantizacijom gravitacije kao efektivne teorije polja. Konačno, preko Feynmanovih dijagrama je izveden Weinbergov teorem mekanog gravitona te je pokazano da iz istog slijedi supertranslacijski Wardov identitet.

Ključne riječi: gravitacija, graviton, simetrije, infracrveno, supertranslacije.

Physics in the infrared energy region.

Abstract

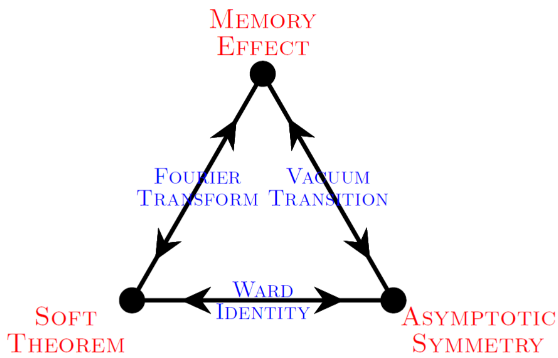
This thesis deals with the analysis of triangular relations which connect the dynamics of physical theories in infrared (IR) spectrum of energies. Corners of the IR triangle represent soft theorems, asymptotic symmetries and memory effects. In recent years, it was shown that connections between these ”echo” throughout many physical theories with massless particles. Here, research of two corners of the IR triangle is conducted for the case gravity; more precisely, it is shown that asymptotic symmetries and soft theorems are connected via Ward identity. Firstly, Carter-Penrose diagrams are constructed for Minkowski spacetime since these are fit for description of lightlike trajectories in asymptotically flat spaces. Future and past null infinity as three-dimensional surfaces at which massles particles end and begin their trajectories are rigorously defined and parametrised by appropriate coordinates. In fourth chapter, Bondi-Sachs metric is analysed and Einstein equations written in terms of metric coefficients. Boundary conditions which preserve asymptotic flatness are imposed and solutions to Einstein equations are found in spatial infinity. Using these solutions, structure of asymptotic generators of diffeomorphisms is analysed and it is observed that these imply the existence of infinite number of conserevd charges associated with spacetime translations. The analysis of asymptotic symmetries is concluded with derivation of supertranslational Ward identity which connects the S-matrix elements with and without the insertion of soft graviton. In fifth chapter, formalisam of gravity as an effective field theory is introduced. Gravitational waves are briefly revised and certain variables defined in chapter four are physically interpreted. Here, third corner of the infrared triangle, that is, the gravitational memory effect, is also briefly touched upon. Chapter is concluded with quantisation of gravity as effective field theory. Finally, Weinberg’s soft graviton theorem is derived by using Feynman diagrams and it is shown that supertranslational Ward identity follows from this theorem.

Keywords: gravity, graviton, symmetries, infrared, supertranslations.

Sadržaj

1 Uvod

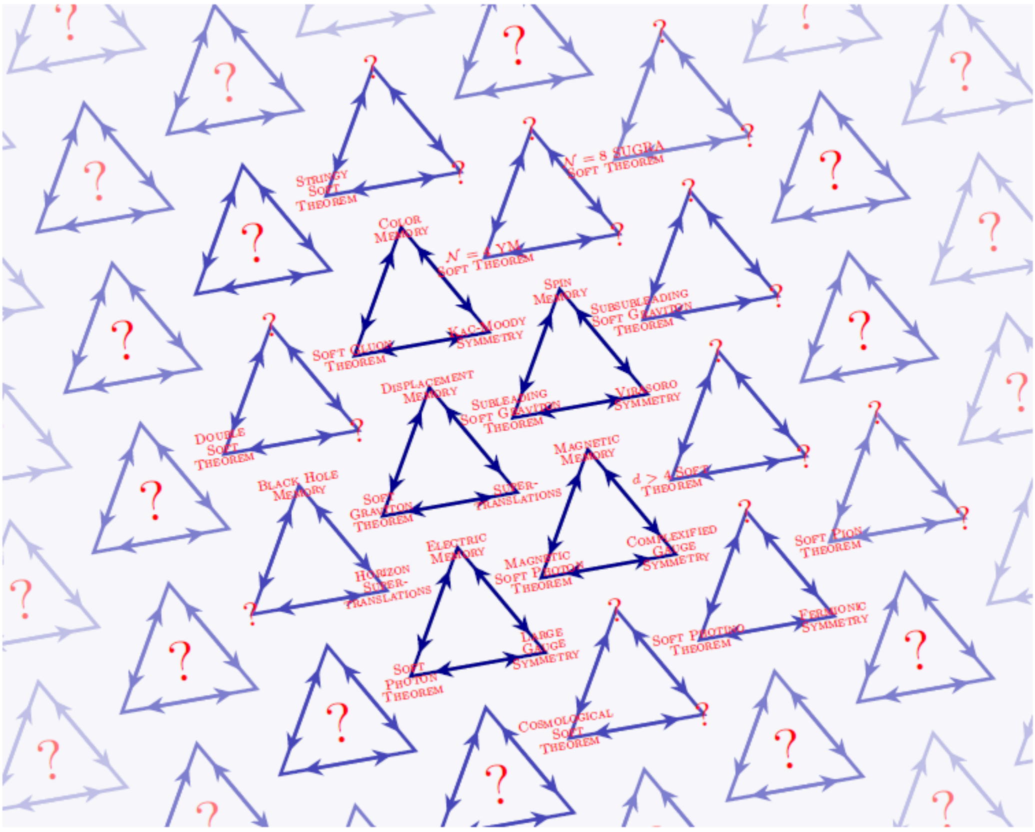
U ovom radu se bavimo analizom trokutnih relacija koje povezuju tri naizgled nepovezana fizikalna fenomena u infracrvenom području energija. Ove relacije su slikovito prikazane infracrvenim (IR) trokutom na slici 1.1:



Slika 1.1: Infracrveni trokut. Preuzeto iz [15].

Prvi vrh trokuta se odnosi na mekane teoreme. Isti su analitički opisani u okviru kvantne teorije polja i karakteriziraju amplitude raspršenja sa bezmasenim vanjskim česticama u niskoenergetskom spektru. Ovi teoremi slijede iz Feynmanovih dijagrama te ukazuju na postojanje polova, odnosno infracrvenih divergencija u izrazu za amplitudu kada energija vanjske čestice teži u nulu. Drugi vrh se odnosi na asimptotske simetrije. Riječ je o analizi Noetherinog teorema u nekom fizikalnom sistemu s asimptotskom regijom ili rubom. Pokazano je da ovakvim regijama postoje egzaktne netrivijalne simetrije s asociranim očuvanim strujama, odnosno nabojima. Treći vrh IR trokuta opisuje memorijski efekt. Isti je istražen u kontekstu gravitacije i govori o trajnom pomaku među geodezicima testnih čestica uslijed prolaska gravitacijskog vala. Na slici 1.1 su prikazane i matematičke relacije ekvivalencije između ovih vrhova. Veza između mekanih teorema i memorijskog efekta je iskazana putem Fourierovog transformata. Preciznije, Fourierov transformat infracrvenog pola u impulsnom prostoru daje step funkciju u vremenu. Kako memorijski efekt daje informaciju o promjeni asimptotskih podataka između ranih i kasnih vremena, ekvivalentnost je očita. O step funkciji se može razmišljati i kao o matematičkom alatu koji povezuje dva neekvivalentna vakuuma asocirana s asimptotskim simetrijama. Trokut se zatvara tvrdnjom da za svaku simetriju postoji Wardov identitet koji povezuje amplitude raspršenja sa simetrijski povezanim stanjima. Ovi Wardovi identiteti nisu ništa drugo doli mekani teoremi koji povezuju amplitude raspršenja sa i bez umetanja bezmasene vanjske mekane čestice.

Infracrveni trokut sadrži mnogo kopija koje odjekuju kroz većinu fizike kako je prikazano na slici 1.2:



Slika 1.2: Kopije IR trokuta. Preuzeto iz [15].

Tako su IR trokutne relacije ekvivalencije prisutne u elektrodinamici, Yang-Millsovoj teoriji, gravitaciji itd. Motivacija za proučavanje ovih relacija leži u činjenici što povezuju tri naizgled odvojena područja fizike. Ukoliko dođemo do traženih rezultata u jednom području, pomoću prikladne matematičke operacije možemo dobiti informaciju o rezultatima u drugom. Primjerice, memorijski efekt se može mjeriti, dok ostala dva vrha IR trokuta često nisu podložna eksperimentalnim opservacijama. Na taj način možemo provjeriti teoretski dobivene rezultate vezane uz amplitude raspršenja i/ili simetrije mjereći geodezike čestica. U ovom radu ćemo se ograničiti na analizu IR trokuta u gravitaciji i pokazati da su asimptotske simetrije i mekani teoremi koji uključuju raspršenja gravitona povezani Wardovim identitetom. U petom poglavlju ćemo se nakratko dotaći gravitacijskog memorijskog efekta, ali nećemo povezivati isti s preostala dva vrha trokuta.

U drugom poglavlju ćemo provesti konstrukciju Carter-Penroseovih dijagrama prostora Minkowskog. Riječ je o dijagramima u kojima raspon koordinata pokriva konačne vrijednosti te ćemo na temelju istih definirati asimptotske regije od interesa. Također, u ovakvim dijagramima trajektorije bezmasenih čestica zatvaraju kutove od 45° s koordinatnim osima, odnosno pogodni su za analizu fizikalnih teorija koje uključuju bezmasene čestice.

Treće poglavlje je posvećeno parametrizaciji asimptotskih regija definiranih u poglavlju 2. Uvest ćemo tzv. Bondijeve koordinate koje povezuju putanje ulaznih i izlaznih čestica preko antipodalnih preslikavanja. Ova činjenica će nam u velikoj mjeri olakšati analizu problema raspršenja kojim ćemo se baviti kasnije.

U četvrtom poglavlju proučavamo asimptotske simetrije. Ovaj vrh trokuta ćemo obraditi isključivo u kontekstu opće teorije relativnosti. Preciznije, pratit ćemo radove Bondija, Metznera i Sachsa [4], [14] koji su u svojim člancima iz 1962. godine željeli konstruirati Poincaréovu grupu simetrija u asimptotski ravnim regijama prostor-vremena. Umjesto toga, pronašli su beskonačno-dimenzionalnu (BMS) grupu simetrija asociranih sa translacijama i rotacijama u prostor-vremenu. Simetrijske transformacije u općoj teoriji relativnosti su generirane putem difeomorfizama te ćemo proučiti kakve fizikalne fenomene opisuju asimptotske izometrije Bondi-Sachsove metrike. Pritom ćemo naša razmatranja ograničiti na beskonačno-dimenzionalnu podgrupu BMS grupe asociranu sa tzv. supertranslacijama. Nakon što konstruiramo očuvane naboje koji iz ovih simetrija slijede, izvest ćemo supertranslacijski Wardov identitet koji povezuje S-matrične elemente sa i bez umetanja mekanog gravitona.

Cilj petog poglavlja jest proučiti gravitaciju kao efektivnu teoriju polja i izraziti polje gravitona preko operatora stvaranja i poništenja. Jednom kada to napravimo, bit ćemo u poziciji s gravitacijom baratati u kontekstu efektivne kvantne teorije polja na ravnoj pozadini.

Konačno, u šestom poglavlju iz Feynmanovih pravila izvodimo Weinbergov teorem mekanog gravitona i pokazujemo kako iz istog slijedi supertranslacijski Wardov identitet. Time ćemo povezati dva vrha IR trokuta.

Na kraju se nalaze dodaci u kojima su provedeni rigorozni računi i date definicije određenih pojmova bitnih za našu analizu IR trokuta. U dodacima A i B računamo Christoffelove simbole i komponenete Riccijevog respektivno s obzirom na Bondi-Sachsovu metriku. Ovi rezultati su korišteni u četvrtom poglavlju pri analizi Einsteinovih jednadžbi u Bondijevim koordinatama. U dodatku C je proveden dokaz evolucije Bondijeve mase koja igra važnu ulogu u opisu očuvanih naboja. Dodatak D je posvećen analizi difeomorfizama i translacija koji su potrebni za analizu simetrijske grupe vezane uz supertranslacije. Na temelju definicija i pojmova uvedenih u prethodnom dodatku, u dodatku E nalazimo generatore difeomorfizama koji čuvaju asimptotsku ravnost prostor-vremena. Na samom kraju, u dodatku F je pronađen Komarov integral na temelju kojeg su konstruirani očuvani naboji asocirani sa supertranslacijama.

2 Carter-Penroseovi dijagrami prostor-vremena Minkowskog

U ovom radu proučavat ćemo asimptotski ravna prostor-vremena. Konkretnije, zanimat će nas rješenja Einsteinovih jednadžbi u prostornoj beskonačnosti gdje je geometrija prostor-vremena opisana metrikom Minkowskog. Kako bismo lakše razumjeli trajektorije gravitona, korisno je uvesti tzv. Carter-Penroseove dijagrame u kojima se bezmasene čestice gibaju pod kutom od $45°$ i raspon koordinata poprima konačne vrijednosti. Koristit ćemo ”east coast” metriku, popularnu u literaturi na temu gravitacije, u kojoj vremenolika koordinata ulazi s minus predznakom. U nastavku uglavnom pratimo [5]. U Kartezijevim koordinatama metrika Minkowskog ima idući oblik:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.1}$$

Za naše potrebe, od veće koristi će biti sferni koordinatni sustav u kojem se ravna metrika zapisuje pomoću izraza:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{2.2}$$

gdje je $d\Omega^2$ metrika na jediničnoj 2-sferi (S^2) za koju vrijedi:

$$d\Omega^2 = d\Theta^2 + sin^2\Theta d\phi^2. \tag{2.3}$$

Napomenimo da točka $r = 0$ predstavlja koordinatni singularitet. Može se pokazati da za koeficijent inverzne metrike $g^{\Theta\Theta}$ vrijedi $g^{\Theta\Theta} = r^{-2}$ [5], to jest, faktor divergira u ishodištu. Dakako, sekvenca sferi čiji radijusi se uzastopno smanjuju (uz dodano ishodište) čini prostor $\mathbb{R}^3$. Takvo ishodište je koordinatni singularitet i uvijek se može ukloniti prikladnim izborom koordinata te je točku $r = 0$ potrebno pokriti sa drugom kartom. Područja našega interesa bit će mjesta gdje $r \to \infty$, prema tome, singulariteti (bili oni koordinatni ili geometrijski) nas neće zanimati.

Svjetlosne (”null”) trajektorije je u principu moguće dobiti direktno iz metrike uz uvjet $ds^2 = 0$. Primjetimo da ukoliko vrijedi $\Theta, \phi = konst$, iz (2.2) slijedi da su radijalne svjetlosne trajektorije definirane jednadžbom:

$$0 = -dt^2 + dr^2, \tag{2.4}$$

čije je rješenje:

$$t = \pm r + konst. \tag{2.5}$$

Dakle svjetlosni stošci već jesu pod kutom od $45°$ ($c = 1$), ali koordinate pokrivaju vrijednosti $r \in [0, \infty\rangle$ i $t \in \langle -\infty, +\infty\rangle$. Cilj nam je ostaviti svjetlosne stošce invarijantnima, ali ujedno i redefinirati koordinate kako bismo čitavo prostor-vrijeme mogli prikazati dijagramom sa dobro definiranim granicama.

Uvedimo iduće koordinatne transformacije:

$$u = t - r \tag{2.6}$$

i

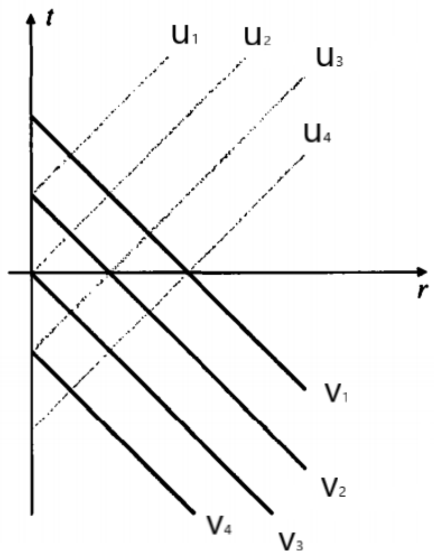
$$v = t + r, \tag{2.7}$$

pri čemu očito vrijedi $u \leq v$. Koordinate u i v su respektivno poznate kao retardirano i napredno vrijeme i kao što ćemo uskoro vidjeti, pogodne su za opis svjetlosnih trajektorija. Obje koordinate se nalaze u intervalu $u, v \in \langle -\infty, +\infty\rangle$ te u ekstremalnim slučajevima poprimaju iduće vrijednosti:

$$t \to \infty, \quad r \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad u = konst, \quad v \to \infty, \tag{2.8}$$

$$t \to -\infty, \quad r \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad u \to -\infty, \quad v = konst. \tag{2.9}$$

Nakon korjenovanja, izraz (2.4) se svodi na jednadžbu $\frac{dt}{dr} = \pm 1$. Ukoliko kao rješenje odaberemo $+$ predznak, iz (2.6) direktno slijedi $\frac{du}{dr} = 0$, odnosno vrijedi $u = konst.$ Ekvivalentno, odabir $-$ predznaka i diferencijacija izraza (2.7) dovode nas do jednadžbe $\frac{dv}{dr} = 0$, što implicira postojanje rješenja $v = konst.$ Prema tome, $u = konst.$ i $v = konst.$ predstavljaju izlazne i ulazne svjetlosne trajektorije u t-r dijagramu kako je prikazano na slici 2.1. Pritom vrijedi $u_1 > u_2 > u_3 > u_4$ i $v_1 > v_2 > v_3 > v_4$. Sjecišta svjetlosnih geodezika s osi apscisa dakako ovise o početnim uvjetima. Svaka točka u ovakvom dijagramu predstavlja S^2 s radijusom $r = \frac{1}{2}(v - u)$.



Slika 2.1: Radijalne svjetlosne trajektorije u prostoru Minkowskog. Preuzeto iz [5].

Diferencijacija inverza izraza (2.6) i (2.7) daje $dt = \frac{1}{2}(dv + du)$ i $dr = \frac{1}{2}(dv - du)$, što nakon uvrštavanja u izraz (2.2) vodi na oblik metrike Minkowskog u novim koordinatama:

$$ds^2 = -\frac{1}{2}(dudv - dvdu) + \frac{1}{4}(v-u)^2 d\Omega^2. \tag{2.10}$$

Kako bismo beskonačne vrijednosti koordinata sveli na konačne, koristimo funkciju arkus tangens. Uvedimo koordinate:

$$U = \arctan(u) \tag{2.11}$$

i

$$V = \arctan(v). \tag{2.12}$$

Koordinate sada imaju raspone $U \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $V \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ te vrijedi $U \leq V$ (arkus tangens je strogo rastuća funkcija). Uvrštavanjem diferencijala inverza ovih koordinata ($du = \frac{1}{\cos^2 U} dU$ i $dv = \frac{1}{\cos^2 V} dV$) u izraz (2.10), metrika poprima oblik:

$$ds^2 = \frac{1}{4\cos^2 U \cos^2 V}[-2(dUdV + dVdU) + \sin^2(V-U)d\Omega^2]. \tag{2.13}$$

Konačno, redefinirajmo koordinate preko transformacija:

$$T = V + U \tag{2.14}$$

i

$$R = V - U \tag{2.15}$$

sa rasponima $T \in \langle -\pi, \pi \rangle$ i $R \in [0, \pi\rangle$. Ukoliko vrijedi $0 < T = |T|$, zbrajanjem jednadžbi (2.14) i (2.15) dobivamo $|T| + R = 2V$. Kako vrijedi: $2V \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $R \in [0, \pi\rangle$ te $|T| \in \langle 0, \pi \rangle$, očigledno je zadovoljena nejednadžba:

$$|T| + R < \pi. \tag{2.16}$$

Standardnom procedurom dobivamo željeni oblik metrike:

$$ds^2 = W^{-2}(T, R)(-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2), \tag{2.17}$$

gdje je W funkcija definirana preko jednadžbe $W(T, R) = 2\cos U \cos V = \cos T + \cos R$. Primjetimo da je izraz (2.17) ekvivalentan inverznoj konformnoj transformaciji tenzora metrike. Konformna transformacija predstavlja lokalnu promjenu skale i ne mijenja oblik svjetlosnih stožaca, a postiže se množenjem metrike s pozitivno definitnom funkcijom ($\tilde{g}_{\mu\nu} = W^2 g_{\mu\nu}$). Inverzna transformacija linijskog elementa je tada data izrazom $ds^2 = W^{-2} d\tilde{s}^2$. Prema tome, iz (2.17) zaključujemo da vrijedi $d\tilde{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2$. Ova metrika opisuje Einsteinov statičan svemir s topologijom $\mathbb{R} \times S^3$. Iako $d\tilde{s}^2$ sadrži zakrivljenost, to nas ne treba zabrinjavati jer je ovakva metrika nefizikalna. Metrika (2.17), dobivena inverznom konformnom transformacijom, u potpunosti je ravna.

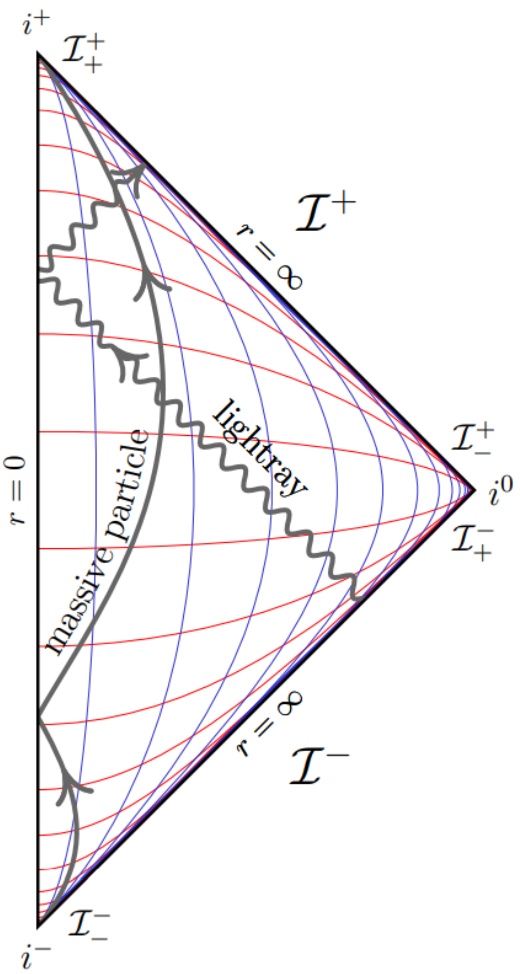
Izjednačavanjem izraza (2.17) s nulom te odabirom $\Theta, \phi = konst.$ trivijalno dobivamo $dT^2 = dR^2$. Rješavanjem slijedi: $\frac{dT}{dR} = \pm 1 \rightarrow T = \pm R + konst.$ Dakle naš zadatak je izvršen, uspjeli smo konstruirati koordinatni sustav u kojem su svjetlosne trajektorije pod kutom od 45° sa konačnim koordinatnim rasponima. Preostaje nam vidjeti kako izgleda prostor-vremenski dijagram u ovim koordinatama (T-R dijagram). U tu svrhu, pronađimo prvo granice takvog dijagrama. Neka vrijedi $T > 0$; tada ekstremalna vrijednost vremenolike koordinate slijedi iz (2.16), odnosno:

$$T = \pi - R. \tag{2.18}$$

Riječ je o pravcu koji povezuje točke $(R, T) = (0, \pi)$ i $(R, T) = (\pi, 0)$. Ekvivalentno, ukoliko vrijedi $T < 0$ iz (2.16) nalazimo ekstremalnu jednadžbu:

$$T = R - \pi. \tag{2.19}$$

U ovom slučaju pravac povezuje točke $(R, T) = (0, -\pi)$ i $(R, T) = (\pi, 0)$. Dijagram zatvaramo vertikalnom linijom na $R = 0$ čije su granice definirane rasponom vremenolike koordinate. Rezultirajući Carter-Penroseov dijagram je prikazan na slici 2.2.



Slika 2.2: Carter-Penroseov dijagram prostora Minkowskog. Preuzeto iz [15].

Proučimo sada detaljnije područja od interesa. Ovakav dijagram je dvodimenzionalna reprezentacija prostora Minkowskog. Svaka točka (osim $r = 0$) predstavlja S^2 s koordinatama Θ i ϕ. Plave vertikalne linije su vremenoliki geodezici s $r = konst.$

(gibanje samo u vremenu), gdje r raste kako se pomičemo od $r = 0$ prema i^0. Crvene linije predstavljaju nefizikalne prostornolike geodezike s $t = konst.$, pri čemu se t povećava kako putujemo duž dijagrama od i^- prema i^+. Debelom sivom linijom je prikazan i tipičan geodezik masivne čestice. Uz specifikaciju početnih uvjeta, ovakve krivulje su u potpunosti definirane metrikom (2.17) i jednadžbom geodezika. Vijugava siva linija predstavlja trajektoriju bezmasene čestice. Krivulja je primjer rješenja jednadžbe $\frac{dT}{dR} = \pm 1$ i očekivano zatvara kut od 45° s koordinatnim osima. Primjetimo da trajektorija ima diskontinuitet na $R = 0$ koji ćemo ubrzo ukloniti uvođenjem alternativne reprezentacije prostor-vremena. Gornju točku dijagrama, označenu s i^+, nazivamo budućom vremenolikom beskonačnosti. Napomenimo još jednom da iako je ovo područje prikazano točkom, riječ je u biti o dvodimenzionalnom prostoru. Isto vrijedi za bilo koju točku na dijagramu uz izuzetak ishodišta. Područje i^+ je definirano s $T = \pi$ i $R = 0$. Vraćajući se unatrag kroz brojne koordinatne transformacije, možemo se uvjeriti da na i^+ vrijedi $t = +\infty$ i $r = konst.$ te $u = +\infty$ i $v = +\infty$. Primjetimo i da trajektorije masivnih čestica uvijek završavaju u budućoj vremenskoj beskonačnosti. Donja točka dijagrama, označena s i^-, poznata je pod nazivom prošla vremenolika beskonačnost. Područje je definirano s $T = -\pi$ i $R = 0$, odnosno s $t = -\infty$ i $r = konst.$ ($u = -\infty$, $v = -\infty$). Kako je vidljivo na slici (2.2), trajektorije masivnih čestica ovdje uvijek izviru. Točka i^0 predstavlja prostornu beskonačnost. Riječ je o nedostupnoj regiji prostor-vremena u kojoj poniru prostornoliki geodezici. Koordinate ovdje poprimaju vrijednosti: $T = 0$, $R = \pi$, $t = konst.$, $r = +\infty$, $u = -\infty$, $v = +\infty$. Razmotrimo posebno i $R = 0$ pravac koji spaja i^- i i^+. Pritom isključujemo samo ishodište ($R = 0$, $T = 0 \rightarrow r = 0$, $t = 0$), te krajnje točke. Ovo područje je dakle definirano s $R = 0$, $T \neq \pm\pi$ i $T \neq 0$. Lako se je onda uvjeriti da u ovoj regiji imamo $r = 0$ i $t = konst.$, pri čemu vrijedi $t > 0$ iznad ishodišta, i $t < 0$ ispod ishodišta. Razmotrimo sada područje označeno debelom crnom linijom u gornjem dijelu dijagrama. Riječ je o krivulji definiranoj s jednadžbom (2.18), ali bez točaka i^0 i i^+. Dakle $T \neq \pi$ i $R \neq \pi$. Regiju ćemo označavati s $\mathcal{I}^+$ i zvati budućom svjetlosnom beskonačnosti. Ime regije proizlazi iz činjenice da svjetlosne trajektorije (kao i trajektorije svih bezmasenih čestica) ovdje uvijek završavaju kako je i vidljivo na slici. Uvjerimo se sada da na $\mathcal{I}^+$ vrijedi $u = konst.$ i $v = +\infty$. Iz izraza (2.14), (2.15), (2.11) i (2.12) vidimo da vrijedi $R + T = 2\arctan(v)$. Tada, ukoliko imamo $v = +\infty$, automatski vrijedi $R + T = \pi$. Uz naša pretpostavljena rješenja, prisutno je i $R = \arctan(\infty) - \arctan(konst.)$. Budući da vrijedi $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ i $\arctan(konst.) \in \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\rangle$ (strogo zatvoreno), koordinata R mora biti različita od π. Ekvivalentno slijedi i $T = \arctan(\infty) + \arctan(konst.) \neq \pi$. Prema tome, iz (2.8) i (2.9) vidimo da na $\mathcal{I}^+$ originalne koordinate poprimaju vrijednosti $t \to \infty$ i $r \to \infty$. Ovdje treba napomenuti da koordinata u nije jednaka svugdje na $\mathcal{I}^+$. Izraz $u = konst.$ kazuje samo da u budućoj svjetlosnoj beskonačnosti ona poprima konačne vrijednosti. Naime, kako putujemo od i^0 prema i^+ duž $\mathcal{I}^+$, u raste, što je najjasnije vidljivo sa slike (2.1). Primjetimo ipak da u ovom dijagramu koordinatne osi predočuju standardne koordinate r i t, ali svjetlosne krivulje su ekvivalentne i u T-R dijagramu. U ovo se možemo uvjeriti koristeći činjenicu da su izlazne trajektorije bezmasenih čestica dane jednadžbom $T = R + konst.$, dok razlika izraza (2.14) i (2.15) vodi na jednakost $T = R + 2\arctan(u)$. Tada za svjetlosne krivulje mora vrijediti $konst. = 2\arctan(u) \to u = konst.$ Pritom se u blizini i^0 i i^+ ova koordinata respektivno približava negativnoj, odnosno pozitivnoj beskonačnosti. Donja crna linija u dijagramu predstavlja prošlu svjetlosnu beskonačnost i standardno se označava sa $\mathcal{I}^-$. U ovoj regiji bezmasene čestice započinju svoje putanje. Područje je definirano jednadžbom (2.19) te ne obuhvaća točke i^- i i^0 ($T \neq -\pi$, $R \neq \pi$). Ekvivalentnim razmatranjem može se pokazati da na $\mathcal{I}^-$ vrijedi $v = konst.$ i $u = -\infty$, odnosno $t \to -\infty$ i $r \to +\infty$. Koordinata v na $\mathcal{I}^-$ pritom raste kako se pomičemo od i^- prema i^0. Često će nas zanimati i regije bliske određenim točkama. Tako sa $\mathcal{I}^+_-$ označavamo prostor na $\mathcal{I}^+$ u blizini i^0 (prošlost od $\mathcal{I}^+$) i sa $\mathcal{I}^+_+$ prostor u blizini i^+ (budućnost od $\mathcal{I}^+$). Ekvivalentno, $\mathcal{I}^-_+$ predstavlja budućnost na $\mathcal{I}^-$, dok sa $\mathcal{I}^-_-$ predočujemo pripadnu prošlost.

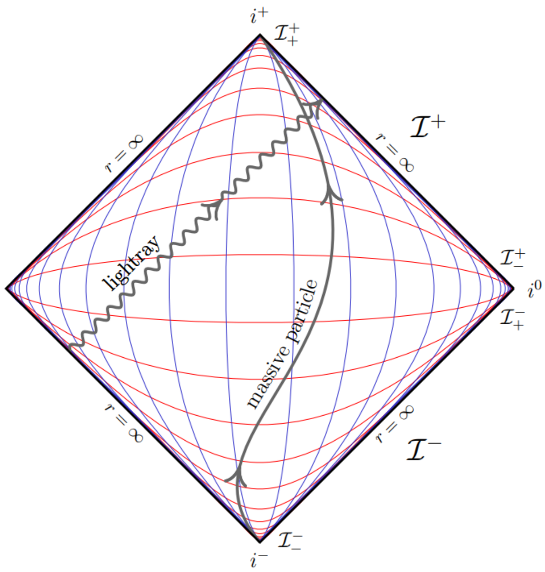
Od veće koristi će nam ipak biti alternativi Penroseov dijagram u kojem se R os reflektira na lijevu stranu dijagrama. Ovdje nećemo provesti rigoroznu konstrukciju takvog dijagrama već ćemo samo navesti osnovne ideje. Princip je sam po sebi poprilično jednostavan. Ukoliko zamislimo ravnu trajektoriju bezmasene čestice s konstantnim angularnim koordinatama Θ i ϕ koja dolazi iz $r \to +\infty$ te prolazi kroz ishodište, nastavit će se gibati prema $r \to +\infty$ s dijametralno suprotne strane. To jest, angularne koordinate će se transformirati preko izraza:

$$\phi^{'} = \phi + \pi \tag{2.20}$$

i

$$\Theta^{'} = \pi - \Theta. \tag{2.21}$$

Koordinate $(\Theta,\ \phi)$ i $(\Theta^{'},\ \phi^{'})$ povezane preko transformacija (2.20) i (2.21) opisuju dvije dijametralno suprotne točke na S^2. Riječ je o antipodalnom preslikavanju angularnih koordinata, što će nam biti bitno u daljnjem istraživanju. Alternativni Penroseov dijagram je prikazan na slici 2.3.



Slika 2.3: Alternativni Carter-Penroseov dijagram prostora Minkowskog. Preuzeto iz [15].

Na ovakvom dijagramu, svaki par točaka s istim vrijednostima T i R reflektiranim preko $R = 0$ s lijeve na desnu stranu i obrnuto odgovara 2-sferi. Angularne koordinate reflektiranih točaka su pritom povezane preko antipodalnih preslikavanja (2.20) i (2.21). Osim ovog detalja, priča je u potpunosti ekvivalentna kao na prethodno opisanom dijagramu. Masivne čestice svoje putanje kroz prostor-vrijeme uvijek započinju na i^- i završavaju na i^+ dok svjetlosne trajektorije izviru na $\mathcal{I}^-$ i poniru na $\mathcal{I}^+$. Primjetimo i da je ovakvim prikazom prostora Minkowskog uklonjen dikontinuitet svjetskih linija na $R = 0$.

U ovom radu ćemo uglavnom proučavati fizikalne fenomene na prošloj i budućoj svjetlosnoj beskonačnosti. $\mathcal{I}^+$ i $\mathcal{I}^-$ su trodimenzionalne površine za čiji nam opis trebaju tri koordinate. Mogli bismo odabrati set od četiri koordinate za opis čitavog četverodimenzionalnog prostora $(t, r, \hat{x})$ pri čemu je $\hat{x}$ jedinični vektor koji specificira točku na sferi (dvije koordinate), ali ovakav odabir koordinata je nespretan jer su t

i r u ovim područjima beskonačni. Kako je retardirano vrijeme konačno na $\mathcal{I}^+$, ovu regiju ćemo parametizirati sa $(u, \hat{x})$. Ekvivalentno, konačnost naprednog vremena na $\mathcal{I}^-$ implicira $(v, \hat{x})$ kao prirodan odabir koordinata za opis ove površine. Parametrizacija regija $\mathcal{I}^+$ i $\mathcal{I}^-$ je predmet rasprave idućeg poglavlja.

3 Parametrizacija prošle i buduće svjetlosne beskonačnosti

U ovom poglavlju provodimo parametrizaciju površina $\mathcal{I}^+$ i $\mathcal{I}^-$ s koordinatama pogodnima za njihov opis. Pritom ćemo redefinirati angularne koordinate pomoću kompleksnih transformacija koje povezuju ulazne i izlazne svjetlosne trajektorije preko antipodalnih preslikavanja. Krenimo stoga s definicijama osnovnih pojmova i konvencija. Ravna metrika u Kartezijevom koordinatnom sustavu se može pisati u idućem obliku:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^i dx^i. \tag{3.1}$$

Suma po i se u prethodnom izrazu podrazumjeva te ide po prostornim indeksima $(i = 1, 2, 3)$. Pritom vrijedi: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Općeniti vektor u ovom sustavu zapisujemo preko relacije $\vec{x} = x^1\vec{e_1} + x^2\vec{e_2} + x^3\vec{e_3}$, gdje jedinični vektori $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ čine bazu trodimenzionalnog euklidskog vektorskog prostora. Kvadrat diferencijala vektora je tada dan izrazom $(d\vec{x})^2 = dx^1dx^1 + dx^2dx^2 + dx^3dx^3$, što znači da metriku Minkowskog možemo zapisati pomoću jednadžbe $ds^2 = -dt^2 + (d\vec{x})^2$. Navodimo i vezu između Kartezijevih i sfernih koordinata:

$$\begin{aligned} x^3 &= r\cos\Theta, \\ x^1 &= r\sin\Theta\cos\phi, \\ x^2 &= r\sin\Theta\sin\phi. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ove koordinatne transformacije vode na oblik metrike dan izrazom (2.2).

3.1 Parametrizacija buduće svjetlosne beskonačnosti

Kao što smo vidjeli, na $\mathcal{I}^+$ retardirano vrijeme poprima konačne vrijednosti i prikladno je za opis ove regije prostor-vremena. S druge strane, napredno vrijeme u ovom području divergira te ga odbacujemo u parametrizaciji. Standardno se prostor u blizini $\mathcal{I}^+$ opisuje pomoću retardiranih Bondijevih koordinata $(u, r, z, \bar{z})$. Iste se definiraju preko transformacija [15]:

$$(\vec{x})^2 = r^2, \quad t = u + r, \quad x^1 + ix^2 = \frac{2rz}{1 + z\bar{z}}, \quad x^3 = r\frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}. \tag{3.3}$$

Angularne koordinate ($z, \bar{z} \in \mathbb{C}$) su povezane kompleksnom konjugacijom i pokrivaju cijelu kompleksnu ravninu. Zadnja tvrdnja proizlazi direktno iz treće transformacije u (3.3) te činjenice da se x^1 i x^2 (kao i x^3) nalaze u intervalu $\langle -\infty, +\infty \rangle$. Iz transformacija (3.2) i (3.3) također slijedi:

$$\cos\Theta = \frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}. \tag{3.4}$$

Sjeverni pol ($\Theta = 0$) je tada definiran sa $z, \bar{z} = 0$. Na ekvatoru ($\Theta = \frac{\pi}{2}$) vrijedi $z\bar{z} = 1$, dok na južnom polu ($\Theta = \pi$) novodefinirane angularne koordinate divergiraju ($z, \bar{z} \to +\infty$). Posljednje je manje očito te se može provjeriti uzimanjem limesa u izrazu (3.4), to jest, $\lim_{z\to\infty} \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} = -1$. Provedimo sada diferencijaciju iste jednadžbe:

$$\begin{aligned} -\sin\Theta d\Theta &= \frac{d(1 - z\bar{z})}{1 + z\bar{z}} + (1 + z\bar{z}) d\left(\frac{1}{1 + z\bar{z}}\right) \\ &= -\frac{z d\bar{z} + \bar{z} dz}{1 + z\bar{z}} - \frac{1 - z\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}(z d\bar{z} + \bar{z} dz) \\ &= \frac{-2}{(1 + z\bar{z})^2}(z d\bar{z} + \bar{z} dz). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Kvadriranje i dijeljenje prethodne formule sa $\sin\Theta$ rezultira izrazom:

$$d\Theta^2 = \frac{4}{\sin^2\Theta (1 + z\bar{z})^4}(z^2 dz^2 + z\bar{z} d\bar{z} dz + \bar{z} z dz d\bar{z} + \bar{z}^2 dz^2). \tag{3.6}$$

Cilj nam je, dakako, pronaći oblik metrike Minkowskog u retardiranim Bondijevim koordinatama te se stoga želimo riješiti faktora $\sin^2\Theta$. Isto možemo napraviti koristeći zamjenu $\sin^2\Theta = 1 - \cos^2\Theta$ i transformaciju (3.4). Nakon dva reda računa dolazimo do jednakosti:

$$\sin^2\Theta = \frac{4z\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}. \tag{3.7}$$

Izraz (3.6) se tada svodi na:

$$d\Theta^2 = \frac{1}{z\bar{z}(1 + z\bar{z})^2}(z^2 dz^2 + z\bar{z} d\bar{z} dz + \bar{z} z dz d\bar{z} + \bar{z}^2 dz^2). \tag{3.8}$$

Napravimo sada kratku digresiju kako bismo pokazali da su koordinate z i $\bar{z}$, definirane preko transformacija (3.3), uistinu povezane kompleksnom konjugacijom. Koristeći treći izraz u (3.3) i vezu Kartezijevih koordinata x^1 i x^2 sa r, Θ i ϕ, dobivamo dvije međusobno kompleksno konjugiranje jednadžbe:

$$\begin{aligned} \sin\Theta\cos\phi + i\sin\Theta\sin\phi &= \frac{2z}{1+z\bar{z}}, \\ \sin\Theta\cos\phi - i\sin\Theta\sin\phi &= \frac{2z^*}{1+z^*\bar{z}^*}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Množenjem ovih dviju jednadžbi dolazimo do iduće jednakosti:

$$\sin^2\Theta = \frac{4zz^*}{(1+z\bar{z})(1+z^*\bar{z}^*)}. \tag{3.10}$$

Ukoliko usporedimo ovo rješenje s izrazom (3.7), vidimo da mora vrijediti $\bar{z} = z^*$. Idući cilj nam je odrediti diferencijal polarne koordinate ϕ koji ćemo pronaći pomoću prve jednadžbe u (3.9). Prvo, međutim, moramo razriješiti neodređenost u korjenu izraza (3.7): $\sin\Theta = \frac{\pm\sqrt{z\bar{z}}}{1+z\bar{z}}$. Kako znamo da vrijedi $\sin\Theta \geq 0$ na intervalu $\Theta \in [0,\pi]$ te da je zadovoljeno $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$, očigledno treba odabrati + predznak. Prema tome, uvrštavanje sinusa i kosinusa koordinate Θ u (3.9) vodi na transformaciju:

$$\cos\phi + i\sin\phi = \frac{z}{\sqrt{z\bar{z}}}. \tag{3.11}$$

Nakon diferencijacije i množenja s faktorom $-i$ dobivamo:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)d\phi = -id\left(\frac{z}{\sqrt{z\bar{z}}}\right). \tag{3.12}$$

Jednakost (3.11) sada možemo uvrstiti u prethodni izraz što nam omogućuje idući račun:

$$\begin{aligned} d\phi &= -i\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{z}d\left(\frac{z}{\sqrt{z\bar{z}}}\right) \\ &= -i\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{z}\left(\frac{dz}{\sqrt{z\bar{z}}} - \frac{z}{2}\cdot\frac{zd\bar{z}+\bar{z}dz}{(z\bar{z})^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{-i}{2z\bar{z}}(\bar{z}dz - zd\bar{z}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Kvadriranjem slijedi:

$$d\phi^2 = \frac{-1}{4(z\bar{z})^2}(\bar{z}^2dz^2 - \bar{z}zdzd\bar{z} - \bar{z}zd\bar{z}dz + z^2d\bar{z}^2). \tag{3.14}$$

U poziciji smo sada za izračunati metriku na S^2. Koristeći izraze (2.3), (3.8) i

(3.14), nalazimo:

$$
\begin{aligned}
d\Omega^2 &= d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2 \\
&= \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}(dzd\bar{z} + d\bar{z}dz).
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

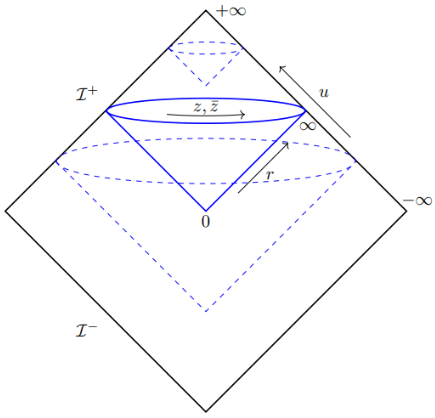
Prema tome, uz zamjenu $\gamma_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}$, metrika na jediničnoj sferi u matričnom obliku ima idući oblik:

$$
q_{AB} = \gamma_{z\bar{z}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}
$$

sa komponentama $q_{z\bar{z}} = q_{\bar{z}z} = \gamma_{z\bar{z}}$ i $q_{zz} = q_{\bar{z}\bar{z}} = 0$. Matričnim množenjem može se jednostavno provjeriti i da su komponente inverzne metrike $q^{z\bar{z}} = q^{\bar{z}z} = \gamma^{z\bar{z}}$ i $q^{zz} = q^{\bar{z}\bar{z}} = 0$, uz $\gamma^{z\bar{z}} = \frac{(1+z\bar{z})^2}{2}$. Konačno, koristeći transformaciju $-dt^2+dr^2 = -du^2 - dudr - drdu$ i metriku na S^2 datu izrazom (3.15), dobivamo metriku Minkowskog u retardiranim Bondijevim koordinatama:

$$
ds^2 = -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z}. \tag{3.17}
$$

Pri izvodu prethodne jednadžbe smo iskoristili činjenicu da je metrika simetričan tenzor. Ukoliko vrijedi $z, \bar{z} = 0$, jednakost $ds^2 = 0$ je zadovoljena ako diferencijal retardiranog vremena iščezava. Dakle izlazne svjetlosne krivulje su kao i ranije definirane $u = konst.$ jednadžbom. Primjeri takvih trajektorija prikazani su u T-R dijagramu na slici 3.1.



Slika 3.1: Parametrizacija $\mathcal{I}^+$ sa retardiranim Bondijevim koordinatama. Preuzeto iz [15].

Proučimo sada kako se angularne koordinate transformiraju uslijed antipodalnih preslikavanja. Tražimo rješenja za z' i $\bar{z}'$ koja zadovoljavaju jednadžbe $\cos\Theta' = \frac{1-z'\bar{z}'}{1+z'\bar{z}'}$ i $\cos\phi' + i\sin\phi' = \frac{z'}{\sqrt{z'\bar{z}'}}$, pri čemu su Θ' i ϕ' koordinate transformirane preko (2.20) i (2.21). Kako vrijedi $\cos(\pi - \Theta) = -\cos\Theta$, očigledno je zadovoljen izraz:

$$\frac{1 - z'\bar{z}'}{1 + z'\bar{z}'} = -\frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}. \tag{3.18}$$

Množeći brojnik i nazivnik desne strane prethodne jednadžbe sa $\frac{1}{z\bar{z}}$, dolazimo do jednakosti:

$$z'\bar{z}' = \frac{1}{z\bar{z}}. \tag{3.19}$$

Nadalje, koristimo identitet $\cos(\phi + \pi) + i\sin(\phi + \pi) = -\cos\phi - i\sin\phi$ koji implicira valjanost iduće jednadžbe:

$$\frac{z'}{\sqrt{z'\bar{z}'}} = -\frac{z}{\sqrt{z\bar{z}}}. \tag{3.20}$$

Ukoliko u ovaj izraz uvrstimo vrijednost $\bar{z}' = \frac{1}{z'z\bar{z}}$ (što dobivamo direktno iz (3.19)), slijedi da se koordinata z transformira prema formuli:

$$z' = -\frac{1}{\bar{z}}. \tag{3.21}$$

Uvrštavanjem ovog izraza u (3.19) (ili jednostavno provedbom kompleksne konjugacije), saznajemo da se $\bar{z}$ transformira kao:

$$\bar{z}' = -\frac{1}{z}. \tag{3.22}$$

Jednadžbe (3.21) i (3.22) predstavljaju antipodalna preslikavanja na S^2 u retardiranim Bondijevim koordinatama. Svrha zamjena koordinata Θ i ϕ sa z i $\bar{z}$ bit će jasna nakon što napravimo parametrizaciju regije $\mathcal{I}^-$ u idućem podpoglavlju.

3.2 *Parametrizacija prošle svjetlosne beskonačnosti*

Kako je na $\mathcal{I}^-$ napredno vrijeme konačno, pogodno je za opis ove površine. Konkretnije, koristit ćemo napredne Bondijeve koordinate $(v, r, z, \bar{z})$ definirane preko transformacija [15]:

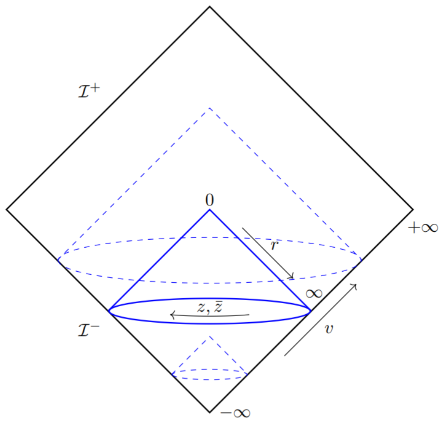
$$(\vec{x})^2 = r^2, \quad t = v - r, \quad x^1 + ix^2 = -\frac{2rz}{1+z\bar{z}}, \quad x^3 = -r\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}. \tag{3.23}$$

Primjetimo da se treća i četvrta transformacija u (3.23) razlikuju do na predznak u odnosu na ekvivalentne transformacije u (3.3). To jest, angularne koordinate z i $\bar{z}$ koje koristimo za opis $\mathcal{I}^-$ nisu jednake angularnim koordinatama kojima opisujemo $\mathcal{I}^+$ (iako koristimo iste oznake). Neovisno o tome, i dalje je riječ o kompleksnim koordinatama povezanim kompleksnom konjugacijom koje pokrivaju cijelu kompleksnu ravninu. U ovom podpoglavlju nećemo provesti detaljni izvod metrike Minkowskog u novom koordinatnom sustavu, ali za tim nema ni potrebe. Dovoljno je uočiti da su svi faktori koji ulaze u $d\Omega^2$ kvadrirani, prema tome, dodatni minus predznak u transformacijama (3.23) ne može promijeniti metriku na S^2 te je ona i na $\mathcal{I}^-$ dana izrazom (3.15). Uz transformaciju $-dt^2 + dr^2 = -dv^2 + 2dvdr$, nalazimo odmah da je ravna metrika u naprednim Bondijevim koordinatama:

$$ds^2 = -dv^2 + 2dvdr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z}, \tag{3.24}$$

gdje vrijedi isto kao ranije $\gamma_{z\bar{z}} = \frac{2}{(1+z\bar{z})^2}$. Ukoliko su z i $\bar{z}$ fiksni, linijski element očekivano iščezava za $v = konst.$, što je ujedno i jednadžba ulaznih svjetlosnih trajektorija. Kako su ove svjetske linije u T-R dijagramu definirane jednadžbom $T = -R + konst$, sumirajući izraze (2.14) i (2.15) nalazimo da za krivulje bezmasenih čestica mora vrijediti $konst. = 2\arctan v \to v = konst.$. Budući da je arkus tangens strogo rastuća funkcija, ulazne (kao i izlazne) svjetlosne trajektorije u Penroseovom dijagramu imaju isti oblik i redoslijed pri porastu v (odnosno u) koordinate kao na slici 2.1. Primjeri takvih ulaznih trajektorija u T-R dijagramu prikazani su na slici 3.2.

Na kraju ovog poglavlja, proučimo kako su ulazne i izlazne svjetlosne trajektorije povezane. Prvo, napomenimo da se napredne angularne Bondijeve koordinate uslijed antipodalnih preslikavanja transformiraju preko izraza (3.21) i (3.22), to jest, na isti način kao i retardirane angularne Bondijeve koordinate. Na $\mathcal{I}^-$, iz (3.23) slijedi da vrijede jednakosti $\cos\Theta = -\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}$ i $\cos\phi + i\sin\phi = -\frac{z}{\sqrt{z\bar{z}}}$. Ukoliko u ovim jednadžbama napravimo transformacije $\Theta \to \pi - \Theta$ i $\phi \to \phi + \pi$, dobivamo izraze (3.4) i (3.11) koji odgovaraju koordinatnim transformacijama na $\mathcal{I}^+$. Prema tome, napredne angularne koordinate su ekvivalentne antipodalno preslikanim retardiranim angularnim koordinatama i obrnuto. Pretpostavimo da imamo bezmasenu česticu koja započinje svoju putanju na $\mathcal{I}^-$ s lijeve strane Penroseovog dijagrama sa konstantnim vrijednostima naprednih angularnih koordinata z i $\bar{z}$ po nekoj $v = konst.$ putanji. U jednom trenutku, ova čestica će prijeći $R = 0$ liniju i naći se s desne strane dijagrama. Gibanje se nastavlja po $u = konst.$ trajektoriji sve dok ista ne završi na $\mathcal{I}^+$ na desnoj strani. Kako je točka u kojoj krivulja ponire ekvivalentna antipodalno preslikanoj točki na $\mathcal{I}^+$ s lijeve strane dijagrama, zaključujemo da su vrijednosti z i $\bar{z}$ u naprednim Bondijevim koordinatama s kojima trajektorija započinje, jednake vrijednostima z i $\bar{z}$ u retardiranim Bondijevim koordinatama s kojima trajektorija završava. Ova činjenica će nam biti od velike koristi kada se budemo bavili problemom raspršenja.



Slika 3.2: Parametrizacija $\mathcal{I}^-$ sa naprednim Bondijevim koordinatama. Preuzeto iz [15].

4 Bondi-Sachsov formalizam

Do sada smo proučavali isključivo svojstva ravnog prostor-vremena. U ovom poglavlju ćemo dozvoliti prisustvo zakrivljenosti, pri čemu pretpostavljamo lokaliziranost materije oko centra koordinatnog sustava. U svojim radovima iz 1962. godine, fizičari Hermann Bondi i Rainer K. Sachs [4], [14] proveli su konstrukciju prostor-vremena adaptiranog na izlazne svjetlosne trajektorije koje se u prostornoj beskonačnosti približava prostoru Minkowskog. Kako je ovakav prostor opisan asimptotski ravnom metrikom, prirodno je u asimptotskim regijama očekivati postojanje Poincaréove grupe. Umjesto toga, pronađena je beskonačno-dimenzionalna grupa simetrija danas poznata kao Bondi-Metzner-Sachsova (BMS) grupa, čiju podgrupu čine matrice opisane generatorima Poincaréovih simetrija. Dakako, u općoj teoriji relativnosti simetrije su generirane vektorskim poljima koja definiraju integralne krivulje na mnogostrukosti. Prema tome, kako bismo odredili kakve simetrije ovakav prostor posjeduje, željet ćemo pronaći asimptotske generatore difeomorfizama. Krenut ćemo s konstrukcijom Bondi-Sachsove metrike, nakon čega pomoću Einsteinovih jednadžbi tražimo rješenja za koeficijente iste. Uz nametnute rubne uvjete, metriku razvijamo u red i razmatramo rješenja u asimptotskom području. Konačno, pronaći ćemo asimptotske izometrije prostor-vremena i vidjeti kakve fizikalne fenomene one opisuju.

4.1 Bondi-Sachsova metrika

Kao prvotni cilj, želimo pronaći najopćeniiji oblik metrike u retardiranim Bondijevim koordinatama koja zadovoljava određene kriterije. Relevantne restrikcije ćemo uvesti vrlo brzo, no krenimo s definicijama konvencija i pojmova kako ne bi bilo nejasnoća u zapisu. Radit ćemo u koordinatnom sustavu opremljenom retardiranim Bondijevim koordinatama $x^\mu = (u, r, z, \bar{z})$ definiranim preko transformacijama (3.3). Standardno, $\mu = 0, 1, 2, 3$ i vrijedi: $x^0 = u, x^1 = r, x^2 = z, x^3 = \bar{z}$. Specijalno, kako bismo naznačili da je riječ o angularnim koordinatama (ili o angularnim komponentama tenzora), za indekse koristimo velika latinska slova $A = 2, 3$, odnosno $x^A = (z, \bar{z})$. Ove angularne koordinate ćemo ipak specificirati kao naš izbor koordinata tek nakon što provedemo rigorozne račune. U međuvremenu ih ostavljamo proizvoljnima. Spomenimo i da ćemo u velikoj mjeri brojčane idekse koji specificiraju komponente tenzora zamijeniti s oznakama za koordinate; npr. $T_{01} = T_{ur}$.

S uvedenim konvencijama, krenimo s konstukcijom prostor-vremena od interesa. Riječ je o četvero-dimenzionalnom prostoru definiranom s mnogostrukosti M opremljenom metrikom $g_{\mu\nu}$. Svojstva koja želimo da ovakav prostor posjeduje su iduća [11]:

1) tro-dimenzionalne hiperpovršine svjetlosnog tipa su definirane s $u = konst.$ jednadžbama,

2) angularne koordinate x^A su konstantne duž svjetlosnih trajektorija.

Kako bismo matematički formulirali ove uvjete, moramo prvo specificirati pojam podmnogostrukosti. Pretpostavimo stoga da imamo n-dimenzionalnu mnogostrukost N opremljenu koordinatama x^μ ($\mu = 1, 2, ...n$) sa metrikom $g_{\mu\nu}$ i m-dimenzionalnu ($m < n$) podmnogostrukost S sa koordinatama y^i (i=1,2...m). Tada se S može definirati preko $p = n - m$ funkcija $f^a(x)$ (a=1,2...p), kao set točaka x za koje su ove funkcije konstantne. To jest: $f^1(x) = f^1_*, f^2(x) = f^2_*, ..., f^p(x) = f^p_*$, gdje $f^a_* = konst.$ Ukoliko postoji preslikavanje $\phi : S \to N$, tenzor metrike možemo povlačiti sa N na S, odnosno $(\phi^* g)_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu}$ predstavlja metriku na S. Ako je S (n-1)-dimenzionalna podmnogostrukost, tada je ona ujedno i hiperpovršina.

Okrenimo se sada našoj četvero-dimenzionalnoj mnogostrukosti M i definirajmo pripadnu tro-dimenzionalnu hiperpovršinu Σ tako da na njoj fiksiramo jednu funkciju. Na Σ dakle mora vrijediti $f(x) = f_* = konst.$ Neka ujedno T_pM i $T_p\Sigma$ predstavljaju tangencijalne prostore (na nekoj proizvoljnoj točki p) od M i Σ respektivno. Pretpostavimo sada da imamo vektorsko polje V^μ tako da vrijedi $V^\mu \in T_p\Sigma \subset T_pM$ gdje:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}. \tag{4.1}$$

Ovdje $x^\mu(\lambda)$ predstavlja krivulju na M parametriziranu sa $\lambda \in \mathbb{R}$ na koju je V^μ tangencijalan. Nametnimo sada konstantnost funkcije $f(x)$. Isto možemo učiniti zahtjevom da njena vanjska derivacija $df = (df)_\mu dx^\mu$ isčezava. Pritom vrijedi $(df)_\mu = \partial_\mu f = \nabla_\mu f$. Spomenimo da je vanjska derivacija formalno definirana preko parcijalne derivacije, no u odsustvu torzije (koje pretpostavljamo) možemo ju zamijeniti sa kovarijantnom derivacijom. Ovakvim zahtjevom, međutim, nismo specificirali gdje je $f(x)$ konstantna. Prema definiciji, $f(x) = f_*$ vrijedi samo na Σ, što znači da njena usmjerena derivacija duž V^μ treba biti jednaka nuli, odnosno $V^\mu \nabla_\mu f = 0$. Ukoliko definiramo 1-formu preko relacije $W_\mu = \nabla_\mu f$, vidimo da vrijedi:

$$W_\mu V^\mu = 0, \tag{4.2}$$

odnosno vektori W^μ i V^μ su međusobno ortogonalni. Kako je V^μ tangencijalan na Σ, W^μ je na istu hiperpovršinu okomit. Postavimo sada zahtjev prema kojem je Σ hiperpovršina svjetlosnog tipa. Budući da su vektori okomiti na datu svjetlosnu hiperpovršinu vektori svjetlosnog tipa, mora vrijediti:

$$W_\mu W^\mu = 0. \tag{4.3}$$

Dakle W^μ je ortogonalan sam sa sobom, a budući da je okomit na Σ, automatski slijedi da je na nju ujedno i tangencijalan. Konačno, definirajmo u potpunosti Σ sa odabirom $f_* = u = konst$. Odnosno, koordinata u je po pretpostavci na Σ svugdje konstantna. Tada vrijedi:

$$W_\mu = \nabla_\mu u. \tag{4.4}$$

Pomoću ovog izraza možemo naći i uvjet na jednu od komponenta inverzne metrike:

$$0 = W_\mu W^\mu = \nabla_\mu u \nabla^\mu u = g^{\mu\nu} \nabla_\mu u \nabla_\nu u = g^{\mu\nu} \partial_\mu u \partial_\nu u = g^{\mu\nu} \delta^u{}_\mu \delta^u{}_\nu = g^{uu}. \tag{4.5}$$

U trećoj jednakosti smo iskoristili činjenicu da se kovarijantna derivacija skalarnih funkcija svodi na parcijalnu, dok smo u četvrtoj upotrjebili izraz $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu$. Time je zadovoljen prvi od dva nametnuta uvjeta. Drugi uvjet možemo formulirati pomoću zahtjeva da krivulja $x^\mu(\lambda)$ (na koju je V^μ tangencijalan) predstavlja svjetlosni geodezik. Tada tangencijalni vektor zadovoljava jednadžbu geodezika $V^\lambda \nabla_\lambda V^\mu = 0$ (dakako, vrijedi i $V^\mu V_\mu = 0$). Budući da je W^μ također tangencijalan na $x^\mu(\lambda)$, konstantnost angularnih koordinata duž svjetlosnih trajektorija se svodi na uvjet da njihova usmjerena derivacija duž W^μ iščezava:

$$W^\mu \nabla_\mu x^A = 0. \tag{4.6}$$

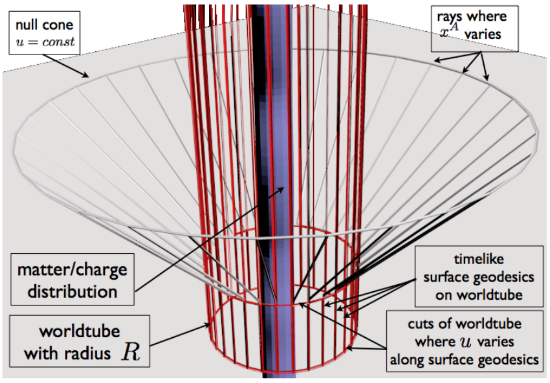
Prethodni izraz daje dodatne dvije restrikcije na inverz metrike:

$$0 = W^\mu \partial_\mu x^A = g^{\mu\nu} W_\nu \partial_\mu x^A = g^{\mu\nu} \partial_\nu u \partial_\mu x^A = g^{\mu\nu} \delta^u{}_\nu \delta^A{}_\mu = g^{uA}. \tag{4.7}$$

To jest, uz odabir koordinata $x^A = (z, \bar{z})$, mora vrijediti $g^{uz} = g^{u\bar{z}} = 0$. Pomoću definicije inverzne metrike ($g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\nu$) možemo odmah pronaći komponente metrike jednake nuli. Iz $\delta^u{}_r = 0$ slijedi: $0 = g^{u\sigma} g_{\sigma r} = g^{uu} g_{ur} + g^{ur} g_{rr} + g^{uA} g_{Ar} = g^{ur} g_{rr}$. Ekvivalentno, iz $\delta^u{}_r = 0$ dobivamo: $0 = g^{u\sigma} g_{\sigma A} = g^{uu} g_{uA} + g^{ur} g_{rA} + g^{uB} g_{BA} = g^{ur} g_{rA}$. Ove dvije jednadžbe impliciraju iduće jednakosti:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= 0, \\ g_{rA} &= 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Prije nego nastavimo s konstrukcijom metrike, osvrnimo se kratko na ilustrativni prikaz Bondijevog koordinatnog sustava na slici 4.1.



Slika 4.1: Ilustrativni prikaz Bondijevog koordinatnog sustava. Preuzeto iz [11].

Slika predstavlja t-r dijagram uz dodatno predočenu treću (angularnu) dimenziju. Izlazni svjetlosni stožac predstavlja jednu od beskonačno mogućih hiperpovršina Σ na kojoj se nalaze $u = konst.$ geodezici bezmasenih čestica. Angularne koordinate variraju od jedne do druge svjetlosne trajektorije na Σ, ali za svaku pojedinu trajektoriju vrijedi $x^A = konst.$ Oko centra je lokalizirana distribucija materije koja se rasprostire do nekog konačnog radijusa. Nećemo specificirati o kakvom izvoru gravitacijskog polja je riječ, već ćemo Einsteinove jednadžbe rješavati uz potpuno proizvoljan tenzor energije-impulsa koji isključujemo kada $r \to \infty$. S dvjema crveno naznačenim kružnicama označeni su dijelovi tzv. svjetske cijevi na nekom konstantnom $r = R$ radijusu za različite vrijednosti vremenolike koordinate, odnosno u varira duž vertikalnih crvenih linija.

Uz uvjete (4.8), najopćenitiju moguću metriku možemo zapisati u idućem obliku:

$$ds^2 = -Adu^2 - 2Bdudr + 2Cdudz + 2Ddud\bar{z} + Edz^2 + 2Fdzd\bar{z} + Gd\bar{z}^2, \tag{4.9}$$

gdje funkcije A-G mogu ovisiti o cijelom setu koordinata x^μ. Predznake ispred g_{uu} i g_{ur} komponenti biramo tako da metrika ima isti potpis kao ravna metrika dana izrazom (3.17), to jest, želimo da vrijedi $A > 0$ i $B > 0$. Komponente su dakle: $g_{uu} = -A$, $g_{ur} = g_{ru} = -B$, $g_{uz} = g_{zu} = C$, $g_{u\bar{z}} = g_{\bar{z}u} = D$, $g_{zz} = E$, $g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = F$ i $g_{\bar{z}\bar{z}} = G$. Iduća stvar koju želimo napraviti jest postaviti dodatni uvjet na radijalnu koordinatu r. Isto ćemo učiniti koristeći relaciju koja uključuje metriku "angularnog podprostora" pa ju stoga želimo formalno i definirati. Uvedimo dvo-dimenzionalnu podmnogostrukost $\sigma \subset M$ tako što ćemo na njoj fiksirati dvije koordinate: $u = u_* = konst$, $r = r_* = konst$. Pretpostavimo sada da postoji preslikavanje $\phi : \sigma \to M$ uslijed kojeg se koordinate transformiraju kao $\phi : y^i \to x^\mu = (u_*, r_*, y^i)$. Sa y^i (i=1,2) smo označili koordinate na σ koje možemo odabrati tako da vrijedi $y^i = x^A$. Metrika na σ je tada formalno dana povlačenjem:

$$(\phi^* g)_{AB} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^A}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^B} g_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_A \delta^\nu{}_B g_{\mu\nu} = g_{AB}. \tag{4.10}$$

Dakle g_{AB} je (uz ovakav odabir koordinata na σ) jednostavno 2×2 podmatrica matrice $g_{\mu\nu}$ kojoj namećemo nezavisnost na σ preko relacije $g^{AC} g_{CB} = \delta^A{}_B$. Uz precizno definiran tenzor g_{AB}, spremni smo postaviti dodatnu restrikciju na odabrane koordinate. Koristit ćemo tzv. Bondijevo baždarenje definirano jednadžbom [15]:

$$det g_{AB} = r^4 det q_{AB}, \tag{4.11}$$

gdje je q_{AB} metrika na S^2. Možemo jednostavno reći da biramo koordinatu r tako da zadovoljava ovaj uvjet. Često se tada kaže da ona predstavlja luminozitetnu udaljenost. Jednadžba (4.11) ne predstavlja baždarenje u stvarnom smislu riječi, ali u većini literature se koristi izraz Bondijevo baždarenje pa nećemo mijenjati terminologiju. Spomenimo da ćemo za determinantu tenzora često koristiti skraćenice poput

$detq_{AB} = q$ tako što ćemo u zapisu ukloniti indekse. Potrebno je tada paziti da q ne miješamo s tragom istog tenzora $q^A{}_A = 2$. Primjerice, za Riccijev skalar koristimo oznaku R koji predstavlja trag Riccijevog tenzora, odnosno $R = R^\mu{}_\mu$. U svakom slučaju, o kakvoj fizikalnoj veličini je riječ bi trebalo biti jasno iz konteksta. Ukoliko je metrika na S^2 dana izrazom (3.16), njena determinanta jest:

$$detq_{AB} = \frac{-4}{(1+z\bar{z})^4} = -\gamma^2_{z\bar{z}}. \tag{4.12}$$

Prema Bondijevom baždarenju tada vrijedi i:

$$detg_{AB} = g_{zz}g_{\bar{z}\bar{z}} - g_{z\bar{z}}g_{\bar{z}z} = \frac{-4r^4}{(1+z\bar{z})^4}. \tag{4.13}$$

Naša tvrdnja je sada da uz ovakav odabir baždarenja metriku možemo pisati u obliku [11]:

$$ds^2 = -Udu^2 - 2Bdudr + g_{AB}(dx^A - U^A du)(dx^B - U^B du). \tag{4.14}$$

Ovdje su U, U^z i $U^{\bar{z}}$ novouvedene funkcije na koje ne postoje restrikcije po pitanju ovisnosti o koordinatama. Ovakav oblik metrike je poprilično nekonvencionalan i u biti ne znamo je li fizikalan. Međutim, ukoliko uspijemo pronaći rješenja za koeficijente iste izražena preko funkcija u (4.9), tada znamo da je izraz (4.14) u potpunosti legitiman. ”Raspetljani” oblik metrike dan je idućom jednadžbom:

$$\begin{aligned} ds^2 =&(-U + g_{zz}(U^z)^2 + 2g_{z\bar{z}}U^zU^{\bar{z}} + g_{\bar{z}\bar{z}}(U^{\bar{z}})^2)du^2 - 2Bdudr \\ &+ (-2g_{zz}U^z - 2g_{z\bar{z}}U^{\bar{z}})dzdu + (-2g_{\bar{z}\bar{z}}U^{\bar{z}} - 2g_{z\bar{z}}U^z)d\bar{z}du \\ &+ g_{zz}dz^2 + g_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}^2 + 2g_{z\bar{z}}dzd\bar{z}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Kako (4.15) i (4.9) predstavljaju istu metriku, usporedbom ovih izraza vidimo da trebaju biti zadovoljene jednakosti:

$$\begin{aligned} &-U + g_{zz}(U^z)^2 + 2g_{z\bar{z}}U^zU^{\bar{z}} + g_{\bar{z}\bar{z}}(U^{\bar{z}})^2 = g_{uu}, \\ &-2g_{zz}U^z - 2g_{z\bar{z}}U^{\bar{z}} = 2g_{uz}, \\ &-2g_{\bar{z}\bar{z}}U^{\bar{z}} - 2g_{z\bar{z}}U^z = 2g_{u\bar{z}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Iz druge i treće jednadžbe nalazimo rješenja za U^z i $U^{\bar{z}}$:

$$
\begin{aligned}
U^z &= -\frac{g_{uz}g_{\bar{z}\bar{z}} - g_{u\bar{z}}g_{z\bar{z}}}{detg_{AB}}, \\
U^{\bar{z}} &= -\frac{g_{u\bar{z}}g_{zz} - g_{uz}g_{z\bar{z}}}{detg_{AB}}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Uz ova rješenja, funkcija U je u potpunosti definirana prvom jednadžbom u (4.16) i očigledno vrijedi:

$$
U \sim \frac{1}{(detg_{AB})^2}. \tag{4.18}
$$

Kako vidimo, sve funkcije imaju pol u točki $detg_{AB} = 0$. Međutim, iz (4.11) i (4.12) slijedi da funkcije ne mogu imati polove u angularnim koordinatama ($z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$). Jedakost $detg_{AB} = 0$ može biti zadovoljena samo kada vrijedi $r = 0$, što u ovom trenutku proglašavamo singularnom točkom. Ukoliko bismo željeli proučiti je li riječ o koordinatnom ili geometrijskom singularitetu, trebalo bi izračunati Riccijev skalar (koji je koordinatno neovisna veličina). Mi to nećemo raditi, naprotiv, račun Riccijevog skalara ćemo izbjeći uvođenjem vektora svjetlosnog tipa tangencijalnog na Σ. Uostalom, područja od interesa ovoga rada su regije u kojima $r \to \infty$.

Kako smo uspješno usuglasili izraze (4.9) i (4.14), zaključujemo da je metrika napisana u obliku (4.14) fizikalna svugdje osim u ishodištu. Redefinirajmo sada koeficijente metrike preko idućih transformacija:

$$
\begin{aligned}
B &= e^{2\beta}, \\
U &= \frac{V}{r}e^{2\beta}.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

U prvoj jednakosti smo samo izrazili funkciju B preko nove funkcije $\beta(u, r, z, \bar{z})$. Pritom smo iskoristili eksponencijalnu funkciju koja brine o uvjetu $B > 0$. Koeficijent U izražavamo preko još jedne nove funkcije $V(u, r, z, \bar{z})$. Primjetimo da druga transformacija sadrži r u nazivniku, ali točku $r = 0$ smo već proglasili singularnom pa time nije uzrokovano dodatno narušenje fizikalnosti metrike. Prije nego napišemo konačan oblik metrike, definirajmo konformnu metriku h_{AB} na σ preko konformne transformacije [11]:

$$
g_{AB} = r^2 h_{AB}. \tag{4.20}
$$

Uzimajući determinatu ovog izraza vidimo da vrijedi: $detg_{AB} = det(r^2 h_{AB}) = r^4 deth_{AB}$. U računu smo iskoristili svojstvo determinante $det(cA) = c^n det(A)$, gdje je c proizvoljna konstanta i A $n \times n$ matrica. Usporedbom ovog rezultata s Bondijevim baždarenjem (4.11) vidimo da je zadovoljeno:

$$deth_{AB} = detq_{AB}. \tag{4.21}$$

Dakako, metrika g_{AB} (kao i h_{AB}) nema ograničenja na ovisnost o koordinatama i u principu ovisi o cijelom setu $x^\mu = (u, r, z, \bar{z})$, no znamo da determinanta metrike na sferi ovisi samo o z i $\bar{z}$ pa mora vrijediti:

$$\partial_r deth_{AB} = \partial_u deth_{AB} = 0. \tag{4.22}$$

Iz uvjeta $g^{AC} g_{CB} = \delta^A{}_B$ slijedi da se se inverz metrike na σ transformira prema relaciji:

$$g^{AB} = \frac{1}{r^2} h^{AB}, \tag{4.23}$$

pri čemu mora biti zadovoljeno $h^{AC} h_{CB} = \delta^A{}_B$. Budući da je h_{AB} simetričan tenzor ($h_{z\bar{z}} = h_{\bar{z}z}$) i vrijedi uvjet na determinantu ($h_{zz} h_{\bar{z}\bar{z}} - h_{z\bar{z}} h_{z\bar{z}} = -(\gamma_{z\bar{z}})^2$), konformna metrika h_{AB} ima samo dva nezavisna stupnja slobode. Ukoliko bismo radili u sfernom koordinatnom sustavu (Θ, ϕ), prikladna reprezentacija ove metrike u matričnom obliku bi bila [11]:

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} e^{2\gamma} cosh(2\delta) & sin(\Theta) sinh(2\delta) \\ sin(\Theta) sinh(2\delta) & e^{-2\gamma} sin^2(\Theta) cosh(2\delta) \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

pri čemu funkcije $\gamma(u, r, \Theta, \phi)$ i $\delta(u, r, \Theta, \phi)$ predstavljaju dva stupnja slobode tenzora h_{AB}. Lako se je uvjeriti da je determinanta ove matrice dana s $deth_{AB} = sin^2(\Theta)$, što je ujedno determinanta metrike na S^2 iskazane u obliku $q_{AB} = diag(1, sin^2(\Theta))$. Uz ovakav odabir koordinata, međutim, izrazi (4.17) i (4.18) imaju polove na sjevernom i južnom polu sfere ($sin(0) = sin(\pi) = 0$). Držat ćemo se stoga odabira $x^A = (z, \bar{z})$.

Konačno, uz uvedene transformacije, Bondi-Sachsova metrika poprima oblik:

$$ds^2 = -\frac{V}{r} e^{2\beta} du^2 - 2e^{2\beta} du dr + r^2 h_{AB} (dx^A - U^A du)(dx^B - U^B du), \tag{4.25}$$

odnosno:

$$\begin{aligned}ds^2 =&(-\frac{V}{r}e^{2\beta} + r^2 h_{AB} U^A U^B) du^2 - 2e^{2\beta} du dr - 2r^2 h_{AB} U^B du dx^A \\ &+ r^2 h_{AB} dx^A dx^B.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Iz prethodnog izraza možemo očitati pripadne komponente:

$$\begin{aligned}&g_{uu} = -\frac{V}{r}e^{2\beta} + r^2 h_{AB} U^A U^B, \;\; g_{ur} = -e^{2\beta}, \\ &g_{uA} = -r^2 h_{AB} U^B, \;\; g_{AB} = r^2 h_{AB}, \\ &g_{rr} = 0, \;\; g_{rA} = 0,\end{aligned} \tag{4.27}$$

s inverznim vrijednostima:

$$\begin{aligned}&g^{ur} = -e^{-2\beta} \;\; g^{rr} = \frac{V}{r}e^{-2\beta}, \\ &g^{rA} = -U^A e^{-2\beta}, \;\; g^{AB} = \frac{1}{r^2} h^{AB}, \\ &g^{uu} = 0, \;\; g^{uA} = 0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Komponente inverzne metrike ovdje navodimo bez dokaza. Iste se mogu pronaći traženjem inverza matrice $g_{\mu\nu}$, odnosno lako se je uvjeriti da uz identitete (4.27) i (4.28) vrijedi:

$$\begin{pmatrix} g_{uu} & g_{ur} & g_{uz} & g_{u\bar{z}} \\ g_{ur} & 0 & 0 & 0 \\ g_{uz} & 0 & g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{u\bar{z}} & 0 & g_{z\bar{z}} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & g^{ur} & 0 & 0 \\ g^{ur} & g^{rr} & g^{rz} & g^{r\bar{z}} \\ 0 & g^{rz} & g^{zz} & g^{z\bar{z}} \\ 0 & g^{r\bar{z}} & g^{z\bar{z}} & g^{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

pri čemu je potrebno koristiti izraz $h^{AC} h_{CB} = \delta^A{}_B$. Primjetimo da uz uvjet $x^A = konst.$, linijski element u (4.25) iščezava ukoliko vrijedi i $u = konst.$ Prema tome, $u = konst.$ uistinu predstavlja trajektorije bezmasenih čestica.

Prije nego krenemo s analizom Einsteinovih jednadžbi u idućem podpoglavlju, napravimo kratku digresiju kako bismo dokazali dva identiteta koja će nam biti od krucijalne važnosti u narednim računima. Tvrdimo da vrijedi [11]:

$$\begin{aligned}&h^{AB} \partial_r h_{AB} = 0, \\ &h^{AB} \partial_u h_{AB} = 0.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Dokaz provodimo za prvu jednadžbu (koja uključuje parcijalnu derivaciju po r). Druga jednadžba se može dokazati na potpuno ekvivalentan način. Koristimo uvjet $h^{AC}h_{CB} = \delta^A{}_B$ koji u matričnom obliku zapisujemo kao:

$$\begin{pmatrix} h_{zz} & h_{z\bar{z}} \\ h_{z\bar{z}} & h_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^{zz} & h^{z\bar{z}} \\ h^{z\bar{z}} & h^{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

i uvjet na determinantu $\partial_r deth_{AB} = 0$. Iz navedenih relacija dobivamo sustav od pet jednadžbi:

$$\begin{aligned}
&1) \quad h_{zz}h^{zz} + h_{z\bar{z}}h^{z\bar{z}} = 1, \\
&2) \quad h_{zz}h^{z\bar{z}} + h_{z\bar{z}}h^{\bar{z}\bar{z}} = 0, \\
&3) \quad h_{z\bar{z}}h^{zz} + h_{\bar{z}\bar{z}}h^{z\bar{z}} = 0, \\
&4) \quad h_{z\bar{z}}h^{z\bar{z}} + h_{\bar{z}\bar{z}}h^{\bar{z}\bar{z}} = 1, \\
&5) \quad \partial_r(h_{zz}h_{\bar{z}\bar{z}} - h_{z\bar{z}}h_{z\bar{z}}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Iskoristimo prvo jednakosti 3) i 1) u (4.32) koje respektivno daju jednadžbe $h_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{-h_{z\bar{z}}h^{zz}}{h^{z\bar{z}}}$ i $h_{z\bar{z}} = \frac{1-h_{zz}h^{zz}}{h^{z\bar{z}}}$. Dobivene rezultate uvrštavamo u petu jednadžbu čime dobivamo izraz $\partial_r \left(\frac{-h_{z\bar{z}}}{h^{z\bar{z}}}\right) = 0$. Deriviramo prethodnu relaciju i množimo ju s $-(h^{z\bar{z}})^2$ što kao rezultat daje:

$$h^{z\bar{z}}\partial_r h_{z\bar{z}} - h_{z\bar{z}}\partial_r h^{z\bar{z}} = 0. \tag{4.33}$$

U idućem koraku opet koristimo treću i prvu jednadžbu u (4.32), ali ovaj put izražavamo h_{zz} iz 1) i $h_{z\bar{z}}$ iz 3). Slijede rezultati $h_{zz} = \frac{1-h_{z\bar{z}}h^{z\bar{z}}}{h^{zz}}$ i $h_{z\bar{z}} = \frac{-h_{\bar{z}\bar{z}}h^{z\bar{z}}}{h^{zz}}$ koje uvrštavamo u 5) da bismo dobili $\partial_r \left(\frac{h_{\bar{z}\bar{z}}}{h^{zz}}\right) = 0$. Isti izraz deriviramo i množimo s $(h_{zz})^2$ čime dolazimo do jednakosti:

$$h^{zz}\partial_r h_{\bar{z}\bar{z}} - h_{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h^{zz} = 0. \tag{4.34}$$

Iz druge i četvrte jednadžbe u (4.32) proizlaze relacije $h_{z\bar{z}} = \frac{-h_{zz}h^{z\bar{z}}}{h^{\bar{z}\bar{z}}}$ i $h_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1-h_{z\bar{z}}h^{z\bar{z}}}{h^{\bar{z}\bar{z}}}$ koje ponovno uvrštavamo u 5). Nakon nekoliko jednostavnih manipulacija dolazimo do rezultata:

$$h^{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h_{zz} - h_{zz}\partial_r h^{\bar{z}\bar{z}} = 0. \tag{4.35}$$

Zbrojimo sada drugu i treću jednadžbu u (4.32). Time dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&h_{zz}h^{z\bar{z}} + h_{z\bar{z}}h^{\bar{z}\bar{z}} + h_{z\bar{z}}h^{zz} + h_{\bar{z}\bar{z}}h^{z\bar{z}} = 0, \\
&\to \frac{h_{zz} + h_{\bar{z}\bar{z}}}{h^{zz} + h^{\bar{z}\bar{z}}} = -\frac{h_{z\bar{z}}}{h^{z\bar{z}}}, \\
&\to \partial_r \left(\frac{h_{zz} + h_{\bar{z}\bar{z}}}{h^{zz} + h^{\bar{z}\bar{z}}} \right) = \partial_r \left(\frac{-h_{z\bar{z}}}{h^{z\bar{z}}} \right), \\
&\to \partial_r \left(\frac{h_{zz} + h_{\bar{z}\bar{z}}}{h^{zz} + h^{\bar{z}\bar{z}}} \right) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

U posljednjem koraku smo iskoristili izraz $\partial_r \left(\frac{-h_{z\bar{z}}}{h^{z\bar{z}}} \right) = 0$ koji smo dokazali ranije. Nakon raspisa, zadnja jednadžba u (4.36) se svodi na:

$$
\begin{aligned}
&(h^{zz}\partial_r h_{zz} - h_{zz}\partial_r h^{zz}) + (h^{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h_{\bar{z}\bar{z}} - h_{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h^{\bar{z}\bar{z}}) \\
&+ (h^{zz}\partial_r h_{\bar{z}\bar{z}} - h_{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h^{zz}) + (h^{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h_{zz} - h_{zz}\partial_r h^{\bar{z}\bar{z}}) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Jednakosti (4.34) i (4.35) impliciraju da posljednje dvije zagrade prethodnog izraza iščezavaju. Promotrimo konačno iduće dvije jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&h^{zz}\partial_r h_{zz} + h^{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h_{\bar{z}\bar{z}} = h_{zz}\partial_r h^{zz} + h_{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h^{\bar{z}\bar{z}}, \\
&2h^{z\bar{z}}\partial_r h_{z\bar{z}} = 2h_{z\bar{z}}\partial_r h^{z\bar{z}}.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Prvi izraz je samo jednadžba (4.37) napisana na drugačiji način, dok je drugi ekvivalentan relaciji (4.33) (nakon množenja s faktorom 2). Zbrajanjem jednadžbi slijedi:

$$
h^{zz}\partial_r h_{zz} + 2h^{z\bar{z}}\partial_r h_{z\bar{z}} + h^{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h_{\bar{z}\bar{z}} = h_{zz}\partial_r h^{zz} + 2h_{z\bar{z}}\partial_r h^{z\bar{z}} + h_{\bar{z}\bar{z}}\partial_r h^{\bar{z}\bar{z}},
\tag{4.39}
$$

što prepoznajemo kao raspisanu sumu izraza:

$$
h^{AB}\partial_r h_{AB} = h_{AB}\partial_r h^{AB}.
\tag{4.40}
$$

S druge strane očito vrijedi:

$$\begin{aligned}
h^{AB}\partial_r h_{AB} &= \partial_r(h^{AB}h_{AB}) - h_{AB}\partial_r h^{AB} \\
&= \partial_r \delta^A{}_A - h_{AB}\partial_r h^{AB} \\
&= \partial_r 2 - h_{AB}\partial_r h^{AB} \\
&= -h_{AB}\partial_r h^{AB}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Prema tome, izrazi (4.40) i (4.41) mogu istovremeno biti zadovoljeni jedino ukoliko je zadovoljen prvi uvjet u (4.30). Drugi uvjet se dokazuje ekvivalentno koristeći $h^{AC}h_{CB} = \delta^A{}_B$ i $\partial_u det h_{AB} = 0$. Time smo potvrdili valjanost dvaju identiteta u (4.30).

4.2 *Einsteinove jednadžbe*

Cilj ovog podpoglavlja je pronaći relevantne Einsteinove jednadžbe uz metriku danu izrazom (4.25). Prema tome, pretpostavimo da je dinamika prostor-vremena diktirana Einsteinovim jednadžbama polja (u $c = 1$ jedinicama):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{4.42}$$

gdje je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, G Newtonova gravitacijska konstanta i $T_{\mu\nu}$ tenzor energije-impulsa. Kako bismo pojednostavili jednadžbe, radit ćemo u $c = G = 1$ jedinicama te ćemo na kraju po potrebi uvesti Newtonovu gravitacijsku konstantu pomoću redefinicije $T_{\mu\nu} \to GT_{\mu\nu}$. Einsteinov tenzor je definiran kao:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \tag{4.43}$$

Definirajmo sada tenzor $E_{\mu\nu}$ na idući način:

$$E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{4.44}$$

Tada, ukoliko su zadovoljene Einsteinove jednadžbe, mora vrijediti:

$$E_{\mu\nu} = 0. \tag{4.45}$$

Kako su $G_{\mu\nu}$ i $T_{\mu\nu}$ simetrični tenzori, simetričan je i $E_{\mu\nu}$ te vrijedi: $E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}$, $E^{\mu\nu} = E^{\nu\mu}$ i $E^{\mu}{}_{\nu} = E_{\nu}{}^{\mu}$. Ukoliko je zadovoljena jednadžba (4.45), tada su automatski zadovoljene i:

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu} &= 0, \\ E^{\mu}{}_{\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Prva od ovih jednadžbi slijedi iz izraza $E^{\rho\sigma} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} E_{\mu\nu}$ gdje suma ide po μ i ν, ali kako je jednakost (4.45) zadovoljena za svaku komponentu tenzora $E_{\mu\nu}$ mora vrijediti i $E^{\rho\sigma} = 0$. Druga jednadžba slijedi ekvivalentno iz $E^{\rho}{}_{\nu} = g^{\rho\mu} E_{\mu\nu}$. Dakle želimo da iščezavaju sve komponente tenzora $E_{\mu\nu}$, $E^{\mu\nu}$ i $E^{\mu}{}_{\nu}$. Nadalje, pretpostavljamo da je tenzor energije-impulsa očuvan:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \tag{4.47}$$

Uzimajući kovarijantnu derivaciju Einsteinove jednadžbe vidimo da treba vrijediti i:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0. \tag{4.48}$$

Prethodni izraz je poznat kao Bianchijev identitet. Međutim, ovaj identitet slijedi direktno iz svojstava Riemannovog tenzora te vrijedi neovisno o očuvanju tenzora energije-impulsa i Einsteinovim jednadžbama [5]. Rješenja za koja su Einsteinove jednadžbe valjane tek trebamo pronaći. Ukoliko bi izraz (4.48) bio posljedica Einsteinovih jednadžbi, tada kao polazišnu točku koristimo jednadžbu koja je bazirana na nečemu što tek trebamo provjeriti. Time računi postaju besmisleni. Na sreću, Bianchijev identitet je zadovoljen trivijalno i možemo ga koristiti bez Einsteinovih jednadžbi kao oslonca. Jedina pretpostavka koju namećemo jest očuvanje tenzora energije-impulsa. Tada, koristeći Bianchijev identitet vidimo da vrijedi:

$$\nabla_{\mu} E^{\mu}{}_{\nu} = 0, \tag{4.49}$$

pri čemu smo iskoristili kompatibilnost metrike: $\nabla_\mu E^\mu{}_\nu = \nabla_\mu g_{\nu\sigma} E^{\mu\sigma} = g_{\nu\sigma}\nabla_\mu E^{\mu\sigma} = 0$. Raspisujemo (4.49):

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu E^\mu{}_\nu &= \partial_\mu E^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} E^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} E^\mu{}_\lambda \\
&= \partial_\mu E^\mu{}_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\lambda \sqrt{-g}\right) E^\lambda{}_\nu - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) E^\mu{}_\lambda \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}E^\mu{}_\nu\right) - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho}) E^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu}) E^\mu{}_\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\rho g_{\mu\nu}) E^\mu{}_\lambda.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

U drugoj jednakosti smo iskoristili definiciju Christoffelovih simbola i njihovo specijalno svojstvo: $\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{|detg_{\mu\nu}|}}\left(\partial_\lambda \sqrt{|detg_{\mu\nu}|}\right)$ [5]. Prvi član trećeg reda je ekvivalentan zbroju prvih dvaju članova u drugom redu što slijedi nakon primjene Leibnitzovog pravila i preimenovanja slijepih indeksa. Za metrike s Lorentzovim potpisom obično vrijedi jednakost $|detg_{\mu\nu}| = -g$, gdje je g negativno definitna determinanta metrike. Ovo bi bio slučaj ukoliko bismo radili s angularnim koordinatama $x^A = (\Theta, \phi)$. Uz odabir $x^A = (z, \bar{z})$, identitet nažalost ne vrijedi. Mi ćemo ipak zadržati konvencionalni minus predznak pod korjenom, ali ćemo redefinirati veličinu g. Uočimo da su 2. i 4. član posljednje jednakosti u (4.50) isti do na predznak. Isto se može pokazati ako dignemo indeks na $E^\mu{}_\lambda$ u četvrtom članu pomoću $g^{\lambda\rho}$, preimenujemo slijepe indekse ($\mu \leftrightarrow \rho$) i iskoristimo simetričnost tenzora. Ovi članovi se dakle pokrate. Napišimo još 3. član na drugačiji način:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu}) E^\mu{}_\lambda &= -\frac{1}{2}\left(\partial_\nu(g^{\lambda\rho} g_{\rho\mu}) - g_{\rho\mu}\partial_\nu(g^{\lambda\rho})\right) E^\mu{}_\lambda \\
&= -\frac{1}{2}\left(\partial_\nu(\delta^\lambda{}_\mu) - g_{\rho\mu}\partial_\nu(g^{\lambda\rho})\right) E^\mu{}_\lambda \\
&= \frac{1}{2}\partial_\nu(g^{\lambda\rho}) E_{\rho\lambda} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\nu(g^{\mu\rho}) E_{\mu\rho}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Izraz (4.49) tada implicira da je zadovoljeno:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}E^\mu{}_\nu\right) + \frac{1}{2}\partial_\nu(g^{\mu\rho}) E_{\mu\rho} = 0. \tag{4.52}$$

U nastavku će nam trebati determinanta metrike $g_{\mu\nu}$, pa istu idemo i izračunati:

$$det g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} g_{uu} & g_{ur} & g_{uz} & g_{u\bar{z}} \\ g_{ur} & 0 & 0 & 0 \\ g_{uz} & 0 & g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{u\bar{z}} & 0 & g_{z\bar{z}} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{vmatrix} = -g_{ur} \begin{vmatrix} g_{ur} & 0 & 0 \\ g_{uz} & g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{u\bar{z}} & g_{z\bar{z}} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{vmatrix} = -g_{ur} g_{ur} \begin{vmatrix} g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{z\bar{z}} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{vmatrix} \tag{4.53}$$
$$= (-)(-)e^{2\beta}(-)e^{2\beta} det g_{AB} = -e^{4\beta} det(r^2 h_{AB}) = -e^{4\beta} r^4 det h_{AB}.$$

Na prvi pogled, determinanta metrike izgleda kao negativna veličina. No treba se prisjetiti da je uz odabir $x^A = (z, \bar{z})$ determinanta metrike h_{AB} dana izrazom (4.12), odnosno negativna je. Iz tog razloga ćemo veličinu g definirati kao:

$$g = -e^{4\beta} r^4 |det h_{AB}|. \tag{4.54}$$

Tada vrijedi:

$$\sqrt{-g} = r^2 e^{2\beta} \sqrt{|det h_{AB}|}. \tag{4.55}$$

Spomenimo i da ćemo od sada nadalje koristiti zapis: $|det h_{AB}| = h$. Pretpostavimo sada da su zadovoljene iduće dvije jednadžbe [11]:

$$E^u{}_\nu = 0 \tag{4.56}$$

i

$$E_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} g^{CD} E_{CD} = 0. \tag{4.57}$$

Jednadžbe (4.56) i (4.57) ćemo respektivno zvati prvom i drugom glavnom jednadžbom. Ukoliko vrijede Einsteinove jednadžbe, ove jednakosti zbilja jesu zadovoljene. No pokazat ćemo da valjanost relacija (4.56) i (4.57) implicira i da su sve sve ostale komponente tenzora $E_{\mu\nu}$, $E^{\mu\nu}$ i $E^\mu{}_\nu$ nužno jednake nuli. Osim toga, kao što ćemo vidjeti, ove jednadžbe će nam biti dostatne za nalazak koeficijenata metrike na hiperpovršinama konstantnog retardiranog vremena. Prema prvoj glavnoj jednadžbi vrijedi: $E^u{}_u = E^u{}_r = E^u{}_z = E^u{}_{\bar{z}} = E_u{}^u = E_r{}^u = E_z{}^u = E_{\bar{z}}{}^u = 0$. Primjetimo dalje da možemo pisati: $E^{u\mu} = g^{\mu\nu} E^u{}_\nu = 0$. Dakle sve moguće kombinacije s indeksom u gore iščezavaju, to jest, imamo dodatno: $E^{uu} = E^{ur} = E^{ru} = E^{uz} = E^{zu} = E^{u\bar{z}} = E^{\bar{z}u} = 0$. Koristeći metriku, saznajemo da je nužno zadovoljeno i: $E_r{}^\mu = g_{r\sigma} E^{\sigma\mu} = g_{ru} E^{u\mu} = 0$.

Ekvivalentno (koristeći prethodno dokazanu relaciju) slijedi: $E_{r\mu} = g_{\mu\sigma}E_r{}^\sigma = 0$. Prema tome, sve moguće kombinacije s indeksom r dolje su također jednake nuli ($E_r{}^u = E_r{}^r = E_r{}^z = E_r{}^{\bar{z}} = E^u{}_r = E^r{}_r = E^z{}_r = E^{\bar{z}}{}_r = E_{ru} = E_{ur} = E_{rr} = E_{rz} = E_{zr} = E_{r\bar{z}} = E_{\bar{z}r} = 0$). Iskoristimo sada izraz (4.52) koji raspisujemo za $\nu = r$ komponentu. Pritom znamo da prvi član isčezava budući da smo već pokazali kako vrijedi $E^\mu{}_r = 0$. Raspisom dobivamo:

$$
\begin{aligned}
0 =&(\partial_r g^{\mu\rho})E_{\mu\rho} \\
=&(\partial_r g^{uu})E_{uu} + (\partial_r g^{ur})E_{ur} + (\partial_r g^{uA})E_{uA} + (\partial_r g^{ru})E_{ru} \\
&+ (\partial_r g^{rr})E_{rr} + (\partial_r g^{rA})E_{rA} + (\partial_r g^{Au})E_{Au} + (\partial_r g^{Ar})E_{Ar} + (\partial_r g^{AB})E_{AB}.
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

U prethodnom izrazu (bilo zbog činjenice da isčezava komponenta inverzne metrike ili komponenta tenzora $E_{\mu\nu}$) isčezavaju svi članovi osim posljednjeg. U daljnjem raspisu koristimo drugu glavnu jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
0 =&(\partial_r g^{AB})E_{AB} \\
=&\left(\partial_r\left(\frac{1}{r^2}h^{AB}\right)\right)E_{AB} \\
=&\left(\frac{-2}{r^3}h^{AB} + \frac{1}{r^2}(\partial_r h^{AB})\right)E_{AB} \\
=&\frac{-2}{r}g^{AB}E_{AB} + \frac{1}{r^2}(\partial_r h^{AB})\frac{1}{2}g_{AB}g^{CD}E_{CD} \\
=&\frac{-2}{r}g^{AB}E_{AB} + \frac{1}{2}h_{AB}(\partial_r h^{AB})g^{CD}E_{CD} \\
=&\frac{-2}{r}g^{AB}E_{AB},
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili prvi identitet u (4.30). Kako prethodna jednadžba mora vrijediti za $\forall r$, zaključujemo da je zadovoljeno:

$$g^{AB}E_{AB} = 0. \tag{4.60}$$

Tada prema drugoj glavnoj jednadžbi mora vrijediti i:

$$E_{AB} = 0. \tag{4.61}$$

Promotrimo sada idući raspis:

$$
\begin{aligned}
E^{AB} =& g^{A\sigma} g^{B\rho} E_{\sigma\rho} \\
=& g^{Au} g^{Bu} E_{uu} + g^{Au} g^{Br} E_{ur} + g^{Au} g^{BC} E_{uC} + g^{Ar} g^{Bu} E_{ru} + g^{Ar} g^{Br} E_{rr} + \\
&+ g^{Ar} g^{BC} E_{rC} + g^{AC} g^{Bu} E_{Cu} + g^{AC} g^{Br} E_{Cr} + g^{AC} g^{BD} E_{CD}.
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Budući da vrijedi: $g^{Au} = E_{rr} = E_{rA} = E_{AB} = 0$, mora biti zadovoljeno $E^{AB} = 0$. Na ekvivalentan način nalazimo: ${E^A}_B = g^{A\sigma} E_{\sigma B} = g^{Au} E_{uB} + g^{Ar} E_{rB} + g^{AC} E_{CB} = 0$. Prema tome, znamo da iščezavaju iduće komponente: $E^{zz} = E^{z\bar{z}} = E^{\bar{z}z} = E^{\bar{z}\bar{z}} = E_{zz} = E_{z\bar{z}} = E_{\bar{z}z} = E_{\bar{z}\bar{z}} = {E^z}_z = {E^z}_{\bar{z}} = {E^{\bar{z}}}_z = {E^{\bar{z}}}_{\bar{z}} = {E_z}^z = {E_z}^{\bar{z}} = {E_{\bar{z}}}^z = {E_{\bar{z}}}^{\bar{z}}$. U idućem koraku raspisujemo (4.52) za $\nu = A$ komponentu, gdje sada znamo da drugi član trivijalno iščezava. Također, na temelju trenutnih saznanja, znamo da u sumi po μ preživi samo $\mu = r$ komponenta.

$$
\begin{aligned}
0 =& \partial_r(\sqrt{-g} {E^r}_A) \\
=& \partial_r(r^2 e^{2\beta} \sqrt{h} {E^r}_A) \\
=& \sqrt{h} \partial_r(r^2 e^{2\beta} {E^r}_A) + r^2 e^{2\beta} {E^r}_A \partial_r \sqrt{h} \\
=& \sqrt{h} \partial_r(r^2 e^{2\beta} {E^r}_A).
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

U posljednjoj jednakosti prethodnog računa smo iskoristili identitet (4.22). Izraz (4.63) možemo konačno podijeliti sa determinantom tenzora h_{AB} (budući da ista ne može iščezavati), čime kao rezultat dobivamo:

$$
\partial_r(r^2 e^{2\beta} {E^r}_A) = 0. \tag{4.64}
$$

Jednadžbu (4.64) ćemo zvati prvim dodatnim uvjetom. Ovaj izraz treba vrijediti za $\forall r$, pa znamo da je Einsteinova jednadžba ${E^r}_A = 0$ zadovoljena automatski ako je zadovoljena za bilo koju vrijednost radijalne koordinate (primjerice kada $r \to \infty$). U ovom radu ćemo se uglavnom baviti analizom simetrija vezanih uz translacije, međutim, u kratkom osvrtu kasnije vidjet ćemo da postoji dodatna grupa simetrija koja opisuje tzv. superrotacije. Za analitički opis istih, potrebno je koristiti upravo prvi dodatni uvjet koji predstavlja jednadžbu evolucije aspekta angularnog momenta. U svakom slučaju, provedena analiza implicira iduće: ${E^r}_z = {E^r}_{\bar{z}} = {E_z}^r = {E_{\bar{z}}}^r = 0$. Tenzor ${E^A}_u$ dobivamo preko raspisa: ${E^A}_u = g^{A\mu} g_{u\nu} {E_\mu}^\nu$. Ponovno, sumirajući po μ i ν

lako se je uvjeriti da su svi članovi u sumi jednaki nuli. Time dobivamo: $E^z{}_u = E^{\bar{z}}{}_u = E_u{}^z = E_u{}^{\bar{z}} = 0$. Preostaje nam vidjeti kakve implikacije daje $\nu = u$ komponenta izraza (4.52). Drugi član standardno iščezava, dok u sumi preostaje samo $\mu = r$ faktor. Po provedbi računa sličnog poput (4.63), kao rezultat slijedi:

$$\partial_r(r^2 e^{2\beta} E^r{}_u) = 0. \tag{4.65}$$

Ovu jednadžbu zovemo drugim dodatnim uvjetom te ista predstavlja jednadžbu evolucije masenog aspekta koji ćemo uvesti kasnije. Iako prva i druga glavna jednadžba daju rješenja za koeficijente metrike na hiperpovršinama konstantnog retardiranog vremena, drugi dodatni uvjet će nam biti od krucijalnog značaja za analizu supertranslacija. Ostavimo raspravu o simetrijama za naredna poglavlja i primjetimo da (4.65) treba vrijediti za $\forall r$. Tada je očito zadovoljeno: $E^r{}_u = E_u{}^r$. Na samom kraju ove analize, uočimo da vrijede jednadžbe: $E_{uA} = g_{A\sigma} E_u{}^\sigma, \quad E_{uu} = g_{u\sigma} E^\sigma{}_u, \quad E^{rA} = g^{r\sigma} E_\sigma{}^A, \quad E^{rr} = g_{r\sigma} E_\sigma{}^r$. Isto kao ranije, raspisom se može pokazati (uz poziv na relevantne $E_\mu{}^\nu = 0$ jednadžbe koje smo pokazali da vrijede) da su svi faktori u sumama iščezavajući. Stoga je zadovoljeno: $E_{uz} = E_{u\bar{z}} = E_{zu} = E_{\bar{z}u} = E_{uu} = E^{rz} = E^{r\bar{z}} = E^{zr} = E^{\bar{z}u} = E^{rr} = 0$. Time smo pokazali da ukoliko su zadovoljena 1. i 2. glavna jednadžba (uz pretpostavku o očuvanju tenzora energije-impulsa i pozivom na Bianchijev identitet), sve moguće komponente tenzora $E^{\mu\nu}$, $E^\mu{}_\nu$ i $E_{\mu\nu}$ iščezavaju.

Idući logičan korak jest raspisati 1. i 2. glavnu jednadžbu preko koeficijenata metrike. Time ćemo dobiti sustav diferencijalnih jednadžbi za funkcije V, β, U^z, $U^{\bar{z}}$ te za komponente konformne metrike h_{AB}. Rješenja jednadžbi ćemo tražiti na $\mathcal{I}^+$ (gdje isključujemo tenzor energije-impulsa), ali raspis 1. i 2. glavne jednadžbe provodimo uz proizvoljan $T^{\mu\nu}$ tako da vrijede svugdje na M uz izuzetak ishodišta. Tek na kraju ćemo provesti razvoj u red po $\frac{1}{r}$, nametnuti rubne uvjete i provesti integraciju. Pritom ćemo u spomenutom razvoju zadržati samo dominante članove budući da na $\mathcal{I}^+$ koordinata r teži ka beskonačnoj vrijednosti. Einsteinove jednadžbe raspisujemo koristeći standardnu proceduru; prvo tražimo Christoffelove simbole, zatim preko Riemannovog tenzora nalazimo komponente Riccijevog tenzora. Ovi računi su provedeni u dodacima A i B. Prije nego nastavimo, zaustavimo se ipak na trenutak kako bismo ponovno specificirali određene konvencije. Već smo se susreli s kovarijantnom derivacijom ∇_μ. Ista je definirana s obzirom na metriku $g_{\mu\nu}$ na M te vrijedi:

$$\nabla^{\mu} = g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}. \tag{4.66}$$

Ukoliko imamo skalarnu funkciju $f(x)$, njena kovarijantna derivacija se svodi na parcijalnu derivaciju:

$$\nabla_{\mu}f(x) = \partial_{\mu}f(x). \tag{4.67}$$

Navodimo i djelovanje kovarijantne derivacije ∇_{μ} na četverodimenzionalan vektor V^{μ} na M:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}V^{\lambda}, \tag{4.68}$$

gdje je $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ Christoffelov simbol konstruiran s obzirom na metriku $g_{\mu\nu}$ definiran relacijom:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \tag{4.69}$$

Dakako, često će nas zanimati i djelovanje kovarijantne derivacije na proizvoljan tenzor:

$$\begin{aligned}\nabla_{\sigma}T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} =& \partial_{\sigma}T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} \\ &+ \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda}T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} + \Gamma^{\mu_2}_{\sigma\lambda}T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} + \ldots \\ &- \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1}T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_l} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_2}T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_l} - \ldots \ .\end{aligned} \tag{4.70}$$

Ranije smo uveli dvodimenzionalnu podmnogostrukost σ sa metrikom g_{AB}. Definirajmo i kovarijantnu derivaciju na σ preko relacije:

$$\tilde{\nabla}^{A} = g^{AB}\tilde{\nabla}_{B}. \tag{4.71}$$

Djelovanje na skalarnu funkciju zamjenjujemo parcijalnom derivacijom:

$$\tilde{\nabla}_{A}f(x) = \partial_{A}f(x), \tag{4.72}$$

dok je kovarijantna derivacija dvodimenzionalnog vektora V^{A} na σ:

$$\tilde{\nabla}_A V^B = \partial_A V^B + \tilde{\Gamma}^B_{AC} V^C. \tag{4.73}$$

Pritom smo uveli Christoffelove simbole konstruirane pomoću metrike g_{AB}:

$$\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \frac{1}{2} g^{AE} (\partial_B g_{CE} + \partial_C g_{EB} - \partial_E g_{BC}). \tag{4.74}$$

Ovakve Christoffelove simbole ne smijemo miješati sa "angularnim" Christoffelovim simbolima na M za koje vrijedi:

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2} g^{A\rho} (\partial_B g_{C\rho} + \partial_C g_{\rho B} - \partial_\rho g_{BC}). \tag{4.75}$$

Djelovanje $\tilde{\nabla}_A$ na općenite tenzore na σ je dano izrazom koji je ekvivalentan standardnoj formuli (4.70) uz prikladne zamjene indeksa $\mu \to A$ i redefiniciju konekcije.

Konačno, uvest ćemo i kovarijantnu derivaciju s obzirom na konformnu metriku h_{AB} na σ:

$$D^A = h^{AB} D_B, \tag{4.76}$$

tako da vrijedi:

$$D_A f(x) = \partial_A f(x). \tag{4.77}$$

U računima provedenim u dodacima A i B smo u velikoj mjeri kovarijantnu derivaciju skalarnih funkcija ostavili u obliku $\nabla_\mu f(x)$, ali svakako treba upamtiti da je zadovoljeno:

$$\nabla_A f(x) = \tilde{\nabla}_A f(x) = D_A f(x) = \partial_A f(x). \tag{4.78}$$

Promotrimo djelovanje D_A na vektor V^A na σ:

$$D_A V^B = \partial_A V^B + \breve{\Gamma}^B_{AC} V^C. \tag{4.79}$$

U prethodnoj relaciji, $\breve{\Gamma}^B_{AC}$ predstavlja koeficijent konekcije konstruiran s obzirom na h_{AB} te je definiran kao:

$$\breve{\Gamma}^A_{BC} = \frac{1}{2} h^{AE} (\partial_B h_{CE} + \partial_C h_{EB} - \partial_E h_{BC}). \tag{4.80}$$

Kako bismo našli vezu među kovarijantnim derivacijama s obzirom na g_{AB} i h_{AB}, raspisujemo $\tilde{\Gamma}^A_{BC}$ preko h_{AB}:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^A_{BC} =& \frac{1}{2} g^{AE}(\partial_B g_{CE} + \partial_C g_{EB} - \partial_E g_{BC}) \\
=& \frac{1}{2}\frac{1}{r^2} h^{AE}(\partial_B(r^2 h_{CE}) + \partial_C(r^2 h_{EB}) - \partial_E(r^2 h_{BC})) \\
=& \frac{1}{2} h^{AE}(\partial_B h_{CE} + \partial_C h_{EB} - \partial_E h_{BC}) \\
=& \breve{\Gamma}^A_{BC}.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

U pretposljednjoj jednakosti smo iskoristili Leibnitzovo pravilo i činjenicu da vrijedi $\partial_A r^2 = 0$ (općenitije je zadovoljeno $D_A f(u,r) = 0$). Kako su Christoffelovi simboli jednaki, djelovanje kovarijantnih derivacija $\tilde{\nabla}_A$ i D_A na tenzore na σ je identično i dano formulom:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_A T^{B_1 B_2 \dots B_k}{}_{C_1 C_2 \dots C_l} =& D_A T^{B_1 B_2 \dots B_k}{}_{C_1 C_2 \dots C_l} \\
=& \partial_A T^{B_1 B_2 \dots B_k}{}_{C_1 C_2 \dots C_l} \\
&+ \breve{\Gamma}^{B_1}_{AD} T^{D B_2 \dots B_k}{}_{C_1 C_2 \dots C_l} + \breve{\Gamma}^{B_2}_{AD} T^{B_1 D \dots B_k}{}_{C_1 C_2 \dots C_l} + \dots \\
&- \breve{\Gamma}^{D}_{AC_1} T^{B_1 B_2 \dots B_k}{}_{D C_2 \dots C_l} - \breve{\Gamma}^{D}_{AC_2} T^{B_1 B_2 \dots B_k}{}_{C_1 D \dots C_l} - \dots \ .
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Napomenimo i da je svaka od definiranih konekcija kompatibilna s metrikom. Pritom se misli da kovarijantna derivacija metrike (kao i inverzne metrike) s obzirom na koju je definirana iščezava. Također, svi Christoffelovi simboli su simetrični (nema torzije). Nadalje, trebat će nam i veza između $\tilde{\nabla}^A$ i D^A. Istu možemo naći ukoliko razmotrimo djelovanje $\tilde{\nabla}^A$ na dvodimenzionalni vektor na σ:

$$\tilde{\nabla}^A V^B = g^{AC}\tilde{\nabla}_C V^B = g^{AC} D_C V^B = \frac{1}{r^2} h^{AC} D_C V^B = \frac{1}{r^2} D^A V^{B.} \tag{4.83}$$

Prethodni račun implicira da vrijedi:

$$\tilde{\nabla}^A = r^{-2} D^A. \tag{4.84}$$

U kasnijem istraživanju trebat će nam i volumni elementi koji su definirani preko Levi-Civita tenzora. Na M možemo pisati [5]:

$$\epsilon = \sqrt{-g} d^4 x, \tag{4.85}$$

gdje je faktor d^4x formalno dan vanjskim produktom ($d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$), ali integracija se provodi standardnim viševarijabilnim diferencijalnim računom. Levi-Civita tenzor (u 4 dimenzije) u svojoj punoj formi ima oblik $\epsilon = \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} dx^{\mu_1} \otimes dx^{\mu_2} \otimes dx^{\mu_3} \otimes dx^{\mu_4}$. Na ekvivalentan način zapisujemo i volumni element na σ:

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{|detg_{AB}|} d^2y. \tag{4.86}$$

Pritom znamo da vrijedi $\sqrt{|detg_{AB}|} = r^2\sqrt{h}$ te u dodatcima često koristimo skraćenicu:

$$\sqrt{f} = r^2\sqrt{h}. \tag{4.87}$$

Na kraju, primjetimo da smo funkcije U^z i $U^{\bar{z}}$ pri zapisu metrike (4.25) udružili u kontravarijantni 2-vektor $U^A = (U^z, U^{\bar{z}})$. Pripadni kovarijantni vektor (1-formu) ćemo definirati s obzirom na metriku g_{AB} tako da je zadovoljeno:

$$U_A = g_{AB} U^B. \tag{4.88}$$

Uz uvedene pojmove i konvencije, spremni smo raspisati Einsteinove jednadžbe. U nastavku se pozivamo na rezultate izvedene u dodacima A i B. Razmotrimo za početak 1. glavnu jednadžbu (4.56) uz $\nu = r$. Ista se može raspisati na idući način:

$$\begin{aligned} E^u{}_r =& 0 \\ =& R^u{}_r - \frac{1}{2} R \delta^u{}_r - 8\pi T^u{}_r \\ =& g^{u\sigma} R_{\sigma r} - 8\pi g^{u\sigma} T_{\sigma r}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Kako u sumaciji po σ preživi samo $\sigma = r$ komponenta, jednadžba se svodi na izraz:

$$R_{rr} = 8\pi T_{rr}, \tag{4.90}$$

odnosno potrebno je izračunati R_{rr} komponentu Riccijevog tenzora. Ista je dana izrazom (B.5), no ova jednadžba je zapisana u kompaktnoj formi u kojoj nisu uvrštene eksplicitne vrijednosti komponenti metrike. Uvrštavanjem istih slijedi raspis:

$$
\begin{aligned}
0 =& -\partial_r\partial_r\left(lnr^2 + ln\sqrt{h}\right) + \left(\partial_r lne^{2\beta}\right)\partial_r\left(lnr^2 + ln\sqrt{h}\right) \\
& -\frac{1}{4r^4}h^{AC}h^{BD}\left[\partial_r\left(r^2 h_{CB}\right)\right]\left[\partial_r\left(r^2 h_{DA}\right)\right] - 8\pi T_{rr} \\
=& \frac{2}{r^2} + \frac{4}{r}\partial_r\beta - \frac{1}{4}h^{AC}h^{BD}(\partial_r h_{CB})(\partial_r h_{AD}) - \frac{1}{2r}h^{AC}h_{DA}h^{BD}(\partial_r h_{CB}) \\
& -\frac{1}{2r}h^{AC}h_{CB}h^{BD}(\partial_r h_{DA}) - \frac{1}{r^2}h^{AC}h_{CB}h^{BD}h_{DA} - 8\pi T_{rr} \\
=& \frac{2}{r^2} + \frac{4}{r}\partial_r\beta - \frac{1}{4}h^{AC}h^{BD}(\partial_r h_{CD})(\partial_r h_{AB}) - \frac{1}{2r}\delta^C{}_D h^{BD}\partial_r h_{CB} \\
& -\frac{1}{2r}\delta^A{}_B h^{BD}\partial_r h_{DA} - \frac{1}{r^2}\delta^A{}_B\delta^B{}_A - 8\pi T_{rr}.
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

U posljednjoj jednakosti smo proveli sumaciju po slobodnim indeksima konformne metrike te smo napravili preimenovanje $B \leftrightarrow D$ u trećem članu. Primjetimo da suma po Kroneckerovim simbolima u pretposljednjem faktoru daje vrijednost 2, čime se ovaj član pokrati s prvim. Također, 4. i 5. član isčezavaju zbog identiteta (4.30). Nakon množenja s $\frac{r}{4}$, jednadžba postaje:

$$
\partial_r\beta = \frac{r}{16}h^{AC}h^{BD}\left(\partial_r h_{AB}\right)\left(\partial_r h_{CD}\right) + 2\pi T_{rr}. \tag{4.92}
$$

Prethodni izraz predstavlja radijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda koja određuje vrijednost koeficijenta β duž svjetlosnih trajektorija. Prisjetimo se da se svjetlosne trajektorije nalaze na hiperpovršinama konstantnog retardiranog vremena duž kojih angularne koordinate ne variraju, a jednakost (4.92) ne uključuje derivacije po u, odnosno x^A. Uz poznate komponente konformne metrike h_{AB} te specifikaciju rubnih uvjeta, ova jednadžba jednoznačno određuje β duž spomenutih trajektorija.

Okrenimo se sada računu 1. glavne jednadžbe (4.56) za $\nu = A$ komponente. Dakako, indeks A može poprimiti dvije vrijednosti čime efektivno razmatramo dvije jednadžbe. Međutim, iste su ekvivalentne pa se nećemo zamarati njihovim razdvajanjem. Raspisom slijedi:

$$
\begin{aligned}
0 =& E^u{}_A \\
=& R^u{}_A - \frac{1}{2}R\delta^u{}_A - 8\pi T^u{}_A \\
=& g^{u\mu}R_{\mu A} - 8\pi g^{u\mu}T_{\mu A} \\
=& g^{ur}R_{rA} - 8\pi g^{ur}T_{rA}.
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

Odnosno:

$$R_{rA} = 8\pi T_{rA}. \tag{4.94}$$

Lijeva strana prethodnog izraza je dana u (B.20). Uvrštavanjem eksplicitnih vrijednosti komponenti tenzora metrike, (4.94) poprima oblik:

$$\begin{aligned}0 =& -\frac{1}{2r^2\sqrt{h}}\partial_r\left(-r^4\sqrt{h}e^{-2\beta}h_{AB}\partial_r U^B\right) - \frac{r^2\sqrt{h}}{2}\partial_r\left(\frac{D_A\left(lne^{2\beta}\right)}{r^2\sqrt{h}}\right)\\ &- D_A\partial_r\left(ln(r^2\sqrt{h})\right) + \frac{1}{2r^2}h^{CF}D_F\left(\partial_r(r^2 h_{AC})\right) - 8\pi T_{rA}.\end{aligned} \tag{4.95}$$

Koristeći izraz (4.22) i kompatibilnost konformne metrike h_{AB} s obzirom na kovarijantnu derivaciju D_A, Einsteinova jednadžba (4.95) se (nakon množenja s $2r^2$) vrlo brzo simplificira u iduću formu:

$$\partial_r\left[r^4 e^{-2\beta}h_{AB}(\partial_r U^B)\right] = 2r^4\partial_r\left(\frac{1}{r^2}D_A\beta\right) - r^2 h^{EF}D_E(\partial_r h_{AF}) + 16\pi r^2 T_{rA}. \tag{4.96}$$

Izraz (4.96) predstavlja dvije radijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda koje specificiraju funkcije U^z i $U^{\bar{z}}$. Funkcija β je određena u (4.92) pa za nalazak rješenja koeficijenata U^A trebamo poznavati komponente metrike h_{AB} i rubne uvjete.

Što se tiče prve glavne jednadžbe (4.56), preostalo nam je još razmotriti $\nu = u$ komponentu. Raspisujemo istu:

$$\begin{aligned}0 =& R^u{}_u - \frac{1}{2}R\delta^u{}_u - 8\pi T^u\\ =& g^{u\sigma}R_{\sigma u} - \frac{1}{2}R - 8\pi g^{u\sigma}T_{\sigma u}\\ =& g^{ur}R_{ru} - \frac{1}{2}R - 8\pi g^{ur}T_{ru}.\end{aligned} \tag{4.97}$$

Nadalje, Riccijev skalar možemo dobiti kontrakcijom Riccijevog tenzora:

$$\begin{aligned}R =& R^\mu{}_\mu\\ =& R^u{}_u + R^r{}_r + R^A{}_A\\ =& g^{u\sigma}R_{\sigma u} + g^{r\sigma}R_{\sigma r} + g^{A\sigma}R_{\sigma A}\\ =& 2g^{ur}R_{ru} + g^{rr}R_{rr} + 2g^{rA}R_{rA} + g^{AB}R_{AB},\end{aligned} \tag{4.98}$$

što znači da traženu Einsteinovu jednadžbu možemo pisati u formi:

$$\frac{1}{2}g^{rr}R_{rr} + g^{rA}R_{rA} + \frac{1}{2}g^{AB}R_{AB} + 8\pi g^{ur}T_{ur} = 0. \tag{4.99}$$

Koristeći izraze (4.90) i (4.94), faktore R_{rr} i R_{rA} možemo izraziti pomoću komponenti tenzora energije-impulsa:

$$8\pi\left[g^{rr}T_{rr} + 2g^{rA}T_{rA} + 2g^{ur}T_{ur}\right] = -g^{AB}R_{AB}. \tag{4.100}$$

Kako bismo jednadžbu dodatno simplificirali, uočimo da izraz u uglatoj zagradi možemo iskazati preko traga tenzora $T_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\mu} =& g^{\mu\nu}T_{\nu\mu} \\ =& g^{rr}T_{rr} + 2g^{ur}T_{ur} + 2g^{rA}T_{rA} + g^{AB}T_{AB}. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Prema tome, vrijedi:

$$g^{AB}R_{AB} + 8\pi\left[T^{\mu}{}_{\mu} - \frac{1}{r^2}h^{AB}T_{AB}\right] = 0. \tag{4.102}$$

Skalar $g^{AB}R_{AB}$ je dan izrazom (B.51). Uvrštavanjem istog u (4.102) i množenjem sa faktorom r^2, dobivamo odmah traženu Einsteinovu jednadžbu:

$$\begin{aligned} 2e^{-2\beta}(\partial_r V) =& \breve{R} - 2h^{AB}[D_A D_B\beta + (D_A\beta)(D_B\beta)] + \frac{e^{-2\beta}}{r^2}D_A[\partial_r(r^4U^A)] \\ &- \frac{1}{2}r^4e^{-4\beta}h_{AB}(\partial_r U^A)(\partial_r U^B) - 8\pi[h^{AB}T_{AB} - r^2T^{\mu}{}_{\mu}], \end{aligned} \tag{4.103}$$

gdje je $\breve{R}$ Riccijev skalar konstruiran s konformnom metrikom h_{AB}. Riječ je o radijalnoj diferencijalnoj jednadžbi koja specificira funkciju V. Primjetimo da komponente 1. glavne jednadžbi ne sadrže derivacije po vremenolikoj koordinati u. Prema tome, pomoću ovih jednadžbi možemo odrediti koeficijente metrike na datoj hiperpovršini gdje vrijedi $u = konst.$, ali ne i kako isti evoluiraju u vremenu. Iz tog razloga se (4.92), (4.96) i (4.103) često nazivaju i jednadžbama hiperpovršine.

Idući cilj nam je raspisati 2. glavnu jednadžbu (4.57). Pritom se prisjećamo da je jednakost $g^{AB}E_{AB} = 0$ trivijalno zadovoljena pa je dovoljno razmotriti izraz $E_{AB} = 0$

koji je ekvivalentan jednadžbi:

$$R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} - 8\pi T_{AB} = 0. \tag{4.104}$$

Izraz (4.104) nije nimalo jednostavan za raspisati budući da sadrži Riccijev skalar. Kako bismo pojednostavili račune, poslužit ćemo se "trikom" i uvesti idući vektor koji je usmjeren u angularnom smjeru:

$$m^\mu = (0, 0, m^A). \tag{4.105}$$

Nadalje, postavljamo zahtjev prema kojem je ovaj vektor tangencijalan na hiperpovršinu Σ. Tada usmjerena derivacija varijable u duž ovog vektora isčezava, odnosno vrijedi $m^\mu \nabla_\mu u = 0$. Pripadnu dvodimenzionalnu 1-formu definiramo s obzirom na konformnu metriku h_{AB}:

$$m_A = h_{AB} m^B. \tag{4.106}$$

Vektoru m^A ćemo dozvoliti i da bude kompleksan te nametnuti iduću normalizaciju [11]:

$$h^{AB} = \frac{1}{\chi\bar{\chi}}(m^A \bar{m}^B + m^B \bar{m}^A), \tag{4.107}$$

gdje su vektori $\bar{m}^A$ i m^A povezani kompleksnom konjugacijom: $\bar{m}^A = (m^A)^*$. Tada vrijedi i $\bar{m}_A = h_{AB}\bar{m}^B$ što slijedi iz kompleksne konjugacije jednadžbe (4.106) i činjenice da komponente konformne metrike h_{AB} moraju biti realne: $h_{AB} \in \mathbb{R} \rightarrow h_{AB} = \bar{h}_{AB}$. U (4.107), $\chi \in \mathbb{C}$ predstavlja faktor normalizacije i bira se po konvenciji. Newman-Penroseova konvencija za normalizaciju koristi $\chi\bar{\chi} = 1$ [11], dok se u numeričkim aplikacijama Bondi-Sachsovog formalizma koristi $\chi\bar{\chi} = 2$ [11]. Budući da je m^A tangencijalan na Σ, riječ je o vektoru svjetlosnog tipa pa mora biti zadovoljeno:

$$m_A m^A = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{m}_A \bar{m}^A = 0. \tag{4.108}$$

Izrazom (4.107) smo metriku h^{AB} prikazali pomoću vektora m^A, ali da bi ova jednakost bila zadovoljena isti vektor mora posjedovati određena svojstva kako bi jednadžba bila konzistentna sa uvjetima na h^{AB}. Primjetimo prvo da je (4.107) simetričan izraz te da je automatski zadovoljeno $h^{AB} = h^{BA}$. Promotrimo dalje kakve implikacije daje uvjet $h^{AB}h_{AB} = 2$:

$$\begin{aligned} 2 =& h^{AB}h_{AB} \\ =& h^{AB}\frac{1}{\chi\bar{\chi}}(m_A\bar{m}_B + m_B\bar{m}_A) \\ =& \frac{1}{\chi\bar{\chi}}(m^B\bar{m}_B + m^A\bar{m}_A). \end{aligned} \tag{4.109}$$

Da bi jednakost bila zadovoljena, mora vrijediti:

$$\bar{m}_A m^A = \chi\bar{\chi} \quad \rightarrow m_A\bar{m}^A = \chi\bar{\chi}. \tag{4.110}$$

Općenitije:

$$\begin{aligned} \delta^A{}_C =& h^{AB}h_{BC} \\ =& h^{AB}\frac{1}{\chi\bar{\chi}}(m_B\bar{m}_C + m_C\bar{m}_B) \\ =& \frac{1}{\chi\bar{\chi}}(m^A\bar{m}_C + m_C\bar{m}^A), \end{aligned} \tag{4.111}$$

što znači da smo primorani nametnuti uvjet:

$$m^A\bar{m}_C + \bar{m}^A m_C = \chi\bar{\chi}\delta^A{}_C. \tag{4.112}$$

Trebamo se još pobrinuti i da su zadovoljeni identiteti (4.30). Promotrimo kakve implikacije daje prvi od ovih budući da je drugi ekvivalentan:

$$\begin{aligned} 0 =& h^{AB}\partial_r h_{AB} \\ =& \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}(m^A\bar{m}^B + m^B\bar{m}^A)\partial_r(m_A\bar{m}_B + m_B\bar{m}_A) \\ =& \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}(m^A\bar{m}^B + m^B\bar{m}^A)(m_A\partial_r\bar{m}_B + \bar{m}_B\partial_r m_A + m_B\partial_r\bar{m}_A + \bar{m}_A\partial_r m_B) \\ =& \frac{2}{\chi\bar{\chi}}(m^A\partial_r\bar{m}_A + \bar{m}^A\partial_r m_A) \end{aligned} \tag{4.113}$$

U četvrtoj jednakosti smo pomnožili zagrade i iskoristili uvjete (4.108) i (4.110). Kako bi jednadžba bila zadovoljena (povlačeći pritom analogiju i na drugi uvjet u

(4.30)), očito vrijedi:

$$
\begin{aligned}
m^A\partial_r\bar{m}_A &= \bar{m}^A\partial_r m_A = 0, \\
m^A\partial_u\bar{m}_A &= \bar{m}^A\partial_u m_A = 0.
\end{aligned}
\tag{4.114}
$$

Spomenimo za kraj da u izboru vektora m^A postoji neodređenost u faznoj slobodi $m^A \to e^{i\eta}m^A$, no ona se može fiksirati po konvenciji.

Naša tvrdnja sada jest da se tenzor E_{AB} može razviti na idući način:

$$
\begin{aligned}
E_{AB} =& \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}(E_{CD}m^Cm^D)\bar{m}_A\bar{m}_B + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}(E_{CD}\bar{m}^C\bar{m}^D)m_Am_B \\
&+ \frac{1}{2}h_{AB}h^{CD}E_{CD}.
\end{aligned}
\tag{4.115}
$$

Dokaz provodimo krećući od desne strane prethodne jednakosti:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}(E_{CD}m^Cm^D)\bar{m}_A\bar{m}_B + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}(E_{CD}\bar{m}^C\bar{m}^D)m_Am_B + \frac{1}{2}h_{AB}h^{CD}E_{CD} \\
&= \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}E_{CD}(m^Cm^D\bar{m}_A\bar{m}_B + \bar{m}^C\bar{m}^Dm_Am_B) \\
&\quad + \frac{1}{2(\chi\bar{\chi})^2}E_{CD}(m_A\bar{m}_B + m_B\bar{m}_A)(m^C\bar{m}^D + \bar{m}^Cm^D) \\
&= \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}E_{CD}[m^Cm^D\bar{m}_A\bar{m}_B + \bar{m}^C\bar{m}^Dm_Am_B + \frac{1}{2}m_A\bar{m}_Bm^C\bar{m}^D \\
&\quad + \frac{1}{2}m_A\bar{m}_B\bar{m}^Cm^D + \frac{1}{2}m_B\bar{m}_Am^C\bar{m}^D + \frac{1}{2}m_B\bar{m}_A\bar{m}^Cm^D] \\
&= \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}E_{CD}[m^Cm^D\bar{m}_A\bar{m}_B + \bar{m}^C\bar{m}^Dm_Am_B + m_A\bar{m}_Bm^C\bar{m}^D \\
&\quad + m_B\bar{m}_Am^C\bar{m}^D] \\
&= \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}E_{CD}[m^C\bar{m}_B(\chi\bar{\chi})\delta^D{}_A - m^C\bar{m}_Bm_A\bar{m}^D + \bar{m}^C\bar{m}^Dm_Am_B \\
&\quad + m_A\bar{m}_Bm^C\bar{m}^D + m_B\bar{m}^D(\chi\bar{\chi})\delta^C{}_A - m_B\bar{m}^Dm_A\bar{m}^C] \\
&= \frac{1}{(\chi\bar{\chi})}E_{CA}m^C\bar{m}_B + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})}E_{AD}m_B\bar{m}^D \\
&= E_{CA}\frac{1}{(\chi\bar{\chi})}[m^C\bar{m}_B + m_B\bar{m}^C] \\
&= E_{AB}.
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

Prođimo ovaj dokaz red po red. Prvo smo metriku h_{AB} izrazili pomoću (4.107), pomnožili zagrade i preimenovali slijepe indekse $C \leftrightarrow D$ u 4. i 6. članu unutar uglate zagrade 5. reda. Zbrojili smo ekvivalentne članove i pritom iskoristili činjenicu da je

E_{AB} simetričan tenzor. U idućoj jednakosti koristimo izraz (4.112) i vršimo zamjene $m^D\bar{m}_A = (\chi\bar{\chi})\delta^D{}_A - m_A\bar{m}^D$ i $\bar{m}_A m^C = (\chi\bar{\chi})\delta^C{}_A - m_A\bar{m}^C$ u 1. i 4. članu zagrade. U 10. redu smo napravili preimenovanje $D \to C$ i ponovno iskoristili simetričnost tenzora E_{AB}. Konačno, u pretposljednjoj jednakosti faktor uz E_{CA} prepoznajemo kao kroneckerov simbol $\delta^C{}_B$ koristeći (4.112). Time smo došli do konačnog izraza i dokazali identitet (4.115).

Primjetimo dalje da jednakost $g^{CD}E_{CD} = \frac{1}{r^2}h^{CD}E_{CD} = 0$ (koja treba vrijediti za $\forall r$) implicira da je zadovoljeno i:

$$h^{CD}E_{CD} = 0. \tag{4.117}$$

Dakle treći član s desne strane izraza (4.115) trivijalno iščezava. Ukoliko vrijedi $m^C m^D E_{CD} = 0$, tada je automatski zadovoljena i relacija $\bar{m}^C\bar{m}^D E_{CD} = 0$, što slijedi iz kompleksne konjugacije jednadžbe i uvjeta $E_{AB} \in \mathbb{R}$. Tada je desna strana u (4.115) jednaka nuli te vrijedi i $E_{AB} = 0$. Prema tome, druga glavna jednadžba (4.57) se svodi na kompleksnu jednadžbu:

$$m^A m^B E_{AB} = 0. \tag{4.118}$$

Koristeći izraz (4.104), ista jednadžba poprima formu $m^A m^B R_{AB} - \frac{1}{2}R m^A m^B g_{AB} - 8\pi m^A m^B T_{AB} = 0$. Budući da je zadovoljeno $m^A m^B g_{AB} = r^2 m^A m^B h_{AB} = r^2 m^A m_A = 0$, što slijedi iz (4.108), faktor uz Riccijev skalar iščezava. Drugu glavnu jednadžbu (4.57) konačno možemo zapisati u idućem obliku:

$$m^A m^B R_{AB} - 8\pi m^A m^B T_{AB} = 0. \tag{4.119}$$

Skalar $m^A m^B R_{AB}$ je dan izrazom (B.64). Uvrštavanjem istog u prethodnu jednadžbu (i množenjem čitave jednakosti za $e^{2\beta}$) dobivamo 2. glavnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&m^A m^B [r\partial_r[r(\partial_u h_{AB})] - \frac{1}{2}\partial_r[rV(\partial_r h_{AB})] - 2e^\beta D_A D_B e^\beta \\
&+ h_{CA} D_B[\partial_r(r^2 U^C)] - \frac{1}{2}r^4 e^{-2\beta} h_{AC} h_{BD} (\partial_r U^C)(\partial_r U^D) \\
&+ \frac{r^2}{2}(\partial_r h_{AB})(D_C U^C) + r^2 U^C D_C(\partial_r h_{AB}) \\
&- r^2(\partial_r h_{AC}) h_{BE}(D^C U^E - D^E U^C) - 8\pi e^{2\beta} T_{AB}] = 0.
\end{aligned} \tag{4.120}$$

Kao što vidimo, riječ je o radijalnoj diferencijalnoj jednadžbi koja određuje retardiranu vremensku derivaciju dvaju stupnjeva slobode konformne metrike h_{AB}.

Time smo uspješno izrazili Einsteinove jednadžbe preko koeficijenata metrike. U idućem podpoglavlju jednadžbe razvijamo u red i integracijom tražimo njihova rješenja.

4.3 Asimptotski razvoj i rješenja Einsteinovih jednadžbi

S Einsteinovim jednadžbama na raspolaganju, spremni smo nametnuti rubne uvjete i pronaći njihova rješenja. Pretpostavit ćemo da je materija lokalizirana u kompaktnoj regiji oko $r = 0$ i rješenja jednadžbi tražiti u vakuumu. Tenzor energije-impulsa dakle isključujemo. Nadalje, želimo da prostor-vrijeme posjeduje svojstvo asimptotske ravnosti. Ne postoji a priori preferiran način kako postaviti ovaj uvjet. Najčešće korištena metoda se poziva na svojstva guljenja ("peeling properties") Weylovog tenzora u ekspanziji polja [11], no u ovom slučaju je rubne uvjete najelegantnije formulirati pomoću Penroseove kompaktifikacije buduće svjetlosne beskonačnosti [11]. Mi ćemo pak iskoristiti Bondijev prirodan odabir uvjeta na koeficijene metrike prema kojima se metrika u blizini $\mathcal{I}^+$ približava metrici Minkowskog. Nametnimo stoga iduće rubne uvjete [11]:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} \beta = 0, \\ &\lim_{r\to\infty} U^A = 0, \\ &\lim_{r\to\infty} \frac{V}{r} = 1, \\ &\lim_{r\to\infty} h_{AB} = q_{AB}, \end{aligned} \tag{4.121}$$

gdje je q_{AB} metrika na jediničnoj S^2. Vidimo da uz ove uvjete linijski element (4.26) u prostornoj beskonačnosti poprima oblik:

$$\lim_{r\to\infty} ds^2 = -du^2 - 2dudr + r^2 q_{AB} dx^A dx^B, \tag{4.122}$$

koji odgovara metrici ravnog prostora. Uz odabir $q_{AB} = \gamma_{z\bar{z}}$ prethodni izraz je identičan izrazu (3.17). Spomenimo da se uvjeti (4.121) mogu opravdati Penroseovom kompaktifikacijom $\mathcal{I}^+$ [11], no time se u ovom radu nećemo baviti.

Dakako, ne možemo se nadati pronalasku analitičkih rješenja Einsteinovih jednadžbi danih u prethodnom podpoglavlju. Ono što možemo napraviti jest nametnuti $\frac{1}{r}$ razvoj koeficijenata metrike u skladu s rubnim uvjetima. Tada ćemo biti u mogućnosti odbaciti članove koji brzo opadaju s porastom radijalne koordinate i tražiti rješenja u blizini $\mathcal{I}^+$ (prisjetimo se da na $\mathcal{I}^+$ r divergira). Uvodimo stoga razvoj konformne metriku h_{AB} na hiperpovršini Σ_0 ($u = u_0 = konst.$) [11]:

$$h_{AB}(u_0, r, x^C) = q_{AB}(x^C) + \frac{C_{AB}(u_0, x^C)}{r} + \frac{d_{AB}(u_0, x^C)}{r^2} + ..., \tag{4.123}$$

gdje su koeficijenti u razvoju definirani s obzirom na S^2 [11]:

$$\begin{aligned} C^{AB} &= q^{AD} q^{BE} C_{DE,} \\ d^{AB} &= q^{AD} q^{BE} d_{DE}. \end{aligned} \tag{4.124}$$

Dakako, mora vrijediti i $C_{AB} = C_{BA}$ i $d_{AB} = d_{BA}$. Metriku h_{AB} smo razvili u početnom retardiranom vremenu u_0 iz razloga što 1. glavna jednadžba (koju nam je cilj integrirati) daje rješenja koeficijenata na hiperpovršinama konstantne koordinate u. Poznavajući početne podatke na Σ_0, u principu bismo mogli iskoristiti 2. glavnu jednadžbu (4.120) i odrediti h_{AB} u kasnijim trenutcima budući da ista sadži vremenoliku derivaciju. Iz tog razloga se (4.120) naziva jednadžbom evolucije. Ništa nas ne sprječava da u označavanju koordinatnih ovisnosti napravimo zamjene $u_0 \to u$ (što ćemo često i raditi), npr. $d_{AB}(u, x^C)$, ali tada pamtimo da je riječ o tenzoru u kasnijem vremenskom trenutku za čiju specifikaciju nam treba pripadna jednadžba vremenske evolucije i vrijednost na hiperpovršini Σ_0 koju biramo kao početnu. Možemo formalno definirati $\frac{1}{r}$ koeficijent razvoja (4.123) za retardirano vrijeme $u \in [u_0, u_1]$, uz $u_1 > u_0$ kao:

$$C_{AB}(u, x^C) = \lim_{r \to \infty} r(h_{AB}(u, r, x^C) - q_{AB}(x^C)), \tag{4.125}$$

što slijedi iz (4.123) ukoliko konformnu metriku h_{AB} specificiramo u retardiranom vremenu u. Kasnije ćemo vidjeti da C_{AB} opisuje gravitacijske valove. Uočimo još i da je razvoj (4.123) u skladu s posljednjim uvjetom u (4.121).

Definirajmo sada funkciju $M(u, x^A)$ u početnom retardiranom vremenu preko iduće jednadžbe [11]:

$$M(u_0,x^A)=-\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}[V(u_0,r,x^A)-r]. \tag{4.126}$$

Veličinu $M(u,x^A)$ zovemo Bondijeva masa i ista predstavlja maseni aspekt koji smo spominjali pri raspravi o drugom dodatnom uvjetu (4.65). U ovom trenutku čitatelju možda nije jasno kako ovu funkciju interpretirati kao masu, niti koja je uopće svrha definicije (4.126), ali stvari će postati jasnije vrlo brzo nakon što integriramo Einsteinove jednadžbe.

Naizgled ničim ponukani, definirat ćemo i 1-formu $L_A(u,x^A)$ na S^2 u početnom retardiranom vremenu [11]:

$$L_A(u_0,x^C)=\frac{-1}{6}\lim_{r\to\infty}(r^4e^{-2\beta}h_{AB}\partial_rU^B-r\eth^BC_{AB}), \tag{4.127}$$

gdje vrijedi $L^B=q^{BA}L_A$. U gornjem izrazu, $\eth_A$ predstavlja kovarijantnu derivaciju s obzirom na q_{AB} te je zadovoljeno $\eth^B=q^{BA}\eth_A$. L_A zovemo aspekt angularnog momenta koji ćemo interpretirati kao takav nešto kasnije. Za sada spomenimo samo je 1. dodatni uvjet (4.64) u biti jednadžba evolucije upravo ove veličine.

Četvrti uvjet u (4.121) i izraz (4.107) impliciraju da možemo uvesti kompleksni vektor na S^2 preko relacije [11]:

$$q^A=\lim_{r\to\infty}m^A, \tag{4.128}$$

tako da je zadovoljeno:

$$q^{AB}=\frac{1}{\chi\bar{\chi}}(q^A\bar{q}^B+q^B\bar{q}^A). \tag{4.129}$$

Pritom vrijedi $q^A=q^{AB}q_B$ i $\bar{q}^A=q^{AB}\bar{q}_A$. Uvjeti $q^{AB}q_{AB}=2$ i $q^{AB}q_{BC}=\delta^A{}_C$ su, isto kao i ranije, važeći ukoliko nametnemo zahtjeve: $q_A\bar{q}^A=q^A\bar{q}_A=\chi\bar{\chi}$ i $q^A\bar{q}_C+\bar{q}^Aq_C=\chi\bar{\chi}\delta^A{}_C$

Zanima nas i kako izgleda asimptotski razvoj inverza konformne metrike. U nastavku koristimo ”ansatz” za isti koji ćemo odmah pokazati da je ispravan. Pretpostavimo da vrijedi [11]:

$$h^{AB} = q^{AB} - \frac{C^{AB}}{r} - \frac{d^{AB} - q^{AC}C^{BD}C_{CD}}{r^2} + ... \tag{4.130}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\delta^A{}_B =& h^{AC}h_{CB} \\
=& \left(q^{AC} - \frac{C^{AC}}{r} - \frac{d^{AC} - q^{AE}C^{CF}C_{EF}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})\right) \cdot \\
& \left(q_{CB} + \frac{C_{CB}}{r} + \frac{d_{CB}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})\right) \\
=& q^{AC}q_{CB} + \frac{1}{r}\left[q^{AC}C_{CB} - q_{CB}C^{AC}\right] + \frac{1}{r^2}[q^{AC}d_{CB} - C^{AC}C_{CB} - d^{AC}q_{CB} \\
& + q^{AE}q_{CB}C^{CF}C_{EF}] + \mathcal{O}(r^{-3}).
\end{aligned} \tag{4.131}$$

Promotrimo zasebno svaki član u $1/r$ razvoju:

$$\begin{aligned}
& q^{AC}q_{CB} = \delta^A{}_B, \\
& q^{AC}C_{CB} - q_{CB}C^{AC} = C^A{}_B - C^A{}_B = 0, \\
& q^{AC}d_{CB} - d^{AC}q_{CB} - C^{AC}C_{CB} + q^{AE}q_{CB}C^{CF}C_{EF} = d^A{}_B - d^A{}_B \\
& - C^{AC}C_{CB} + C_B{}^F C^A{}_F \\
& = -C^{AC}C_{CB} + q^{FC}C_{BC}q_{FE}C^{AE} \\
& = -C^{AC}C_{CB} + \delta^C{}_E C_{BC}C^{AE} \\
& = -C^{AC}C_{CB} + C_{BC}C^{AC} \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{4.132}$$

Dakle ansatz je točan, to jest, točan je do reda r^{-2} do kojeg smo h^{AB} i specificirali. Ostali članovi u razvoju nam neće trebati. Nadalje, mora biti zadovoljena i jednakost $deth_{AB} = detq_{AB}$ za koju smo pokazali da je ekvivalentna uvjetima (4.30). Provjerimo prvo što nam daje izraz $h^{AB}\partial_r h_{AB} = 0$:

$$\begin{aligned} h^{AB}\partial_r h_{AB} =& h^{AB}\partial_r[q_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + \frac{d_{AB}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})] \\ =& [q^{AB} - \frac{C^{AB}}{r} - \frac{d^{AB} - q^{AC}C^{BD}C_{CD}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})]\cdot \\ & [\frac{-C_{AB}}{r^2} - 2\frac{d_{AB}}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4})] \\ =& \frac{1}{r^2}[-q^{AB}C_{AB}] + \frac{1}{r^3}[C^{AB}C_{AB} - 2q^{AB}d_{AB}] + \mathcal{O}(r^{-4}). \end{aligned} \tag{4.133}$$

Sada možemo izjednačiti s nulom svaki član u razvoju. Faktor uz $1/r^2$ odmah daje:

$$C^A{}_A = 0, \tag{4.134}$$

odnosno trag tenzora C_{AB} iščezava. Drugi faktor implicira i da mora biti zadovoljeno $q^{AB}d_{AB} = \frac{1}{2}C^{AB}C_{AB}$. Preostaje nam vidjeti kakve uvjete diktira relacija $h^{AB}\partial_u h_{AB} = 0$:

$$\begin{aligned} h^{AB}\partial_u h_{AB} =& [q^{AB} - \frac{C^{AB}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})][\frac{\partial_u C_{AB}}{r} + \frac{\partial_u d_{AB}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})] \\ =& \frac{1}{r}q^{AB}\partial_u C_{AB} + \frac{1}{r^2}[q^{AB}\partial_u d_{AB} - C^{AB}\partial_u C_{AB}] + \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned} \tag{4.135}$$

Iz prethodnog izraza odmah vidimo da mora vrijediti:

$$\begin{aligned} & q^{AB}\partial_u C_{AB} = 0, \\ & q^{AB}\partial_u d_{AB} - C^{AB}\partial_u C_{AB} = 0. \end{aligned} \tag{4.136}$$

Definirat ćemo još jedan tenzor na S^2 pomoću jednadžbe [11]:

$$N_{AB}(u, x^C) = \frac{1}{2}\partial_u C_{AB}(u, x^C), \tag{4.137}$$

pri čemu vrijedi $N^A{}_B = q^{AC}N_{CB}$. N_{AB} je poznat pod nazivom tenzor novosti (”news tensor”), te je kvadrat istog proporcionalan toku energije gravitacijskog zračenja što ćemo pokazati kasnije. Nekada se ova veličina definira bez faktora $1/2$. Mi ćemo pisati [15]:

$$\tilde{N}_{AB}(u, x^C) = \partial_u C_{AB}(u, x^C) \tag{4.138}$$

i koristiti obje definicije ovisno o situaciji. Prije nego krenemo s razvojem Einsteinovih jednadžbi, promotrimo još kako su povezane kovarijantne derivacije s obzirom na h_{AB} i q_{AB}. Kovarijantnu derivaciju dvodimenzionalnog vektora s obzirom na q_{AB} zapisujemo u idućem obliku:

$$\eth_A V^B = \partial_A V^B + \gamma^B_{AC} V^C, \tag{4.139}$$

gdje je γ^B_{AC} Christoffelov simbol na S^2 definiran kao:

$$\gamma^A_{BC} = \frac{1}{2} q^{AE} [\partial_B q_{CE} + \partial_C q_{EB} - \partial_E q_{BC}]. \tag{4.140}$$

Sada ćemo razviti (4.79) koristeći (4.123) i (4.130):

$$\begin{aligned}
D_A V^B =& \partial_A V^B + \breve{\Gamma}^B_{AC} V^C \\
=& \partial_A V^B + \frac{1}{2} h^{BE} (\partial_A h_{CE} + \partial_C h_{EA} - \partial_E h_{AC}) V^C \\
=& \partial_A V^B + \frac{1}{2} \left[q^{BE} - \frac{C^{BE}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] [\partial_A (q_{CE} + \frac{C_{CE}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})) \\
&+ \partial_C (q_{EA} + \frac{C_{EA}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})) - \partial_E (q_{AC} + \frac{C_{AC}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}))] V^C \\
=& \partial_A V^B + \left[\frac{1}{2} q^{BE} (\partial_A q_{CE} + \partial_C q_{EA} - \partial_E q_{AC} \right] V^C \\
&+ [\frac{1}{2r} q^{BE} (\partial_A C_{CE} + \partial_C C_{EA} - \partial_E C_{AC}) \\
&- \frac{1}{2r} C^{BE} (\partial_A q_{CE} + \partial_C q_{EA} - \partial_E q_{AC}) + \mathcal{O}(r^{-2})] V^C.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Prva dva člana posljednje jednakosti prepoznajemo kao kovarijantnu derivaciju (4.139). Možemo konačno pisati:

$$D_A V^B = \eth_A V^B + \mathcal{C}^B_{AE} V^E, \tag{4.142}$$

pri čemu smo uveli koeficijent $\mathcal{C}^B_{AE}$ reda $\mathcal{O}(r^{-1})$ koji je definiran relacijom:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^B_{AE} = & \frac{1}{2r} [q^{BF} (\partial_A C_{EF} + \partial_E C_{FA} - \partial_F C_{AE}) \\
& - C^{BF} (\partial_A q_{EF} + \partial_E q_{FA} - \partial_F q_{AE})] + \mathcal{O}(r^{-2}).
\end{aligned} \tag{4.143}$$

U nastavku koristimo asimptotski razvoj za pronalazak rješenja Einsteinovih jednadžbi. Kako smo rekli, rješenja tražimo u blizini $\mathcal{I}^+$, što znači da ćemo egzaktno izračunati samo dominantne članove. Krenimo s razvojem $E^u{}_r = 0$ jednadžbe koja je dana izrazom (4.92). U vakuumu imamo:

$$\begin{aligned}
\partial_r\beta =& \frac{r}{16}h^{AC}h^{BD}\left(\partial_r h_{AB}\right)\left(\partial_r h_{CD}\right) \\
& \frac{r}{16}[q^{AC} - \frac{C^{AC}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})][q^{BD} - \frac{C^{BD}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})]\cdot \\
& \partial_r[q_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})]\partial_r[q_{CD} + \frac{C_{CD}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})] \\
=& \frac{r}{16}[q^{AC} - \frac{C^{AC}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})][q^{BD} - \frac{C^{BD}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})]\cdot \\
& [\frac{-C_{AB}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})][\frac{-C_{CD}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})] \\
=& \frac{r}{16}q^{AC}q^{BD}\frac{C_{AB}C_{CD}}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-4}) \\
& \rightarrow \partial_r\beta(u_0, r, x^A) = \frac{1}{16}\frac{C_{AB}(u_0, x^A)C^{AB}(u_0, x^A)}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4}).
\end{aligned} \tag{4.144}$$

Provest ćemo neodređenu integraciju posljednje jednakosti po radijalnoj koordinati:

$$\int \partial_r\beta dr = \beta = \frac{-1}{32}\frac{C^{AB}C_{AB}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) + g(u, x^A) \tag{4.145}$$

U posljednjem izrazu, $g(u, x^A)$ je funkcija koja ovisi u koordinatama u i x^A, ali ne i o radijalnoj koordinati. Istu možemo specificirati koristeći 1. rubni uvjet u (4.121).

$$\lim_{r\to\infty}\beta = 0 = \lim_{r\to\infty}[\frac{-1}{32}\frac{C^{AB}C_{AB}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) + g(u, x^A)] = g(u, x^A), \tag{4.146}$$

što znači da mora vrijediti $g(u, x^A) = 0$. Možemo konačno pisati:

$$\beta(u, r, x^A) = -\frac{1}{32}\frac{C_{AB}(u, x^A)C^{AB}(u, x^A)}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{4.147}$$

Dakle koeficijent β relativno brzo opada (kao $\mathcal{O}(r^{-2})$) i ostali članovi u razvoju nam neće trebati. Dakako, (4.147) je u skladu s pripadnim rubnim uvjetom. Primjetimo još da se β pojavljuje u eksponentu funkcije čiji je Taylorov razvoj: $e^{2\beta} = 1 + 2\beta + \mathcal{O}\left(2\beta\right)^2$, gdje je β^2 već reda $\mathcal{O}(r^{-4})$. Prema tome, dovoljni će nam biti nulti i prvi član ovog razvoja.

Ostale Einsteinove jednadžbe ovdje nećemo razvijati jer je princip potpuno isti kao u prethodno provedenom računu. Koristeći razvoj (4.123) i rješenje za β (4.147),

$E^u{}_A = 0$ jednadžba dana izrazom (4.96) u vakuumu poprima oblik [11]:

$$\partial_r[r^4 e^{-2\beta} h_{AB}(\partial_r U^B)] = \eth^E C_{AE} + \frac{S_A(u_0, x^C)}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), \tag{4.148}$$

gdje je S_A 1-forma definirana kao [11]:

$$S_A = \eth^B(2d_{AB} - q^{FG} C_{BG} C_{AF}). \tag{4.149}$$

Ukoliko jednom integriramo (4.148) po radijalnoj koordinati, vidimo odmah da faktor $\partial_r U^B$ sadrži logaritamski član. Preciznije: $h_{AB}\partial_r U^B \sim ... + S_A r^{-4} lnr + ...$ Ovaj član ne smije postojati zbog pretpostavke o r^{-1} razvoju. Moramo dakle nametnuti uvjet $S_A = 0$. Da bismo vidjeli kakve implikacije daje isčezavanje 1-forme S_A, moramo prvo dokazati određene identitete. Dokazujemo prvo da je zadovoljeno $q^A q^B q^{FG} C_{BG} C_{AF} = 0$.

$$\begin{aligned}
q^A q^B q^{FG} C_{BG} C_{AF} =& q^A q^B \frac{1}{\chi\bar{\chi}}(q^F \bar{q}^G + q^G \bar{q}^F) C_{BG} C_{AF} \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}}(q^A q^B q^F \bar{q}^G C_{BG} C_{AF} + q^A q^B q^G \bar{q}^F C_{BG} C_{AF}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}}(q^A q^B q^F \bar{q}^G C_{BG} C_{AF} + q^A q^F q^G \bar{q}^B C_{FG} C_{AB}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}}(q^G q^B q^F \bar{q}^A C_{BA} C_{GF} + q^A q^F q^G \bar{q}^B C_{FG} C_{AB}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}} q^F q^G [q^B \bar{q}^A + q^A \bar{q}^B] C_{FG} C_{AB} \\
=& q^F q^G C_{FG} q^{AB} C_{AB} \\
=& 0.
\end{aligned} \tag{4.150}$$

Napravili smo preimenovanja indeksa $F \to B$ i $B \to F$ unutar drugog člana u drugom redu, zatim smo preimenovali $A \to G$ i $G \to A$ indekse prvog člana trećeg reda. Iskoristili smo simetričnost tenzora C_{AB} i u konačnici pokazali da izraz isčezava na temelju jednakosti (4.134). Na sličan način se pokazuje i da je zadovoljeno $\bar{q}^A \bar{q}^B q^{AF} C_{BG} C_{AF} = 0$. Koristeći ove identitete, pokazat ćemo i da vrijedi $\frac{1}{2} q_{AB} C^{FG} C_{FG}$

$$= q^{FG} C_{BG} C_{AF}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} q_{AB} C^{FG} C_{FG} =& \frac{1}{2} q_{AB} q^{FG} q^{HL} C_{GL} C_{FH} \\
=& \frac{1}{2(\chi\bar{\chi})^2} (q_A \bar{q}_B + q_B \bar{q}_A)(q^H \bar{q}^L + q^L \bar{q}^H) q^{FG} C_{LG} C_{HF} \\
=& \frac{1}{2(\chi\bar{\chi})^2} (q_A \bar{q}^L \bar{q}_B q^H + q_A \bar{q}^H \bar{q}_B q^L + q_B \bar{q}^L \bar{q}_A q^H \\
& + q_B \bar{q}^H \bar{q}_A q^L] q^{FG} C_{LG} C_{HF} \\
=& \frac{1}{2(\chi\bar{\chi})^2} [\bar{q}_B q^H (-\bar{q}_A q^L + \chi\bar{\chi} \delta^L{}_A) + \bar{q}_B q^L (-\bar{q}_A q^H + \chi\bar{\chi} \delta^H{}_A) \\
& + q_B \bar{q}^L (-q_A \bar{q}^H + \chi\bar{\chi} \delta^H{}_A) \\
& + q_B \bar{q}^H (-q_A \bar{q}^L + \chi\bar{\chi} \delta^L{}_A)] q^{FG} C_{LG} C_{HF} \\
=& \frac{1}{2(\chi\bar{\chi})^2} [-\bar{q}_B \bar{q}_A q^H q^L q^{FG} C_{LG} C_{HF} - \bar{q}_B \bar{q}_A q^L q^H q^{FG} C_{LG} C_{HF} \\
& - q_A q_B \bar{q}^L \bar{q}^H q^{FG} C_{LG} C_{HF} - q_B q_A \bar{q}^H \bar{q}^L q^{FG} C_{LG} C_{HF}] \\
& + \frac{1}{2\chi\bar{\chi}} [\bar{q}_B q^H \delta^L{}_A + \bar{q}_B q^L \delta^H{}_A + q_B \bar{q}^L \delta^H{}_A \\
& + q_B \bar{q}^H \delta^L{}_A] q^{FG} C_{LG} C_{HF} \\
=& \frac{1}{2\chi\bar{\chi}} [\bar{q}_B q^H q^{FG} C_{AG} C_{HF} + \bar{q}_B q^L q^{FG} C_{LG} C_{AF} \\
& + q_B \bar{q}^L q^{FG} C_{LG} C_{AF} + q_B \bar{q}^H q^{FG} C_{AG} C_{HF}] \\
=& \frac{1}{2\chi\bar{\chi}} [q^{FG} C_{AG} C_{HF} (\bar{q}_B q^H + q_B \bar{q}^H) + \\
& + q^{FG} C_{LG} C_{AF} (\bar{q}_B q^L + q_B \bar{q}^L)] \\
=& \frac{1}{2} [q^{FG} C_{AG} C_{HF} \delta^H{}_B + q^{FG} C_{LG} C_{AF} \delta^L{}_B] \\
=& \frac{1}{2} [q^{FG} C_{AG} C_{BF} + q^{FG} C_{BG} C_{AF}] \\
=& q^{FG} C_{BG} C_{AF}.
\end{aligned} \tag{4.151}$$

U dokazu smo koristili relaciju $q^A \bar{q}_C + \bar{q}^A q_C = \chi\bar{\chi} \delta^A{}_C$ i prethodno dokazane identitete. Uočimo sada da S_A možemo pisati u obliku $S_A = 2\eth^B b_{AB}$, gdje smo uveli tenzor $b_{AB} = d_{AB} - \frac{1}{2} q_{AB} q^{CD} d_{CD}$ i iskoristili uvjet na determinantu $C^{FG} C_{FG} = 2q^{FG} d_{FG}$. Iz definicije je vidljivo da je b_{AB} simetričan i da mu trag iščezava, no ono što nije toliko očito jest da ukoliko S_A iščezava, tada vrijedi i $b_{AB} = 0$. Ista tvrdnja se može pokazati koristeći Killingove vektore na jediničnoj sferi [11], no time se ovdje nećemo baviti.

Možemo i jednostavno nametnuti idući uvjet na tenzor d_{AB}:

$$d_{AB} = \frac{1}{2} q_{AB} q^{CD} d_{CD} = \frac{1}{2} q_{AB} d, \tag{4.152}$$

tako da b_{AB} iščezava te tada nužno iščezava i S_A. Prema (4.152), d_{AB} sadrži samo član s tragom $d = d^A{}_A$ koji je diktiran s uvjetima na determinantu konformne metrike h_{AB}.

Vratimo se analizi jednadžbe (4.148) koja sada poprima oblik:

$$\partial_r [r^4 e^{-2\beta} h_{AB} (\partial_r U^B)] = \eth^E C_{AE} + \mathcal{O}(r^{-2}). \tag{4.153}$$

Provodimo integraciju:

$$\begin{aligned} \int \partial_r [r^4 e^{-2\beta} h_{AB} (\partial_r U^B)] dr =& r^4 e^{-2\beta} h_{AB} (\partial_r U^B) \\ =& r \eth^E C_{AE} + \mathcal{O}(r^{-1}) + g(u_0, x^A). \end{aligned} \tag{4.154}$$

Prethodni izraz možemo napisati u idućem obliku:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}(r^4 e^{-2\beta} h_{AB}(\partial_r U^B) - r\eth^E C_{AE}) = \mathcal{O}(r^{-1}) - \frac{1}{6} g(u_0, x^A), \\ & \to -\frac{1}{6} \lim_{r\to\infty} (r^4 e^{-2\beta} h_{AB}(\partial_r U^B) - r\eth^E C_{AE}) = \lim_{r\to\infty} (\mathcal{O}(r^{-1}) - \frac{1}{6} g(u_0, x^A)), \\ & \to L_A(u_0, x^A) = -\frac{1}{6} g(u_0, x^A). \end{aligned} \tag{4.155}$$

U posljednjem koraku smo iskoristili definiciju (4.127). Funkcija $g(u, x^A)$ je dakle dana izrazom $g(u, x^A) = -6 L_A(u, x^A)$. Uvrštavanjem u (4.154), nakon množenja s $e^{2\beta} r^{-4}$ dobivamo:

$$h_{AB}(\partial_r U^B) = \frac{1}{r^3} e^{2\beta} \eth^E C_{AE} - \frac{6}{r^4} e^{2\beta} L_A + \mathcal{O}(r^{-5}). \tag{4.156}$$

Prethodnu jednadžbu ćemo sada kontrahirati sa h^{AC}. Lijeva strana poprima oblik: $h^{AC} h_{AB}(\partial_r U^B) = \delta^C{}_B(\partial_r U^B) = \partial_r U^C$. Promotrimo dalje što daje kontrakcija desne strane:

$$\frac{1}{r^3} e^{2\beta} h^{AC} \eth^E C_{AE} - \frac{6}{r^4} e^{2\beta} h^{AC} L_A + \mathcal{O}(r^{-5}) =$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+2\beta+\mathcal{O}((2\beta)^2))(q^{AC}-\frac{C^{AC}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))\frac{1}{r^3}\eth^E C_{AE} \\
&-6(1+2\beta+\mathcal{O}((2\beta)^2))(q^{AC}-\frac{C^{AC}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))\frac{1}{r^4}L_A+\mathcal{O}(r^{-5}) \\
&= (1+2\cdot\frac{-1}{32}\frac{C^{HG}C_{HG}}{r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(q^{AC}-\frac{C^{AC}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))\frac{1}{r^3}\eth^E C_{AE} \\
&-6(1+2\cdot\frac{-1}{32}\frac{C^{HG}C_{HG}}{r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(q^{AC}-\frac{C^{AC}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))\frac{1}{r^4}L_A+\mathcal{O}(r^{-5}) \\
&= \frac{1}{r^3}q^{AC}\eth^E C_{AE}-\frac{1}{r^4}C^{AC}\eth^E C_{AE}-\frac{6}{r^4}q^{AC}L_A+\mathcal{O}(r^{-5}).
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

Dobivamo dakle jednadžbu:

$$
\partial_r U^C = \frac{1}{r^3}q^{AC}\eth^E C_{AE}-\frac{1}{r^4}(C^{AC}\eth^E C_{AE}+6q^{AC}L_A)+\mathcal{O}(r^{-5}),
\tag{4.158}
$$

koju ponovno integriramo po r:

$$
\begin{aligned}
\int \partial_r U^C =& U^C \\
=& -\frac{\eth^E C^C{}_E}{2r^2}+\frac{1}{r^3}(2L^C+\frac{1}{3}C^{AC}\eth^E C_{AE})+\mathcal{O}(r^{-4})+g(u,x^A).
\end{aligned}
\tag{4.159}
$$

Funkciju $g(u,x^A)$ određujemo pomoću 2. uvjeta u (4.121). Uzimanjem limesa prethodnog izraza odmah dobivamo:

$$
\lim_{r\to\infty} U^C(u,r,x^A) = g(u,x^A),
\tag{4.160}
$$

što znači da $g(u,x^A)$ isčezava. Rješenje poprima oblik:

$$
U^A = -\frac{\eth_B C^{AB}}{2r^2}+\frac{1}{r^3}(2L^A+\frac{1}{3}C^{AE}\eth^F C_{EF})+\mathcal{O}(r^{-4}).
\tag{4.161}
$$

U^A je dakle reda $\mathcal{O}(r^{-2})$, isto kao i funkcija β. Iz $E^u{}_u$ jednadžbe se na ekvivalentan način nalazi rješenje za koeficijent metrike V. Koristeći rubne uvjete (4.121), razvoj (4.123), rješenja za β i U^A (4.147) i (4.151) te definiciju (4.126), Einsteinova jednadžba (4.103) u vakuumu se može integrirati nakon čega proizlazi asimptotsko rješenje [11]:

$$
V(u,r,x^A) = r-2M(u,x^A)+\mathcal{O}(r^{-1}),
\tag{4.162}
$$

gdje je $M(u, x^A)$ Bondijeva masa uvedena u (4.126). Primjetimo da je (4.162) u skladu s trećim uvjetom u (4.121).

Spomenimo i da se umetanjem rješenja za β, U^A i V u 2. glavnu jednadžbu (4.120) u vodećem redu (uz $T_{AB} = 0$) dobiva [11]:

$$q^A q^B \partial_u d_{AB} = 0, \tag{4.163}$$

što je u skladu s uvjetima na determinantu.

Kako smo pronašli rješenja koeficijenata metrike, spremni smo provesti asimptotski razvoj linijskog elementa (4.26).

$$\begin{aligned}
ds^2 =& [-\frac{r - 2M + \mathcal{O}(r^{-1})}{r}(1 + 2\beta + \mathcal{O}((2\beta)^2) \\
&+ r^2(q_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + \frac{d_{AB}}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}))(\frac{-\eth_D C^{AD}}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}))\cdot \\
&(\frac{-\eth_E C^{BE}}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}))]du^2 \\
&- 2(1 + 2\beta + \mathcal{O}((2\beta)^2))dudr \\
&- 2r^2(q_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}))\cdot \\
&(\frac{-\eth_E C^{EB}}{2r^2} + \frac{1}{r^3}(2L^B + \frac{1}{3}C^{BE}\eth^F C_{EF}) + \mathcal{O}(r^{-4}))dudx^A \\
&+ r^2(q_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}))dx^A dx^B \\
=& [-1 + \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})]du^2 + [-2 + \frac{C^{AB}C_{AB}}{8r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})]dudr \\
&+ [q_{AB}\eth_E C^{EB} + \frac{1}{r}(-4q_{AB}L^B - \frac{2}{3}q_{AB}C^{BE}\eth^F C_{EF} + C_{AB}\eth_E C^{EB}) \\
&+ \mathcal{O}(r^{-2})]dudx^A \\
&+ [r^2 q_{AB} + rC_{AB} + \mathcal{O}(1)]dx^A dx^B.
\end{aligned} \tag{4.164}$$

Zadnja jednakost se simplificira u iduću formu:

$$\begin{aligned}
ds^2 =& [-1 + \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})]du^2 + [-2 + \frac{C^{AB}C_{AB}}{8r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})]dudr \\
&+ [\eth^E C_{EA} + \frac{1}{r}(\frac{1}{3}C_{AB}\eth_E C^{EB} + 4L_A) + \mathcal{O}(r^{-2})]dudx^A \\
&+ [r^2 q_{AB} + rC_{AB} + \mathcal{O}(1)]dx^A dx^B.
\end{aligned} \tag{4.165}$$

Iz (4.165) očitavamo kako koeficijenti metrike opadaju u asimptotskom razvoju:

$$
\begin{aligned}
g_{uu} &= -1 + \mathcal{O}(r^{-1}), \\
g_{ur} &= -1 + \mathcal{O}(r^{-2}), \\
g_{uA} &= 0 + \mathcal{O}(1), \\
g_{AB} &= r^2 q_{AB} + \mathcal{O}(r), \\
g_{rr} &= g_{rA} = 0.
\end{aligned} \tag{4.166}
$$

Za naše potrebe, korisniji će biti oblik metrike (4.165) u kojem su sadržane samo prve popravke:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &- du^2 - 2dudr + r^2 q_{AB} dx^A dx^B \\
&+ \frac{2M}{r} du^2 + r C_{AB} dx^A dx^B + \eth^E C_{EA} du dx^A + ...
\end{aligned} \tag{4.167}
$$

Primjećujemo da su prva tri člana metrika Minkowskog. Koeficijent g_{ur} ne sadrži faktor reda r^1 (koji bi bio idući član u razvoju budući da je ravni dio reda r^0), već odmah opada s $\mathcal{O}(r^{-2})$. Ravna metrika ne sadrži g_{uA}, ali iz (4.165) vidimo da ovaj koeficijent u ekspanziji Bondijeve metrike počinje opadati s članom reda r^0, koji zadržavamo u (4.167).

Prije analize evolucije Bondijeve mase, promotrimo na kratko što nam daje prvi dodatni uvjet (4.64). U vodećem redu, Einsteinova jednadžba $E^r{}_A = 0$ u vakuumu daje [11]:

$$
\begin{aligned}
-3\partial_u L_A = &\eth_A M - \frac{1}{4}\eth^E(\eth_E \eth^F C_{AF} - \eth_A \eth^F C_{EF}) + \frac{1}{8}\eth_A(C_{EF}N^{EF}) \\
&- \eth_C(C^{CF}N_{FA}) + \frac{1}{2}C^{EF}(\eth_A N_{EF}).
\end{aligned} \tag{4.168}
$$

Prethodnu jednadžbu nećemo dokazivati jer nije nužna za analizu supertranslacija. Uočimo ipak da (4.168) uistinu predstavlja jednadžbu evolucije aspekta angularnog momenta L_A, te je isti specificiran sa N_{AB} za $u_0 \leq u \leq u_1$, početnim vrijednostima od L_A i M i vrijednošću tenzora C_{AB} uz $u = u_0$. Ukoliko bismo 1. dodatni uvjet raspisali s uključenim tenzorom energije-impulsa, tada bi izraz (4.168) sadržavao faktor $r^2 T^r{}_A$ (do na faktor G) koji je proporcionalan toku angularnog momenta kada $r \to \infty$. Iz tog razloga L_A dobiva svoj naziv. Osvrnut ćemo se kasnije još jednom na (4.168) kada budemo govorili o superrotacijama.

Došlo je vrijeme da funkciju $M(u, x^A)$ interpretiramo kao masu. Uočimo da ako u (4.25) postavimo $U^A = 0$, $\beta = 0$, $h_{AB} = q_{AB}$ i $V = r - 2M$ (što je ekvivalentno zanemarivanju svih $\mathcal{O}(r^{-1})$ članova u razvoju koeficijenata metrike), linijski element u asimptotskom području poprima oblik:

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2M(u, x^A)}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 q_{AB} dx^A dx^B. \tag{4.169}$$

S druge strane, Eddington-Finkelsteinov oblik Schwarzschildove metrike je dan izrazom [5]:

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2Gm}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 q_{AB} dx^A dx^B, \tag{4.170}$$

gdje $m = konst.$ predstavlja masu gravitacijskog izvora, odnosno crne rupe. Ovime smo u biti razrješili pitanje prirode singulariteta u centru. Točka $r = 0$ predstavlja geometrijski singularitet koji ne možemo ukloniti alternativnim odabirom koordinata. Ekvivalentnost izraza (4.169) i (4.170) je očita; ukoliko bismo se ograničili na statično sferno simetrično prostor-vrijeme, Bondijeva masa bi se svela na Schwarzschildovu. Preciznije, (uz $M = konst.$) vrijedilo bi $m = \frac{M}{G}$. Općenitije, $M(u, x^A)$ ovisi o vremenu i masa se može gubiti kroz gravitacijsko zračenje, što ćemo sada i pokazati. Drugi dodatni uvjet (4.65) u vodećem redu (uz $T_{\mu\nu} = 0$) daje iduću jednadžbu:

$$2\partial_u M = \eth_A \eth_B N^{AB} - N_{AB} N^{AB}. \tag{4.171}$$

Ova jednadžba je egzaktna u limesu $r \to \infty$. Njen dokaz je proveden u dodatku C. U idućem podpoglavlju ćemo specificirati angularne koordinate kao $x^A = (z, \bar{z})$, ali za sada odaberimo Θ i ϕ. Ukupna vremenski ovisna Bondijeva masa se definira kao integral po S^2 u prostornoj beskonačnosti [11]:

$$m(u) = \frac{1}{4\pi} \oint M(u, \Theta, \phi) sin(\Theta) d\Theta d\phi. \tag{4.172}$$

Ovaj izraz slijedi iz općenitijeg integrala:

$$m(u) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S^2} d^2 y r^2 \sqrt{|det q_{AB}|} M(u, \Theta, \phi), \tag{4.173}$$

uz $\sqrt{|detq_{AB}|} = sin(\Theta)$ i $d^2y = d\Theta d\phi$. Treba biti oprezan i prisjetiti se da na 2-sferi s radijusom r vrijedi $\sqrt{|det\tilde{q}_{AB}|} = r^2 sin(\Theta)$. Odnosno, volumni element na S^2 radijusa r s metrikom $\tilde{q}_{AB} = r^2 q_{AB}$ je jednak volumnom elementu na σ (4.86) jer vrijedi $deth_{AB} = detq_{AB}$. Integrirajmo sada po sferi (4.171):

$$\oint 2\partial_u M sin(\Theta) d\Theta d\phi = \oint \eth_A \eth_B N^{AB} sin(\Theta) d\Theta d\phi - \oint N_{AB} N^{AB} sin(\Theta) d\Theta d\phi. \tag{4.174}$$

Stokesov teorem je dan idućom jednadžbom:

$$\int_M d^n x \sqrt{|g|} \nabla_\mu V^\mu = \int_{\partial M} d^{n-1} y \sqrt{|\gamma|} n_\mu V^\mu, \tag{4.175}$$

gdje je M n-dimenzionalna mnogostrukost s koordinatama x^μ ($\mu = 1, .., n$) i ∂M rub iste mnogostrukosti s koordinatama y^i ($i = 1, ..., n-1$). Dakako, γ predstavlja determinantu metrike γ_{ij} inducirane na ∂M, dok je n^μ jedinični vektor okomit na ∂M. Primjetimo sada da prvi integral s desne strane izraza (4.174) možemo zapisati u idućem obliku:

$$\oint \eth_A \eth_B N^{AB} sin(\Theta) d\Theta d\phi = \int_{S^2} d^2 y \sqrt{|detq_{AB}|} \eth_A V^A, \tag{4.176}$$

gdje smo uveli vektor $V^A = \eth_B N^{AB}$. Prema Stokesovom teoremu, ovaj integral bismo mogli prevesti u integral po rubu S^2, no kako S^2 ruba nema, izraz isčezava. Definirat ćemo još jednu veličinu koristeći vektore iz (4.128) [11]:

$$N = \frac{1}{\chi\bar{\chi}} q^A q^B N_{AB}. \tag{4.177}$$

Riječ je o kompleksnoj funkciju koju zovemo funkcija novosti. Istu ne treba miješati sa tragom tenzora novosti. Primjetimo prvo da vrijedi:

$$|N|^2 = N\bar{N} = \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2} q^A q^B \bar{q}^C \bar{q}^D N_{AB} N_{CD}, \tag{4.178}$$

jer N_{AB} mora biti realan. Sada ćemo raspisati skalar $N_{AB} N^{AB}$ koji se nalazi u integrandu izraza (4.174).

$$
\begin{aligned}
N_{AB}N^{AB} =& N_{AB}N_{CD}q^{AC}q^{BD} \\
=& \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}[q^A\bar{q}^C + q^C\bar{q}^A][q^B\bar{q}^D + q^D\bar{q}^B] \\
=& \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}q^Aq^B\bar{q}^C\bar{q}^D + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}q^Cq^D\bar{q}^A\bar{q}^B \\
&+ \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}q^Aq^D\bar{q}^C\bar{q}^B + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}q^Cq^B\bar{q}^A\bar{q}^D \\
=& 2|N|^2 + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}q^Aq^D\bar{q}^C\bar{q}^B + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}q^Cq^B\bar{q}^A\bar{q}^D \\
=& 2|N|^2 + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{AB}N_{CD}q^Aq^D\bar{q}^C\bar{q}^B + \frac{1}{(\chi\bar{\chi})^2}N_{BA}N_{CD}q^Cq^A\bar{q}^B\bar{q}^D \\
=& 2|N|^2 + \frac{1}{\chi\bar{\chi}}q^A\bar{q}^B\frac{1}{\chi\bar{\chi}}[q^D\bar{q}^C + q^C\bar{q}^D]N_{AB}N_{CD} \\
=& 2|N|^2 + \frac{1}{\chi\bar{\chi}}q^A\bar{q}^Bq^{DC}N_{AB}N_{CD} \\
=& 2|N|^2 + \frac{1}{\chi\bar{\chi}}q^A\bar{q}^BN_{AB}N^C{}_C \\
=& 2|N|^2.
\end{aligned}
\tag{4.179}
$$

U petoj jednakosti smo napravili preimenovanja slijepih indeksa $A \leftrightarrow B$ te smo nakon toga iskoristili simetričnost tenzora N_{AB} i činjenicu da mu trag isčezava (svojstva koja nasljeđuje od C_{AB}). Jednadžba (4.174) postaje:

$$
\oint \partial_u M sin(\Theta)d\Theta d\phi = -\oint |N|^2 sin(\Theta)d\Theta d\phi. \tag{4.180}
$$

Iskorištavamo identitet $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt$ i deriviramo (4.172) po retardiranom vremenu. Slijedi:

$$
\frac{dm(u)}{du} = \frac{1}{4\pi}\oint \partial_u M(u,\Theta,\phi)sin(\Theta)d\Theta d\phi. \tag{4.181}
$$

Konačno, koristeći (4.180) (što možemo napraviti jer se integracija provodi u prostornoj beskonačnosti) dobivamo:

$$
\frac{dm(u)}{du} = -\frac{1}{4\pi}\oint |N|^2 sin(\Theta)d\Theta d\phi. \tag{4.182}
$$

Ovo je Bondijeva formula koja opisuje kako se masa gubi uslijed gravitacijskog zračenja. Ako sustav ne emitira gravitacijske valove, odnosno ako imamo $N_{AB} = 0 \rightarrow |N|^2 = 0$, tada je masa konstantna i ne mijenja se u vremenu. S druge strane, pozitivnost integranda u (4.182) nam govori da se uz funkciju novosti različitu od nule masa mora smanjivati.

Za kraj, spomenimo da jednadžba (4.171) uz tenzor enegije-impulsa različit od nule sadrži doprinos T_{uu}. Uz alternativnu definiciju tenzora novosti (4.138) ($N_{AB} = \frac{1}{2}\tilde{N}_{AB}$), izraz (4.171) poprima oblik [15]:

$$\partial_u M = \frac{1}{4}\eth_A\eth_B\tilde{N}^{AB} - \frac{1}{8}\tilde{N}_{AB}\tilde{N}^{AB} - 4\pi G \lim_{r\to\infty}[r^2 T^M_{uu}]. \tag{4.183}$$

Pri čemu smo vratili Newtonovu gravitacijsku konstantu i uveli oznaku $T_{uu} \to T^M_{uu}$ kako bismo naznačili da je riječ o tenzoru energije-impulsa bezmasenih čestica ("massles modes"). Razlog ovome je što na $\mathcal{I}^+$ poniru svjetlosni geodezici pa u ovom području ima smisla govoriti o prisustvu takve materije (poput bezmasenih skalarnih čestica). Kako je kvadrat tenzora novosti proporcionalan energiji gravitacijskih valova, možemo uvesti definiciju [15]:

$$\tilde{T}_{uu} = \frac{1}{8}\tilde{N}_{AB}\tilde{N}^{AB} + 4\pi G \lim_{r\to\infty}[r^2 T^M_{uu}], \tag{4.184}$$

tako da (4.183) pišemo u formi:

$$\partial_u M = \frac{1}{4}\eth_A\eth_B\tilde{N}^{AB} - \tilde{T}_{uu}. \tag{4.185}$$

4.4 Supertranslacije

U ovom podpoglavlju ćemo vidjeti kakve simetrije opisuje generator difeomorfizma izveden u dodatku E u blizini $\mathcal{I}^+$. Nismo zahtjevali da ovaj generator bude egzaktna izometrija Bondijeve metrike, odnosno, Liejeva derivacija metrike u svojoj punoj formi ne isčezava. Ono što jesmo zahtijevali jest da isčezava Liejeva derivacija ravnog dijela metrike. Kako je u proizvoljnoj blizini buduće svjetlosne beskonačnosti metrika praktički ravna, logično je očekivati da ćemo ovdje pronaći Poincaréovu grupu. No, kao što ćemo vidjeti ubrzo, asimptotski generator difeomorfizma daje puno više od toga.

Prvo ćemo konačno napraviti specifikaciju $x^A = (z, \bar{z})$. Koristimo dakle oblik metrike na jediničnoj S^2 koji je dan u (3.16). Kako bi nam kasniji izračuni bili jednostavniji, pozabavit ćemo se svojstvima tenzora C_{AB} i N_{AB} uz ovakav odabir koordinata. Prisjetimo se prvo da su zadovoljeni idući identiteti:

$$\begin{aligned}
&C_{AB} = C_{BA}, \quad N_{AB} = N_{BA}, \\
&C^{AB} = C^{BA}, \quad N^{AB} = N^{BA}, \\
&C^{A}{}_{B} = C_{B}{}^{A}, \quad N^{A}{}_{B} = N_{B}{}^{A}, \\
&q^{AB}C_{AB} = C^{A}{}_{A} = 0, \quad q^{AB}N_{AB} = q^{AB}\frac{1}{2}\partial_u C_{AB} = \frac{1}{2}\partial_u q^{AB}C_{AB} = N^{A}{}_{A} = 0.
\end{aligned} \tag{4.186}$$

Tenzor novosti nasljeđuje sva svojstva koja ima C_{AB} jer metrika na sferi može ući pod parcijalnu derivaciju po retardiranom vremenu (ne ovisi o koordinati u). Promotrimo prvo:

$$\begin{aligned}
C^{z\bar{z}} &= q^{zA}C_{A}{}^{\bar{z}} = \gamma^{z\bar{z}}C_{\bar{z}}{}^{\bar{z}} \\
C^{z\bar{z}} &= C^{\bar{z}z} = q^{\bar{z}A}C_{A}{}^{z} = \gamma^{z\bar{z}}C_{z}{}^{z}.
\end{aligned} \tag{4.187}$$

Dakle vrijedi $C_{z}{}^{z} = C_{\bar{z}}{}^{\bar{z}}$ i $C^{z}{}_{z} = C^{\bar{z}}{}_{\bar{z}}$. No iz 4. identiteta u (4.186) vidimo da možemo pisati:

$$C^{A}{}_{A} = C^{z}{}_{z} + C^{\bar{z}}{}_{\bar{z}} = 2C^{z}{}_{z} = 0. \tag{4.188}$$

Zaključujemo:

$$C_{z}{}^{z} = C_{\bar{z}}{}^{\bar{z}} = C^{z}{}_{z} = C^{\bar{z}}{}_{\bar{z}} = 0. \tag{4.189}$$

Ukoliko iskoristimo: $C_{z\bar{z}} = q_{zA}C^{A}{}_{\bar{z}} = \gamma_{z\bar{z}}C^{\bar{z}}{}_{\bar{z}}$ i svojstva (4.187), iz (4.189) slijedi:

$$\begin{aligned}
C_{z\bar{z}} &= C_{\bar{z}z} = 0, \\
C^{z\bar{z}} &= C^{\bar{z}z} = 0.
\end{aligned} \tag{4.190}$$

Uočimo još da možemo pisati:

$$C_{zz}C^{zz} = q_{zA}q_{zB}C^{AB}q^{zC}q^{zD}C_{CD} = \gamma_{z\bar{z}}\gamma_{z\bar{z}}\gamma^{z\bar{z}}\gamma^{z\bar{z}}C_{\bar{z}\bar{z}}C^{\bar{z}\bar{z}}. \tag{4.191}$$

Kako vrijedi $\gamma_{z\bar{z}}\gamma_{z\bar{z}}\gamma^{z\bar{z}}\gamma^{z\bar{z}} = 1$, imamo i:

$$C_{zz}C^{zz} = C_{\bar{z}\bar{z}}C^{\bar{z}\bar{z}}. \tag{4.192}$$

Svojstva (4.189), (4.190) i (4.192) jednako vrijede i za tenzor novosti. Napišimo sada metriku (4.167) u ovim koordinatama:

$$\begin{aligned} ds^2 =& -du^2 - 2dudr + r^2 q_{AB}dx^A dx^B \\ &+ \frac{2M}{r}du^2 + rC_{AB}dx^A dx^B + \eth^E C_{EA}dudx^A + ... \\ =& -du^2 - 2dudr + r^2 q_{z\bar{z}}dzd\bar{z} + r^2 q_{\bar{z}z}d\bar{z}dz \\ &+ \frac{2M}{r}du^2 + rC_{zz}dzdz + rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}d\bar{z} + \eth^E C_{Ez}dudz + \eth^E C_{E\bar{z}}dud\bar{z} + ... \end{aligned} \tag{4.193}$$

Iz prethodno dokazanih svojstava dobivamo:

$$\begin{aligned} ds^2 =& -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \\ &+ \frac{2M}{r}du^2 + rC_{zz}dzdz + rC_{\bar{z}\bar{z}}d\bar{z}d\bar{z} + \eth^z C_{zz}dudz + \eth^{\bar{z}} C_{\bar{z}\bar{z}}dud\bar{z} + ... \end{aligned} \tag{4.194}$$

Trebat će nam i jednadžba evolucije Bondijeve mase:

$$\begin{aligned} 2\partial_u M =& \eth_A\eth_B N^{AB} - N_{AB}N^{AB} \\ =& \eth_z\eth_z N^{zz} + \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}} N^{\bar{z}\bar{z}} - N_{zz}N^{zz} - N_{\bar{z}\bar{z}}N^{\bar{z}\bar{z}} \\ \rightarrow& \partial_u M = \frac{1}{2}[\eth_z\eth_z N^{zz} + \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}} N^{\bar{z}\bar{z}}] - N_{zz}N^{zz} \end{aligned} \tag{4.195}$$

Prethodni izraz možemo pisati i u idućem obliku:

$$\partial_u M = \frac{1}{4}[\eth_z\eth_z \tilde{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}} \tilde{N}^{\bar{z}\bar{z}}] - \frac{1}{4}\tilde{N}_{zz}\tilde{N}^{zz}, \tag{4.196}$$

ili (uz uključen tenzor energije-impulsa):

$$\partial_u M = \frac{1}{4}[\eth_z\eth_z \tilde{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}} \tilde{N}^{\bar{z}\bar{z}}] - \tilde{T}_{uu}, \tag{4.197}$$

gdje je:

$$\tilde{T}_{uu} = \frac{1}{4}\tilde{N}_{zz}\tilde{N}^{zz} + 4\pi G \lim_{r\to\infty}[r^2 T^M_{uu}]. \tag{4.198}$$

Okrenimo se konačno analizi translacija duž integralnih krivulja definiranih s vektorskim poljem (E.79). Čitatelj bi prvo trebao proučiti dodatak E da bi mu bilo jasno na temelju kakvih uvjeta je ovo vektorsko polje izvedeno. Općenito o difeomorfizmima i translacijama je više rečeno u dodatku D. Postavimo za sada konformni Killingov vektor na S^2 iz (E.79) na nulu: $f^A = 0$. Ovime eliminiramo potiske i rotacije koji rastu s r u beskonačnosti [15]. Uz ovaj uvjet, generator difeomorfizma poprima oblik:

$$\xi_\alpha = \alpha\partial_u + \frac{1}{2}\eth_C\eth^C\alpha\partial_r - \frac{1}{r}\eth^A\alpha\partial_A + ..., \tag{4.199}$$

odnosno:

$$\xi_\alpha = \alpha\partial_u - \frac{1}{r}\eth^z\alpha\partial_z - \frac{1}{r}\eth^{\bar{z}}\alpha\partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2}(\eth^z\eth_z\alpha + \eth^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha)\partial_r + ..., \tag{4.200}$$

gdje smo zadržali samo dominantne članove. Transformacije generirane s (4.200) se zovu supertranslacije. Ako odaberemo $\alpha = konst.$, tada očito dobivamo vremenske, odnosno u-translacije. Ukoliko funkciju α odaberemo da bude $l = 1$ harmonik, tada se dobiju tri prostorne translacije [15]. Potonje nije toliko očito, ali nije nam ni interesantno za daljnju analizu pa tvrdnju nećemo dokazivati. Promotrimo što nam daje konačna translacija retardiranog vremena uz proizvoljnu funkciju $\alpha(z,\bar{z})$. Koristimo (D.36):

$$u(\epsilon) = e^{\epsilon\xi^u_\alpha(u(\epsilon=0))\partial_u}u(\epsilon = 0). \tag{4.201}$$

Parametar ϵ kojim određujemo za koliko smo se pomaknuli duž integralne krivulje je proizvoljan pa možemo postaviti $\epsilon = 1$. Uvest ćemo i oznake $u(\epsilon = 0) = u$ i $u(\epsilon = 1) = u'$. Uvrštavamo ξ^u_α i razvijamo prethodni izraz:

$$\begin{aligned} u' =& e^{\alpha\partial_u}u \\ =& (1 + \alpha\partial u + \frac{1}{2!}\alpha\partial_u(\alpha\partial_u) + ...)u. \end{aligned} \tag{4.202}$$

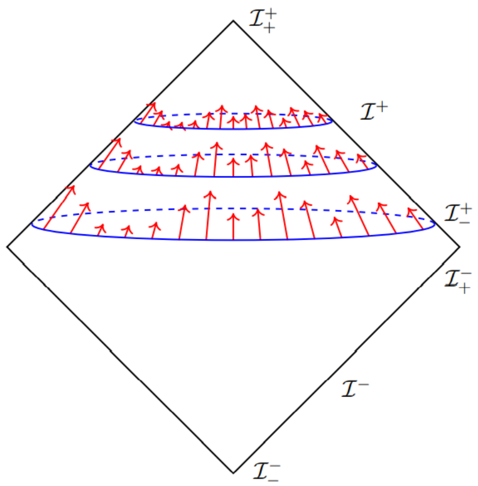
Promotrimo faktor uz $1/2!$:

$$\alpha\partial_u(\alpha\partial_u) = \alpha^2\partial_u^2 + \alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}\partial_u \tag{4.203}$$

Prvi član isčezava jer operator djeluje na u, odnosno druga derivacija daje nulu. Drugi član je također jednak nuli jer α ovisi samo o angularnim koordinatama. Ostali faktori u razvoju isčezavaju ekvivalentno. Dakle dobivamo:

$$u' = u + \alpha(z, \bar{z}). \tag{4.204}$$

Pomoću (E.80), na isti način (uz $f^A = 0$) možemo supertranslatirati retardirano vrijeme duž $\mathcal{I}^+$. Kako je funkcija α proizvoljna, (4.204) nam dopušta odvojene translacije duž svakog svjetlosnog generatora buduće svjetlosne beskonačnosti. Princip je prikazan na slici 4.2.



Slika 4.2: Uslijed supertranslacije, retardirano vrijeme se mijenja nezavisno na svakom kutu na $\mathcal{I}^+$. Preuzeto iz [15].

Analizirajmo idući primjer. Neka imamo gravitacijski val koji prelazi sjeverni pol od $\mathcal{I}^+$ u retardiranom vremenu $u = 100$, i drugi val koji prelazi južni pol od $\mathcal{I}^+$ također u retardiranom vremenu $u = 100$. Ova rješenja možemo supertranslatirati pomoću funkcije $\alpha(z, \bar{z})$ koju biramo kao:

$$\alpha(z, \bar{z}) = 100 \frac{z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}. \tag{4.205}$$

Na sjevernom polu (NP) vrijedi $z = 0$ pa imamo $\alpha(NP) = 0$. Na južnom polu (SP) z divergira i uzimajući limes $z \to \infty$ u (4.205) slijedi jednakost $\alpha(SP) = 100$. Iz

(4.204) dobivamo:

$$\begin{aligned} u'(NP) &= 100 + \alpha(NP) = 100, \\ u'(SP) &= 100 + \alpha(SP) = 200. \end{aligned} \tag{4.206}$$

Dakle izlazni podatci su mjerljivo promjenjeni. Možemo zaključiti da supertranslacije mijenjaju jednu geometriju u drugu, fizikalno neekvivalentnu geometriju [15], iako je riječ o difeomorfizmima. Proizvoljnost funkcije α implicira i postojanje beskonačno očuvanih naboja na $\mathcal{I}^+$, što ćemo pokazati ubrzo.

Ako postavimo α na nulu, ali ne zahtjevamo iščezavanje konformnog Killingovog vektora f^A, generator (E.79) postaje:

$$\xi_f = \frac{u}{2}\eth_A f^A \partial_u - \frac{u+r}{2}\eth_C f^C \partial_r + (f^A - \frac{u}{2r}\eth^A \eth_C f^C)\partial_A + ... \tag{4.207}$$

Čitatelj se može uvjeriti da uz odabire $f^z = 1, z, z^2, i, iz, iz^2$ (4.207) generira Lorentzove transformacije, odnosno potiske i rotacije [15]. Ništa nas ne sprječava da $f^A(z, \bar{z})$ odaberemo na bilo koji drugi način (jedini uvjet je da bude konformni Killingov vektor na S^2), time dobivamo tzv. superrotacije.

Da rezimiramo, uz prikladne odabire funkcija $\alpha(z, \bar{z})$ i vektora $f^A(z, \bar{z})$ dobivamo četiri prostorno-vremenske translacije i šest Lorentzovih transformacija, što daje 10-dimenzionalnu Poincaréovu grupu. No kako za α i f^A postoji beskonačno mogućih odabira, generatori (E.78) čine beskonačno dimenzionalnu grupu [16] sa Poincaréovom podgrupom. Ova grupa simetrija nosi naziv BMS (Bondi-Metzner-Sachs) grupa.

Sada ćemo konstruirati očuvane naboje asocirane sa supertranslacijskim generatorom difeomorfizma. U dodatku E je pokazano da je energija Schwarzschildovog prostora dana Komarovim integralom:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{|detq_{ij}|} K^0 Gm, \tag{4.208}$$

gdje je K^0 vremenoliki Killingov vektor, $detq_{ij}$ metrika na jediničnoj 2-sferi i m Schwarzschildova masa. Integracija se provodi po $\partial\Sigma$, odnosno po S^2 u prostornoj beskonačnosti. Schwarzschildov prostor je dakako statičan, ali integracija se provodi u prostornoj beskonačnosti i Komarov integral je važeći neovisno o tome što se dešava u unutrašnjosti. Prostor-vrijeme može biti vremenski ovisno; jedini uvjet je da bude asimptotski ravno i da je K^μ asimptotski Killingov vektor. Već smo pokazali da se u asimptotskom području Bondijeva metrika svodi na Schwarzschildovu uz zamjenu $M(u, z, \bar{z}) \to Gm$. Kako je ξ^u_α asimptotski Killingov vektor koji generira supertranslacije, očuvane naboje možemo dobiti direktno iz (4.208) zamjenom $K^0 \to \xi^0_\alpha$. Razmotrimo još gdje se nalazi prostor $\partial\Sigma$ u kontekstu Penroseovih dijagrama. Riječ je o 2-sferi u prostornoj beskonačnosti. Kako je prošlost buduće svjetlosne beskonačnosti $\mathcal{I}^+_-$ u biti S^2 gdje je zadovoljeno $u \to -\infty$, $r \to +\infty$ i $t = konst. > 0$ (jer se nalazi u proizvoljnoj blizini točke i^0), ovo je regija gdje provodimo integraciju. Determinanta metrike na jediničnoj sferi u $x^A = (z, \bar{z})$ je dana izrazom (4.12). Dakle provodimo zamjene u (4.208):

$$\begin{aligned}
&Gm \to M_{\mathcal{I}^+_-}, \\
&d^2x \to d^2z = dzd\bar{z}, \\
&\sqrt{|detq_{ij}|} \to \gamma_{z\bar{z}}, \\
&K^0 = 1 \to \xi^u_\alpha = \alpha, \\
&\partial\Sigma \to \mathcal{I}^+_-,
\end{aligned} \tag{4.209}$$

gdje je $M_{\mathcal{I}^+_-} = M(u \to -\infty, z, \bar{z})$. Prema tome, Očuvani naboji asocirani sa supertranslacijama su:

$$Q^+_\alpha = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}^+_-} d^2z\gamma_{z\bar{z}}\alpha M_{\mathcal{I}^+_-} \tag{4.210}$$

Za $\alpha = 1$ dobivamo ukupnu energiju, ali kako je izbor ove funkcije neograničen, prethodni izraz daje beskonačno očuvanih naboja koji su energiji ravnopravni. Iskoristit ćemo sada jednadžbu evolucije Bondijeve mase (4.197). Napominjemo još jednom da ovu jednadžbu možemo smatrati egzaktnom na $\mathcal{I}^+$. Koristimo identitet $\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx = f(b, y) - f(a, y)$ i provodimo integraciju:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_u M(u, z, \bar{z}) du = M(+\infty, z, \bar{z}) - M(-\infty, z, \bar{z}) = M_{\mathcal{I}^+_+} - M_{\mathcal{I}^+_-}. \tag{4.211}$$

Pretpostavit ćemo da je masa u dalekoj budućnosti u potpunosti isčeznula uslijed gravitacijskog zračenja prema (4.182). Postavljamo dakle: $M_{\mathcal{I}^+_+} = 0$. Iz (4.197) slijedi:

$$-M_{\mathcal{I}^+_-} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}[\eth_z \eth_z \tilde{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \tilde{N}^{\bar{z}\bar{z}}] - \tilde{T}_{uu} \right) du. \tag{4.212}$$

Uvrštavanjem u (4.210) odmah dobivamo:

$$Q^+_\alpha = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}^+} dud^2z \gamma_{z\bar{z}} \alpha \left[\tilde{T}_{uu} - \frac{1}{4}(\eth_z \eth_z \tilde{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \tilde{N}^{\bar{z}\bar{z}}) \right]. \tag{4.213}$$

Pritom smo iskoristili činjenicu da integracija po S^2 u prostornoj beskonačnosti i po retardiranom vremenu od $-\infty$ do $+\infty$ daje integraciju po cijeloj trodimenzionalnoj površini $\mathcal{I}^+$. Integral (4.213) sadrži standardni član koji uključuje tenzor-energije impulsa, ali i dodatni faktor koji je linearan u gravitacijskom polju (doprinos mekanog gravitona lokalnoj energiji).

Očuvani angularni moment J se također može dobiti integracijom u prostornoj beskonačnosti [5]:

$$J = \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{|\gamma^{(2)}|} n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu R^\nu, \tag{4.214}$$

gdje je R^ν rotacijski Killingov vektor. Koristeći generator difeomorfizma ξ_f i jednadžbu evolucije angularnog momenta (4.168), na sličan način se dobiva beskonačno očuvanih naboja asociranih sa superrotacijama [15].

Do sada smo se bavili analizom fizikalnih fenomena na $\mathcal{I}^+$, ali potpuno analogna priča se odvija i na $\mathcal{I}^-$. Asimptotski razvoj metrike u naprednim Bondijevim koordinatama (3.23) ima oblik [15]:

$$\begin{aligned} ds^2 = &- dv^2 + 2dvdr + 2r^2 \gamma_{z\bar{z}} dz d\bar{z} \\ &+ \frac{2\mathring{M}}{r} dv^2 + r\mathring{C}_{zz} dz^2 + r\mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}^2 - \eth^z \mathring{C}_{zz} dvdz - \eth^{\bar{z}} \mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}} dvd\bar{z} + ..., \end{aligned} \tag{4.215}$$

gdje sada $\mathring{M}$ i $\mathring{C}_{AB}$ ovise o koordinatama $(v, z, \bar{z})$. Kako ne bi došlo do kaosa s oznakama, veličine u naprednim koordinatama ćemo označavati isto kao i do sada ali ćemo iznad njih stavljati male kružiće. Tenzor novosti definiramo u (4.138):

$$\mathring{N}_{AB} = \partial_v \mathring{C}_{AB}. \tag{4.216}$$

Jednadžba evolucije Bondijeve mase (uz uključen tenzor energije-impulsa) jest [15]:

$$\partial_v \mathring{M} = \frac{1}{4}(\eth_z \eth_z \mathring{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \mathring{N}^{\bar{z}\bar{z}}) + \tilde{T}_{vv}, \tag{4.217}$$

gdje je:

$$\tilde{T}_{vv} = \frac{1}{4} \mathring{N}_{zz} \mathring{N}^{zz} + 4\pi G \lim_{r\to\infty} [r^2 T^M_{vv}]. \tag{4.218}$$

Uz supertranslacijski generator difeomorfizma [16]:

$$\xi_{\mathring{\alpha}} = \mathring{\alpha}\partial_v + \frac{1}{r}\eth^z \mathring{\alpha}\partial_z + \frac{1}{r}\eth^{\bar{z}} \mathring{\alpha}\partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2}(\eth^z \eth_z \mathring{\alpha} + \eth^{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \mathring{\alpha})\partial_r + ..., \tag{4.219}$$

asocirani očuvani naboji su:

$$Q^-_{\mathring{\alpha}} = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}^-_+} d^2 z \gamma_{z\bar{z}} \mathring{\alpha}(z, \bar{z}) \mathring{M}_{\mathcal{I}^-_+}. \tag{4.220}$$

U ovom slučaju se integracija provodi po $\mathcal{I}^-_+$ jer riječ o S^2 gdje je zadovoljeno $v \to \infty$, $r \to \infty$ i $t = konst. < 0$. Sada ćemo iskoristiti jednadžbu evolucije Bondijeve mase na $\mathcal{I}^-$ kako bismo očuvane naboje izrazili preko tenzora novosti. Promotrimo prvo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_v \mathring{M}(v, z, \bar{z}) dv = \mathring{M}(+\infty, z, \bar{z}) - \mathring{M}(-\infty, z, \bar{z}) = \mathring{M}_{\mathcal{I}^-_+} - \mathring{M}_{\mathcal{I}^-_-}. \tag{4.221}$$

Više o rubnim uvjetima na $\mathcal{I}^+$ i $\mathcal{I}^-$ ćemo reći uskoro. Za sada spomenimo samo da treba vrijediti $\mathring{M}_{\mathcal{I}^-_-} = 0$. Ovaj zahtjev je ekvivalentan tvrdnji da u dalekoj prošlosti crna rupa nije formirana [16]. Iz (4.218) i (4.221) slijedi:

$$Q^-_{\mathring{\alpha}} = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}^-} dv d^2 z \gamma_{z\bar{z}} \mathring{\alpha} \left[\tilde{T}_{vv} + \frac{1}{4}(\eth_z \eth_z \mathring{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \mathring{N}^{\bar{z}\bar{z}}) \right]. \tag{4.222}$$

Sada ćemo usvojiti zahtjev prema kojem se naš asimptotski ravni prostor svodi na vakuum u dalekoj prošlosti i budućnosti. Rigoroznu definiciju takvih prostora su dali Christodoulon i Klainerman (CK) [6]. Pokazano je da u CK prostoru u blizini $\mathcal{I}^+_+$

$(u \to \infty)$ i $\mathcal{I}^+_-$ $(u \to -\infty)$ tenzor novosti opada kao [16]:

$$\tilde{N}_{zz}(u) \sim |u|^{-3/2}, \tag{4.223}$$

ili brže. Kako je kvadrat tenzora novosti proporcionalan toku energije gravitacijskog zračenja, $\tilde{N}_{zz}$ mora iščezavati na rubovima buduće svjetlosne beskonačnosti. U suprotnom bi sustav imao beskonačnu količinu energije. Imamo dakle:

$$\tilde{N}_{zz}(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}^+_+} = 0, \qquad \tilde{N}_{zz}(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} = 0. \tag{4.224}$$

Istovjetni uvjeti moraju vrijediti i za $\tilde{N}_{\bar{z}\bar{z}}$. Nadalje, u CK prostorima komponenta Weylove zakrivljenosti $\Psi_2^{(0)}$ (aspekt magnetske mase) koja u retardiranim Bondijevim koordinatama ima oblik [16]:

$$\Psi_2^{(0)}(u, z, \bar{z}) = -\lim_{r \to \infty} (r C_{uzr\bar{z}} \gamma^{z\bar{z}}), \tag{4.225}$$

zadovoljava jednadžbe:

$$\Psi_2^{(0)}|_{\mathcal{I}^+_+} = 0, \qquad \Psi_2^{(0)}|_{\mathcal{I}^+_-} = -M_{ADM} G, \tag{4.226}$$

gdje je M_{ADM} ADM masa i G Newtonova gravitacijska konstanta. Iz (4.226) odmah slijedi da imaginarni dio od $\Psi_2^{(0)}$ poštuje relacije:

$$Im \Psi_2^{(0)}|_{\mathcal{I}^+_+} = 0, \qquad Im \Psi_2^{(0)}|_{\mathcal{I}^+_-} = 0. \tag{4.227}$$

Može se pokazati da izrazi (4.227) impliciraju [16]:

$$\begin{aligned} [\partial_z \tilde{U}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \tilde{U}_z]|_{\mathcal{I}^+_+} &= 0, \\ [\partial_z \tilde{U}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \tilde{U}_z]|_{\mathcal{I}^+_-} &= 0, \end{aligned} \tag{4.228}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z &= -\frac{1}{2} \eth^z C_{zz}, \\ \tilde{U}_{\bar{z}} &= -\frac{1}{2} \eth^{\bar{z}} C_{\bar{z}\bar{z}}. \end{aligned} \tag{4.229}$$

Primjetimo dalje da vrijedi:

$$\eth_z \tilde{U}_{\bar{z}} = \partial_z \tilde{U}_{\bar{z}} - \gamma^A_{z\bar{z}} U_A, \tag{4.230}$$

ali na S^2 Christoffelovi simboli $\gamma^z_{\bar{z}\bar{z}}$ i $\gamma^{\bar{z}}_{z\bar{z}}$ iščezavaju što se jednostavno pokazuje koristeći (4.140) i (3.16). Slijedi da je zadovoljeno $\eth_z \tilde{U}_{\bar{z}} = \partial_z \tilde{U}_{\bar{z}}$. Ekvivalentno imamo i $\eth_{\bar{z}} \tilde{U}_z = \partial_{\bar{z}} \tilde{U}_z$. Koristeći ova svojstva, pokazuje se da su rješenja koja zadovoljavaju (4.228) dana izrazima [16]:

$$\begin{aligned}
C_{zz}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_+} &= \eth_z \eth_z C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_+}, \\
C_{zz}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} &= \eth_z \eth_z C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, \\
C_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_+} &= \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_+}, \\
C_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-} &= \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-}.
\end{aligned} \tag{4.231}$$

Ovdje su $C|_{\mathcal{I}^+_+}$ i $C|_{\mathcal{I}^+_-}$ realne skalarne funkcije na $\mathcal{I}^+_+$ i $\mathcal{I}^+_-$ koje ovise o angularnim koordinatama. Ova rješenja možemo uvrstiti u prvu jednakost u (4.228).

$$\begin{aligned}
[\partial_z \tilde{U}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \tilde{U}_z]|_{\mathcal{I}^+_+} =& [\eth_z \tilde{U}_{\bar{z}} - \eth_{\bar{z}} \tilde{U}_z]|_{\mathcal{I}^+_+} \\
=& -\frac{1}{2}[\eth_z \eth^{\bar{z}} C_{\bar{z}\bar{z}} - \eth_{\bar{z}} \eth^z C_{zz}]|_{\mathcal{I}^+_+} \\
=& -\frac{1}{2}[\eth_z \eth^{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} C - \eth_{\bar{z}} \eth^z \eth_z \eth_z C]|_{\mathcal{I}^+_+} \\
=& -\frac{1}{2}\gamma^{z\bar{z}}[\eth_z \eth_z \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} - \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \eth_z \eth_z] C|_{\mathcal{I}^+_+}.
\end{aligned} \tag{4.232}$$

Nije se sada teško uvjeriti da je izraz u zagradi simetričan na zamjene $z \leftrightarrow \bar{z}$. Dakle (4.231) su uistinu rješenja jednadžbi (4.228). Iz realnog dijela od $\Psi_2^{(0)}$, uvjeti (4.226) daju [16]:

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{I}^+_+} &= 0, \\
M_{\mathcal{I}^+_-} &= M_{ADM} G.
\end{aligned} \tag{4.233}$$

Prvi uvjet je ekvivalentan našoj pretpostavci da je masa u dalekoj budućnosti iščeznula uslijed gravitacijskog zračenja. Drugi uvjet je analogan prvoj zamjeni u (4.209) budući da je Schwarzschildova masa u biti ADM masa statičnog i sferno-simetričnog prostora. Integraciju tenzora novosti po retardiranom vremenu od $-\infty$ do $+\infty$ sada možemo zapisati preko polja na rubovima $\mathcal{I}^+$.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} du \tilde{N}_{zz} = &\int_{-\infty}^{+\infty} du (\partial_u C_{zz}) \\
&= C_{zz}|_{\mathcal{I}^+_+} - C_{zz}|_{\mathcal{I}^+_-} \\
&= \eth_z \eth_z (C|_{\mathcal{I}^+_+} - C|_{\mathcal{I}^+_-}) \\
&= \eth_z \eth_z \tilde{N},
\end{aligned}
\tag{4.234}
$$

gdje smo uveli realnu funkciju $\tilde{N}(z,\bar{z}) = C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_+} - C(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^+_-}$. Na isti način dobivamo:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} du \tilde{N}_{\bar{z}\bar{z}} = \eth_{\bar{z}} \eth_{\bar{z}} \tilde{N}. \tag{4.235}
$$

U blizini $\mathcal{I}^-_+$ $(v \to \infty)$ i $\mathcal{I}^-_-$ $(v \to -\infty)$ CK prostora tenzor novosti opada kao [16]:

$$
\mathring{N}_{zz}(v) \sim |v|^{-3/2}, \tag{4.236}
$$

ili brže. Uvjet konačnosti energije daje:

$$
\mathring{N}_{zz}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+} = 0, \qquad \mathring{N}_{zz}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_-} = 0. \tag{4.237}
$$

Iščezavanje imaginarnog dijela od $\Psi_2^{(0)}$ u naprednim Bondijevim koordinatama u prošlosti i budućnosti prošle svjetlosne beskonačnosti implicira [16]:

$$
\begin{aligned}
&[\partial_z \tilde{V}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \tilde{V}_z]|_{\mathcal{I}^-_+} = 0, \\
&[\partial_z \tilde{V}_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} \tilde{V}_z]|_{\mathcal{I}^-_-} = 0,
\end{aligned}
\tag{4.238}
$$

gdje su sada:

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_z &= \frac{1}{2} \eth^z \mathring{C}_{zz}, \\
\tilde{V}_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} \eth^{\bar{z}} \mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}}.
\end{aligned}
\tag{4.239}
$$

Koristeći svojstva $\partial_z \tilde{V}_{\bar{z}} = \eth_z \tilde{V}_{\bar{z}}$ i $\partial_{\bar{z}} \tilde{V}_z = \eth_{\bar{z}} \tilde{V}_z$, isto kao i ranije se pokazuje da su rješenja jednadžbi (4.238) [16]:

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{zz}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+} &= \eth_z\eth_z\mathring{C}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+},\\ \mathring{C}_{zz}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_-} &= \eth_z\eth_z\mathring{C}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_-},\\ \mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+} &= \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\mathring{C}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+},\\ \mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_-} &= \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\mathring{C}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_-}.\end{aligned} \tag{4.240}$$

Realni dio Weylove komponente $\Psi_2^{(0)}$ daje uvjete na Bondijevu masu [16]:

$$\begin{aligned}\mathring{M}_{\mathcal{I}^-_-} &= 0,\\ \mathring{M}_{\mathcal{I}^-_+} &= M_{ADM}G.\end{aligned} \tag{4.241}$$

Uočimo još i da se integral tenzora novosti po naprednom vremenu može pisati u obliku:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\mathring{N}_{zz} &= \eth_z\eth_z\mathring{N},\\ \int_{-\infty}^{+\infty} dv\mathring{N}_{\bar{z}\bar{z}} &= \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\mathring{N}.\end{aligned} \tag{4.242}$$

gdje smo uveli realnu funkciju $\mathring{N}(z,\bar{z}) = \mathring{C}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_+} - \mathring{C}(z,\bar{z})|_{\mathcal{I}^-_-}$.

Koristeći vrijednosti tenzora C_{zz} ($\mathring{C}_{zz}$), $\tilde{N}_{zz}$ ($\mathring{N}_{zz}$) i Bondijeve mase M ($\mathring{M}$) na $\mathcal{I}^+_-$ ($\mathcal{I}^-_+$), pomoću jednadžbi evolucija (4.138) i (4.185) ((4.216) i (4.217)) možemo pronaći vrijednosti ovih veličina svugdje na $\mathcal{I}^+$ ($\mathcal{I}^-$). Međutim, nismo još gotovi. Moramo povezati podatke na $\mathcal{I}^+$ i $\mathcal{I}^-$ tako da budu kompatibilni s problemom raspršenja. Konkretnije, BMS transformacije ne smiju uzrokovati narušenje očuvanja energije kvantnih stanja čestica ili klasičnih gravitacijskih valova koji dolaze sa $\mathcal{I}^-$ na $\mathcal{I}^+$. Pokazano je da podgrupa BMS^0 grupe $BMS^+ \times BMS^-$ globalno čuva energiju uz restrikcije [16]:

$$\begin{aligned}f^z(z,\bar{z}) &= \mathring{f}^{-z}(z,\bar{z}),\\ \alpha(z,\bar{z}) &= \mathring{\alpha}(z,\bar{z}).\end{aligned} \tag{4.243}$$

Transformacije pod (4.243) zadovoljavaju uvjet na Bondijevu masu koji možemo isčitati iz (4.233) i (4.241):

$$M_{\mathcal{I}^+_-} = \mathring{M}_{\mathcal{I}^-_+}. \tag{4.244}$$

Prethodni izraz ne smijemo shvatiti olako. Prošla i buduća svjetlosna beskonačnost se susreću u točki i^0 gdje imamo diskontinuitet. Možemo ipak smatrati da se masa neznatno promjenila u proizvoljno malom vremenskom intervalu. Znamo da tenzor novosti iščezava na $\mathcal{I}^+_-$ i $\mathcal{I}^-_+$ te još nam preostaje povezati C_{zz} i $\mathring{C}_{zz}$ u ovim regijama na način koji je kompatibilan s (4.243). Ovo se postiže nametanjem uvjeta [16]:

$$C_{zz}|_{\mathcal{I}^+_-} = -\mathring{C}_{zz}|_{\mathcal{I}^-_+}. \tag{4.245}$$

Iz (4.229) i (4.239) odmah slijedi i:

$$\tilde{U}_{zz}|_{\mathcal{I}^+_-} = \tilde{V}_{zz}|_{\mathcal{I}^-_+}. \tag{4.246}$$

Uvjete (4.243), (4.244) i (4.245) možemo smatrati definicijama bez kojih nema smisla govoriti o raspršenjima u ovakvom prostoru. U konačnici, potvrda da smo napravili dobar odabir će doći iz ekvivalentnosti supertranslacijskog Wardovog identiteta i Weinbergovog teorema mekanog gravitona. Ograničenja (4.243) ne narušavaju činjenicu da i dalje imamo beskonačno očuvanih naboja. Ukoliko pronađemo jedno rješenje koje zadovoljava (4.243), možemo ih pronaći beskonačno mnogo. Iz (4.243), (4.244), (4.210) i (4.220) dobivamo:

$$Q_\alpha = Q^+_\alpha = Q^-_\alpha. \tag{4.247}$$

Ovaj izraz govori da je energija očuvana na svakom kutu. Da bismo ovo bolje razumjeli, odaberimo $\alpha = \delta^{(2)}(z-w) = \delta(z-w)\delta(\bar{z}-\bar{w})$. Iz (4.213), (4.222) i (4.247) tada proizlazi:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} du\gamma_{w\bar{w}} \left[\tilde{T}_{uu} - \frac{1}{4}(\eth_w \eth_w \tilde{N}^{ww} + \eth_{\bar{w}}\eth_{\bar{w}}\tilde{N}^{\bar{w}\bar{w}})\right] = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} dv\gamma_{w\bar{w}} \left[\tilde{T}_{vv} + \frac{1}{4}(\eth_w \eth_w \mathring{N}^{ww} + \eth_{\bar{w}}\eth_{\bar{w}}\mathring{N}^{\bar{w}\bar{w}})\right] \end{aligned} \tag{4.248}$$

Prethodna jednakost implicira da je tok energije integriran preko u na točki w na

$\mathcal{I}^+$ jednak toku energije integriranom preko v na antipodalnoj točki w na $\mathcal{I}^-$. Drugi član svake uglate zagrade je (kao što ćemo vidjeti ubrzo) potpuna derivacija na sferi i ne doprinosi ukupnoj Bondijevoj energiji. Razdvojimo sada doprinose očuvanim nabojima na idući način:

$$
\begin{aligned}
Q_\alpha^+ &= F^+ + H^+, \\
Q_\alpha^- &= F^- + H^-,
\end{aligned}
\tag{4.249}
$$

gdje su:

$$
\begin{aligned}
F^+ &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\gamma_{z\bar{z}}\alpha(-)\frac{1}{4}(\eth_z\eth_z\tilde{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\tilde{N}^{\bar{z}\bar{z}}), \\
F^- &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^-} dvd^2z\gamma_{z\bar{z}}\alpha\frac{1}{4}(\eth_z\eth_z\mathring{N}^{zz} + \eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\mathring{N}^{\bar{z}\bar{z}}), \\
H^+ &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\gamma_{z\bar{z}}\alpha\tilde{T}_{uu}, \\
H^- &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^-} dvd^2z\gamma_{z\bar{z}}\alpha\tilde{T}_{vv}.
\end{aligned}
\tag{4.250}
$$

Činjenicu da su F^- i F^+ uistinu doprinosi ulaznog, odnosno izlaznog gravitona u limesu niskih energija (infracrvenom području energija) ćemo dokazati malo kasnije; nakon što izvedemo supertranslacijski Wardov identitet. Sada želimo F^+ i F^- napisati u oblicima koji će biti pogodni za daljnje izračune. Raspisujemo faktor $-\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\eth_z\tilde{N}^{zz}$ u integrandu od F^+:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\eth_z\tilde{N}^{zz} &= -\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\eth_z\partial_u C^{zz} \\
&= -\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\gamma_{z\bar{z}}\eth^{\bar{z}}\partial_u\gamma^{z\bar{z}}\gamma^{z\bar{z}}C_{\bar{z}\bar{z}} \\
&= -\frac{1}{4}\eth_z\eth^{\bar{z}}\partial_u C_{\bar{z}\bar{z}} \\
&= \frac{1}{2}\partial_u\eth_z\left(-\frac{1}{2}\eth^{\bar{z}}C_{\bar{z}\bar{z}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_u\partial_z\tilde{U}_{\bar{z}},
\end{aligned}
\tag{4.251}
$$

gdje smo iskoristili (4.229) i (4.230). Ekvivalentno:

$$
-\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\tilde{N}^{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2}\partial_u\partial_{\bar{z}}\tilde{U}_z. \tag{4.252}
$$

Raspisat ćemo i $\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\eth_z\mathring{N}^{zz}$ u F^-:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\eth_z\mathring{N}^{zz} =& \frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\eth_z\partial_v\mathring{C}^{zz} \\ =& \frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_z\gamma_{z\bar{z}}\eth^{\bar{z}}\partial_v\gamma^{z\bar{z}}\gamma^{z\bar{z}}\mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}} \\ =& \frac{1}{4}\eth_z\eth^{\bar{z}}\partial_v\mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}} \\ =& \frac{1}{2}\partial_v\eth_z\left(\frac{1}{2}\eth^{\bar{z}}\mathring{C}_{\bar{z}\bar{z}}\right) \\ =& \frac{1}{2}\partial_v\partial_z\tilde{V}_{\bar{z}},\end{aligned} \tag{4.253}$$

gdje smo ovaj put iskoristili (4.239). Ekvivalentno:

$$\frac{1}{4}\gamma_{z\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\mathring{N}^{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{2}\partial_v\partial_{\bar{z}}\tilde{V}_z. \tag{4.254}$$

F^+ i F^- dakle poprimaju oblike:

$$\begin{aligned}F^+ &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\alpha\frac{1}{2}\partial_u(\partial_z\tilde{U}_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\tilde{U}_z), \\ F^- &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^-} dvd^2z\alpha\frac{1}{2}\partial_v(\partial_z\tilde{V}_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\tilde{V}_z).\end{aligned} \tag{4.255}$$

Okrenimo se sada problemu raspršenja. Pretpostavimo da sustav sadrži n ulaznih čestica sa energijama E_k^{in} koje dolaze sa točaka z_k^{in} na konformnoj S^2. Možemo zamisliti da je riječ o bezmasenim skalarnim česticama. Ulazno kvantno stanje u Fockovoj bazi označavamo kao:

$$|in\rangle = |z_1^{in}, z_2^{in}, ..., z_n^{in}\rangle\,. \tag{4.256}$$

Izlazno stanje neka sadrži m bezmasenih skalara s energijama E_k^{out} na točkama z_k^{out}:

$$|out\rangle = |z_1^{out}, z_2^{out}, ..., z_m^{out}\rangle\,, \tag{4.257}$$

gdje je zadovoljeno očuvanje energije $\sum_{k=1}^n E_k^{in} = \sum_{k=1}^m E_k^{out}$. S-matrični element ima formu:

$$S_{fi} = \langle out|\, S\, |in\rangle \tag{4.258}$$

Kako je Q_α za $\alpha = 1$ ADM Hamiltonijan (što je objašnjeno u dodatku F), očuvani naboji (koje sada smatramo operatorima) sa S-matricom komutiraju:

$$[Q_\alpha, S] = 0. \tag{4.259}$$

Prethodni izraz slijedi iz činjenice da je S-matrica konstruirana od eksponencijale Hamiltonijana. Preciznije, vrijedi $S = e^{-2iHT}$ [12] gdje je H Hamiltonijan i T vrijeme. Komutator (4.259) implicira da možemo pisati:

$$\langle out| \left(Q_\alpha^+ S - S Q_\alpha^-\right) |in\rangle = 0. \tag{4.260}$$

Dakako, Q_α^+ i Q_α^- su jednaki, ali Q_α^+ (Q_α^-) je pogodan za djelovanje na izlazno (ulazno) stanje. Pokažimo sada da F^+ i F^- ne doprinose ukupnoj energiji.

$$\begin{aligned}
F^+ =& \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\alpha\frac{1}{2}\partial_u(\partial_z\tilde{U}_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\tilde{U}_z)\\
=& \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\alpha\frac{1}{2}\partial_u(\eth_z\tilde{U}_{\bar{z}} + \eth_{\bar{z}}\tilde{U}_z)\\
=& \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\gamma_{z\bar{z}}\alpha\frac{1}{2}\partial_u(\eth_z\tilde{U}^z + \eth_{\bar{z}}\tilde{U}^{\bar{z}})\\
=& \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\gamma_{z\bar{z}}\alpha\frac{1}{2}\partial_u(\eth_A\tilde{U}^A)\\
=& \frac{1}{4\pi G r^2}\int_{S^2} d^2zr^2\gamma_{z\bar{z}}\frac{\alpha}{2}(\eth_A\tilde{U}^A)|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}.
\end{aligned} \tag{4.261}$$

Ovdje je $(\eth_A\tilde{U}^A)|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} = (\eth_A\tilde{U}^A)|_{\mathcal{I}^+_+} - (\eth_A\tilde{U}^A)|_{\mathcal{I}^+_-}$. Uočavamo da po Stokesovom teoremu (4.261) iščezava ukoliko odaberemo $\alpha = 1$ (ili $\alpha = konst.$) na isti način kao što smo objasnili pri analizi izraza (4.176). Potpuno ekvivalentan račun smo mogli provesti i za F^-. Prema tome, F^+ i F^- ne mogu doprinijeti energiji. Zaključujemo da djelovanjem na stanja energiju moraju dati H^+ i H^- (do na funkciju α). Pišemo stoga:

$$\begin{aligned}
Q_\alpha^- |in\rangle =& F^- |z_1^{in}, z_2^{in}, ..., z_n^{in}\rangle + H^- |z_1^{in}, z_2^{in}, ..., z_n^{in}\rangle\\
=& F^- |z_1^{in}, z_2^{in}, ..., z_n^{in}\rangle + \sum_{k=1}^{n} E_k^{in}\alpha(z_k^{in}) |z_1^{in}, z_2^{in}, ..., z_n^{in}\rangle,
\end{aligned} \tag{4.262}$$

i

$$\begin{aligned}\langle out| Q_\alpha^+ &= \langle out| F^+ + \langle out| H^+ \\ &= \langle z_1^{out}, z_2^{out}, ..., z_m^{out}| F^+ + \sum_{k=1}^{m} E_k^{out}\alpha(z_k^{out}) \langle z_1^{out}, z_2^{out}, ..., z_m^{out}| \,.\end{aligned} \tag{4.263}$$

Iz (4.260) slijedi:

$$\begin{aligned}0 &= \langle out| (Q_\alpha^+ S - SQ_\alpha^-) |in\rangle = \langle out| [(F^+S + H^+S) - (SF^- + SH^-)] |in\rangle \\ &= \langle out| (F^+S - SF^-) |in\rangle + \langle out| (H^+S - SH^-) |in\rangle \\ &\to \langle out| (F^+S - SF^-) |in\rangle = \langle out| SH^- |in\rangle - \langle out| H^+S |in\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} E_k^{in}\alpha(z_k^{in}) \langle out| S |in\rangle - \sum_{k=1}^{m} E_k^{out}\alpha(z_k^{out}) \langle out| S |in\rangle\end{aligned} \tag{4.264}$$

Uvedimo još na kraju oznaku:

$$F = F^+ - F^- \tag{4.265}$$

i notaciju : ... : vremenskog uređenja:

$$: FS := F^+S - SF^-. \tag{4.266}$$

Dobivamo konačno:

$$\begin{aligned}\langle z_1^{out}, ..., z_m^{out}| : FS : |z_1^{in}, ..., z_n^{in}\rangle &= \left[\sum_{k=1}^{n} E_k^{in}\alpha(z_k^{in}) - \sum_{k=1}^{m} E_k^{out}\alpha(z_k^{out})\right] \\ &\quad \cdot \langle z_1^{out}, ..., z_m^{out}| S |z_1^{in}, ..., z_n^{in}\rangle \,.\end{aligned} \tag{4.267}$$

Ovo je supertranslacijski Wardov identitet koji povezuje S-matrične elemente sa i bez umetanja mekanog gravitona. Uz $\alpha(z_k^{in}) = \alpha(z_k^{out}) = konst.$, izraz isčezava zbog očuvanja energije. Kao što smo obećali, sada ćemo interpretirati F^+ i F^- kao mekane gravitone. Račun provodimo za F^+ jer je priča za F^- ekvivalentna. Raspisujemo faktor $\alpha\partial_u[\partial_z\tilde{U}_{\bar{z}}+\partial_{\bar{z}}\tilde{U}_z]$ u integrandu od F^+:

$$
\begin{aligned}
\alpha\partial_u[\partial_z\tilde{U}_{\bar{z}}+\partial_{\bar{z}}\tilde{U}_z] =&\partial_u[\alpha\eth_z\tilde{U}_{\bar{z}}+\alpha\eth_{\bar{z}}\tilde{U}_z]\\
=&\partial_u[\eth_z(\alpha\tilde{U}_{\bar{z}})-\tilde{U}_{\bar{z}}\eth_z\alpha+\eth_{\bar{z}}(\alpha\tilde{U}_z)-\tilde{U}_z\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\partial_u[\gamma_{z\bar{z}}\eth_z(\alpha\tilde{U}^z)+\gamma_{z\bar{z}}\eth_{\bar{z}}(\alpha\tilde{U}^{\bar{z}})-\tilde{U}_{\bar{z}}\eth_z\alpha-\tilde{U}_z\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\partial_u[\gamma_{z\bar{z}}\eth_A(\alpha\tilde{U}^A)-\tilde{U}_{\bar{z}}\eth_z\alpha-\tilde{U}_z\eth_{\bar{z}}\alpha].
\end{aligned}
\tag{4.268}
$$

Možemo provesti integraciju po retardiranom vremenu nakon čega uočavamo da je prvi član prethodne jednakosti potpuna derivacija koja isčezava u integralu po S^2. Ovaj faktor stoga odbacujemo i raspisujemo dalje preostala dva. Pritom koristimo definicije (4.229).

$$
\begin{aligned}
-\partial_u[\tilde{U}_{\bar{z}}\eth_z\alpha+\tilde{U}_z\eth_{\bar{z}}\alpha] =&\frac{1}{2}\partial_u[(\eth^{\bar{z}}C_{\bar{z}\bar{z}})\eth_z\alpha+(\eth^z C_{zz})\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\frac{1}{2}\partial_u[\gamma^{z\bar{z}}(\eth_z\gamma_{z\bar{z}}C_{\bar{z}}{}^z)\eth_z\alpha+\gamma^{z\bar{z}}(\eth_{\bar{z}}\gamma_{z\bar{z}}C_z{}^{\bar{z}})\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\frac{1}{2}\partial_u[(\eth_z C_{\bar{z}}{}^z)\eth_z\alpha+(\eth_{\bar{z}}C_z{}^{\bar{z}})\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\frac{1}{2}\partial_u[\eth_z(C_{\bar{z}}{}^z\eth_z\alpha)-C_{\bar{z}}{}^z\eth_z\eth_z\alpha+\eth_{\bar{z}}(C_z{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha)-C_z{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\frac{1}{2}\partial_u[\eth_z(C_{\bar{z}}{}^A\eth_A\alpha)+\eth_{\bar{z}}(C_z{}^A\eth_A\alpha)-C_{\bar{z}}{}^z\eth_z\eth_z\alpha-C_z{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\frac{1}{2}\partial_u[\gamma_{z\bar{z}}\eth_z(C^{zA}\eth_A\alpha)+\gamma_{z\bar{z}}\eth_{\bar{z}}(C^{\bar{z}A}\eth_A\alpha)-C_{\bar{z}}{}^z\eth_z\eth_z\alpha-C_z{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha]\\
=&\frac{1}{2}\partial_u[\gamma_{z\bar{z}}\eth_B(C^{BA}\eth_A\alpha)-C_{\bar{z}}{}^z\eth_z\eth_z\alpha-C_z{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha].
\end{aligned}
\tag{4.269}
$$

U petom redu smo iskoristili svojstva (4.189). Prvi član posljednje jednakosti ponovno isčezava zbog teorema o divergenciji. Zapisat ćemo još preostala dva člana preko tenzora novosti:

$$
-\frac{1}{2}\partial_u[C_{\bar{z}}{}^z\eth_z\eth_z\alpha+C_z{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha]=-\frac{1}{2}[\tilde{N}_{\bar{z}}{}^z\eth_z\eth_z\alpha+\tilde{N}_z{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha]
\tag{4.270}
$$

Na kraju, učimo da pod integral možemo ubaciti jedinicu koju pišemo kao:

$$
1=\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{2}(e^{i\omega u}+e^{-i\omega u}).
\tag{4.271}
$$

Iz (4.255) sada slijedi da F^+ poprima iduću formu:

$$F^+ = -\frac{1}{32\pi G}\lim_{\omega\to 0}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z(e^{i\omega u}+e^{-i\omega u})[\tilde{N}_{\bar{z}}{}^{z}\eth_z\eth_z\alpha + \tilde{N}_{z}{}^{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\eth_{\bar{z}}\alpha]. \tag{4.272}$$

O ovom obliku, F^+ prepoznajemo kao perturbaciju metrike u niskoenergetskom ($\omega \to 0$) limesu sa polarizacijskim tenzorom koji je proporcionalan s $\eth_z\eth_z\alpha$. Stvari će postati jasnije kada u idućem poglavlju pronađemo rješenja polja slobodnog gravitona i kvantiziramo teoriju. Tada će F^+ postati operator izražen preko operatora stvaranja i poništenja. Pripremit ćemo si sada teren za račun kojim ćemo kasnije pokazati da supertranslacijski Wardov identitet slijedi iz Weinbergovog teorema mekanog gravitona. Odaberimo proizvoljnu funkciju α na idući način [15]:

$$\alpha(z,\bar{z}) = \alpha' = \frac{1}{z-w} \tag{4.273}$$

gdje je w konstantni kompleksni broj. Uvedimo još oznake:

$$\begin{aligned} F^+(\alpha') &= P^+, \\ F^-(\alpha') &= P^-, \end{aligned} \tag{4.274}$$

i zapišimo $F^+(\alpha)$ i $F^-(\alpha)$ kao:

$$\begin{aligned} F^+ &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z\alpha\partial_u(\partial_{\bar{z}}\tilde{U}_z) = \frac{1}{4\pi G}\int d^2z\alpha(z,\bar{z})(\eth_{\bar{z}}\tilde{U}_z)\Big|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}, \\ F^- &= \frac{1}{4\pi G}\int_{\mathcal{I}^-} dvd^2z\alpha z\partial_v(\partial_{\bar{z}}\tilde{V}_z) = \frac{1}{4\pi G}\int d^2z\alpha(z,\bar{z})(\eth_{\bar{z}}\tilde{V}_z)\Big|^{\mathcal{I}^-_+}_{\mathcal{I}^-_-}. \end{aligned} \tag{4.275}$$

Prethodni izrazi slijede iz (4.255) zbog simetričnosti integrala na zamjene $z \leftrightarrow \bar{z}$. U nastavku koristimo Cauchy-Pompeiuovu formulu [15]:

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{z-w}\right) = 2\pi\delta^{(2)}(z-w). \tag{4.276}$$

Slijedi:

$$
\begin{aligned}
P^+ =&\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\alpha'(\eth_{\bar{z}}\tilde{U}_z)|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} \\
=&\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\eth_{\bar{z}}(\alpha'\tilde{U}_z)|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}-\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\tilde{U}_z\eth_{\bar{z}}\alpha'|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} \\
=&\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\frac{1}{2}[\eth_{\bar{z}}(\alpha'\tilde{U}_z)+\eth_z(\alpha'\tilde{U}_{\bar{z}})]|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}-\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\tilde{U}_z\partial_{\bar{z}}\alpha'|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} \\
=&\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\frac{1}{2}\gamma_{z\bar{z}}[\eth_{\bar{z}}(\alpha'\tilde{U}^{\bar{z}})+\eth_z(\alpha'\tilde{U}^z)]|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}-\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\tilde{U}_z\partial_{\bar{z}}\alpha'|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} \\
=&\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\frac{1}{2}\gamma_{z\bar{z}}\eth_A(\alpha'U^A)|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}-\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\tilde{U}_z\partial_{\bar{z}}\alpha'|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} \\
=&-\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\tilde{U}_z\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{z-w}\right)\Bigg|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} \\
=&-\frac{1}{4\pi G}\int d^2z\tilde{U}_z(2\pi)\delta^{(2)}(z-w)|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-} \\
=&-\frac{1}{2G}\tilde{U}_w|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}
\end{aligned}
\tag{4.277}
$$

Na isti način dolazimo i do rezultata za P^-:

$$
P^- = -\frac{1}{2G}\tilde{V}_w|^{\mathcal{I}^-_+}_{\mathcal{I}^-_-}
\tag{4.278}
$$

Definiramo struju mekanog gravitona pozitivnog heliciteta [16]:

$$
\begin{aligned}
P_w =&P^+ - P^- \\
=&\frac{1}{2G}(\tilde{V}_w|^{\mathcal{I}^-_+}_{\mathcal{I}^-_-}-\tilde{U}_w|^{\mathcal{I}^+_+}_{\mathcal{I}^+_-}),
\end{aligned}
\tag{4.279}
$$

što je u biti $F(\alpha')$. Odabirom kompleksno konjugirane verzije funkcije α u (4.273) se na ekvivalentan način dobiva $P_{\bar{w}}$ (struja mekanog gravitona negativnog heliciteta). U Wardovom identitetu (4.267) sada vršimo zamjene skladne s (4.273):

$$
\begin{aligned}
\alpha(z_k^{in}) &\to \frac{1}{z_k^{in}-w}, \\
\alpha(z_k^{out}) &\to \frac{1}{z_k^{out}-w}.
\end{aligned}
\tag{4.280}
$$

Time (4.267) postaje

$$\langle z_1^{out}, ..., z_m^{out}| : P_w S : |z_1^{in}, ..., z_n^{in}\rangle = \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}}{w - z_k^{out}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}}{w - z_k^{in}}\right] \\ \cdot \langle z_1^{out}, ..., z_m^{out}| \, S \, |z_1^{in}, ..., z_n^{in}\rangle \,. \tag{4.281}$$

Supertranslacijski Wardov identitet počinje neodoljivo sličiti mekanim teoremima u kvantnoj teoriji polja. Ekvivalentnost još nije potpuno očita jer se infracrveni polovi standardno pojavljuju u impulsnom prostoru. Kada izvedemo Weinbergov teorem niskoenergetskog gravitona, prebacit ćemo se iz impulsnog u koordinatni prostor i dobiti upravo (4.281). Rezultat ima polove za $w \to z_k^{in}$ i $w \to z_k^{in}$. Ovdje su z_k^{in} i z_k^{out} početne i konačne angularne Bondijeve koordinate bezmasenih čestica, ali trenutno možda nije jasno kako interpretirati kompleksni broj w. U šestom poglavlju ćemo vidjeti da isti opisuje polazišnu, odnosno odredišnu točku mekanog gravitona na S^2 u prostornoj beskonačnosti. Sada ćemo još iskoristiti rubne funkcije uvedene u (4.234) i (4.242) kako bismo si olakšali posao kasnije. Raspisujemo struju mekanog gravitona:

$$\begin{aligned} P_z =& \frac{1}{2G}(\tilde{V}_z|_{\mathcal{I}_-^-}^{\mathcal{I}_+^-} - \tilde{U}_z|_{\mathcal{I}_-^+}^{\mathcal{I}_+^+}) \\ =& \frac{1}{2G}\left[\frac{1}{2}\eth^z \mathring{C}_{zz}|_{\mathcal{I}_-^-}^{\mathcal{I}_+^-} - \left(-\frac{1}{2}\right)\eth^z C_{zz}|_{\mathcal{I}_-^+}^{\mathcal{I}_+^+}\right] \\ =& \frac{1}{4G}\gamma^{z\bar{z}}\left[\eth_{\bar{z}}\eth_z\eth_z\mathring{C}|_{\mathcal{I}_-^-}^{\mathcal{I}_+^-} + \eth_{\bar{z}}\eth_z\eth_z C|_{\mathcal{I}_-^+}^{\mathcal{I}_+^+}\right] \\ =& \frac{1}{4G}\gamma^{z\bar{z}}\eth_{\bar{z}}[\eth_z\eth_z\mathring{N} + \eth_z\eth_z\tilde{N}]. \end{aligned} \tag{4.282}$$

Uvodimo definiciju [8]:

$$\mathcal{O}_{zz} = \eth_z\eth_z\mathring{N} + \eth_z\eth_z\tilde{N} \tag{4.283}$$

i primjećujemo da vrijedi:

$$\eth_{\bar{z}}\mathcal{O}_{zz} = \partial_{\bar{z}}\mathcal{O}_{zz} - \gamma_{\bar{z}z}^{A}\mathcal{O}_{Az} - \gamma_{\bar{z}z}^{A}\mathcal{O}_{zA}. \tag{4.284}$$

Christoffelovi simboli isčezavaju što znači da kovarijantnu derivaciju možemo zamjeniti s parcijalnom. Struja P_z stoga poprima oblik:

$$P_z = \frac{1}{4G}\gamma^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\mathcal{O}_{zz}. \tag{4.285}$$

U 6. poglavlju će nam trebati i vremensko uređenje $:\mathcal{O}_{zz}S:$ pa ćemo ga odmah definirati tako da bude skladno s uređenjem (4.266). Kako imamo:

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{1}{4G}\gamma^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}}(\eth_z\eth_z\tilde{N}), \\ P^- &= \frac{-1}{4G}\gamma^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}}(\eth_z\eth_z\mathring{N}), \end{aligned} \tag{4.286}$$

možemo uvesti definicije:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^+_{zz} &= \eth_z\eth_z\tilde{N}, \\ \mathcal{O}^-_{zz} &= -\eth_z\eth_z\mathring{N}, \end{aligned} \tag{4.287}$$

tako da vrijedi:

$$\mathcal{O}_{zz} = \mathcal{O}^+_{zz} - \mathcal{O}^-_{zz}. \tag{4.288}$$

Prema tome, vremensko uređenje konzistentno s uređenjem struje gravitona jest:

$$:\mathcal{O}_{zz}S := \mathcal{O}^+_{zz}S - S\mathcal{O}^-_{zz}. \tag{4.289}$$

Ovaj rezultat će nam biti koristan kada u šestom poglavlju budemo pokazivali da supertranslacijski Wardov identitet slijedi iz Weinbergovog teorema mekanog gravitona. Tada ćemo prvo razmotriti vremensko uređenje polja $\mathcal{O}_{zz}$ koje ćemo naknadno povezati s uređenjem struje mekanog gravitona preko relacije (4.285).

5 Gravitacija kao efektivna teorija polja

Do sada smo se u velikoj mjeri bavili klasičnim poljima i analizom istih u kontekstu Einsteinove opće teorije relativnosti. Primarni cilj ove cjeline jest kvantizirati gravitaciju, to jest, uvesti formalnu definiciju polja gravitona preko operatora stvaranja i poništenja. Gravitacija kao kvantna teorija polja (QFT) nije potpuna! Pritom se misli da nije renormalizabilna, odnosno da se ne mogu ukloniti ultraljubičaste divergencije u amplitudama raspršenja. Nažalost, kvantni efekti gravitacije (kao najslabije sile u prirodi) dolaze do izražaja na visokim energijama usporedivim s Planckovom skalom od 1.22×10^{19} Gev [2]. Upravo zbog nerenormalizabilnost, subatomske interakcije čestica putem gravitacijske sile na visokim energijama "pucaju" i teorije s kojima trenutno raspolažemo nisu adekvatne. Međutim, to ne znači da gravitaciju ne možemo proučavati u kontekstu efektivne teorije polja, daleko ispod Planckove skale. Kako se u ovom radu bavimo gravitacijom u infracrvenom limesu, nerenormalizabilnost nam neće predstavljati problem. U prvom dijelu ove cjeline ćemo se zadržati na klasičnom nivou i dati kratki uvod u gravitacijske valove budući da smo ostali dužni pokazati da su isti opisani tenzorom (4.125). Također, obećali smo dati interpretaciju kvadrata tenzora novosti kao veličine koja je proporcionalna toku energije gravitacijskog zračenja. Krenut ćemo s opisom gravitacije kao teorije linearne u gravitacijskom polju. Ovakva teorija daje opis slobodnog gravitona bez vezanja sa samim sobom ("self energy"). Tvrdnja slijedi iz činjenice da Euler-Lagrangeove jednadžbe s obzirom na kvadratični dio langranžijana (koji opisuje propagator) daju linearne jednadžbe gibanja. Konkretnije, varijacija kvadratičnog dijela Einstein-Hilbertovoga (E-H) lagranžijana s obzirom na metriku daje linearne Einsteinove jednadžbe u vakuumu. Prvotni cilj nam je dakle pronaći linearizirani Einsteinov tenzor. Na kraju ćemo proučiti formu E-H langranžijana bez ovakve restrikcije i vidjeti da u kontekstu Feynmanovih dijagrama postoji beskonačno gravitacijskih interakcija. Bilo da je riječ o vezanju gravitona sa samim sobom ili s materijom. Gravitacija kao QFT je perturbativna teorija. U nastavku u velikoj mjeri pratimo formalizam perturbativog razvoja dan u [5] te uglavnom nećemo iznositi eksplicitne račune budući da su isti poprilično standardni. Krenimo od pretpostavke da je gravitacijsko polje slabo. U ovakvom limesu, metriku možemo pisati u idućoj formi [7]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1. \tag{5.1}$$

Mala perturbacija $h_{\mu\nu}$ (koju ne smijemo miješati s konformnom metrikom h_{AB} u (4.20)) predstavlja odstupanje od ravne metrike Minkowskog $n_{\mu\nu}$. Ukoliko ova perturbacija ne bi postojala, prostor-vrijeme bi bilo ravno; $h_{\mu\nu}$ stoga predstavlja prisustvo gravitacijskog polja. Ova činjenica nas navodi da tenzor $h_{\mu\nu}$ definiramo kao polje gravitona. Navedimo odmah njegova svojstva. Budući da je riječ o ekstenziji metrike, $h_{\mu\nu}$ je očito simetričan tenzor ranka 2. Također, graviton je čestica spina 2 [5]. Ovu tvrdnju nećemo dokazivati, ali neformalno se može zaključiti da je istinita jer se gravitacija veže na tenzor energije impulsa $T^{\mu\nu}$ (tenzor ranka 2). Usporedbe radi, foton A_μ (čestica spina 1 opisana tenzorom ranka 1) se veže na 4-struju J^μ (tenzor ranka 1). Kako je gravitacijska sila dugodosežna, graviton mora biti bezmasen. Ovo se prevodi u tvrdnju da propagira brzinom svjetlosti. Spomenimo još da slobodnom gravitonu trag iščezava i da ima dva nezavisna stupnja slobode koja odgovaraju dvama stanjima heliciteta. Sva navedena svojstva gravitonskog polja (osim tvrdnje o spinu) ćemo dokazati kasnije. U lineariziranoj gravitacijskoj teoriji pozadinsko prostor-vrijeme je ravno, malu perturbaciju $h_{\mu\nu}$ stoga možemo smatrati vremenski ovisnim poljem koje slobodno propagira prostorom Minkowskog:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}. \tag{5.2}$$

Kako bismo si olakšali račune, radit ćemo u Kartezijevim koordinatama $x^\mu = (t, x, y, z)$ u kojima ravna metrika ima formu $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, +1, +1, +1)$. Na kraju se uvijek možemo prebaciti u retardirane ili napredne Bondijeve koordinate pomoću transformacije (D.4). Konstanta κ u (5.1) je dana izrazom [7]:

$$\kappa = \sqrt{32\pi G}, \tag{5.3}$$

gdje je G Newtonova gravitacijska konstanta. Često se metrika piše bez ovog faktora što je ekvivalentno redefiniciji $\kappa h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu}$. Dakle može se smatrati da je κ već sadržan u $h_{\mu\nu}$. Tada samo moramo pripaziti na dimenzionalnost polja gravitona. U jednom trenutku ćemo napraviti spomenutu redefiniciju i razmatrati metriku u obliku

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, ali za sada konstantu (5.3) zadržavamo.

Kada govorimo o linearnoj teoriji gravitacije, pritom mislimo da u svim veličinama odbacijemo faktore reda $\mathcal{O}(h^2)$. Ovo možemo napraviti po pretpostavci da je gravitacijsko polje slabo. Kakve su implikacije ove tvrdnje ćemo proučiti ubrzo, ali prvo želimo pronaći inverz metrike (5.1). Iz uvjeta $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma$ slijedi:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}. \tag{5.4}$$

Uvrštavanjem se jednostavno pokazuje da vrijedi $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma + \mathcal{O}(h^2)$. Dakle u linearnoj teoriji možemo koristiti (5.4), ali općenito inverz metrike sadrži beskonačno članova. Isti je dan izrazom:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h^{\mu\lambda}h^\nu{}_\lambda + \mathcal{O}(h^3). \tag{5.5}$$

Iz (5.1) i (5.5) dobivamo $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma + \mathcal{O}(h^3)$. Inverzu metrike moramo uvijek dodavati nove korekcije ovisno o tome koliko visoko se želimo zadržati u perturbativnom razvoju. Razvoj (5.5) je u principu ekvivalentan Taylorovom razvoju $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2+\ldots$. Prednost zapisa uz uključenu konstantu κ leži u činjenici što (između ostalog) omogućuje lakše praćenje u kojem redu razvoja se nalazimo. Einsteinove jednadžbe moraju vrijediti nezavisno u svakom redu te ih možemo proučavati tako da zasebno promatramo zagrade koje množe faktor κ na određenu potenciju. Osim toga, u kontekstu Feynmanovih dijagrama κ predstavlja konstantu vezanja, što će nam biti bitno kasnije. Zadržimo se zasad na linearnim članovima u $h_{\mu\nu}$ i proučimo kakve implikacije daje ova restrikcija. Pretpostavimo da imamo Riccijev tenzor linearan u polju $h_{\mu\nu}$. Indeks standardno možemo dignuti relacijom $R^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho}R_{\rho\nu}$, ali ako je $R_{\rho\nu}$ već linearan u polju gravitona, svi faktori osim prvog u (5.5) u produktu daju članove višeg reda. Možemo dakle pisati $R^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho}R_{\rho\nu}$. Ista tvrdnja vrijedi i za bilo koje drugo polje konstruirano u potpunosti s $h_{\mu\nu}$ koje je u njemu linearno. Nadalje, linearnost teorije nam omogućuje dizanje i spuštanje indeksa parcijalnih derivacija s metrikom Minkowskog preko relacije $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$. U zakrivljenom prostoru je ovakva manipulacija besmislena, ali kako je naše pozadinsko prostor-vrijeme ravno, identitet vrijedi. Tvrdnju možemo razumjeti ako zamislimo djelovanje parcijalne derivacije na proizvoljan tenzor linearan u polju $h_{\mu\nu}$. Parcijalnu derivaciju tada možemo zamijeniti s kovarijantnom koja daje parcijalnu derivaciju i određen broj faktora koji uključuju produkte Christoffelovih simbola sa datim linearnim tenzorom. Indeks na kovarijantnoj derivaciji možemo slobodno dignuti s ravnom metrikom jer bi djelovanje metrike u punoj formi dalo članove višeg reda. U konačnici možemo odbaciti članove koji uključuju Christoffelove simbole (koji su minimalno linearni u $h_{\mu\nu}$) budući da oni u produktu s datim tenzorom daju nelinearne doprinose. Preostaje samo faktor s dignutim indeksom na parcijalnoj derivaciji koja djeluje na promatrani tenzor. Krenimo sada s konstrukcijom linearnog Einsteinovog tenzora (4.43) s obzirom na metriku (5.1). Jednom kada pronađemo Einsteinov tenzor, moći ćemo zasebno razmatrati jednadžbe u vakuumu $G_{\mu\nu} = 0$ (koje su dakako ekvivalentne jednadžbama $R_{\mu\nu} = 0$) i jednadžbe s prisutnim izvorom $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$. Krećemo s računom Christoffelovih simbola:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} =& \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
=& \frac{1}{2}(\eta^{\rho\lambda} - \kappa h^{\rho\lambda} + \mathcal{O}(h^2)) \left[\partial_\mu(\eta_{\nu\lambda} + \kappa h_{\nu\lambda}) + \partial_\nu(\eta_{\lambda\mu} + \kappa h_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu})\right] \\
=& \frac{\kappa}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

U nastavku nećemo pisati faktore $\mathcal{O}(h^2)$, već pamtimo da radimo u linearnoj teoriji. Riemannov tenzor je definiran izrazom:

$$
R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + +\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \tag{5.7}
$$

ali kako su posljednja dva člana reda $\mathcal{O}(h^2)$, možemo ih zanemariti. Spuštanjem indeksa pomoću ravne metrike relacijom $R_{\lambda\sigma\mu\nu} = \eta_{\lambda\rho} R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ i korištenjem (5.6), dobivamo:

$$
R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\kappa}{2}[\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}]. \tag{5.8}
$$

Linearni Riccijev tenzor slijedi iz kontrakcije $R_{\nu\sigma} = \eta^{\rho\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$
R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}[\partial_\sigma\partial_\nu h^{\sigma}{}_{\mu} + \partial_\sigma\partial_\mu h^{\sigma}{}_{\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h^{\sigma}{}_{\sigma} - \partial_\sigma\partial_\rho \eta^{\rho\sigma} h_{\mu\nu}]. \tag{5.9}
$$

Koristeći definiciju traga perturbacije $h = h^{\sigma}{}_{\sigma} = \eta^{\sigma\rho} h_{\rho\sigma}$ i dizanjem indeksa na parcijalnoj derivaciji posljednjeg člana prethodnog izraza, isti poprima oblik:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}[\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu}], \tag{5.10}$$

gdje je $\Box$ d'Alembertian u ravnom prostoru:

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \tag{5.11}$$

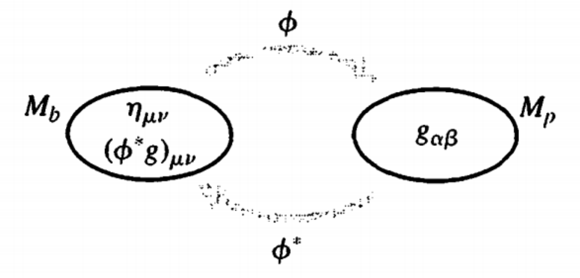
Riccijev skalar računamo kontrakcijom $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$. Slijedi linearizirani rezultat:

$$R = \kappa(\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h). \tag{5.12}$$

Konačno, Einsteinov tenzor linearan u $h_{\mu\nu}$ možemo dobiti zamjenom $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ u (4.43). Iz (5.10) i (5.12) odmah dobivamo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}[\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \Box h]. \tag{5.13}$$

S Einsteinovim tenzorom na raspolaganju, mogli bismo pokušati pronaći rješenje za $h_{\mu\nu}$ u vakuumu ili uz prisutan $T_{\mu\nu}$. Međutim, jednadžbe možemo znatno pojednostaviti odabirom baždarenja. U ovom trenutku ćemo napraviti redefiniciju $\kappa h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu}$ kako bismo si olakšali posao. Primjećujemo i da u vakuumu možemo izjednačiti linearni Einsteinov tenzor (5.13) s nulom i jednadžbu jednostavno podijeliti s κ. Kada budemo radili s prisutnim izvorom, tada ćemo ovu konstantu uključiti. Pozabavimo se sada problemom baždarenja. Opis polja na ravnoj pozadini se može formalizirati uvodeći pozadinsko prostor-vrijeme M_b i fizikalno prostor vrijeme M_p. Ove mnogostrukosti su u biti iste, ali možemo zamisliti da sadrže različita tenzorska polja. Na M_p imamo fizikalnu metriku $g_{\alpha\beta}$ koja zadovoljava Einsteinove jednadžbe, dok je M_b prostor Minkowskog s metrikom $\eta_{\mu\nu}$. Fizikalni prostor možemo opremiti s koordinatama y^α i pozadinski s x^μ (iako nam dvije različite koordinatne karte neće biti potrebne). Kako je riječ o istim mnogostrukostima, možemo uvesti difeomorfizam $\phi : M_b \to M_p$ te povlačiti i gurati tenzore s jedne mnogostrukosti na drugu kao što je prikazano na slici (5.1):



Slika 5.1: Povezanost pozadinskog prostora M_b i fizikalnog prostora M_p preko difeomorfizma $\phi : M_b \to M_p$. Preuzeto iz [5].

Perturbaciju metrike sada možemo definirati kao [5]:

$$h_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}, \tag{5.14}$$

pri čemu je $(\phi^* g)_{\mu\nu}$ fizikalna metrika povučena sa M_p na M_b. Spomenimo da bismo uz prisutnu konstantu κ pisali $\kappa h_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$. Iz (5.14) nije jasno da je perturbacija mala, ali možemo se ograničiti na difeomorfizme za koje je to istina. Sloboda u odabiru baždarenja se tada jednostavno odnosi na činjenicu da postoji puno različitih difeomorfizama za koje ovo vrijedi. Uvedimo vektorsko polje $\xi^\mu(x)$ na M_b preko definicije:

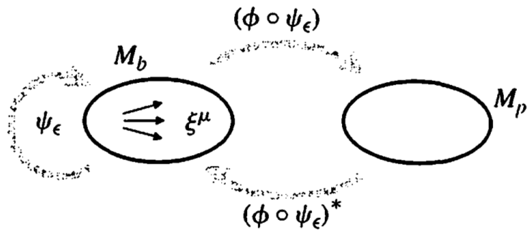
$$\xi^\mu(x) = \frac{dx^\mu(\epsilon)}{d\epsilon}. \tag{5.15}$$

Prema (5.15), ξ^μ je vektor tangencijalan na krivulju $x^\mu(\epsilon)$ parametriziranu s $\epsilon \in \mathbb{R}$. Ovo vektorsko polje definira jednoparametarsku familiju difeomorfizama:

$$\Psi_\epsilon : M_b \to M_b, \tag{5.16}$$

odnosno preslikavanje duž integralnih krivulja $x^\mu(\epsilon)$ na M_b. Promotrimo sada sliku 5.2. Pomoću (5.16) možemo gurati tenzore s proizvoljne točke p na M_b u preslikanu točku $\Psi(p)$ duž integralne krivulje $x^\mu(\epsilon)$. Pritom vrijednost parametra ϵ određuje koliki je pripadni pomak. Tada možemo gurati tenzore s točke $\Psi(p)$ na M_p koristeći difeomorfizam $\phi : M_b \to M_p$. Ukupna operacija je ekvivalentna guranju pod kompozicijom $(\phi \circ \Psi_\epsilon)$. Konačno, tenzore možemo povući sa M_p natrag u originalnu točku p pomoću inverza $(\phi \circ \Psi_\epsilon)^*$. Kako je perturbacija (evaluirana na točki p) razlika između fizikalne metrike povučene s M_p na M_b i metrike Minkowskog na proizvoljnoj početnoj točki p na M_b, možemo definirati cijelu familiju perturbacija parametriziranih s ϵ kao:

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = [(\phi \circ \Psi_\epsilon)^* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \tag{5.17}$$



Slika 5.2: Jednoparametarska familija difeomorfizama $\Psi_\epsilon : M_b \to M_b$. Preuzeto iz [5].

Ukoliko je difeomorfizam ϕ takav da je perturbacija (5.14) mala, tada će za dovoljno mali ϵ biti mala i familija perturbacija $h_{\mu\nu}^{(\epsilon)}$ generirana pomoću kompozicije $(\phi \circ \Psi_\epsilon)$. Izraz (5.17) možemo raspisati na idući način:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} =& [(\phi \circ \Psi_\epsilon)^* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ =& [\Psi_\epsilon^*(\phi^* g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ =& \Psi_\epsilon^*(h + \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ =& \Psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) + \Psi_\epsilon^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} \\ =& \Psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) + \epsilon \frac{\Psi_\epsilon^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

U drugom redu smo iskoristili činjenicu da je povlačenje pod kompozicijom jednako kompoziciji povlačenja u suprotnom redoslijedu, nakon čega smo uvrstili (5.14). Četvrti red proizlazi iz činjenice da je povlačenje sume dvaju tenzora jednako sumi povlačenja, dok smo u posljednjoj jednakosti samo pomnožili i podijelili posljednja dva člana s parametrom ϵ. Sada koristimo da pretpostavku da je ovaj parametar mali ($\epsilon << 1$), odnosno možemo napraviti aproksimaciju $\Psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) \approx h_{\mu\nu}$. Povlačenje tenzora iz točke $\Psi(p)$ u točku p duž proizvoljno kratke integralne krivulje u najnižem redu ne uzrokuje promjenu istog. Primjećujemo i da vrijedi:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Psi_\epsilon^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon} = \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} \tag{5.19}$$

prema (D.6) i (D.7). Liejeva derivacija metrike duž vektorskog polja ξ jest $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} =$

$2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}$ (D.47), ali kako radimo na ravnoj pozadini, možemo napraviti zamjene $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ i $\nabla_\mu \to \partial_\mu$ te pisati $\mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = 2\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}$. Dobivamo konačno:

$$h^{(\epsilon)}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\epsilon\partial_{(\mu}\xi_{\nu)}. \tag{5.20}$$

Prethodna formula govori kako se mijenja perturbacija metrike uz infinitezimalni difeomorfizam duž generatora ξ^μ. Ovu promjenu ćemo zvati baždarnom transformacijom u perturbativnoj teoriji gravitacije. Transformacije uslijed (5.20) ostavljaju prostor vrijeme invarijantnim. Riječ je o ekvivalentu baždarenja $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda$ (uz proizvoljnu skalarnu funkciju λ) koje ne mijenja tenzor jakosti $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Slično, baždarenje (5.20) ne mijenja Riemannov tenzor (5.8) [5].

Idući cilj nam je pronaći Einsteinove jednadžbe u vakuumu u određenom baždarenju koje ćemo specificirati ubrzo. Razdvojimo za početak komponente perturbacije metrike na idući način [5]:

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\phi, \\ h_{0i} &= w_i, \\ h_{ij} &= 2s_{ij} - 2\psi\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

gdje smo s malim latinskim slovima (i, j) naznačili da je riječ o prostornim komponentama ($i = 1, 2, 3$). Uveli smo pritom dvije skalarne funkcije ϕ i ψ, prostorni vektor w^i i prostorni tenzor s_{ij}. U Kartezijevom koordinatnom sustavu, prostorne indekse dižemo i spuštamo relacijom $h^i{}_j = \delta^{il}h_{lj}$. U nastavku se nećemo zamarati pišemo li prostorne indekse gore ili dolje jer očito vrijedi, primjerice, $w^i = w_i$. Pamtimo i da je zadovoljeno npr. $\xi_0 = -\xi^0$. U s_{ij}, koji je dan relacijom:

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl}h_{kl}\delta_{ij}) \tag{5.22}$$

je sadržan dio polja gravitona bez traga. Jednostavno se je uvjeriti (koristeći pritom relaciju $\delta^i{}_i = 3$) da vrijedi $s^i{}_i = 0$. Uzimajući trag trećeg izraza u (5.21), odmah dobivamo i $h^i{}_i = -6\psi$. Dakle u funkciji ψ je sadržana informacija o tragu prostornog dijela polja $h_{\mu\nu}$:

$$\psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}. \tag{5.23}$$

Izrazimo G_{00} Komponentu Einsteinovog tenzora (5.13) (uz $\kappa \to 1$) preko novouvedenih varijabli:

$$
\begin{aligned}
G_{00} =& \frac{1}{2}[\partial_\sigma \partial_0 h^\sigma{}_0 + \partial_\sigma \partial_0 h^\sigma{}_0 - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} - \eta_{00}\partial_\rho\partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{00}\Box h] \\
=& \frac{1}{2}[2\partial_\mu \partial_0 h^\mu{}_0 - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} + \partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h] \\
=& \frac{1}{2}[2\partial_0\partial_0 h^0{}_0 + 2\partial_i\partial_0 h^i{}_0 - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} + \partial_0\partial_0 h^{00} + 2\partial_0\partial_i h^{0i} + \partial_i\partial_j h^{ij} - \Box h] \\
=& \frac{1}{2}[2\partial_0\partial_0 h^0{}_0 - 2\partial_i\partial_0 h^{i0} - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} + \partial_0\partial_0 h^{00} + 2\partial_0\partial_i h^{0i} + \partial_i\partial_j h^{ij} - \Box h] \\
=& \frac{1}{2}[-2\partial_0\partial_0 h_{00} - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} + \partial_0\partial_0 h_{00} + \partial_i\partial_j h^{ij} - \Box h] \\
=& \frac{1}{2}[-\partial_0\partial_0 h_{00} - \partial_0\partial_0 h + \partial_i\partial_j h^{ij} - \Box h_{00} - \Box h] \\
=& \frac{1}{2}[2\partial_0\partial_0\phi - \partial_0\partial_0(h^0{}_0 + h^i{}_i) + \partial_i\partial_j(2s^{ij} - 2\psi\delta^{ij}) + 2\Box\phi - \Box(h^0{}_0 + h^i{}_i)] \\
=& \frac{1}{2}[2\partial_0\partial_0\phi + \partial_0\partial_0 h_{00} - \partial_0\partial_0 h^i{}_i + 2\partial_i\partial_j s^{ij} - 2\partial_i\partial^i\psi + 2\Box\phi + \Box h_{00} - \Box h^i{}_i] \\
=& \frac{1}{2}[2\partial_0\partial_0\phi - 2\partial_0\partial_0\phi + 6\partial_0\partial_0\psi + 2\partial_i\partial_j s^{ij} - 2\nabla^2\psi - 2\partial_0\partial_0\phi + 2\nabla^2\phi \\
& - \partial_0\partial_0 h_{00} + \nabla^2 h_{00} + \partial_0\partial_0 h^i{}_i - \nabla^2 h^i{}_i] \\
=& \frac{1}{2}[6\partial_0\partial_0\psi + 2\partial_i\partial_j s^{ij} - 2\nabla^2\psi - 2\partial_0\partial_0\phi + 2\nabla^2\phi + 2\partial_0\partial_0\phi - 2\nabla^2\phi - 6\partial_0\partial_0\psi \\
& + 6\nabla^2\psi] \\
=& \frac{1}{2}[4\nabla^2\psi + 2\partial_i\partial_j s^{ij}].
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

Pritom smo uveli trodimenzionalni ravni Laplasijan:

$$
\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j. \tag{5.25}
$$

Sličnom procedurom nalazimo i ostale komponente. Zapišimo ih sve zajedno [5]:

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= 2\nabla^2\psi + \partial_k\partial_l s^{kl}, \\
G_{0j} &= -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k w^k + 2\partial_0\partial_j\psi + \partial_0\partial_k s_j{}^k, \\
G_{ij} &= (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\phi - \psi) + \delta_{ij}\partial_0\partial_k w^k - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2\psi - \Box s_{ij} \\
&\qquad + 2\partial_k\partial_{i(}s_{j)}{}^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_l s^{kl}.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Iako smo pri izvodu izraza (5.20) pretpostavili da je parametar ϵ malen, možemo ga i postaviti na jedinicu te smatrati polje ξ^μ malim. Uvodimo stoga oznaku $h_{\mu\nu}^{(\epsilon=1)} = h'_{\mu\nu}$ i pišemo:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu. \tag{5.27}$$

Promotrimo kako se transformiraju komponente perturbacije uslijed (5.27):

$$\begin{aligned} h'_{00} &= h_{00} + 2\partial_0 \xi_0 \\ \rightarrow -2\phi' &= -2\phi + 2\partial_0 \xi_0. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Nakon dizanja indeksa na ξ_0 slijedi:

$$\phi' = \phi + \partial_0 \xi^0. \tag{5.29}$$

Sličnim postupkom dobivamo i transformacije ostalih varijabli uvedenih u (5.21) [5]:

$$\begin{aligned} w'_i &= w_i + \partial_0 \xi^i - \partial_i \xi^0, \\ \psi' &= \psi - \frac{1}{3}\partial_i \xi^i, \\ s'_{ij} &= s_{ij} + \partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\partial_k \xi^k \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Sada ćemo iskoristiti slobodu u odabiru ξ^μ i zahtijevati da komponente istog zadovoljavaju iduće jednadžbe:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \xi^j + \frac{1}{3}\partial_j \partial_i \xi^i &= -2\partial_i s^{ij}, \\ \nabla^2 \xi^0 &= \partial_i w^i + \partial_0 \partial_i \xi^i. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Ovakav odabir komponenti generatora difeomorfizma definira transverzalno baždarenje

[5]. Iskorištavamo prvi uvjet u (5.31) i djelujemo s ∂_i na s'^{ij} iz (5.30):

$$
\begin{aligned}
\partial_i s'^{ij} =& \partial_i s^{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\partial^i\xi^j + \frac{1}{2}\partial_i\partial^j\xi^i - \frac{1}{3}\partial_i\partial_k\xi^k\delta^{ij} \\
=& \partial_i s^{ij} + \frac{1}{2}\partial_i\partial^i\xi^j + \frac{1}{2}\partial_i\partial^j\xi^i - \frac{1}{3}\partial_j\partial_k\xi^k \\
=& \partial_i s^{ij} + \frac{1}{2}\nabla^2\xi^j + \frac{1}{2}\partial^j\partial_i\xi^i - \frac{1}{3}\partial^j\partial_i\xi^i \\
=& -\frac{1}{2}\nabla^2\xi^j - \frac{1}{6}\partial^j\partial_i\xi^i + \frac{1}{2}\nabla^2\xi^j + \frac{1}{6}\partial^j\partial_i\xi^i \\
=& 0.
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

Koristeći i drugi uvjet, ekvivalentnom procedurom se dobiva $\partial_i w'^i = 0$. Možemo uvesti natrag originalne oznake preko redefinicija $s'^{ij} \to s^{ij}$ i $w'^i \to w^i$ te pisati:

$$
\begin{aligned}
\partial_i s^{ij} &= 0, \\
\partial_i w^i &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Komponente Einsteinovog tenzora (5.26) se u transverzalnom baždarenju znatno pojednostavnjuju:

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= 2\nabla^2\psi, \\
G_{0j} &= -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + 2\partial_0\partial_j\psi, \\
G_{ij} &= (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\phi - \psi) - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2\psi - \Box s_{ij}.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

Naravno, napravili smo i redefinicije $\phi' \to \phi$ i $\psi' \to \psi$. Razmotrimo konačno Einsteinove jednadžbe u vakuumu. Prva jednadžba u (5.34) daje:

$$
\nabla^2\psi = 0, \tag{5.35}
$$

što za rubne uvjete koji se "dobro ponašaju" implicira da vrijedi $\psi = 0$ [5]. Koristeći ovaj rezultat, G_{0j} jednadžba postaje:

$$
\nabla^2 w_j = 0, \tag{5.36}
$$

iz čega opet slijedi $w_j = 0$. Izjednačavanjem prostornog dijela Einsteinovog tenzora s nulom sada dobivamo:

$$(\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\phi - \Box s_{ij} = 0. \tag{5.37}$$

Uzmimo trag prethodnog izraza:

$$\begin{aligned}&(\delta_i{}^i\nabla^2 - \partial_i\partial^i)\phi - \Box s_i{}^i = (3\nabla^2 - \nabla^2)\phi = 0\\ &\to \nabla^2\phi = 0.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Dakle možemo pisati i $\phi = 0$. Preostaje samo:

$$\Box s_{ij} = 0. \tag{5.39}$$

Riječ je o valnoj jednadžbi za prostorni dio perturbacije metrike bez traga. Istu možemo prikazati kao [5]:

$$h^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

i pisati:

$$\Box h^{TT}_{\mu\nu} = 0. \tag{5.41}$$

Oznaka TT se odnosi na činjenicu da je riječ o polju u transverzalnom baždarenju ("transverse traceless gauge") u kojem je zadovoljeno:

$$\begin{aligned}&h^{TT}_{0\nu} = 0,\\ &\eta^{\mu\nu}h^{TT}_{\mu\nu} = 0,\\ &\partial_\mu h^{\mu\nu}_{TT} = 0.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Prvi i drugi izraz respektivno kazuju da je perturbacija prostorna i bez traga, dok nam treći (koji slijedi iz (5.33)) govori da je ista transverzalna. Mogli bismo odmah pronaći potpuno rješenje jednadžbe (5.41) i kvantizirati teoriju, ali ostavimo taj dio posla za kasnije. Rješenja koja će nam biti dostatna za naredna razmatranja su ravni valovi [5]:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}. \tag{5.43}$$

Prethodni izraz opisuje gravitacijske valove. Ovdje je $\varepsilon_{\mu\nu}$ konstantan i simetričan (0,2) polarizacijski tenzor koji mora biti bez traga i isključivo prostoran:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0\nu} &= 0, \\ \eta^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Konstantni vektor k^σ je valni vektor koji ćemo kasnije interpretirati kao 4-impuls gravitona. Napomenimo i da $h_{\mu\nu}^{TT}$ mora biti realan. Faktor $e^{ik_\sigma x^\sigma}$ je dakako kompleksan, ali kroz račune možemo nositi realni i imaginarni dio i u konačnici uzeti samo realni dio. Provjerimo je li (5.43) zbilja rješenje jednadžbe (5.41):

$$\begin{aligned} \Box h_{\mu\nu}^{TT} =& \partial^\alpha \partial_\alpha \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \\ =& \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\alpha \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \\ =& ik_\sigma \delta_\alpha^\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \\ =& ik_\alpha ik_\rho \delta_\beta^\rho \eta^{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \\ =& - k_\alpha k_\beta \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu}^{TT} \\ =& - k_\alpha k^\alpha h_{\mu\nu}^{TT}. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Dakle rješenje zadovoljava valnu jednadžbu svugdje ako vrijedi:

$$k_\sigma k^\sigma = 0, \tag{5.46}$$

odnosno valni vektor mora biti svjetlosnog tipa. Ovo se prevodi u tvrdnju da gravitacijski valovi propagiraju brzinom svjetlosti. Graviton, kao čestica koja prenosi gravitacijske valove, je stoga bezmasena. Opažač sa 4-brzinom U^μ mjeri frekvenciju vala:

$$\omega = -k_\mu U^\mu. \tag{5.47}$$

Za mirujućeg opažača vrijedi $U^0 = 1$, dok ostale komponente iščezavaju. Frekvencija, odnosno energija vala je dakle:

$$\omega = -k_0 = k^0. \tag{5.48}$$

Možemo pisati:

$$k^\sigma = (\omega, \vec{k}), \tag{5.49}$$

gdje je $\vec{k} = (k^1, k^2, k^3)$. Iz (5.46) slijedi i:

$$\begin{aligned} -\omega^2 + k_i k^i &= 0 \\ \rightarrow w^2 &= \delta_{ij} k^i k^j \\ &= \vec{k} \cdot \vec{k}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Trebamo se još pobrinuti da je val transverzalan, odnosno da poštuje 3. uvjet u (5.42):

$$\partial_\mu h^{\mu\nu}_{TT} = i\varepsilon^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} = 0. \tag{5.51}$$

Prethodni rezultat vrijedi ako je zadovoljeno:

$$\varepsilon^{\mu\nu} k_\mu = 0. \tag{5.52}$$

Prema tome, valni vektor je okomit na polarizacijski tenzor $\varepsilon^{\mu\nu}$. Odaberimo sada Kartezijev koordinatni sustav tako da se val širi u x^3 smjeru:

$$\begin{aligned} k^\mu =& (\omega, 0, 0, k^3) \\ =& (\omega, 0, 0, \omega), \end{aligned} \tag{5.53}$$

gdje druga jednakost slijedi iz (5.50). Iz (5.44) i (5.52) dobivamo i:

$$\begin{aligned} k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} =& k^0 \varepsilon_{0\nu} + k^3 \varepsilon_{3\nu} \\ =& k^3 \varepsilon_{3\nu} \\ \rightarrow& \varepsilon_{3\nu} = 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Neiščezavajuće komponente polarizacijskog tenzora su sada ε_{11}, ε_{12}, ε_{21} i ε_{22}. Dakako, zbog simetričnosti vrijedi $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$. Preostale dvije komponente također nsu nezavisne jer je trag perturbacije jednak nuli. Vrijedi: $\varepsilon^1{}_1 + \varepsilon^2{}_2 = 0 \to \varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$. Gravitacijski val je stoga u potpunosti određen s ε_{11} i ε_{12} (zajedno s frekvencijom ω). Polje $h^{TT}_{\mu\nu}$ dakle ima dva nezavisna stupnja slobode. Sada bi trebalo biti očito da koeficijent (4.125) opisuje gravitacijske valove. Riječ je o prvoj popravci na ravnu metriku, simetričan je, trag mu isčezava te ima dva stupnja slobode koja nasljeđuje od konformne metrike h_{AB} uvedene u (4.20). U ovom poglavlju smo cijelo vrijeme radili u Kartezijevim koordinatama $x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$, ali kao što smo rekli, možemo se se prebaciti u retardirane Bondijeve koordinate pomoću transformacija komponenti tenzora (D.4) i koordinatnih transformacija (3.3). U Bondijevom koordinatnom sustavu se gravitacijski valovi gibaju po $u = konst.$ putanjama, odnosno u $\hat{x} = \frac{\vec{x}}{r}$ smijeru. Ovdje je $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, dok je r radijalna Bondijeva koordinata $r^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$. Kao što smo pokazali, nezavisne komponente koeficijenta (4.125) su C_{zz} i $C_{\bar{z}\bar{z}}$. Polarizacijski tenzori su usmjereni u angularnim smjerovima, što u transverzalnom baždarenju i treba biti slučaj budući da u Bondijevom koordinatnom sustavu možemo pisati $\vec{k} = \omega\hat{x}$. Ovo je najjasnije vidljivo na slici (4.1). Ako je $h^{TT}_{\mu\nu}(x)$ rješenje koje opisuje izlazne gravitacijske valove u Kartezijevom sustavu, možemo napraviti transformaciju:

$$h^{TT}_{zz}(u, r, z, \bar{z}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial z}\frac{\partial x^\nu}{\partial z} h^{TT}_{\mu\nu}. \tag{5.55}$$

Ekvivalentnom transformacijom bismo mogli pronaći i $\bar{z}\bar{z}$ komponentu. Konačno, usporedbom metrika (4.167) i (5.1), na $\mathcal{I}^+$ možemo napraviti identifikaciju:

$$C_{zz}(u, z, \bar{z}) = \kappa \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} h^{TT}_{zz}(u, r, z, \bar{z}). \tag{5.56}$$

Ukoliko bi perturbacija $h^{TT}_{\mu\nu}$ opisivala ulazne valove, sličnu identifikaciju bismo mogli napraviti s koeficijentom $\mathring{C}_{AB}$ u naprednim Bondijevim koordinatama. Ove transformacije ćemo u idućem poglavlju i provesti, ali tada ćemo uzeti u obzir potpuno rješenje za $h^{TT}_{\mu\nu}$ koje ćemo napisati kasnije. Nastavimo za sada s analizom gravitacijskih valova u Kartezijevom sustavu i dotaknimo se na kratko trećeg vrha infracrvenog trokuta, odnosno gravitacijskog memorijskog efekta. Gravitacijske valove je najlakše razumjeti razmatranjem efekta istih na relativno gibanje bliskih testnih čestica. Kako je gravitacijski val lokalni poremećaj (ravnog) prostor-vremena, isti lokano specifira i geodezike po kojima se čestice gibaju. Utjecaj gravitacijskih valova na putanje čestica se stoga standardno opisuje jednadžbom geodezičke devijacije. Pretpostavimo dakle da imamo skup bliskih čestica čije su 4-brzine opisane vektorskim poljem $U^\mu(x)$. Trajektorije čestica možemo parametrizirati s vlastitim vremenom τ i pisati:

$$U^\mu(x) = \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \tag{5.57}$$

tako da je $x(\tau)$ geodezik na koji je U^μ tangencijalan. Jednadžba geodezičke devijacije jest [5]:

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma. \tag{5.58}$$

Ovdje je S^μ vektor usmjeren od jednog geodezika prema drugom. Drugim riječima, S i U su bazni vektori adaptirani na koordinatni sustav i njihov komutator iščezava:

$$[S, U] = 0. \tag{5.59}$$

Sa $\frac{D}{d\tau}$ se naznačava da je riječ o usmjerenoj derivaciji duž polja $U^\mu(x)$. Konkretnije, relativna brzina geodezika jest:

$$\begin{aligned} V^\mu =& \frac{D}{d\tau} S^\mu \\ =& \frac{dx^\sigma}{d\tau} \nabla_\sigma S^\mu \\ =& U^\sigma \nabla_\sigma S^\mu, \end{aligned} \tag{5.60}$$

dok je relativna akceleracija:

$$\begin{aligned} A^\mu =& \frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu \\ =& \frac{D}{d\tau} V^\mu \\ =& U^\rho \nabla_\rho (U^\sigma \nabla_\sigma S^\mu). \end{aligned} \tag{5.61}$$

Koristeći Riemannov tenzor (5.8), mogli bismo pronaći rješenje jednadžbe (5.58) za S^μ linearno u $h_{\mu\nu}$. Pritom bismo, dakako, zamijenili kovarijantne derivacije s parcijalnima u (5.61). To ovdje nećemo raditi, ali možemo ukratko navesti rezultate. Uz date početne uvjete i rješenje za perturbaciju metrike (5.43), jednadžba geodezičke devijacije daje oscilatorna rješenja za relevantne komponente vektora S^μ [5]. Rezultat implicira da čestice po prolasku gravitacijskih valova osciliraju u smjerovima koji odgovaraju polarizaciji polja $h_{\mu\nu}$. Nakon što gravitacijski val napusti regiju prostor-vremena u kojem propagiraju promatrane čestice, očituje se permanentni pomak u vektoru S^μ [15]. Ovo je gravitacijski memorijski efekt i jedna od najkorisnijih činjenica koju vežemo uz njega jest to što je mjerljiv. Kako se ovaj efekt može povezati Fourierovim transformatom i vakuumskim tranzicijama sa mekanim teoremima i asimptotskim simetrijama respektivno [15], možemo dobiti informacije o rezultatima u preostala dva vrha infracrvenog trokuta mjereći pomak u geodezicima čestica prije i nakon prolaska gravitacijskog vala. Na žalost, ne možemo se nadati direktnoj opservaciji gravitona u bliskoj budućnosti. Primjerice, ukoliko bismo raspolagali s detektorom veličine Jupitera sa stopostotnom učinkovitosti postavljenim u blisku orbitu neutronske zvijezde, očekivali bismo detekciju jednog gravitona svakih deset godina [17]. Amplitude raspršenja koje uključuju (mekane) gravitone, kakvima ćemo se baviti u idućem poglavlju, su stoga još uvjek na isključivo teoretskoj razini. Memorijski efekt je dakle izuzetno bitan u povezivanju "apstraktnih" teoretskih rezultata infracrvenog trokuta s onima koji su eksperimentalno provjerljivi.

Od tvrdnji koje smo iskazivali bez dokaza a da smo ih pritom obećali opravdati, preostalo je analitički opisati onu koja kazuje da je kvadrat tenzora novosti proporcionalan toku energije gravitacijskih valova. Napravimo to sada. Ono što želimo jest konstruirati tenzor-energije impulsa gravitacijskog polja. Općenito svojstvo ovog tenzora jest da je u većini teorija kvadratično u poljima. Npr., tenzor energije-impulsa u elektromagnetizmu je dan izrazom $T^{\mu\nu}_{EM} = F^{\mu\lambda}F^{\nu}{}_{\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$ [5]. Kasnije ćemo vidjeti da je ovo slučaj i u bezmasenoj skalarnoj teoriji. U potpunoj nelinearnoj teoriji gravitacije, tenzor energije-impulsa gravitacijskog polja sadrži beskonačno članova, ali doprinosi brzo opadaju s porastom reda u perturbativnom razvoju. Ovo ćemo analizirati kasnije u kontekstu Einstein-Hilbertovog lagranžijana. Ukoliko zamislimo da je vlastita energija gravitacijskog polja pohranjena u tro-gravitonskoj interakciji (kubični član u lagranžijanu), varijacija ovog člana s obzirom na metriku bi dala jednadžbu gibanja kvadratnu u polju $h_{\mu\nu}$. Morat ćemo dakle precizirati naše račune minimalno do drugog reda u ovom polju. Ovdje ćemo razmotriti Einsteinove jednadžbe u vakuumu i definirati traženi tenzor, ali se nećemo baviti interpretacijom istog kao veličine koju tvrdimo da predstavlja. Razvijmo prvo metriku do drugog reda na idući način:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu}. \tag{5.62}$$

U prethodnom izrazu, $h^{(1)}_{\mu\nu}$ predstavlja korekciju prvog reda, dok je $h^{(2)}_{\mu\nu}$ istog reda kao i $(h^{(1)}_{\mu\nu})^2$. Uz uključenu konstantu κ, pisali bismo $h^{(1)}_{\mu\nu} \to \kappa h^{(1)}_{\mu\nu}$ i $h^{(2)}_{\mu\nu} \to \kappa^2 h^{(2)}_{\mu\nu}$. Na sličan način možemo do drugog reda razviti i Riccijev tenzor:

$$R_{\mu\nu} = R^{(0)}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu}. \tag{5.63}$$

Ovdje je $R^{(0)}_{\mu\nu} \sim (h^{(1)}_{\mu\nu})^0$ te je automatski zadovoljeno $R^{(0)}_{\mu\nu} = 0$ jer je pozadinski prostor ravan. Drugi član je reda $R^{(1)}_{\mu\nu} \sim (h^{(1)}_{\mu\nu})^1$, odnosno linearan je u gravitacijskom polju. U (5.63) smo mogli pisati: $R^{(0)}_{\mu\nu} \to \kappa^0 R^{(0)}_{\mu\nu}$, $R^{(1)}_{\mu\nu} \to \kappa^1 R^{(1)}_{\mu\nu}$ i $R^{(2)}_{\mu\nu} \to \kappa^2 R^{(2)}_{\mu\nu}$ i razmatrati Einsteinove jednadžbe u vakuumu u svakom redu izjednačavajući s nulom faktore uz konstantu κ na relevantnu potenciju. Vakuumska jednadžba prvog reda jest $R^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] = 0$. Ova jednadžba određuje perturbaciju prvog reda $h^{(1)}_{\mu\nu}$ te nam neće biti interesantna za daljnju analizu; pretpostavit ćemo da je zadovoljena. U drugom redu imamo:

$$R^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(2)}] + R^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] = 0. \tag{5.64}$$

Faktor $R^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(2)}]$ se odnosi na dio razvijenog Riccijevog tenzora koji je linearan u polju $h^{(2)}_{\mu\nu}$. Kako je $h^{(2)}_{\mu\nu}$ istog reda kao i $(h^{(1)}_{\mu\nu})^2$, riječ je o faktoru drugog reda. Ovaj član je dan izrazom (5.10) uz zamjenu $\kappa h_{\mu\nu} \to h^{(2)}_{\mu\nu}$. S druge strane, $R^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}]$ je kvadratičan u $h^{(1)}_{\mu\nu}$: $R^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] \sim (h^{(1)}_{\mu\nu})^2$. Može se pokazati da vrijedi [5]:

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} =& \frac{1}{2} h^{\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}(\partial_\mu h_{\rho\sigma})\partial_\nu h^{\rho\sigma} + (\partial^\sigma h^\rho{}_\nu)\partial_{[\sigma}h_{\rho]\mu} - h^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_{(\mu}h_{\nu)\sigma} \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\sigma(h^{\rho\sigma}\partial_\rho h_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}(\partial_\rho h_{\mu\nu})\partial^\rho h - (\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\rho h)\partial_{(\mu}h_{\nu)\rho}. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Prethodni izraz predstavlja Riccijev tenzor drugog reda s obzirom na metriku (5.1) do na konstantu κ. $R^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}]$ se jednostavno dobiva zamjenom varijable $h_{\mu\nu} \to h^{(1)}_{\mu\nu}$ u (5.65). Miješani članovi koji uključuju produkte faktora $h^{(1)}_{\mu\nu}$ i $h^{(2)}_{\mu\nu}$ su minimalno trećeg reda te ovdje nisu sadržani. Razmotrimo sada Einsteinovu jednadžbu u vakuumu napisanu u obliku $G_{\mu\nu} = 0$. U drugom redu ista ima oblik:

$$G^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(2)}] + G^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] = 0. \tag{5.66}$$

Vršimo zamjene $G^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(2)}] = R^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(2)}] - \frac{1}{2}R^{(1)}[h^{(2)}]\ \eta_{\mu\nu}$ i $G^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] = R^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] - \frac{1}{2}R^{(2)}[h^{(1)}]\eta_{\mu\nu}$ jer samo ravna metrika uz Riccijev skalar drugog reda čuva kvadratičnost jednadžbe. Prateći istu logiku, pišemo i $R^{(1)}[h^{(2)}] = \eta^{\rho\sigma}R^{(1)}_{\rho\sigma}[h^{(2)}]$ te $R^{(2)}[h^{(1)}] = \eta^{\rho\sigma}R^{(2)}_{\rho\sigma}[h^{(1)}]$. Uočimo da su faktori poput $h^{(1)\rho\sigma}R^{(1)}_{\rho\sigma}[h^{(1)}]$ drugog reda, ali već smo pretpostavili da je vakuumska jednadžba prvog reda $R^{(1)}_{\rho\sigma}[h^{(1)}] = 0$ zadovoljena pa ovakvi članovi iščezavaju. Izraz (5.66) sada možemo napisati u sugestivnoj formi:

$$R^{(1)}_{\mu\nu}[h^{(2)}] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}R^{(1)}_{\rho\sigma}[h^{(2)}]\eta_{\mu\nu} = 8\pi G \cdot \frac{-1}{8\pi G}\left[R^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}R^{(2)}_{\rho\sigma}[h^{(1)}]\eta_{\mu\nu}\right]. \tag{5.67}$$

Prethodna jednakost nas navodi da uvedemo definiciju:

$$t_{\mu\nu} = \frac{-1}{8\pi G}\left[R^{(2)}_{\mu\nu}[h^{(1)}] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}R^{(2)}_{\rho\sigma}[h^{(1)}]\eta_{\mu\nu}\right]. \tag{5.68}$$

Tenzor $t_{\mu\nu}$ je simetričan i kvadratičan u perturbaciji prvog reda. Osim toga, jednadžba (5.67) uz definiciju (5.68) govori kako ova perturbacija utječe na metriku prostor-vremena na isti način kao što bi to činio tenzor energije-impulsa. Na ravnom pozadinskom prostoru, ovaj tenzor je i očuvan:

$$\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0, \tag{5.69}$$

što slijedi direktno iz Biancijevog identiteta $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Iz navedenih razloga, $t_{\mu\nu}$ ćemo interpretirati kao tenzor energije-impulsa gravitacijskog polja. Problem u ovakvoj definiciji tenzora $t_{\mu\nu}$ leži u činjenici što nije baždarno invarijantan. Ovo se rješava usrednjavanjem istog po nekoliko valnih duljina; operacijom koju ćemo označavati s $\langle ... \rangle$. Usrednjenje derivacije proizvoljnog faktora A iščezava:

$$\langle \partial_\mu(A) \rangle = 0. \tag{5.70}$$

Prema tome, parcijalna integracija daje:

$$\langle A(\partial_\mu B)\rangle = -\langle B(\partial_\mu A)\rangle. \tag{5.71}$$

Sada ćemo navesti samo konačni rezultat za $t_{\mu\nu}$ u transverzalnom baždarenju. Koristeći uvjete (5.42), izraz (6.65) i jednadžbu u vakuumu (5.41), nakon usrednjenja i korištenja parcijalne integracije (5.71), iz definicije (5.68) slijedi [5]:

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\langle(\partial_\mu h^{TT}_{\rho\sigma})(\partial_\nu h^{\rho\sigma}_{TT})\rangle \tag{5.72}$$

Uveli smo pritom oznaku $h^{(1)}_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu}$ budući da u račune ulazi samo perturbacija prvog reda. Dakako, u (5.72) su neiščezavajuće isključivo prostorne komponente polja $h^{TT}_{\mu\nu}$. Komponentu t_{00} tenzora $t_{\mu\nu}$ asociramo s tokom energije gravitacijskih valova i pišemo:

$$t_{00} = \frac{1}{32\pi G}\langle(\partial_0 h^{TT}_{ij})(\partial_0 h^{ij}_{TT})\rangle \tag{5.73}$$

Kada bismo se prebacili u retardirane Bondijeve koordinate, nulta komponenta bi se odnosila na retardirano vrijeme te bismo izvršili zamjenu $\partial_0 \to \partial_u$. U istim koordinatama, prema (5.56) vrijedi $h^{TT}_{ij} \to h^{TT}_{AB} \sim C_{AB}$. Iz definicije tenzora novosti (4.137) i izraza (5.73) sada konačno slijedi:

$$t_{uu} \sim N_{AB}N^{AB}. \tag{5.74}$$

To jest, kvadrat tenzora novosti je uistinu proporcionalan toku energije gravitacijskog zračenja. Sličnu identifikaciju smo mogli napraviti i za tenzor novosti (4.216) u naprednim Bondijevim koordinatama.

S ovime smo razriješili problem fizikalne interpretacije svih relevantnih veličina uvedenih u četvrtom poglavlju. Sada ćemo krenuti s pripremom terena za dokaz ekvivalentnosti supertranslacijskog Wardovog identiteta i Weinbergovog teorema mekanog gravitona, što će biti konačni i najvažniji rezutat ovog rada. Prvo moramo pronaći Feynmanov propagator gravitonskog polja. Isti ćemo specificirati u tzv. De-Donderovom baždarenju koje ćemo uvesti ubrzo. Mogli bismo odmah napisati E-H lagranžijan, uvesti baždarenje i izvući propagator iz kvadratičnog dijela istog. Mi ćemo pak iskoristiti činjenicu da propagator zadovoljava jednadžbu za Greenovu funkciju linearne Einsteinove jednadžbe sa prisutnim izvorom opisanim delta funkcijom. Nevakuumsku Einsteinovu jednadžbu možemo pisati u obliku:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}. \tag{5.75}$$

Ovdje je $G_{\mu\nu}$ dan izrazom (5.13); sa uključenom konstantom κ! Da bismo pronašli Greenovu funkciju, lijevu stranu prethodnog izraza želimo napisati u formi u kojoj imamo operatorsko djelovanje na polje $h_{\mu\nu}$. To jest, Einsteinovu jednadžbu (5.75) želimo zapisati u formi [7]:

$$\frac{\kappa}{2} O_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\alpha\beta} = -\frac{\kappa^2}{4} T_{\mu\nu}. \tag{5.76}$$

Da bi izrazi (5.75) i (5.76) bili ekvivalentni, očito treba vrijediti:

$$\frac{\kappa}{2} O_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\alpha\beta} = -G_{\mu\nu}. \tag{5.77}$$

Nije se pretjerano teško uvjeriti da operator $O_{\mu\nu\alpha\beta}$ zadovoljava ovaj uvjet ukoliko ga zapišemo u formi [7]:

$$O^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = (\delta^{(\mu}_{\alpha} \delta^{\nu)}_{\beta} - \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) \Box - 2 \delta^{(\mu}_{(\alpha} \partial^{\nu)} \partial_{\beta)} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta, \tag{5.78}$$

gdje se indeksi, dakako, dižu i spuštaju pomoću metrike Minkowskog. Izraz (5.78) vrijedi prije baždarenja te nam neće biti od koristi. Iz tog razloga ga nećemo dokazivati. Da bismo postavili baždarenje, uvedimo prvo pomoćno polje koje definiramo kao:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \tag{5.79}$$

Uzimajući trag prethodnog izraza, u četiri dimenzije odmah dobivamo $\bar{h} = -h$. Polje $\bar{h}_{\mu\nu}$ se stoga često naziva perturbacija obrnutog traga ili RT (”reversed trace”) polje. Kao ranije, postavit ćemo parametar ϵ na jedinicu i smatrati generator ξ^μ malim.

Odabiremo isti tako da zadovoljava iduću jednadžbu:

$$\Box \xi_\mu = -\partial_\lambda \bar{h}^\lambda{}_\mu. \tag{5.80}$$

Jednadžbom (5.80) se definira De-Donderovo ili Lorentzovo baždarenje [5]. Riječ je o harmonijskom baždarenju koje se standardno bira u ne-vakuumskom slučaju. Primjetimo da se u vakuumu uvjek možemo prebaciti u transverzalno baždarenje u kojem su RT polje i standardna perturbacija $h_{\mu\nu}$ jednaki. Tvrdnja slijedi iz definicije (5.75) i činjenice da u TT baždarenju trag gravitona iščezava. Transformirano RT polje jest:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h' \eta_{\mu\nu}, \tag{5.81}$$

gdje je $h'_{\mu\nu}$ dan transformacijom (5.27). Istu možemo koristiti i s uključenom konstantom κ budući da jednadžbu uvjek možemo pomnožiti njome i izlučiti ju u linearnim računima tako da množi izraz kao u npr. (5.13). Trag transformirane originalne perturbacije možemo jednostavno pronaći uzimanjem traga izraza (5.27), odnosno kontrakcijom s $\eta^{\mu\nu}$. Slijedi:

$$\begin{aligned} h' =& h + \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) \\ =& h + 2\partial_\lambda \xi^\lambda. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Pronađimo sada $\bar{h}'_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\mu\nu} =& h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h' \eta_{\mu\nu} \\ =& h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h + 2\partial_\lambda \xi^\lambda) \\ =& \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h + 2\partial_\lambda \xi^\lambda) \\ =& \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda \xi^\lambda. \end{aligned} \tag{5.83}$$

Djelujemo s ∂_μ na posljednju jednadžbu s indeksima μ i ν gore te koristimo uvjet

(5.80):

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \bar{h}'^{\mu\nu} =& \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu + \partial_\mu \partial^\nu \xi^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda \xi^\lambda \\
=& \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} + \Box \xi^\nu \\
=& \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\lambda \bar{h}^{\lambda\nu} \\
=& 0.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Vratit ćemo natrag originalne oznake $\bar{h}'_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu}$ i $h'_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu}$ te pisati jednostavno:

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \tag{5.85}$$

Iz definicije RT polja slijedi i:

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu h. \tag{5.86}$$

Koristeći činjenicu da iz trećeg uvjeta u (5.42) slijedi jednakost (5.52) u TT baždarenju, analogiju možemo povući i u De-Donderovo baždarenje i zaključiti da u istom mora vrijediti:

$$k_\mu \varepsilon^{\mu\nu} = \frac{1}{2} k^\nu \varepsilon^\mu{}_\mu, \tag{5.87}$$

gdje je k^μ 4-impuls gravitona i $\varepsilon_{\mu\nu}$ polarizacijski vektor istog. Do prethodnog izraza smo jednostavno mogli doći i identifikacijom polja gravitona s polarizacijskim vektorom i zamjenom $\partial_\mu \to -ik_\mu$ u (5.86) ($\hbar = 1$). Posljednja zamjena je ekvivalentna standardnom prijelazu iz koordinatnog prostora, gdje je 4-impuls reprezentiran parcijalnom derivacijom, u impulsni prostor. Od sada pamtimo da radimo u De-Donderovom baždarenju u kojem je zadovoljen uvjet (5.86) te nećemo pisati posebnu oznaku uz polja kako bismo naznačili o kojem baždarenju je riječ kao što smo to činili u TT slučaju. Proučimo sada kako u De-Donderovom baždarenju izgleda

Einsteinov tenzor (5.13):

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} =& \frac{\kappa}{2}[\partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda{}_\nu + \partial_\nu\partial_\lambda h^\lambda{}_\mu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\lambda h^{\lambda\sigma} + \eta_{\mu\nu}\Box h] \\
=& \frac{\kappa}{2}[\partial_\mu\partial_\lambda(\bar{h}^\lambda{}_\nu + \frac{1}{2}\delta^\lambda{}_\nu h) + \partial_\nu\partial_\lambda(\bar{h}^\lambda{}_\mu + \frac{1}{2}\delta^\lambda{}_\mu h) - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) \\
&- \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\lambda(\bar{h}^{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}h) + \eta_{\mu\nu}\Box h] \\
=& \frac{\kappa}{2}[\partial_\mu\partial_\lambda\bar{h}^\lambda{}_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h + \partial_\nu\partial_\lambda\bar{h}^\lambda{}_\mu + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu h - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h \\
&- \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\lambda\bar{h}^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\sigma\lambda}\partial_\sigma\partial_\lambda h + \eta_{\mu\nu}\Box h] \\
=& -\frac{\kappa}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{5.88}
$$

U posljednjoj jednakosti smo iskoristili uvjet (5.85) i pokratili ekvivalentne članove. Ne-vakuumska Einsteinova jednadžba se dakle znatno pojednostavljuje i poprima oblik:

$$
\frac{\kappa}{2}\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^2}{4}T_{\mu\nu}, \tag{5.89}
$$

odnosno:

$$
\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}. \tag{5.90}
$$

Primjećujemo da prijelazom u vakuum možemo odabrati TT baždarenje nakon čega se prethodna jednadžba svodi na jednadžbu (5.41). Greenova funkcija $G(x^\sigma - y^\sigma)$ za operator $\Box$ je rješenje valne jednadžbe u prisustvu izvora opisanog delta-funkcijom:

$$
\Box_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma), \tag{5.91}
$$

gdje se s $\Box_x$ naznačava da je riječ o d'Alembertianu s obzirom na koordinate x^σ. Ukoliko bismo pronašli rješenje za Greenovu funkciju, rješenje RT polja bismo mogli pronaći izrazom:

$$
\bar{h}_{\mu\nu}(x^\sigma) = -\frac{\kappa}{2}\int G(x^\sigma - y^\sigma)T_{\mu\nu}(y^\sigma)d^4y, \tag{5.92}
$$

što se vrlo jednostavno može provjeriti. Dakako, pod integral bi trebao ući i faktor $\sqrt{-g}$, gdje je g determinanta metrike (5.1). Međutim, pozadinski prostor je ravan te nam ovakav faktor nije potreban. Kasnije ćemo vidjeti kako izgleda razvoj ovog faktora te ćemo se uvjeriti da je prvi član jednostavno jednak jedinici. Greenova funkcija data u (5.91) nam ipak nije pogodna za izračun propagatora. D'Alembertian u (5.90) djeluje na RT polje, dok nama treba jednadžba u obliku (5.76). Tvrdimo da su izrazi (5.89) i (5.76) ekvivalentni ukoliko operator $O^{\mu\nu\alpha\beta}$ definiramo kao:

$$O^{\mu\nu\alpha\beta} = (I^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})\Box, \tag{5.93}$$

gdje je $I^{\mu\nu\alpha\beta}$ tenzor identiteta [7]:

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}). \tag{5.94}$$

Kasnije ćemo vidjeti zašto se ovaj tenzor ovako naziva. Dokažimo sada da je izraz (5.93) u De-Donderovom baždarenju ispravan.

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa}{2}O^{\mu\nu\alpha\beta}h_{\alpha\beta} =& \frac{\kappa}{2}(I^{\mu\nu\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta}) \\
=& \frac{\kappa}{2}\cdot\frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})\Box h_{\alpha\beta} \\
=& \frac{\kappa}{2}\cdot\frac{1}{2}\Box(h^{\mu\nu} + h^{\nu\mu} - \eta^{\mu\nu}h) \\
=& \frac{\kappa}{2}\Box(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h) \\
=& \frac{\kappa}{2}\bar{h}^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Prema tome, iz rješenja (5.88) za $G_{\mu\nu}$ slijedi da je uvjet (5.77) zadovoljen. Analogno kao u (5.91), definiramo jednadžbu za Greenovu funkciju $G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x-y)$ jednadžbe (5.76) [7]:

$${O_{\mu\nu}}^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x-y) = I_{\mu\nu\gamma\delta}\delta^{(4)}(x-y). \tag{5.96}$$

Pamtimo pritom da u prethodni izraz ulazi d'Alembertian iz (5.93) s obzirom na koordinate x^σ. Greenovu funkciju smo u ovom slučaju definirali kao tenzor ranka 4 kojem indekse dižemo i spuštamo s metrikom Minkowskog, što ćemo sada opravdati. Dokažimo prvo da pomoću ove Greenove funkcije možemo pronaći rješenje za $h_{\mu\nu}(x)$ na istovjetan način kao u (5.92):

$$h_{\mu\nu}(x) = -\frac{\kappa}{2} \int G_{\mu\nu\alpha\beta}(x-y) T^{\alpha\beta}(y) d^4y \tag{5.97}$$

Uvrštavamo prethodni izraz u jednadžbu $O_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta}(x) = -\frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}(x)$ i koristimo (5.96):

$$\begin{aligned}
O_{\mu\nu\alpha\beta}h^{\alpha\beta}(x) =& -\frac{\kappa}{2} \int O_{\mu\nu\alpha\beta} G^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}(x-y) T^{\gamma\delta}(y) d^4y \\
=& -\frac{\kappa}{2} \int O_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta\gamma\delta} T^{\gamma\delta}(y) d^4y \\
=& -\frac{\kappa}{2} \int I_{\mu\nu\gamma\delta} \delta^{(4)}(x-y) T^{\gamma\delta}(y) d^4y \\
=& -\frac{\kappa}{2} I_{\mu\nu\gamma\delta} T^{\gamma\delta}(x) \\
=& -\frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\gamma}\eta_{\nu\delta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\delta}\eta_{\nu\gamma} \right) T^{\gamma\delta}(x) \\
=& -\frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2}T_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}T_{\nu\mu}(x) \right) \\
=& -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}(x).
\end{aligned} \tag{5.98}$$

U zadnjem redu smo iskoristili simetričnost tenzora energije-impulsa. Primjećujemo da je djelovanje tenzora identiteta na isti operacija koja jednostavno spušta indekse. Kvadrirajući $I_{\mu\nu\alpha\beta}$ dobivamo iduću strukturu kroneckerovih simbola:

$$I^{\mu\nu\alpha\beta} I_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\delta^\mu{}_\gamma \delta^\nu{}_\delta + \delta^\mu{}_\delta \delta^\nu{}_\gamma), \tag{5.99}$$

čije djelovanje na simetričan tenzor $T^{\gamma\delta}$ očigledno samo mijenja oznake indeksa $\gamma \to \mu$ i $\delta \to \nu$. Uočimo još da kontrahirajući indekse μ i ν u (5.96) pomoću tenzora $I^{\sigma\rho\mu\nu}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
& I^{\sigma\rho\mu\nu} O_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x-y) = I^{\sigma\rho\mu\nu} I_{\mu\nu\gamma\delta} \delta^4(x-y) \\
& \to O^{\rho\sigma\alpha\beta} G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x-y) = \frac{1}{2}(\delta^\sigma{}_\gamma \delta^\rho{}_\delta + \delta^\sigma{}_\delta \delta^\rho{}_\gamma) \delta^4(x-y),
\end{aligned} \tag{5.100}$$

gdje lijeva strana proizlazi iz činjenice da je operator (5.93) simetričan u prva dva indeksa. Jednostavno se je uvjeriti i da kontrakcija prethodne jednadžbe s $\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}$ reproducira natrag originalnu jednadžbu (5.96). Operator (5.94) je stoga identitet iste jednadžbe. Jednadžba za Greenovu funkciju ima dati oblik zbog potrebe da negdje spremimo indekse kako bi bila kompatibilna s izrazom (5.76). Iz (5.96) je očito da Greenova funkcija mora biti proporcionalna linearnoj kombinaciji $G_{\alpha\beta\gamma\delta} \sim aI_{\alpha\beta\gamma\delta} + b\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}$. Umjesto da tražimo vrijednosti koeficijenata a i b, koristimo ansatz i provjeravamo je li ispravan [7]:

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x-y) = \left(-I_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}\right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2}. \tag{5.101}$$

U nastavku će nam trebati idući jednostavno dokazivi identiteti:

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta} &= \eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta}, \\ \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}I_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta}. \end{aligned} \tag{5.102}$$

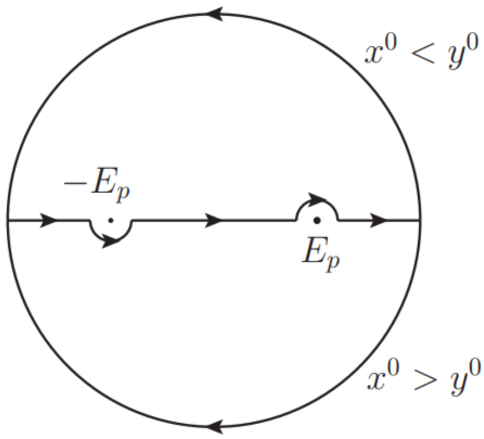
Koristit ćemo i definiciju delta-funkcije u četiri dimenzije:

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{5.103}$$

Dokažimo sada da je (5.101) rješenje jednadžbe (5.96):

$$\begin{aligned} O^{\mu\nu\alpha\beta}G_{\alpha\beta\gamma\delta}(x-y) =& \left(I^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\right) \Box_x \left(-I_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}\right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2} \\ =& \Bigg(- I^{\mu\nu\alpha\beta}I_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}I^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}I_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}\Bigg) \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-ik)^2 \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2} \\ =& - \Bigg(- I^{\mu\nu\alpha\beta}I_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}I^{\mu\nu\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}I_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} \\ & - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}\Bigg) \cdot \delta^{(4)}(x-y) \\ =& - [-\frac{1}{2}(\delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\delta + \delta^\mu{}_\delta\delta^\nu{}_\gamma) + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta} \\ & - \eta^{\mu\nu}\eta_{\gamma\delta}]\delta^{(4)}(x-y) \\ =& \frac{1}{2}(\delta^\mu{}_\gamma\delta^\nu{}_\delta + \delta^\mu{}_\delta\delta^\nu{}_\gamma)\delta^{(4)}(x-y) \\ =& I^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta}\delta^{(4)}(x-y). \end{aligned} \tag{5.104}$$

Rješenje (5.101) je dakle točno. Međutim, isto nije jednoznačno jer moramo specificirati način obilaženja polova, odnosno odabir konture pri integraciji. Biramo Feynmanovu preskripciju prikazanu na slici 5.3: Integracijska kontura koja se zatvara



Slika 5.3: Feynmanova preskripcija obilaženja polova. Preuzeto in [9].

u donjoj poluravnini dozvoljava samo vremena $x^0 > y^0$, dok gornja kontura odgovara slučaju $x^0 < y^0$. Polovi na slici odgovaraju nultim komponentama integracijske varijable k^μ u izrazu za Greenovu funkciju. Donja kontura sadrži pol u točki $k^0 = E_p$ i gornja u $k^0 = -E_p$. Spomenimo još da standardni recept za izračun propagatora uključujue množenje desne strane jednadžbe (5.96) sa imaginarnom jedinicom kako bi rezultat bio kompatibilan s računom smetnje. Ovime Greenova funkcija (5.101) kupi dodatni faktor i u brojniku. Nakon raspisa tenzora identiteta unutar Greenove funkcije i obilaska polova kao na slici 5.3 (što ovdje nećemo raditi), dolazimo do izraza za Feynmanov gravitonski propagator u De-Donderovom baždarenju [7]:

$$D^{\mu\nu\alpha\beta}(x-y) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{5.105}$$

Prethodni izraz je identičan izrazu (5.101) do na faktor i u brojniku (koji smo naprosto dodali) te do na faktor $-i\epsilon$ u nazivniku. Posljednji član dolazi zbog odabira Feynmanovog recepta integracije. Konkretnije, ϵ je mali realni parametar koji ulazi u izraz zbog Heavisideove step-funkcije [9]:

$$\Theta(x^0 - y^0) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-is(x^0-y^0)}}{s + i\epsilon} ds, \tag{5.106}$$

koja brine o vremenskom uređenju pri odabiru konture. Funkcija (5.106) poprima vrijednosti $\Theta(x^0 - y^0) = 1$ za $x^0 > y^0$ i $\Theta(x^0 - y^0) = 0$ za $x^0 < y^0$. Izraz (5.105) predstavlja amplitudu propagacije gravitona iz točke x u točku y. Kvadrat apsolutne vrijednosti ove veličine daje pripadnu vjerojatnost. Dakako, ovakva interpretacija propagatora slijedi iz kvantne teorije. Nismo još napravili formalan prijelaz iz klasične u kvantnu teoriju polja, ali napravit ćemo to vrlo brzo. S (5.105) je dan propagator u koordinatnom prostoru. Nama će biti korisniji izraz u impulsnom prostoru koji odmah dobivamo uzimajuću Fourierov transformat od $D^{\mu\nu\alpha\beta}(x-y)$:

$$P^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})\frac{-i}{k^2 - i\epsilon}. \tag{5.107}$$

Okrenimo se sada analizi strukture Einstein-Hilbertovog langranžijana. Prvo moramo pronaći razvoj faktora $\sqrt{-g}$ gdje je g, kao što smo rekli, determinanta metrike (5.1). Uvedimo matričnu reprezentaciju $g_{\mu\nu} \to G$, $\eta_{\mu\nu} \to \Lambda$ i $h_{\mu\nu} \to H$ tako da metriku pišemo kao:

$$G = \Lambda + \kappa H, \tag{5.108}$$

gdje su G, Λ i H 4×4 matrice. Koristimo iduće svojstvo matrica:

$$detG = exp[Tr[lnG]] \tag{5.109}$$

i raspisujemo desnu stranu ovog izraza:

$$\begin{aligned} exp[Tr[lnG]] =& exp[Tr[ln(\Lambda + \kappa H)]] \\ =& exp[Tr[ln(\Lambda(\mathbb{I}_{4\times4} + \kappa\Lambda^{-1}H))]] \\ =& exp[Tr[ln\Lambda + ln(\mathbb{I}_{4\times4} + \kappa\Lambda^{-1}H)]] \\ =& e^{Tr[ln\Lambda]}e^{Tr[ln(\mathbb{I}_{4\times4}+\kappa\Lambda^{-1}H)]} \\ =& det(\Lambda)e^{Tr[ln(\mathbb{I}_{4\times4}+\kappa\Lambda^{-1}H)]}. \end{aligned} \tag{5.110}$$

Slijedi:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-det\Lambda}e^{\frac{1}{2}Tr[ln(\mathbb{I}_{4\times4}+\kappa\Lambda^{-1}H)]}. \tag{5.111}$$

Uvodimo pomoćnu matricu $X = \kappa\Lambda^{-1}H$ i koristimo razvoj $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$

$\frac{x^4}{4}+....$ Nastavljamo s računom:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-g} =&\sqrt{-det\Lambda}e^{\frac{1}{2}Tr[ln(\mathbb{I}_{4\times4}+X)]}\\
=&\sqrt{-det\Lambda}e^{\frac{1}{2}Tr\left[X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-...\right]}\\
=&\sqrt{-det\Lambda}e^{\frac{1}{2}Tr[X]+\frac{1}{2}Tr\left[-\frac{X^2}{2}\right]+...}\\
=&\sqrt{-det\Lambda}\Bigg[1+\left(\frac{1}{2}Tr[X]+\frac{1}{2}Tr\left[-\frac{X^2}{2}\right]+...\right)\\
&+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}Tr[X]+\frac{1}{2}Tr\left[-\frac{X^2}{2}\right]+...\right)^2+...\Bigg]\\
=&\sqrt{-det\Lambda}\left[1+\frac{1}{2}Tr[\kappa\Lambda^{-1}H]-\frac{1}{4}Tr[(\kappa\Lambda^{-1}H)^2]+\frac{1}{8}[Tr[\kappa\Lambda^{-1}H]]^2+\mathcal{O}(\kappa^3)\right]\\
=&\sqrt{-det\Lambda}\left[1+\frac{\kappa}{2}Tr[\Lambda^{-1}H]+\kappa^2\left(-\frac{1}{4}Tr[(\Lambda^{-1}H)^2]+\frac{1}{8}[Tr[\Lambda^{-1}H]]^2\right)+\mathcal{O}(\kappa^3)\right].
\end{aligned}
\tag{5.112}
$$

Vratimo sada notaciju s indeksima u kojoj faktori posljednjeg izraza imaju oblike:

$$
\begin{aligned}
&Tr[\Lambda^{-1}H]\to\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}=h,\\
&Tr[(\Lambda^{-1}H)^2]\to h^{\mu\nu}h_{\mu\nu},\\
&[Tr[\Lambda^{-1}H]]^2\to h^2.
\end{aligned}
\tag{5.113}
$$

Nadalje, matrica Λ ima oblik $\Lambda = diag(-1,1,1,1)$ čija je determinanta -1. Vrijedi dakle $\sqrt{-det\Lambda}=1$. Konačni rezultat jest:

$$
\sqrt{-g}=1+\frac{\kappa}{2}h+\kappa^2\left(\frac{1}{8}h^2-\frac{1}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right)+\mathcal{O}(h^3).
\tag{5.114}
$$

Prema tome, faktor $\sqrt{-g}$ sadrži beskonačno članova. Promotrimo sada Einstein-Hilbertov lagranžijan:

$$
\mathcal{L}_{EH}=-\frac{2}{\kappa^2}R\sqrt{-g}.
\tag{5.115}
$$

Kako faktor (5.14) i Riccijev skalar imaju beskonačno članova, postoji bekonačno interakcija gravitona sa samim sobom. Razvijmo lagranžijan na idući način:

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{2}{\kappa^2}(R^{(1)} + R^{(2)} + \mathcal{O}(h^3))\left(1 + \frac{\kappa}{2}h + \kappa^2\left(\frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right) + \mathcal{O}(h^3)\right). \tag{5.116}$$

Ovdje je $R^{(1)}$ Riccijev skalar linearan u polju gravitona te je dan izrazom (5.12). Skalar $R^{(2)}$ je kvadratičan u istom polju te ima formu:

$$R^{(2)} = \kappa^2 \eta^{\mu\nu} R^{(2)}_{\mu\nu}, \tag{5.117}$$

gdje je $R^{(2)}_{\mu\nu}$ dan u (5.69). Prisjećamo se da smo ranije radili s konstantom κ postavljenom na jedinicu pa smo ju u (5.117) jednostavno vratili. Razviti možemo i lijevu stranu u (5.116):

$$\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}^{(1)}_{EH} + \mathcal{L}^{(2)}_{EH} + \mathcal{L}^{(3)}_{EH} + \mathcal{O}(h^4). \tag{5.118}$$

Prvi član je očito:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}_{EH} &= -\frac{2}{\kappa^2}R^{(1)} \\ &= -\frac{2}{\kappa^2}\kappa(\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h). \end{aligned} \tag{5.119}$$

Riječ je o linearnom dijelu lagranžijana prije baždarenja. Isti trivijalno doprinosi jednadžbama gibanja te ga možemo zanemariti. Nama će koristan biti oblik lagranžijana u De-Donderovom baždarenju pa pokažimo zašto ovo vrijedi koristeći uvjet (5.86).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}_{EH} &= -\frac{2}{\kappa}(\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h) \\ &= -\frac{2}{\kappa}(\partial_\nu\partial_\mu h^{\mu\nu} - \partial_\nu\partial^\nu h) \\ &= -\frac{2}{\kappa}\partial_\nu(\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\nu h - \frac{1}{2}\partial^\nu h) \\ &= \frac{1}{\kappa}\partial_\nu(\partial^\nu h). \end{aligned} \tag{5.120}$$

Riječ je o potpunoj derivaciji polja $\partial^\nu h$ na ravnoj pozadini, odnosno faktoru koji možemo zanemariti koristeći pretpostavku da varijacija polja iščezava na rubu 4-

dimenzionalnog prostora. Konkretnije, akcija je definirana kao:

$$S = \int \mathcal{L}_{EH} d^4x, \tag{5.121}$$

pri čemu varijacija iste mora iščezavati: $\delta S = 0$. Tvrnja mora vrijediti u svakom redu pa treba biti zadovoljeno i $\delta S^{(1)} = 0$, gdje je:

$$S^{(1)} = \int \mathcal{L}^{(1)}_{EH} d^4x. \tag{5.122}$$

Varijacija je jednostavno:

$$\begin{aligned} \delta S^{(1)} =& \int \delta \mathcal{L}^{(1)}_{EH} d^4x \\ =& \frac{1}{\kappa} \int \delta \partial_\nu (\partial^\nu h) d^4x. \end{aligned} \tag{5.123}$$

Kako vrijedi $\delta\partial_\nu = \partial_\nu \delta$, možemo iskoristiti Stokesov teorem i prevesti integral (5.123) u integral po trodimenzionalnom rubu prostora Minkowskog. Prema pretpostavci da varijacije polja na rubu $\partial\Sigma$ iščezavaju $\delta\partial^\nu h|_{\partial\Sigma} = 0$, uvjet $\delta S^{(1)} = 0$ je zadovoljen trivijalno. Možemo stoga pisati:

$$\mathcal{L}^{(1)}_{EH} \to 0. \tag{5.124}$$

Očekivano, lagranžijan nema relevantnih linearnih doprinosa. Do istog zaključka bismo došli i prije baždarenja. Kvadratični dio lagranžijana jest:

$$\mathcal{L}^{(2)}_{EH} = -\frac{2}{\kappa^2}[R^{(1)} \frac{\kappa}{2} h + R^{(2)}]. \tag{5.125}$$

Primjećujemo da je isti reda κ^0 u konstanti vezanja. Mogli bismo raspisati prethodni izraz u De-Donderovom baždarenju, ali za tim nema potrebe budući da smo propagator već pronašli. Kubični dio lagranžijana $\mathcal{L}^{(3)}_{EH}$ opisuje tro-gravitonsko vezanje koje je proporcionalno konstanti κ^1. Feynmanovo pravilo za ovakvu interakciju u De-Donderovom baždarenju je poprilično komplicirano i sadrži stotinjak članova. Član $\mathcal{L}^{(4)}_{EH}$ u razvoju lagranžijana definira još kompliciraniju četvero-gravitonsku interakciju proporcionalnu s κ^2, itd. Računi amplituda raspršenja u gravitaciji su dakle izuzetno teški i analitički računi su praktički nemogući. Spomenimo da je nedavno razvijena metoda pomoću koje je moguće dobiti amplitude u gravitaciji direktno iz amplituda u baždarnim teorijama gdje su računi znatno jednostavniji. Riječ je o tehnici dvostruke kopije u kojoj se bojni faktori Yang-Millsove amplitude zamjene sa kinetičkim faktorima što daje Einsteinovu gravitaciju. Pokazano je da ova metoda vrijedi za drvaste amplitude, ali vjeruje se da je primjenjiva i u dijagramima sa petljama [2]. Konstanta vezanja u gravitaciji $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ (u $\hbar = c = 1$ jedinicama) ima dimenziju duljine, odnosno GeV^{-1}. Iz ovog razloga je kvantna teorija gravitacije nerenormalizabilna. Teorije u kojima konstante vezanja imaju dimenziju GeV^n, uz $n < 0$, je ultraljubičaste divergencije nemoguće ukloniti redefinicijom parametara kao što se to čini u npr. kvantnoj elektrodinamici. Navedimo i vrijednost Newtonove gravitacijske konstante u prirodnom sustavu jedinica koja iznosi $G = 6.70711 \cdot 10^{-57}$ eV^{-2}. Slijedi da je konstanta κ izuzetno mala. Doprinosi viših redova u razvoju (5.118) stoga brzo opadaju.

Došlo je vrijeme da gravitaciju konačno kvantiziramo. Rješenje polja slobodnog gravitona (u vakuumu) ćemo zapisati u transverzalnom baždarenju u kojem je jednadžba gibanja dana izrazom (5.41). Potpuno rješenje ove jednadžbe jest [8]:

$$h_{\mu\nu}^{TT}(x) = \sum_{\alpha=+,-} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \left[\varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha *}(\vec{q}) a_\alpha(\vec{q}) e^{iq\cdot x} + \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha}(\vec{q}) a_\alpha(\vec{q})^\dagger e^{-iq\cdot x} \right], \tag{5.126}$$

gdje je $\omega_q = q^0 = |\vec{q}|$, dok su $\alpha = +, -$ dva stanja heliciteta. Klasično, $a_\alpha(\vec{q})$ i $a_\alpha(\vec{q})^\dagger$ su koeficijenti, ali možemo ih odmah promovirati u operatore povezane hermitskom konjugacijom preko standardne bozonske komutacijske relacije [8]:

$$[a_\alpha(\vec{q}), a_\beta(\vec{q'})^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}(2\omega_q)(2\pi)^3\delta^3(\vec{q} - \vec{q'}). \tag{5.127}$$

Time smo proveli kvantizaciju. Djelovanje operatora poništenja $a_\alpha(\vec{q})$ na vakuumsko stanje $|0\rangle$ daje nulu: $a_\alpha(\vec{q})\,|0\rangle = 0$, dok djelovanje operatora stvaranja $a_\alpha(\vec{q})^\dagger$ na $|0\rangle$ daje valnu funkciju gravitona impulsa $\vec{q}$ i heliciteta α. Kako smo pronašli E-H lagranžijan i uveli komutacijske relacije operatora stvaranja i poništenja stanja gravitona, gravitacijom sada možemo baratati koristeći formalizam (efektivne) kvantne teorije polja.

6 Ekvivalentnost supertranslacijskog Wardovog identiteta i Weinbergovog teorema mekanog gravitona

U ovom poglavlju ćemo konačno povezati dva vrha infracrvenog trokuta. To jest, pokazat ćemo da su asimptotske simetrije i infracrveni teoremi povezani Wardovim identitetom. Dokaz tvrdnje ide u dva koraka. Prvo ćemo izvesti Weinbergov teorem mekanog gravitona, pri čemu ćemo razmotriti najjednostavniji mogući slučaj; vezanje gravitona na bezmaseni skalar. U drugom koraku pokazujemo da je isti teorem ekvivalentan supertranslacijskom Wardovom identitetu (4.281) koji smo dobili proučavajući fizikalne fenomene vezane uz asimptotske simetrije.

Zapišimo prvo akciju koja opisuje vezanje gravitacije na bezmaseno skalarno polje [8]:

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{2}{\kappa^2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial\nu\phi)\right] \tag{6.1}$$

Prvi član opisuje čistu Einsteinovu gravitaciju, odnosno ekvivalentan je akciji (5.121). Drugi član odgovara langranžijanu materije:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi). \tag{6.2}$$

Inverz (fizikalne) metrike $g^{\mu\nu}$ je dan u (5.5), dok se razvoj faktora $\sqrt{-g}$ nalazi u (5.114). Pamtimo da radimo u formalizmu gdje je pozadinski prostor ravan. Polja ϕ i $h_{\mu\nu}$ dakle propagiraju prostorom opisanom metrikom Minkowskog. Oblik lagranžijana (6.2) ćemo ubrzo opravdati, ali promotrimo prvo kako izgleda razvoj istog:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M =& -\frac{1}{2}\left[1+\frac{\kappa}{2}h+\mathcal{O}(h^2)\right]\left[\eta^{\mu\nu}-\kappa h^{\mu\nu}+\mathcal{O}(h^2)\right](\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\\ =& -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)+\frac{1}{2}\kappa h^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)-\frac{1}{4}\kappa\eta^{\mu\nu}h(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)+\ldots\\ =& -\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi)+\frac{1}{2}\kappa h^{\mu\nu}\left[(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^\sigma\phi)(\partial_\sigma\phi)\right]+\ldots\end{aligned} \tag{6.3}$$

Prvi član opisuje slobodno bezmaseno skalarno polje na ravnoj pozadini:

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi). \tag{6.4}$$

Drugi član u (6.3) definira vezanje skalar-skalar-graviton. Jakost ovog vezanja je proporcionalna s κ^1. Idući član u razvoju bi opisivao interakciju skalar-skalar-graviton-graviton; vezanje koje možemo zanemariti u odnosu na prethodno budući da ulazi s κ^2. Isto vrijedi i za preostale interakcije, kojih ima beskonačno. Sada ćemo opravdati oblik lagranžijana (6.2). Kako se gravitacija veže na tenzor energije-impulsa, moramo se uvjeriti da je izraz (6.2) konzistentan s ovom tvrdnjom. Da bismo ovo pokazali, napravit ćemo kratku digresiju i razmotriti proizvoljni lagranžijan skalarnog polja $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ koji općenito može sadržavati čista polja, ali i njihove derivacije. Akcija jest:

$$S = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x, \tag{6.5}$$

čija varijacija mora iščezavati; $\delta S = 0$. Slijedi:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) \right]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Posljednji član je površinski te ga možemo zanemariti po pretpostavci da varijacije $\delta\phi$ iščezavaju na rubu (Stokesov teorem). Iz (6.6) tada slijede Euler-Lagrangeove jednadžbe:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \tag{6.7}$$

Sada ćemo iskoristiti Noetherin teorem koji kazuje da za svaku kontinuiranu simetrijsku transformaciju postoji jedna očuvana struja, odnosno očuvani naboj. Noetherin teorem je povezan sa kontinuiranom transformacijom polja ϕ čiji je infinitezimalni oblik [9]:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta\phi(x), \tag{6.8}$$

gdje je α infinitezimalni parametar, a $\Delta\phi(x)$ deformacija sistema polja. Transformacija (6.8) je simetrijska ako ne mijenja jednadžbe gibanja. Ovo je zadovoljeno ako je akcija invarijantna na transformaciju do na površinske članove. Kako su ovakvi članovi potpuno proizvoljni, teorija je invarijantna na iduću transformaciju lagranžijana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x) =& \mathcal{L}(x) + \alpha\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) \\ =& \mathcal{L}(x) + \alpha\Delta\mathcal{L}(x),\end{aligned} \tag{6.9}$$

gdje je $\alpha\Delta\mathcal{L}(x)$ deformacija lagranžijana uslijed simetrijske transformacije. Napravili smo i identifikaciju $\alpha\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) = \alpha\Delta\mathcal{L}(x)$. Promotrimo kako se mijenja lagranžijan uslijed infinitezimalne transformacija (6.8):

$$\begin{aligned}\alpha\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) =& \alpha\Delta\mathcal{L}(x) \\ =& \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}(\alpha\Delta\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\alpha\Delta\phi) \\ =& \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\Delta\phi.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Drugi član iščezava zbog Euler-Lagrangeovih jednadžbi (6.7). Preostaje:

$$\partial_\mu\left(\mathcal{J}^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) = 0. \tag{6.11}$$

Uvodimo očuvanu struju:

$$j^\mu(x) = \mathcal{J}^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi \qquad \longrightarrow \qquad \partial_\mu j^\mu(x) = 0. \tag{6.12}$$

Tenzor energije-impulsa sada možemo pronaći iz koordinatne transformacija:

$$x^\mu \to x^\mu + a^\mu, \tag{6.13}$$

uslijed koje se polje transformira kao:

$$\phi(x) \to \phi(x+a). \tag{6.14}$$

Pripadna infinitezimalna transformacija jest:

$$\phi(x) \to \phi(x) + a^\mu\partial_\mu\phi(x), \tag{6.15}$$

gdje je $\partial_\mu \phi(x) = (\Delta\phi)_\mu$. Promotrimo i infinitezimalnu transformaciju lagranžijana:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}). \tag{6.16}$$

Usporedbom s (6.9) vidimo da vrijedi:

$$(\mathcal{J}^\mu)_\nu = \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \tag{6.17}$$

Iz (6.12) sada slijedi da imamo četiri očuvane struje:

$$\begin{aligned} (j^\mu)_\nu =& (\mathcal{J}^\mu)_\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\Delta\phi)_\nu \\ =& \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi, \end{aligned} \tag{6.18}$$

koje se definiraju kao tenzor energije-impulsa [9]:

$$(j^\mu)_\nu = T^\mu{}_\nu. \tag{6.19}$$

Izračunajmo sada ovaj tenzor za bezmaseno skalarno polje čiji je lagranžijan dan u (6.4):

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu =& \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_S - \frac{\partial \mathcal{L}_S}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \\ =& -\frac{1}{2} (\partial^\sigma \phi)(\partial_\sigma \phi) \delta^\mu{}_\nu - \frac{\partial\left(-\frac{1}{2}(\partial^\sigma \phi)(\partial_\sigma \phi)\right)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \\ =& \frac{1}{2}(\partial_\nu \phi) \left[(\partial^\sigma \phi) \frac{\partial(\partial_\sigma \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} + (\partial_\sigma \phi) \frac{\partial(\partial^\sigma \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{1}{2} (\partial^\sigma \phi)(\partial_\sigma \phi) \delta^\mu{}_\nu \\ =& \frac{1}{2}(\partial_\nu \phi) \left[(\partial^\sigma \phi) \delta^\mu{}_\sigma + (\partial^\sigma \phi) \delta^\mu{}_\sigma \right] - \frac{1}{2} (\partial^\sigma \phi)(\partial_\sigma \phi) \delta^\mu{}_\nu \\ =& (\partial^\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} (\partial^\sigma \phi)(\partial_\sigma \phi) \delta^\mu{}_\nu . \end{aligned} \tag{6.20}$$

Nakon dizanja indeksa, rezultat poprima oblik:

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} (\partial_\lambda \phi)(\partial_\sigma \phi) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} (\partial_\lambda \phi)(\partial_\sigma \phi), \tag{6.21}$$

te je očekivano kvadratičan u poljima. Ovaj rezultat treba biti skladan sa definicijom tenzora energije-impulsa u kontekstu opće teorije relativnosti [5]:

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{6.22}$$

gdje je S_M akcija materije:

$$\begin{aligned} S_M &= \int d^4x \mathcal{L}_M \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) \end{aligned} \tag{6.23}$$

Provedimo varijaciju ove akcije s obzirom na inverz fizikalne metrike:

$$\delta S_M = \int d^4x\left[\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}(\delta g^{\mu\nu})(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\right) + (\delta\sqrt{-g})\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\right)\right]. \tag{6.24}$$

Da bismo našli varijaciju $\delta\sqrt{-g}$ iskoristit ćemo identitet $ln(detM) = Tr(lnM)$ za neku matricu M, koji smo uveli u (5.109); $exp(lnM) = M$. Varijacija ovog identiteta daje:

$$\frac{1}{detM}\delta(detM) = Tr(M^{-1}\delta M). \tag{6.25}$$

Primjećujemo da zbog svojstva cikličnosti traga $Tr(AB) = Tr(BA)$, za neke matrice A i B, ne moramo brinuti komutiraju li M^{-1} i δM u prethodnom izrazu. Uzmimo M tako da predstavlja matričnu reprezentaciju metrike $g_{\mu\nu}$, dakle vrijedi $detM = g$. Iz (6.25) sada dobivamo:

$$\delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}). \tag{6.26}$$

Koristeći izraz $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ i činjenicu da se kroneckerov simbol ne mijenja pod varijacijom, dobivamo vezu među varijacijama metrike i njenog inverza:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}. \tag{6.27}$$

Jednakost (6.26) stoga poprima oblik:

$$\begin{aligned} \delta g =& g(g^{\mu\nu}(-)g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \\ =& -g(\delta^{\nu}{}_{\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \\ =& -g(g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \end{aligned} \tag{6.28}$$

Slijedi da je varijacija faktora $\sqrt{-g}$:

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} =& -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\ =& \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ =& -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{6.29}$$

Ovaj rezultat možemo uvrstiti u (6.24):

$$\begin{aligned} \delta S_M =& \int d^4x \left[\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}(\delta g^{\mu\nu})(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu})\left(-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi)\right)\right] \\ =& \int d^4x\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})\left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) + \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right)\left(-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi)\right)\right]. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Koristimo činjenicu da funkcionalna derivacija akcije zadovoljava izraz [5]:

$$\delta S_M = \int \left(\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\right) d^4x, \tag{6.31}$$

iz kojeg slijedi:

$$\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi)\right]. \tag{6.32}$$

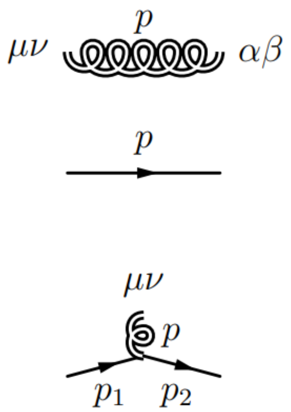
Dobivamo dalje:

$$-2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\phi)(\partial_\sigma\phi) \tag{6.33}$$

No, kako je pozadinski prostor ravan, da bi smo dobili tenzor energije-impulsa slobodnog bezmasenog skalarnog polja u prostoru Minkowskog, u prethodnom izrazu treba izvršiti zamjene $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ i $g^{\rho\sigma} \to \eta^{\rho\sigma}$. Tenzor energije impulsa stoga poprima konačni oblik:

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\rho \phi)(\partial_\sigma \phi) \tag{6.34}$$

Rezultat je ekvivalentan izrazu (6.21). Time smo pokazali da je akcija (6.1) dobro definirana. Iz ove akcije slijede Feynmanova pravila prikazana na slici 6.1.



$$= \tfrac{1}{2}\left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)\frac{-i}{p^2 - i\varepsilon},$$

$$= \frac{-i}{p^2 - i\varepsilon},$$

$$= \frac{i\kappa}{2}\left(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - \eta_{\mu\nu}p_1 \cdot p_2\right).$$

Slika 6.1: Feynmanova pravila. Preuzeto iz [8].

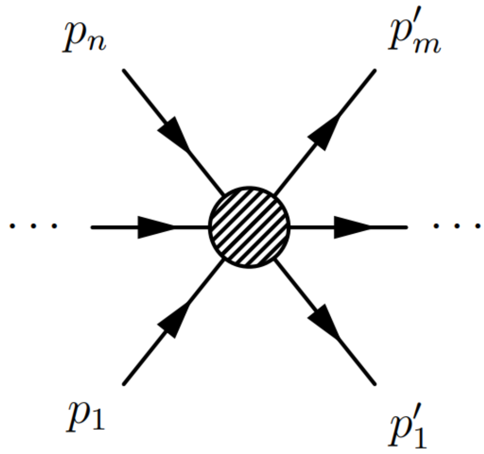
Prva linija na slici predstavlja gravitonski propagator koji smo pronašli u prethodnom poglavlju. S ravnim crnim linijama naznačavamo da je riječ o bezmasenim skalarima čiji propagator isčitavamo iz lagranžijana (6.4). Na slici je dato pravilo i za interakciju skalar-skalar-graviton koje dolazi iz drugog člana u posljednjem redu izraza (6.4). Isto se dobiva zamjenom parcijalnih derivacija sa 4-impulsima i ”skidanjem” polja iz lagranžijana. Potrebno je uzeti u obzir i simetričnost na zamjenu dvaju ”noga” skalarnih čestica. Razmotrimo sada najopćenitije moguće raspršenje koje uključuje n ulaznih bezmasenih skalara sa 4-impulsima $p_1, ..., p_n$ i m izlaznih čestica istog tipa 4-impulsa $p'_1, ..., p'_m$. Pripadni Feynmanov dijagram je prikazan na slici 6.2.

Ovaj dijagram odgovara amplitudi za koju uvodimo iduću oznaku:

$$\mathcal{M}(p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) = \mathcal{M}^S. \tag{6.35}$$

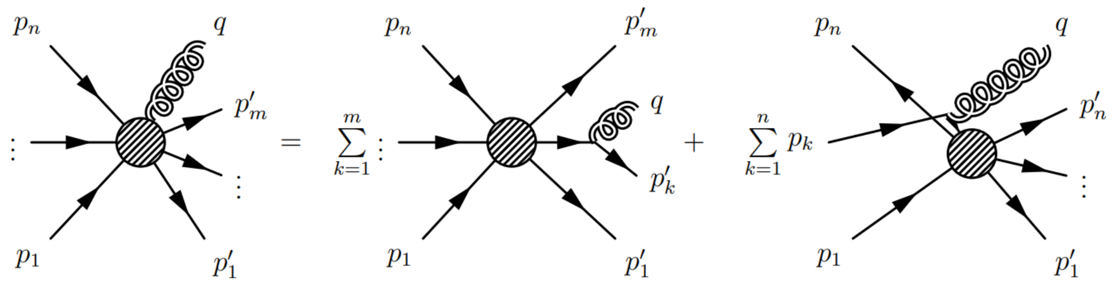
Dakako, mora biti zadovoljeno i očuvanje impulsa:

$$p_1 + ... + p_n = p'_1 + ... + p'_m. \tag{6.36}$$



Slika 6.2: Raspršenje n ulaznih i m izlaznih bezmasenih skalarnih čestica. Preuzeto iz [8].

Razmotrimo i potpuno istu amplitudu. ali s jednim dodatnim izlaznim mekanim gravitonom 4-impulsa $q \to 0$ i polarizacije $\varepsilon_{\mu\nu}(q)$. Kako su Feynmanova pravila na slici 6.1 data u De-Donderovom baždarenju, treba biti zadovoljen uvjet $q^\mu \varepsilon_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{2} q_\nu \varepsilon^\mu{}_\mu$. Napomenimo i da su izlazne, odnosno ulazne čestice na ljusci mase pa vrijedi i $q^2 = 0$, $p_k^2 = 0$, $p_k'^2 = 0$. Dominantni dijagrami u mekanom limesu su:



Slika 6.3: Raspršenje n ulaznih i m izlaznih bezmasenih skalarnih čestica s jednim izlaznim mekanim gravitonom. Preuzeto iz [8].

Prvi dijagram s desne strane jednakosti uključuje vezanje gravitona na sve moguće izlazne noge, dok u drugom provodimo sumu po vezanjima na sve ulazne noge. Interakcije gravitona s unutarnjim, odnosno propagatorskim linijama nismo uključili jer iste ne mogu razviti infracrvene polove. Tvrdnja slijedi iz činjenice što propagatori nisu na ljusci mase. To jest, za neki propagator uz koji vežemo 4-impuls p^μ vrijedi $p^2 \neq 0$. Tako, ukoliko uzmemo $q^\mu \to 0$, u nazivniku će uvjek dominirati faktori p^2 i neće doći do divergencija. Prema tome, interakcije mekanog gravitona s unutarnjim linijama su zanemarive u odnosu na interakcije s vanjskim nogama. Kako je Feynmanovo pravilo za izlazni graviton jednostavno $\varepsilon^{\mu\nu}(q)$ (i za ulazni $\varepsilon^{*\mu\nu}(q)$), amplitudu na slici (6.3) možemo dobiti relacijom:

$$\mathcal{M}(\varepsilon, q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) = \varepsilon^{\mu\nu}(q)\mathcal{M}_{\mu\nu}(q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n). \tag{6.37}$$

Primjetimo da nismo još specificirali stanje heliciteta izlaznog gravitona, ali to ćemo napraviti kasnije. Očuvanje impulsa u ovom slučaju je dato izrazom $p_1 + ... + p_n = p'_1 + ... + p'_m + q$. U principu ne bismo smjeli koristiti iste oznake za impulse izlaznih skalara kao u (6.36) jer se ukupni impuls razlikuje do na q. Mogli bismo redefinirati m-ti izlazni impuls u p''_m i pisati $p_1 + ... + p_n = p'_1 + ... + p''_m + q$, tako da je zadovoljeno $p''_m + q = p'_m$. Ovime bi notacija bila skladna sa očuvanjem (6.36). Međutim, u konačnici ćemo uzeti limes $q \to 0$ čime efektivno dobivamo $p''_m \approx p'_m$. Koristit ćemo dakle iste oznake za 4-impulse bezmasenih skalara kao u amplitudi (6.35) i u infracrvenom limesu smatrati da je zadovoljeno (6.36). Koristeći Feynmanova pravila data na slici 6.1., nalazimo $\mathcal{M}_{\mu\nu}(q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n)$:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{\mu\nu}(q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) &= \sum_{k=1}^{m} i\mathcal{M}(p'_1, ..., p'_k + q, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) \\ &\cdot \frac{-i}{(p'_k + q)^2 - i\epsilon}\left[\frac{i\kappa}{2}\left[p'_{k\mu}(p'_k + q)_\nu + p'_{k\nu}(p'_k + q)_\mu - \eta_{\mu\nu}p'_k \cdot (p'_k + q)\right]\right] \\ &+ \sum_{k=1}^{n} i\mathcal{M}(p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_k - q, ..., p_n) \\ &\cdot \frac{-i}{(p_k - q)^2 - i\epsilon}\left[\frac{i\kappa}{2}\left[p_{k\mu}(p_k - q)_\nu + p_{k\nu}(p_k - q)_\mu - \eta_{\mu\nu}p_k \cdot (p_k - q)\right]\right]. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Dodali smo faktor i jer račun amplitude preko Feynmanovih pravila daje $i\mathcal{M}$. Objasnimo detaljnije ovaj izraz. U izračunu smo iskoristili očuvanje 4-impulsa na vrhu interakcije skalar-skalar-graviton iz kojeg slijedi da su impulsi skalarnih propagatora na prvom i drugom dijagramu slike 6.3. $p'_k + q$ i $p'_k - q$ respektivno. Nadalje, doprinose unutarnjih struktura ovih dijagrama smo označili s $\mathcal{M}(p'_1, ..., p'_k + q, ..., p'_m; p_1, ..., p_n)$ i $\mathcal{M}(p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_k - q, ..., p_n)$, gdje smo također morali dodati faktore i. Oba doprinosa su jednaka amplitudi (6.35) do na zamjene $p'_k \to p'_k + q$ i $p_k \to p_k - q$, što je očito iz usporedbe sa dijagramom na slici 6.2. Iskorisit ćemo odmah uvjet $q \to 0$ i napraviti aproksimacije:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(p'_1, ..., p'_k + q, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) \approx \mathcal{M}(p'_1, ..., p'_k, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) = \mathcal{M}^S, \\
&\mathcal{M}(p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_k - q, ..., p_n) \approx \mathcal{M}(p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_k, ..., p_n) = \mathcal{M}^S.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Na temelju istog uvjeta, zanemarit ćemo i faktore q svugdje u brojnicima izraza (6.38). Također, u nulu ćemo poslati i male imaginarne popravke $i\epsilon$ u propagatorima. Slijedi nastavak računa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mu\nu}(q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) =& \frac{\kappa}{2}[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu}p'_{k\nu} + p'_{k\nu}p'_{k\mu} - \eta_{\mu\nu}p'_k \cdot p'_k}{p'^2_k + 2p'_k \cdot q + q^2} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu}p_{k\nu} + p_{k\nu}p_{k\mu} - \eta_{\mu\nu}p_k \cdot p_k}{p^2_k - 2p_k \cdot q + q^2}]\mathcal{M}^S \\
=& \frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu}p'_{k\nu} + p'_{k\nu}p'_{k\mu}}{2p'_k \cdot q} + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu}p_{k\nu} + p_{k\nu}p_{k\mu}}{-2p_k \cdot q}\right]\mathcal{M}^S,
\end{aligned} \tag{6.40}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili činjenicu da su vanjske noge na ljusci mase. Konačno, koristeći simetričnost izraza na zamjene $\mu \leftrightarrow \nu$ i nakon kontrakcije istog sa $\varepsilon^{\mu\nu}(q)$, dolazimo do Weinbergovog teorema mekanog gravitona:

$$\mathcal{M}(\varepsilon, q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) = \frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu}p'_{k\nu}\varepsilon^{\mu\nu}(q)}{p'_k \cdot q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu}p_{k\nu}\varepsilon^{\mu\nu}(q)}{p_k \cdot q}\right]\mathcal{M}^S. \tag{6.41}$$

Očekivano, amplituda ima infracrveni pol u $q \to 0$. Račun smo proveli razmatrajući vezanje gravitacije na bezmasene skalare, ali faktor u uglatoj zagradi prethodnog izraza je u biti univerzalni mekani faktor koji ne ovisi o spinu čestica [8]. Također, pri izvodu supertranslacijskog Wardovog identiteta (4.267) se nismo trebali ograničiti na bezmasene skalarne čestice, ali držat ćemo se ovakvog odabira jer nam olakšava račune. Weinbergov teorem smo izveli u De-Donderovom baždarenju, ali sada ćemo pokazati da je isti baždarno invarijantan. Baždarna transformacija (5.27) je ekvivalentna idućoj transformaciji polarizacijskog tenzora gravitona u impulsnom prostoru:

$$\varepsilon^{\mu\nu} \to \varepsilon^{\mu\nu} + q^\mu \Lambda^\nu + q^\nu \Lambda^\mu. \tag{6.42}$$

Uveli smo standardnu zamjenu $\partial^\mu \to -iq^\mu$ i definirali proizvoljno vektorsko polje $\Lambda^\mu = -i\xi^\mu$. Promjena amplitude (6.41) uslijed ove transformacije je dakle $\delta\mathcal{M} = \delta\varepsilon^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu}(q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n)$, uz $\delta\varepsilon^{\mu\nu} = q^\mu\Lambda^\nu + q^\nu\Lambda^\mu$. Izračunajmo ovu promjenu:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{M}(\varepsilon, q, p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) =& \frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{p'_{k\mu}p'_{k\nu}\delta\varepsilon^{\mu\nu}(q)}{p'_k \cdot q} - \sum_{k=1}^{n}\frac{p_{k\mu}p_{k\nu}\delta\varepsilon^{\mu\nu}(q)}{p_k \cdot q}\right]\mathcal{M}^S \\
=& \frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{2q^\nu\Lambda^\mu p'_{k\mu}p'_{k\nu}}{p'_k \cdot q} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2q^\nu\Lambda^\mu p_{k\mu}p_{k\nu}}{p_k \cdot q}\right]\mathcal{M}^S \\
=& \kappa\Lambda^\mu\left[\sum_{k=1}^{m}p'_{k\mu} - \sum_{k=1}^{n}p_{k\mu}\right]\mathcal{M}^S \\
=& 0.
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

U zadnjoj jednakosti smo iskoristili očuvanje impulsa (6.36). Prema tome, Weinbergov teorem vrijedi u svakom baždarenju.

Da bismo usporedili Weinbergov teorem i supertranslacijski Wardov identitet, moramo se prebaciti iz impulsnog u koordinatni prostor i provesti transformaciju iz Kartezijevih u retardirane Bondijeve koordinate. Prvo ćemo precizirati notaciju kako bi naredni računi bili jasni. Kartezijeve koordinate su $x^\mu = (t, x^1, x^2, x^3)$, odnosno $x^\mu = (t, \vec{x})$, tako da je $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Četvero-impuls čestice pišemo kao $p^\mu = (p^0, \vec{p})$, uz $p^0 = \omega$, gdje je ω frekvencija (energija) čestice. Kako ravna (pozadinska) metrika u Kartezijevom sustavu ima oblik (3.1), vrijedi $p^0 = -p_0$ i $p^i = p_i$. Specijalno, za bezmasene čestice na ljusci mase vrijedi i $\vec{p} \cdot \vec{p} = \omega^2$ i $p^\mu p_\mu = p^2 = 0$. Retardirane Bondijeve koordinate označavamo kao $y^\alpha = (u, r, z, \bar{z})$. Kako je r "standardna" radijalna koordinata, zadovoljena je jednakost $\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2$. Navedimo i precizniju vezu između Karetzijevih i retardiranih Bondijevih koordinata nego što smo to napravili u poglavlju 3:

$$
\begin{aligned}
t &= u + r, \\
x^1 &= \frac{r(z + \bar{z})}{(1 + z\bar{z})}, \\
x^2 &= \frac{ir(\bar{z} - z)}{(1 + z\bar{z})}, \\
x^3 &= \frac{r(1 - z\bar{z})}{(1 + z\bar{z})}.
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

Jednostavno se je uvjeriti da suma $x^1 + ix^2$ daje treću jednakost u (3.3). Za veliki r i kasna vremena, valni paket bezmasene čestice s tro-impulsom $\vec{p}$ postaje lokaliziran oko određene točke $(z, \bar{z})$ na S^2 u prostornoj beskonačnosti. To jest, bezmasene čestice završavaju svoje trajektorije na $\mathcal{I}^+$ te se gibaju u $\vec{x} = r\hat{x}$ smjeru, kao što smo objasnili u prethodnom poglavlju. Vektor $\vec{x}$ je stoga usmjeren prema točki $(z, \bar{z})$ na sferi i jedinični vektor $\hat{x}(z, \bar{z})$ je na nju okomit. Tro-impuls bezmasene čestice stoga možemo pisati kao $\vec{p} = \omega\hat{x} = \omega\frac{\vec{x}}{r} = \frac{\omega}{r}(x^1, x^2, x^2)$. Koristeći transformacije (6.44), p^μ možemo parametrizirati kao:

$$p^\mu = \frac{\omega}{1 + z\bar{z}}(1 + z\bar{z}, z + \bar{z}, -iz + i\bar{z}, 1 - z\bar{z}). \tag{6.45}$$

Impuls čestice dakle na potpuno ekvivalentan način možemo karakterizirati s $(\omega, z, \bar{z})$ i $(\omega, \vec{p})$. Valja imati na umu da nismo proveli tenzorsku transformaciju komponenti te da indekse od p^μ i dalje dižemo i spuštamo s ravnom metrikom u Kartezijevom sustavu. Tako i dalje vrijedi, primjerice $p^0 = -p_0 = \omega$ i $p^1 = p_1 = \frac{\omega(z+\bar{z})}{1+z\bar{z}}$. U kasnim vremenima, izlazno polje gravitona postaje slobodno i u Kartezijevom sustavu ima oblik koji smo pronašli u prethodnom poglavlju. Zapišimo ga ponovno:

$$h^{out}_{\mu\nu}(x) = \sum_{\alpha=\pm} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} \left[\varepsilon^{\alpha *}_{\mu\nu}(\vec{q}) a^{out}_\alpha(\vec{q}) e^{iq\cdot x} + \varepsilon^{\alpha}_{\mu\nu}(\vec{q}) a^{out}_\alpha(\vec{q})^\dagger e^{-iq\cdot x}\right], \tag{6.46}$$

gdje vrijedi $q^0 = \omega_q = |\vec{q}|$, dok su $\alpha = \pm$ dva stanja heliciteta. Operatori $a^{out}_\alpha(\vec{q})^\dagger$ i $a^{out}_\alpha(\vec{q})$ su operatori stvaranja i poništenja valne funkcije izlaznog gravitona tro-impulsa $\vec{q}$ te zadovoljavaju komutacijske relacije (5.127). Dakako, faktor u eksponentu jest $q \cdot x = q^\mu x_\mu = -\omega_q t + \vec{q} \cdot \vec{x}$. Impuls gravitona možemo parametrizirati s $(\omega_q, w, \bar{w})$ isto kao u (6.45):

$$q^\mu = \frac{\omega_q}{1 + w\bar{w}}(1 + w\bar{w}, w + \bar{w}, -iw + i\bar{w}, 1 - w\bar{w}), \tag{6.47}$$

gdje su w i $\bar{w}$ angularne retardirane Bondijeve koordinate. Kako je polarizacijski tenzor simetričan, možemo ga pisati u obliku $\varepsilon^{\pm\mu\nu} = \varepsilon^{\pm\mu}\varepsilon^{\pm\nu}$. Nadalje, polje slobodnog gravitona je dato u transverzalnom baždarenju u kojem moraju biti zadovoljeni baždarni uvjeti $\varepsilon^{\pm\mu}{}_\mu = 0$ i $\varepsilon^{\pm\mu\nu} q_\nu = 0$. Polarizacijski vektori koji zadovoljavaju ove uvjete imaju uduće oblike [8]:

$$\varepsilon^{+\mu}(\vec{q})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{w},1,-i,-\bar{w}),\quad \varepsilon^{-\mu}(\vec{q})=\frac{1}{\sqrt{2}}(w,1,i,-w),\tag{6.48}$$

te vidimo da vrijedi $\varepsilon^{+\mu*}(\vec{q})=\varepsilon^{-\mu}(\vec{q})$. Dokažimo da je zadovoljeno $\varepsilon^{+\mu}{}_{\mu}(\vec{q})=0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{+\mu}{}_{\mu}(\vec{q})=&\varepsilon^{+0}{}_{0}(\vec{q})+\varepsilon^{+1}{}_{1}(\vec{q})+\varepsilon^{+2}{}_{2}(\vec{q})+\varepsilon^{+3}{}_{3}(\vec{q})\\ =&\varepsilon^{+0}(\vec{q})\varepsilon^{+}{}_{0}(\vec{q})+\varepsilon^{+1}(\vec{q})\varepsilon^{+}{}_{1}(\vec{q})+\varepsilon^{+2}(\vec{q})\varepsilon^{+}{}_{2}(\vec{q})+\varepsilon^{+3}(\vec{q})\varepsilon^{+}{}_{3}(\vec{q})\\ =&\frac{1}{2}[\bar{w}(-\bar{w})+1\cdot 1+(-i)\cdot(-i)+(-\bar{w})(-\bar{w})]\\ =&0.\end{aligned}\tag{6.49}$$

Na isti način se dokazuje i identitet $\varepsilon^{-\mu}{}_{\mu}(\vec{q})=0$. Pokažimo još da vrijedi i $\varepsilon^{-\mu\nu}(\vec{q})q_{\nu}=0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-\mu\nu}(\vec{q})q_{\nu}=&\varepsilon^{-\mu}(\vec{q})\varepsilon^{-\nu}(\vec{q})q_{\nu}\\ =&\varepsilon^{-\mu}(\vec{q})(\varepsilon^{-0}(\vec{q})q_{0}+\varepsilon^{-1}(\vec{q})q_{1}+\varepsilon^{-2}(\vec{q})q_{2}+\varepsilon^{-3}(\vec{q})q_{3})\\ =&\varepsilon^{-\mu}\frac{\omega_{q}}{\sqrt{2}(1+w\bar{w})}(w(-1-w\bar{w})+1\cdot(w+\bar{w})+i(-i)(w-\bar{w})-w(1-w\bar{w}))\\ =&0.\end{aligned}\tag{6.50}$$

Iz ekvivalentnog postupka slijedi i $\varepsilon^{+\mu\nu}(\vec{q})q_{\nu}=0$. Sada želimo izraziti koeficijent $C_{zz}(u,z,\bar{z})$ definiran u (4.125) preko operatora stvaranja i poništenja gravitona. Isto možemo napraviti pomoću izraza (5.56). Prvo pak moramo provesti transformaciju komponenti polja (6.46) iz Kartezijevih u retardirane Bondijeve koordinate. Kao što smo objasnili u prethodnom poglavlju, ovu operaciju možemo izvršiti preko idućeg izraza:

$$C_{zz}(u,z,\bar{z})=\kappa\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial z}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial z}h^{out}_{\mu\nu}(x^{\mu}\to y^{\alpha}).\tag{6.51}$$

Koordinatna transformacija $x^{\mu}\to y^{\alpha}$ u polju gravitona odgovara idućoj jednostavnoj transformaciji faktora $q\cdot x$ u eksponentima unutar (6.46):

$$\begin{aligned}q\cdot x=-\omega_{q}t+\vec{q}\cdot\vec{x}\to&-\omega_{q}(u+r)+|\vec{q}|r\hat{q}\hat{x}\\ &=-\omega_{q}u-\omega_{q}r(1-\hat{q}\hat{x}).\end{aligned}\tag{6.52}$$

Preostaje nam izvršiti transformaciju $\frac{\partial x^\mu}{\partial z}\frac{\partial x^\nu}{\partial z}\varepsilon^\alpha(\vec{q})_{\mu\nu} = \varepsilon^\alpha(\vec{q})_{zz}$. Kako vrijedi relacija $\varepsilon^\alpha(\vec{q})_{zz} = \varepsilon^\alpha(\vec{q})_z\varepsilon^\alpha(\vec{q})_z$, dovoljno nam je razmotriti transformacije polarizacijskih vektora $\varepsilon_z^+(\vec{q}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial z}\varepsilon_\mu^+(\vec{q})$ i $\varepsilon_z^-(\vec{q}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial z}\varepsilon_\mu^-(\vec{q})$. U nastavku navodimo relevantne derivacije koje slijede iz (6.44):

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^0}{\partial z} &= \frac{\partial t}{\partial z} = 0,\\ \frac{\partial x^1}{\partial z} &= \frac{(1-\bar{z}\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}r,\\ \frac{\partial x^2}{\partial z} &= \frac{(-1-\bar{z}\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}ir,\\ \frac{\partial x^3}{\partial z} &= \frac{-2\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2}r.\end{aligned} \tag{6.53}$$

Pri provedbi prethodnih derivacija su korišteni identiteti $\frac{\partial r}{\partial z} = 0$ i $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$. Slijedi dalje:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^+(\vec{q}) =& \frac{\partial x^0}{\partial z}\varepsilon_0^+(\vec{q}) + \frac{\partial x^1}{\partial z}\varepsilon_1^+(\vec{q}) + \frac{\partial x^2}{\partial z}\varepsilon_2^+(\vec{q}) + \frac{\partial x^3}{\partial z}\varepsilon_3^+(\vec{q})\\ =& \frac{\sqrt{2}r\bar{z}(\bar{w}-\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}.\end{aligned} \tag{6.54}$$

Ekvivalentno se dolazi i do izraza za $\varepsilon_z^-(\vec{q})$:

$$\varepsilon_z^-(\vec{q}) = \frac{\sqrt{2}r(1+w\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}. \tag{6.55}$$

Kako su $\varepsilon_\mu^+(\vec{q})$ i $\varepsilon_\mu^-(\vec{q})$ povezani kompleksnom konjugacijom, transformacije komponenti kompleksno konjugiranih polarizacijskih vektora možemo odmah dobiti zamjenom identiteta (6.54) i (6.55), odnosno imamo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^{-*}(\vec{q}) &= \frac{\sqrt{2}r\bar{z}(\bar{w}-\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2},\\ \varepsilon_z^{+*}(\vec{q}) &= \frac{\sqrt{2}r(1+w\bar{z})}{(1+z\bar{z})^2}.\end{aligned} \tag{6.56}$$

Zapišimo sada izraz za $C_{zz}(u,z,\bar{z})$:

$$\begin{aligned}C_{zz} =&\kappa \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sum_{\alpha=\pm}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_q}\Bigg[\varepsilon^{\alpha *}_{zz}(\vec{q})a^{out}_{\alpha}(\vec{q})e^{-i\omega_q u-i\omega_q r(1-\hat{q}\hat{x})}\\ &+\varepsilon^{\alpha}_{zz}(\vec{q})a^{out}_{\alpha}(\vec{q})^{\dagger}e^{i\omega_q u+i\omega_q r(1-\hat{q}\hat{x})}\Bigg].\end{aligned} \tag{6.57}$$

Da bismo olakšali integraciju, prelazimo u sferni sustav. U koordinatnom prostoru vrijedi:

$$\int d^3x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx^3 = \int_0^{+\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi. \tag{6.58}$$

Tro-impuls možemo pisati u formi $\vec{q} = \omega_q\hat{q} = q^1\hat{q}^1 + q^2\hat{q}^2 + q^3\hat{q}^3$ i u impulsnom provesti zamjenu ekvivalentnu prethodnoj:

$$\int d^3q = \int_0^{+\infty} \omega_q^2 d\omega_q \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi, \tag{6.59}$$

gdje je Θ kut između $\hat{q}$ i $\hat{q}^3$. Orjentirajmo sada osi, odnosno bazne vektore $(\hat{q}^1,\hat{q}^2,\hat{q}^3)$ tako da se podudaraju smjerovi vektora $\hat{q}^3$ i $\hat{x}$. Time u eksponentima izraza (6.57) dobivamo $\hat{q}\cdot\hat{x} = \cos\Theta$. Tro-impuls stoga možemo pisati u formi:

$$\vec{q} = \omega_q[\sin\Theta(\cos\phi\hat{q}^1 + \sin\phi\hat{q}^2) + \cos\Theta\hat{x}]. \tag{6.60}$$

Valja biti oprezan i imati na umu da polarizacijski tenzori i operatori stvaranja i poništenja ovise o cijelom setu koordinata (ω_q,Θ,ϕ). Odnosno još uvjek nam niti jedna integracijska varijabla nije slobodna. Integral (6.57) sada poprima oblik:

$$\begin{aligned}C_{zz} =&\frac{\kappa}{2(2\pi)^3}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\sum_{\alpha=\pm}\int_0^{\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi \Bigg(\int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon^{\alpha *}_{zz}(\vec{q})a^{out}_{\alpha}(\vec{q})\omega_q \sin\Theta e^{-i\omega_q u}\\ &\cdot e^{i\omega_q r(\cos\Theta-1)} + \int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon^{\alpha}_{zz}(\vec{q})a^{out}_{\alpha}(\vec{q})^{\dagger}\omega_q \sin\Theta e^{i\omega_q u}e^{i\omega_q r(1-\cos\Theta)}\Bigg).\end{aligned} \tag{6.61}$$

Uvedimo oznake:

$$A^{\alpha}_{zz}(\omega_q,\Theta,\phi) = \varepsilon^{\alpha *}_{zz}(\vec{q})a^{out}_{\alpha}(\vec{q})\omega_q\sin\Theta e^{-i\omega_q u},\quad B^{\alpha}_{zz}(\omega_q,\Theta,\phi) = \varepsilon^{\alpha}_{zz}(\vec{q})a^{out}_{\alpha}(\vec{q})^{\dagger}\omega_q\sin\Theta e^{i\omega_q u}, \tag{6.62}$$

tako da (6.61) pišemo u obliku:

$$C_{zz} = \frac{\kappa}{2(2\pi)^3} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{\alpha=\pm} \int_0^{\pi} d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi (I_1 + I_2), \tag{6.63}$$

gdje su I_1 i I_2:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{r\to\infty} \int_0^{+\infty} d\omega_q A_{zz}^{\alpha}(\omega_q, \Theta, \phi) e^{i\omega_q r(\cos\Theta - 1)}, \\ I_2 &= \lim_{r\to\infty} \int_0^{+\infty} d\omega_q B_{zz}^{\alpha}(\omega_q, \Theta, \phi) e^{i\omega_q r(1-\cos\Theta)}. \end{aligned} \tag{6.64}$$

Iskoristit ćemo sada tzv. aproksimaciju stacionarne faze. Da bi bilo jasno o čemu govorimo, osvrnimo se na idući integral koji je istog tipa kao I_1 i I_2 [9]:

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{ikf(x)} dx. \tag{6.65}$$

Prema Riemann-Lebesgueovoj lemi, ovakav integral iščezava za $k \to \infty$ ukoliko fazna funkcija $f(x)$ nema kritičnih točaka. Konkretnije, beskonačni integral približno oscilatorne funkcije koja brzo mijenja fazu teži u nulu [9]. Identificiramo faze u (6.64) kao $\alpha_1(\omega_q) = \omega_q r(\cos\Theta - 1)$ i $\alpha_2(\omega_q) = \omega_q r(1 - \cos\Theta)$. Iste su stacionarne kada vrijedi $\frac{d\alpha_1(\omega_q)}{d\omega_q} = 0$ i $\frac{d\alpha_2(\omega_q)}{d\omega_q} = 0$. Slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(\omega_q)}{d\omega_q} &= r(\cos\Theta_c - 1) = 0, \\ \frac{d\alpha_2(\omega_q)}{d\omega_q} &= r(1 - \cos\Theta_c) = 0. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Prema tome, u oba integrala je stacionarna (kritična) točka $\Theta_c = 0$. Rezultat ima smisla jer integrali (6.64) za veliki r prema Riemann-Lebesgueovoj lemi iščezavaju osim kada vrijedi $\pm(1-\cos\Theta) \to 0$, što je zadovoljeno za $\Theta \to 0$. Ovo nam omogućuje da razvijemo funkcije sinus i kosinus oko nule na idući način:

$$\begin{aligned} \cos\Theta &\approx 1 - \frac{\Theta^2}{2!}, \\ \sin\Theta &\approx \Theta. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Zašto u razvoju možemo zadržati samo ove članove ćemo objasniti malo kasnije. Za sada primjetimo da uzimajući $\Theta \to 0$, tro-impuls (6.60) možemo aproksimirati kao:

$$\vec{q} \approx \omega_q \hat{x}. \tag{6.68}$$

Koristeći prethodnu aproksimaciju i razvoj sinusa u (6.67), varijable (6.62) poprimaju oblike:

$$\begin{aligned}
A^{\alpha}_{zz}(\omega_q, \Theta, \phi) &\approx A^{\alpha}_{zz}(\omega_q, \Theta) = \varepsilon^{\alpha *}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x}) \omega_q \Theta e^{-i\omega_q u}, \\
B^{\alpha}_{zz}(\omega_q, \Theta, \phi) &\approx B^{\alpha}_{zz}(\omega_q, \Theta) = \varepsilon^{\alpha}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x})^{\dagger} \omega_q \Theta e^{i\omega_q u}
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Kako je $\hat{x}(z, \bar{z})$ jedinični vektor koji specifira točku $(z, \bar{z})$ na sferi s beskonačnim radijusom, $a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x})^{\dagger}$ je operator koji stvara graviton tro-impulsa $\vec{q} = \omega_q \hat{x}$ koji završava na $\mathcal{I}^+$ na toj točki. Ekvivalentno, $a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x})$ poništava graviton s istim odredištem. Koristeći ovu tvrdnju, možemo odmah dati i eksplicitne oblike polarizacijskih vektora $\varepsilon^{\alpha}_{z}(\omega_q \hat{x})$ i $\varepsilon^{\alpha *}_{z}(\omega_q \hat{x})$. Iste smo parametrizirali pomoću angularnih retardiranih Bondijevih koordinata $(w, \bar{w})$, no kako aproksimacija stacionarne faze daje $w = z$, u (6.54), (6.55) i (6.56) trebamo samo napraviti identifikaciju $w \to z$. Time dobivamo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{+}_{z}(\omega_q \hat{x}) = 0, \quad & \varepsilon^{-}_{z}(\omega_q \hat{x}) = \frac{\sqrt{2} r}{(1 + z\bar{z})}, \\
\varepsilon^{-*}_{z}(\omega_q \hat{x}) = 0, \quad & \varepsilon^{+*}_{z}(\omega_q \hat{x}) = \frac{\sqrt{2} r}{(1 + z\bar{z})}.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Primjećujemo da smo ovime dobili isti rezultat koji je ranije proizašao iz Cauchy-Pompeiuove formule (4.276) koja je dala delta-funkciju prema kojoj vrijedi $z = w$. Jedina razlika jest što je u tamošnjem računu identifikacija išla u suprotnom smjeru te smo napravili zamjenu $z \to w$. Ništa se ne bi promjenilo ukoliko bismo u Wardovom identitetu (4.281) umjesto z pisali w. U svakom slučaju, nakon razvoja kosinusa (6.67), integrali (6.63) postaju:

$$\begin{aligned}
I_1 &\approx \lim_{r \to \infty} \int_0^{+\infty} d\omega_q A^{\alpha}_{zz}(\omega_q, \Theta) e^{-i\omega_q r \frac{\Theta^2}{2}}, \\
I_2 &\approx \lim_{r \to \infty} \int_0^{+\infty} d\omega_q B^{\alpha}_{zz}(\omega_q, \Theta) e^{i\omega_q r \frac{\Theta^2}{2}}.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Sada ćemo ove integrale uvrstiti natrag u (6.63), pri čemu primjećujemo da je integracija po polarnoj koordinati ϕ postala slobodna; ista daje faktor 2π. Nakon uvrštavanja slijedi:

$$\begin{aligned}C_{zz} =&\kappa \lim_{r\to\infty} \frac{2\pi}{2(2\pi)^3 r} \sum_{\alpha=^+_-} \Bigg[\int_0^{+\infty} d\omega_q \omega_q \varepsilon^{\alpha *}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x}) e^{-i\omega_q u} \int_0^{\pi} d\Theta \Theta e^{-i\omega_q r \frac{\Theta^2}{2}} \\ &+ \int_0^{+\infty} d\omega_q \omega_q \varepsilon^{\alpha}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x})^{\dagger} e^{i\omega_q u} \int_0^{\pi} d\Theta \Theta e^{i\omega_q r \frac{\Theta^2}{2}} \Bigg].\end{aligned} \tag{6.72}$$

Vidimo da možemo provesti integraciju po Θ te koristimo idući identitet:

$$\int x e^{cx^2} dx = \frac{1}{2c} e^{cx^2} + konst. \tag{6.73}$$

Određena integracija daje:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} d\Theta \Theta e^{-i\omega_q r \frac{\Theta^2}{2}} &= \frac{i}{\omega_q r} \left(e^{\frac{-i\omega_q r \pi^2}{2}} - 1 \right), \\ \int_0^{\pi} d\Theta \Theta e^{i\omega_q r \frac{\Theta^2}{2}} &= \frac{-i}{\omega_q r} \left(e^{\frac{i\omega_q r \pi^2}{2}} - 1 \right).\end{aligned} \tag{6.74}$$

Jasno je sada da je C_{zz} u radijalnoj koordinati reda $C_{zz} \sim \frac{1}{r} r^2 \frac{1}{r} = r^0$. Srednji r^2 faktor proizlazi iz polarizacijskih tenzora, što je vidljivo iz (6.70) i činjenice da vrijedi $\varepsilon^{\alpha}_{zz} = \varepsilon^{\alpha}_{z} \varepsilon^{\alpha}_{z}$. Radijalna koordinata se nalazi i u eksponentima prethodnih izraza, no ubrzo ćemo vidjeti da ove članove možemo zanemariti. Ukoliko bismo zadržali članove višeg reda u razvojima (6.67), dodatni integrali po Θ poput ovih upravo evaluiranih, bi uvjek bili reda $\mathcal{O}(r^{-2})$. Time bismo ukupno dobili $C_{zz} \sim r^0 + \mathcal{O}(r^{-1})$, no $\mathcal{O}(r^{-1})$ članovi iščezavaju uzimajući limes $r \to \infty$. Po vraćanju rješenja integrala (6.74) natrag u (6.72) dobivamo:

$$\begin{aligned}C_{zz} = \lim_{r\to\infty} \frac{i\kappa}{8\pi^2 r^2} \sum_{\alpha=^+_-} \Bigg[&\int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon^{\alpha *}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x}) e^{-i\omega_q u} e^{\frac{-i\omega_q r \pi^2}{2}} \\ &- \int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon^{\alpha *}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x}) e^{-i\omega_q u} + \int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon^{\alpha}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x})^{\dagger} e^{i\omega_q u} \\ &- \int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon^{\alpha}_{zz}(\omega_q \hat{x}) a^{out}_{\alpha}(\omega_q \hat{x})^{\dagger} e^{i\omega_q u} e^{\frac{i\omega_q r \pi^2}{2}} \Bigg].\end{aligned} \tag{6.75}$$

Već smo utvrdili da će se faktor r^{-2} ispred oznake za sumaciju pokratiti sa faktorom r^2 koji dolazi iz polarizacijskih tenzora. Time 1. i 4. integral prethodnog izraza poprimaju iste forme kao i (6.65). Kako isti nemaju kritičnih točaka, isčezavaju prema Riemann-Lebesgueovoj lemi. Možemo dakle pisati:

$$\begin{aligned} C_{zz} = \lim_{r\to\infty} \frac{-i\kappa}{8\pi^2 r^2} \sum_{\alpha=\pm} \Bigg[\int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon_{zz}^{\alpha *}(\omega_q \hat{x}) a_\alpha^{out}(\omega_q \hat{x}) e^{-i\omega_q u} \\ - \int_0^{+\infty} d\omega_q \varepsilon_{zz}^{\alpha}(\omega_q \hat{x}) a_\alpha^{out}(\omega_q \hat{x})^\dagger e^{i\omega_q u} \Bigg]. \end{aligned} \tag{6.76}$$

Preostaje nam još provesti sumaciju po stanjima heliciteta. Kako iz (6.70) slijedi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz}^{+}(\omega_q \hat{x}) = 0, \quad \varepsilon_{zz}^{-}(\omega_q \hat{x}) = \frac{2r^2}{(1+z\bar{z})^2}, \\ \varepsilon_{zzz}^{-*}(\omega_q \hat{x}) = 0, \quad \varepsilon_{zz}^{+*}(\omega_q \hat{x}) = \frac{2r^2}{(1+z\bar{z})^2}, \end{aligned} \tag{6.77}$$

konačni rezultat za C_{zz} poprima oblik:

$$C_{zz}(u,z,\bar{z}) = \frac{-i\kappa}{4\pi^2(1+z\bar{z})^2} \int_0^{+\infty} d\omega_q \left[a_+^{out}(\omega_q \hat{x}) e^{-i\omega_q u} - a_-^{out}(\omega_q \hat{x})^\dagger e^{i\omega_q u} \right]. \tag{6.78}$$

Riječ je o polju koje anihilira graviton pozitivnog heliciteta i stvara graviton negativnog heliciteta. Definirajmo sada novo polje na idući način [8]:

$$\tilde{N}_{zz}^{\omega}(z,\bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i\omega u} \partial_u C_{zz}. \tag{6.79}$$

Kako parcijalna derivacija polja (6.78) po retardiranom vremenu daje:

$$\partial_u C_{zz} = \frac{-\kappa}{(2\pi)^2(1+z\bar{z})^2} \int_0^{+\infty} d\omega_q \omega_q \left[a_+^{out}(\omega_q \hat{x}) e^{-i\omega_q u} + a_-^{out}(\omega_q \hat{x})^\dagger e^{i\omega_q u} \right], \tag{6.80}$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{zz}^{\omega}(z,\bar{z}) = \frac{-\kappa}{2\pi(1+z\bar{z})^2} \int_0^{+\infty} d\omega_q \omega_q \Bigg[a_+^{out}(\omega_q \hat{x}) \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{-iu(\omega_q - \omega)}}{2\pi} \\ + a_-^{out}(\omega_q \hat{x})^\dagger \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{-iu(-\omega_q - \omega)}}{2\pi} \Bigg]. \end{aligned} \tag{6.81}$$

Unutar izraza prepoznajemo jednodimenzionalne delta-funkcije:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{-iu(\omega_q-\omega)}}{2\pi} &= \delta(\omega_q - \omega),\\ \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{-iu(-\omega_q-\omega)}}{2\pi} &= \delta(\omega_q - (-\omega)).\end{aligned} \tag{6.82}$$

Uvrštavanjem istih u (6.81), izraz postaje:

$$\tilde{N}_{zz}^{\omega}(z,\bar{z}) = \frac{-\kappa}{2\pi(1+z\bar{z})^2} \int_0^{+\infty} d\omega_q \omega_q [a_+^{out}(\omega_q \hat{x})\delta(\omega_q - \omega) + a_-^{out}(\omega_q \hat{x})^\dagger \delta(\omega_q - (-\omega))]. \tag{6.83}$$

Kako imamo $\omega_q > 0$, prvi član prethodnog integrala doprinosi samo za $\omega > 0$, dok drugi doprinosi za $\omega < 0$. Za $\omega > 0$ možemo pisati $\omega = |\omega|$ te prva delta-funkcija daje $\omega_q = \omega = |\omega|$. S druge strane, uz $\omega < 0$ pišemo $\omega = -|\omega|$ i druga delta-funkcija daje $\omega_q = -\omega = |\omega|$. Možemo stoga pisati:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{zz}^{|\omega|}(z,\bar{z}) &= \frac{-\kappa}{2\pi(1+z\bar{z})^2} |\omega| a_+^{out}(|\omega|\hat{x}),\\ \tilde{N}_{zz}^{-|\omega|}(z,\bar{z}) &= \frac{-\kappa}{2\pi(1+z\bar{z})^2} |\omega| a_-^{out}(|\omega|\hat{x})^\dagger.\end{aligned} \tag{6.84}$$

Od sada nećemo pisati apsolutne vrijednosti već pamtimo da je ω svugdje pozitivan. Uvedimo na kraju još jednu definiciju [8]:

$$\tilde{N}_{zz}^{0} = \lim_{\omega \to 0^+} \frac{1}{2}(\tilde{N}_{zz}^{\omega} + \tilde{N}_{zz}^{-\omega}), \tag{6.85}$$

tako da vrijedi:

$$\tilde{N}_{zz}^{0}(z,\bar{z}) = \frac{-\kappa}{4\pi(1+z\bar{z})^2} \lim_{\omega \to 0^+} [\omega a_+^{out}(\omega\hat{x}) + \omega a_-^{out}(\omega\hat{x})^\dagger]. \tag{6.86}$$

U ovom trenutku izgleda da $\tilde{N}_{zz}^{0}(z,\bar{z})$ možemo jednostavno izjednačiti s nulom, ali kasnije će doći do krucijalnog kraćenja frekvencija te prethodni izraz ostavljamo kakav jest. Prisjetimo se sada izvoda (4.234) gdje smo pokazali da vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \partial_u C_{zz} = \eth_z \eth_z \tilde{N}. \tag{6.87}$$

Nadalje, iz (6.79) dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0}\tilde{N}^{\omega}_{zz} &= \lim_{\omega\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i\omega u}\partial_u C_{zz}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du \partial_u C_{zz}\\ &= \eth_z\eth_z\tilde{N}.\end{aligned} \tag{6.88}$$

Konačno, iz (6.85) proizlazi:

$$\tilde{N}^{0}_{zz} = \eth_z\eth_z\tilde{N}, \tag{6.89}$$

ili, prema (4.287):

$$\tilde{N}^{0}_{zz} = \mathcal{O}^{+}_{zz}. \tag{6.90}$$

Analogna priča se odvija i na $\mathcal{I}^{-}$. Prva stvar koju bismo trebali uvesti jest polje ulaznog gravitona koje ima oblik ekvivalentan polju (6.46). Tada bismo mogli povezati $\mathring{C}_{zz}(v, z, \bar{z})$ i $h^{in}_{\mu\nu}$ kao u (6.51), pri čemu bismo proveli transformaciju iz Kartezijevih u napredne Bondijeve koordinate. Možemo definirati polje [8]:

$$\mathring{N}^{\omega}_{zz}(z, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{i\omega v}\partial_v \mathring{C}_{zz}, \tag{6.91}$$

te potpuno ista procedura kao ranije daje [8]:

$$\begin{aligned}\mathring{N}^{\omega}_{zz}(z, \bar{z}) &= \frac{-\kappa}{2\pi(1+z\bar{z})^2}\omega a^{in}_{+}(\omega\hat{x}),\\ \mathring{N}^{-\omega}_{zz}(z, \bar{z}) &= \frac{-\kappa}{2\pi(1+z\bar{z})^2}\omega a^{in}_{-}(\omega\hat{x})^{\dagger},\end{aligned} \tag{6.92}$$

gdje je $\omega > 0$. Jedinični vektor $\hat{x}(z, \bar{z})$ definira točku na S^2 u prostoru $\mathcal{I}^{-}$. Pamtimo da je ova točka specificirana u naprednim angularnim Bondijevim koordinatama (3.23) koje se nalaze u nazivnicima prethodnih izraza. Prema tome, $a^{in}_{-}(\omega\hat{x})^{\dagger}$ je operator stvaranja ulaznog gravitona negativnog heliciteta i tro-impulsa $\vec{q} = \omega\hat{x}$ koji započinje svoju putanju na $\mathcal{I}^{-}$ s točke $(z, \bar{z})$. Operator $a^{in}_{+}(\omega\hat{x})$ anihilira graviton istog polazišta i tro-impulsa, ali pozitivnog heliciteta. Uvodimo definiciju ekvivalentnu onoj datoj u

(6.85) [8]:

$$\mathring{N}^0_{zz}(z,\bar{z}) = \lim_{\omega\to 0^+}\frac{1}{2}(\mathring{N}^{\omega}_{zz} + \mathring{N}^{-\omega}_{zz}), \tag{6.93}$$

čime dobivamo:

$$\mathring{N}^0_{zz}(z,\bar{z}) = \frac{-\kappa}{4\pi(1+z\bar{z})^2}\lim_{\omega\to 0^+}[\omega a^{in}_{+}(\omega\hat{x}) + \omega a^{in}_{-}(\omega\hat{x})^{\dagger}]. \tag{6.94}$$

Prema prvoj relaciji u (4.242) i definiciji tenzora novosti (4.216), uočavamo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0}\mathring{N}^{\omega}_{zz}(z,\bar{z}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{i\omega v}\partial_v \mathring{C}_{zz}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dv \partial_v \mathring{C}_{zz}\\ &= \eth_z\eth_z\mathring{N}.\end{aligned} \tag{6.95}$$

Iz (6.93) slijedi i:

$$\mathring{N}^0_{zz}(z,\bar{z}) = \eth_z\eth_z\mathring{N}, \tag{6.96}$$

odnosno, prema (4.285):

$$\mathring{N}^0_{zz}(z,\bar{z}) = -\mathcal{O}^{-}_{zz}. \tag{6.97}$$

Kako smo uspješno izrazili operator $\mathcal{O}_{zz}$ preko operatora stvaranja i poništenja gravitona, isti ćemo ubaciti u S-matrični element za n ulaznih i m izlaznih bezmasenih skalara koji ima istu formu kao u (4.258). Možemo pisati:

$$S_{fi} = \langle z_1^{out}, ..., z_m^{out}|\, S\, |z_1^{in}, ..., z_n^{in}\rangle\,, \tag{6.98}$$

gdje smo impulse izlaznih i ulaznih čestica parametrizirali s retardiranim i naprednim angularnim Bondijevim koordinatam respektivno. Umetnimo u prethodni izraz vremenski uređen operator $\mathcal{O}_{zz}$, pri čemu koristimo (4.289):

$$\langle z_1^{out}, ..|:\mathcal{O}_{zz}S:|z_1^{in}, ..\rangle = \langle z_1^{out}, ..|\,\mathcal{O}^{+}_{zz}S\,|z_1^{in}, ..\rangle - \langle z_1^{out}, ..|\,S\mathcal{O}^{-}_{zz}\,|z_1^{in}, ..\rangle \tag{6.99}$$

Možemo dalje upotrijebiti (6.90), (6.97), (6.86) i (6.94)

$$\begin{aligned}
&\langle z_1^{out}, ..| : \mathcal{O}_{zz} S : |z_1^{in}, ..\rangle = \langle z_1^{out}, ..| \tilde{N}^0_{zz} S |z_1^{in}, ..\rangle + \langle z_1^{out}, ..| S \mathring{N}^0_{zz} |z_1^{in}, ..\rangle \\
&= \frac{-\kappa}{4\pi} \lim_{\omega \to 0^+} \left[\frac{1}{(1+z\bar{z})^2} \omega \langle z_1^{out}, ..| \left(a_+^{out}(\omega\hat{x}) + a_-^{out}(\omega\hat{x})^\dagger \right) S |z_1^{in}, ..\rangle \right. \\
&\left. + \frac{1}{(1+z\bar{z})^2} \omega \langle z_1^{out}, ..| S \left(a_+^{in}(\omega\hat{x}) + a_-^{in}(\omega\hat{x})^\dagger \right) |z_1^{in}, ..\rangle \right].
\end{aligned} \tag{6.100}$$

U ovom izrazu treba primjetiiti dvije stvari. Koordinate $(z, \bar{z})$ u prvom i drugom članu su date u retardiranim i naprednim Bondijevim koordinatama respektivno. One u principu nisu iste (iako za obje koristimo iste oznake) te je njihova veza s Kartezijevim koordinatama definirana u (3.3) i (3.23). Međutim, iste označavaju odredišne i polazišne točke gravitona, a u 3. poglavlju smo zaključili da su vrijednosti od z i $\bar{z}$ u naprednim Bondijevim koordinatama s kojima trajektorija bezmasene čestice izvire na $\mathcal{I}^-$ jednake vrijednostima od z i $\bar{z}$ u retardiranim Bondijevim koordinatama s kojima trajektorija takve čestice ponire na $\mathcal{I}^+$. Prema tome, faktor $\frac{1}{(1+z\bar{z})^2}$ u prethodnom izrazu možemo izlučiti ispred zagrade. Nadalje, zadovoljeno je i $a_+^{in}(\omega\hat{x}) |z_1^{in}, ...\rangle = 0$ jer po našoj pretpostavci stanje $|z_1^{in}, ...\rangle$ ne sadrži gravitone. U slučaju koji razmatramo, isto opisuje bezmasene skalare, ali prethodna tvrdnja bi vrijedila ukoliko bi ulazno stanje sadržavalo bilo koji tip čestica osim tvrdog gravitona. Možemo čak dozvoliti i prisustvo mekanog ulaznog gravitona, jednakost $a_+^{in}(\omega\hat{x}) |in\rangle = 0$ bi i dalje bila zadovoljena zbog faktora ω_q u (5.127). Kako imamo i $a_-^{out}(\omega\hat{x}) |0\rangle = 0$, hermitska konjugacija daje $0 = \langle 0| a_-^{out}(\omega\hat{x})^\dagger$, što implicira da vrijedi $0 = \langle z_1^{out}, ...| a_-^{out}(\omega\hat{x})^\dagger$ jer izlazno stanje ne sadrži tvrdi graviton. Prema navedenim spoznajama, izraz (6.100) postaje:

$$\begin{aligned}
\langle z_1^{out}, ..| : \mathcal{O}_{zz} S : |z_1^{in}, ..\rangle = &\frac{-\kappa}{4\pi(1+z\bar{z})^2} \lim_{\omega \to 0^+} \omega [\langle z_1^{out}, ...| a_+^{out}(\omega\hat{x}) S |z_1^{in}, ...\rangle \\
&+ \langle z_1^{out}, ...| S a_-^{in}(\omega\hat{x})^\dagger |z_1^{in}, ...\rangle].
\end{aligned} \tag{6.101}$$

Prvi član uglate zagrade predstavlja S-matrični element (6.98) s dodatnim izlaznim gravitonom pozitivnog heliciteta, dok drugi član predstavlja istu amplitudu, ali s dodatnim ulaznim gravitonom negativnog heliciteta. Ove dvije amplitude su jednake. Tvrdnja slijedi iz činjenice što je je Feynmanovo pravilo za izlazni graviton pozitivnog heliciteta $\varepsilon^{+\mu\nu}$, a za ulazni graviton negativnog heliciteta $\varepsilon^{-\mu\nu*}$. No već smo utvrdili da su $\varepsilon^{+\mu\nu}$ i $\varepsilon^{-\mu\nu}$ povezani kompleksnom konjugacijom; dakle amplitude moraju biti iste. Konačno, jednadžba (6.101) poprima formu:

$$\langle z_1^{out}, ..| : \mathcal{O}_{zz}S : |z_1^{in}, ..\rangle = \frac{-\kappa}{2\pi(1+z\bar{z})^2} \lim_{\omega\to 0^+} \omega \langle z_1^{out}, ...| a_+^{out}(\omega\hat{x}) S |z_1^{in}, ...\rangle . \tag{6.102}$$

Sada ćemo se pozvati na Weinbergov teorem mekanog gravitona. Prvo koristimo činjenicu da su S-matrični element i amplituda raspršenja ekvivalentne fizikalne veličine te možemo povezati (6.35) i (6.98) [12]:

$$\langle z_1^{out}, ..., z_m^{out}| S |z_1^{in}, ..., z_n^{in}\rangle = i\mathcal{M}^S (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{m} p'_k \right) . \tag{6.103}$$

Na isti način možemo povezati prethodni S-matrični element s dodatnim izlaznim mekanim gravitonom pozitivnog heliciteta i 4-impulsa $q^\mu = (\omega_q, \vec{q})$ i pripadnu amplitudu:

$$\begin{aligned} \langle z_1^{out}, ...| a_+^{out}(\vec{q}) S |z_1^{in}, ...\rangle =& i\mathcal{M}(\varepsilon^+, (\omega_q, \vec{q}), p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n)(2\pi)^4 \\ & \cdot \delta^{(4)} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{m} p'_k \right) . \end{aligned} \tag{6.104}$$

U prethodnom izrazu smo u biti trebali pisati delta-funkciju u obliku $\delta^{(4)}(\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{m} p'_k - q)$, ali već smo rekli da uzimamo u obzir očuvanje (6.36) te da možemo q aproksimirati s nulom. Prema Weinbergovom teoremu (6.41), amplituda u zadnjoj jednadžbi jest:

$$\mathcal{M}(\varepsilon^+, (\omega_q, \vec{q}), p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) = \frac{\kappa}{2} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu} p'_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(q)}{p'_k \cdot q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu} p_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(q)}{p_k \cdot q} \right] \mathcal{M}^S. \tag{6.105}$$

Iz (6.104) i (6.105) slijedi dalje:

$$\begin{aligned} \langle z_1^{out}, ...| a_+^{out}(\vec{q}) S |z_1^{in}, ...\rangle =& \frac{i\kappa}{2} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu} p'_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(q)}{p'_k \cdot q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu} p_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(q)}{p_k \cdot q} \right] \mathcal{M}^S \\ & \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{m} p'_k \right) \end{aligned} \tag{6.106}$$

Konačno, $\mathcal{M}^S$ možemo izraziti preko S-matričnog elementa (6.103) čime posljednja jednakost postaje:

$$\begin{aligned}\langle z_1^{out}, ...|\, a_+^{out}(\vec{q}) S \,|z_1^{in}, ...\rangle =& \frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu} p'_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(q)}{p'_k \cdot q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu} p_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(q)}{p_k \cdot q}\right] \\ & \cdot \langle z_1^{out}, ...|\, S \,|z_1^{in}, ...\rangle \, .\end{aligned} \tag{6.107}$$

Ovaj S-matrični element nije jednak matričnom elementu u (6.102). U prethodnom izvodu smo mekanom gravitonu pridodali proizvoljni 4-impuls $q^\mu = (\omega_q, \vec{q})$ te bismo polarizacijski tenzor i ovaj impuls mogli parametrizirati koristeći (6.47) i (6.48). Dakako, spomenute parametrizacije su kompatibilne s transverzalnim baždarenjem dok smo Weinbergov teorem izveli u De-Donderovom, ali ova činjenica nam ne predstavlja problem jer smo pokazali da je izraz (6.41) baždarno invarijantan. Mi želimo da izlazni graviton posjeduje 4-impuls $q^\mu(z, \bar{z}) = (\omega, \omega\hat{x})$ (uz $\omega \to 0^+$), gdje smo naznačili da isti ima ovisnost o koordinatama $(z, \bar{z})$ budući da je metoda stacionarne faze dala $w \to z$. Traženi S-matrični element jest:

$$\begin{aligned}\langle z_1^{out}, ...|\, a_+^{out}(\omega\hat{x}) S \,|z_1^{in}, ...\rangle =& i\mathcal{M}(\varepsilon^+(\omega\hat{x}), (\omega, \omega\hat{x}), p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) \\ & \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{m} p'_k\right) ,\end{aligned} \tag{6.108}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\varepsilon^+(\omega\hat{x}), (\omega, \omega\hat{x}), p'_1, ..., p'_m; p_1, ..., p_n) =& \frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu} p'_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(\omega\hat{x})}{p'_k \cdot q(z, \bar{z})}\right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu} p_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(\omega\hat{x})}{p_k \cdot q(z, \bar{z})}\right] \mathcal{M}^S.\end{aligned} \tag{6.109}$$

Istom procedurom kao i ranije dobivamo:

$$\begin{aligned}\langle z_1^{out}, ...|\, a_+^{out}(\omega\hat{x}) S \,|z_1^{in}, ...\rangle =& \frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu} p'_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(\omega\hat{x})}{p'_k \cdot q(z, \bar{z})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu} p_{k\nu} \varepsilon^{+\mu\nu}(\omega\hat{x})}{p_k \cdot q(z, \bar{z})}\right] \\ & \cdot \langle z_1^{out}, ...|\, S \,|z_1^{in}, ...\rangle \, .\end{aligned} \tag{6.110}$$

Polarizacijski tenzor i 4-impuls gravitona sada možemo parametrizirati na isti način kao u (6.47) i (6.48) uz zamjene $w \to z$ i $\omega_q \to \omega$:

$$\begin{aligned} q^\mu(z,\bar{z}) &= \frac{\omega}{1+z\bar{z}}(1+z\bar{z}, z+\bar{z}, -iz+i\bar{z}, 1-z\bar{z}), \\ \varepsilon^{+\mu}(\omega\hat{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{z}, 1, -i, -\bar{z}). \end{aligned} \tag{6.111}$$

Dakako, vratili smo se natrag u Kartezijev sustav (budući da je Weinbergov teorem dan u istom) te ćemo od sada nadalje koristiti ravnu metriku (2.1). Treba imati na umu da koordinate $(z,\bar{z})$ u prethodnoj parametrizaciji moraju biti jednake koordinatama koje se nalaze u (6.102), isto vrijedi i za frekvenciju ω. Na ekvivalentan način možemo parametrizirati i 4-impulse ulaznih i izlaznih bezmasenih skalarnih čestica:

$$\begin{aligned} p_k^\mu &= \frac{E_k^{in}}{1+z_k^{in}\bar{z}_k^{in}}(1+z_k^{in}\bar{z}_k^{in}, z_k^{in}+\bar{z}_k^{in}, -iz_k^{in}+i\bar{z}_k^{in}, 1-z_k^{in}\bar{z}_k^{in}), \\ p_k'^\mu &= \frac{E_k^{out}}{1+z_k^{out}\bar{z}_k^{out}}(1+z_k^{out}\bar{z}_k^{out}, z_k^{out}+\bar{z}_k^{out}, -iz_k^{out}+i\bar{z}_k^{out}, 1-z_k^{out}\bar{z}_k^{out}). \end{aligned} \tag{6.112}$$

Prije nego uvrstimo (6.110) u (6.102), iskoristit ćemo prethodne parametrizacije i izraziti faktore u zagradi unutar (6.110) preko angularnih Bondijevih koordinata. Ovi faktori imaju forme:

$$\begin{aligned} \frac{p_{k\mu}p_{k\nu}\varepsilon^{+\mu\nu}(\omega\hat{x})}{p_k\cdot q(z,\bar{z})} &= \frac{p_{k\mu}p_{k\nu}\varepsilon^{+\mu}(\omega\hat{x})\varepsilon^{+\nu}(\omega\hat{x})}{p_k\cdot q(z,\bar{z})} \\ &= \frac{p_k\cdot\varepsilon^+}{p_k\cdot q}p_k\cdot\varepsilon^+. \end{aligned} \tag{6.113}$$

Da bismo olakšali račun, koristimo iduće svojstvo polarizacijskog vektora [15]:

$$\varepsilon^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z[(1+z\bar{z})q^\mu]. \tag{6.114}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{+0} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z[(1+z\bar{z})\omega] = \frac{\bar{z}}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon^{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z\left[(1+z\bar{z})\frac{(z+\bar{z})\omega}{(1+z\bar{z})}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ &\varepsilon^{+2} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z\left[(1+z\bar{z})\frac{(-i)(z-\bar{z})\omega}{(1+z\bar{z})}\right] = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \\ &\varepsilon^{+3} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z\left[(1+z\bar{z})\frac{(1-z\bar{z})\omega}{(1+z\bar{z})}\right] = \frac{-\bar{z}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{6.115}$$

Uočimo i da možemo pisati:

$$\begin{aligned}p_k \cdot \varepsilon^+ =& \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z[(1+z\bar{z})q_\mu]p_k^\mu \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}\omega}[\partial_z[(1+z\bar{z})q_\mu p_k^\mu] - (1+z\bar{z})q_\mu\partial_z p_k^\mu] \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z[(1+z\bar{z})p_k\cdot q],\end{aligned} \tag{6.116}$$

te da vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{p_k \cdot \varepsilon^+}{p_k\cdot q} =& \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\frac{\partial_z[(1+z\bar{z})p_k\cdot q]}{p_k\cdot q} \\ =& \frac{(1+z\bar{z})}{\sqrt{2}\omega}\frac{\partial_z[(1+z\bar{z})p_k\cdot q]}{(1+z\bar{z})p_k\cdot q} \\ =& \frac{(1+z\bar{z})}{\sqrt{2}\omega}\partial_z ln[(1+z\bar{z})p_k\cdot q].\end{aligned} \tag{6.117}$$

Izvrijednimo sada $p_k \cdot q$:

$$\begin{aligned}p_k\cdot q =& p_k^0 q_0 + p_k^1 q_1 + p_k^2 q_2 + p_k^3 q_3 \\ =& -p_k^0 q^0 + p_k^1 q^1 + p_k^2 q^2 + p_k^3 q^3 \\ =& E_k\omega\Bigg[-1+\frac{1}{(1+z_k\bar{z}_k)(1+z\bar{z})}\Bigg((z_k+\bar{z}_k)(z+\bar{z}) - (z_k-\bar{z}_k)(z-\bar{z}) \\ &+ (1-z_k\bar{z}_k)(1-z\bar{z})\Bigg)\Bigg] \\ =& E_k\omega\Bigg[-1+\frac{1}{(1+z_k\bar{z}_k)(1+z\bar{z})}\Bigg(2z_k\bar{z}+2\bar{z}_k z+1-z\bar{z}-z_k\bar{z}_k+z_k\bar{z}_k z\bar{z}\Bigg)\Bigg] \\ =& E_k\omega\frac{-2z\bar{z}-2z_k\bar{z}_k+2z_k\bar{z}+2\bar{z}_k z}{(1+z_k\bar{z}_k)(1+z\bar{z})} \\ =& \frac{-2\omega E_k(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)}{(1+z\bar{z})(1+z_k\bar{z}_k)}\end{aligned} \tag{6.118}$$

Prethodni rezultat uvrštavamo u (6.117):

$$\begin{aligned}\frac{p_k\cdot\varepsilon^+}{p_k\cdot q} =&\frac{(1+z\bar z)}{\sqrt{2}\omega}\partial_z ln\left[(1+z\bar z)\frac{-2\omega E_k|z-z_k|^2}{(1+z\bar z)(1+z_k\bar z_k)}\right]\\ =&\frac{(1+z\bar z)}{\sqrt{2}\omega}\left[\partial_z ln\left(\frac{-2\omega E_k}{(1+z_k\bar z_k)}\right)+\partial_z ln[(z-z_k)(\bar z-\bar z_k)]\right]\\ =&\frac{(1+z\bar z)}{\sqrt{2}\omega}[\partial_z ln(z-z_k)+\partial_z ln(\bar z-\bar z_k)]\\ =&\frac{(1+z\bar z)}{\sqrt{2}\omega}\frac{\partial_z(z-z_k)}{(z-z_k)}\\ =&\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\frac{1+z\bar z}{z-z_k}.\end{aligned}\tag{6.119}$$

Da bismo dobili (6.113), moramo još izračunati $p_k\cdot\varepsilon^+$. U tu svrhu koristimo (6.116) i (6.118):

$$\begin{aligned}p_k\cdot\varepsilon^+ =&\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\partial_z\left[(1+z\bar z)\frac{-2\omega E_k(z-z_k)(\bar z-\bar z_k)}{(1+z\bar z)(1+z_k\bar z_k)}\right]\\ =&\frac{-\sqrt{2}E_k(\bar z-\bar z_k)}{(1+z_k\bar z_k)}.\end{aligned}\tag{6.120}$$

Traženi izraz je dakle:

$$\frac{p_k\cdot\varepsilon^+}{p_k\cdot q}p_k\cdot\varepsilon^+ = \frac{-1}{\omega}\frac{(1+z\bar z)(\bar z-\bar z_k)E_k}{(z-z_k)(1+z_k\bar z_k)}\tag{6.121}$$

Prema ovom rezultatu, S-matrični element (6.110) postaje:

$$\begin{aligned}\langle z_1^{out},...|\,a_+^{out}(\omega\hat x)S\,|z_1^{in},...\rangle =&\frac{\kappa}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{-1}{\omega}\frac{(1+z\bar z)(\bar z-\bar z_k^{out})E_k^{out}}{(z-z_k^{out})(1+z_k^{out}\bar z_k^{out})}\right.\\ &\left.-\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{\omega}\frac{(1+z\bar z)(\bar z-\bar z_k^{in})E_k^{in}}{(z-z_k^{in})(1+z_k^{in}\bar z_k^{in})}\right]\cdot\langle z_1^{out},...|\,S\,|z_1^{in},...\rangle\,.\end{aligned}\tag{6.122}$$

Po uvrštavanju istog u (6.102) proizlazi jednadžba:

$$\begin{aligned}\langle z_1^{out},..|:\mathcal{O}_{zz}S:|z_1^{in},..\rangle =&\frac{8G}{(1+z\bar z)}\langle z_1^{out},...|\,S\,|z_1^{in},...\rangle\\ &\cdot\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{E_k^{out}(\bar z-\bar z_k^{out})}{(z-z_k^{out})(1+z_k^{out}\bar z_k^{out})}-\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{in}(\bar z-\bar z_k^{in})}{(z-z_k^{in})(1+z_k^{in}\bar z_k^{in})}\right].\end{aligned}\tag{6.123}$$

Primjećujemo da je došlo do kraćenja frekvencija ω kao što smo ranije najavili. Spomenimo i da smo u prethodnom izrazu iskoristili jednakost (5.3). Na samom kraju, S-matrični element s vremenski uređenim umetanjem operatora $\mathcal{O}_{zz}$ možemo povezati s umetanjem vremenski uređene struje mekanog gravitona pomoću (4.285). To jest:

$$\langle z_1^{out}, ..| : P_z : |z_1^{in}, ..\rangle = \frac{1}{4G}\gamma^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}} \langle z_1^{out}, ..| : \mathcal{O}_{zz}S : |z_1^{in}, ..\rangle \tag{6.124}$$

Provodimo derivaciju:

$$\begin{aligned}&\partial_{\bar{z}} \langle z_1^{out}, ..| : \mathcal{O}_{zz}S : |z_1^{in}, ..\rangle = 8G \langle z_1^{out}, ...| \, S \, |z_1^{in}, ...\rangle \\ &\cdot \left[\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(\bar{z} - \bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\right]\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{(1 + z\bar{z})}\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{(1 + z\bar{z})}\partial_{\bar{z}}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(\bar{z} - \bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\right]\right].\end{aligned} \tag{6.125}$$

Promotrimo posebno derivaciju drugog člana:

$$\begin{aligned}&\partial_{\bar{z}}\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(\bar{z} - \bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\right] = \\ &\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}\partial_{\bar{z}}(\bar{z} - \bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}\partial_{\bar{z}}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\right] \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(\bar{z} - \bar{z}_k^{out})}{(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{(z - z_k^{out})}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{(z - z_k^{in})}\right)\right] = \\ &\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\right] \\ &+ \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(\bar{z} - \bar{z}_k^{out})}{(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}2\pi\delta^{(2)}(z - z_k^{out}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}2\pi\delta^{(2)}(z - z_k^{in})\right].\end{aligned} \tag{6.126}$$

U drugoj jednakosti smo iskoristili Cauchy-Pompeiuovu formulu (4.276). Primjećujemo da bismo integracijom zadnjih dvaju članova po $dzd\bar{z}$ dobili nulu. Prema tome, isti jednako doprinose te ih možemo pokratiti. Kako je prva derivacija u (6.125)

$\partial_{\bar{z}}(1+z\bar{z})^{-1} = -z(1+z\bar{z})^{-2}$, sve skupa dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar{z}} \langle z_1^{out}, ..| : \mathcal{O}_{zz} S : |z_1^{in}, ..\rangle = 8G \langle z_1^{out}, ...| \, S \, |z_1^{in}, ...\rangle \\
&\cdot \left[\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(\bar{z} - \bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right] \frac{-z}{(1+z\bar{z})^2} \right. \\
&\left. + \frac{1}{(1+z\bar{z})} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right] \right].
\end{aligned} \tag{6.127}$$

U trećem poglavlju smo utvrdili da je inverz metrike na jediničnoj 2-sferi $\gamma^{z\bar{z}} = \frac{(1+z\bar{z})^2}{2}$. Koristeći ovaj identitet i prethodnu derivaciju, (6.124) postaje:

$$\begin{aligned}
&\langle z_1^{out}, ..| : P_z : |z_1^{in}, ..\rangle = \langle z_1^{out}, ...| \, S \, |z_1^{in}, ...\rangle \\
&\cdot \left[\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out} z(\bar{z}_k^{out} - \bar{z})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in} z(\bar{z}_k^{in} - \bar{z})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right] \right. \\
&\left. + \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(1+z\bar{z})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(1+z\bar{z})(\bar{z} - \bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right] \right].
\end{aligned} \tag{6.128}$$

Vidimo da dolazi do kraćenja četiriju članova koji su proporcionalni sa $z\bar{z}$, odnosno slijedi:

$$\begin{aligned}
\langle z_1^{out}, ..| : P_z : |z_1^{in}, ..\rangle = \langle z_1^{out}, ...| \, S \, |z_1^{in}, ...\rangle & \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(1 + z\bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(1 + z\bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right].
\end{aligned} \tag{6.129}$$

Oba člana prethodnog izraza su su očigledno dominantna kada vrijedi $z \to z_k^{out}$, odnosno $z \to z_k^{in}$. Mogli bismo odmah napraviti ove zamjene u brojnicima i dobiti konačan rezultat. Međutim, isti rezultat se može dobiti na potpuno legitiman način; bez ikakvih aproksimacija. Da bismo ovo pokazali, dodajmo i oduzmimo faktore $E_k^{out}(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})$ i $E_k^{in}(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})$ u brojnicima zadnjeg izraza:

$$
\begin{aligned}
&\langle z_1^{out}, ..| : P_z : |z_1^{in}, ..\rangle = \langle z_1^{out}, ...| \, S \, |z_1^{in}, ...\rangle \\
&\cdot \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(1 + z\bar{z}_k^{out}) + E_k^{out}(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out}) - E_k^{out}(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} \right. \\
&\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(1 + z\bar{z}_k^{in}) + E_k^{in}(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in}) - E_k^{in}(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right] = \\
&\langle z_1^{out}, ...| \, S \, |z_1^{in}, ...\rangle \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}}{(z - z_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}}{(z - z_k^{in})} \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(1 + z\bar{z}_k^{out} - 1 - z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}{(z - z_k^{out})(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(1 + z\bar{z}_k^{in} - 1 - z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}{(z - z_k^{in})(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right] = \\
&\langle z_1^{out}, ...| \, S \, |z_1^{in}, ...\rangle \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}}{(z - z_k^{out})} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}}{(z - z_k^{in})} + \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}\bar{z}_k^{out}}{(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} \right. \\
&\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}\bar{z}_k^{in}}{(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})} \right].
\end{aligned} \tag{6.130}
$$

Prva dva člana u uglatoj zagradi posljednje jednakosti bismo dobili zamjenama $z \to z_k^{out}$ i $z \to z_k^{in}$ u brojnicima izraza (6.129). Ovime bismo dobili točno rješenje jer se preostala dva člana u (6.130) pokrate, što ćemo sada pokazati. Koristimo očuvanje tro-impulsa:

$$
\sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{m} \vec{p'}_k \to \sum_{k=1}^{n} (p_k^1 \hat{x}^1 + p_k^2 \hat{x}^2 + p_k^3 \hat{x}^3) = \sum_{k=1}^{m} (p_k'^1 \hat{x}^1 + p_k'^2 \hat{x}^2 + p_k'^3 \hat{x}^3). \tag{6.131}
$$

Za $\hat{x}^1$ smjer imamo, prema (6.112).

$$
\sum_{k=1}^{n} p_k^1 = \sum_{k=1}^{m} p_k'^1 \to \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out}(z_k^{out} + \bar{z}_k^{out})}{1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in}(z_k^{in} + \bar{z}_k^{in})}{1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in}}. \tag{6.132}
$$

Zapišimo posljednju jednakost na drugačiji način:

$$
\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out} z_k^{out}}{1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in} z_k^{in}}{1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in}} \right) + \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out} \bar{z}_k^{out}}{1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in} \bar{z}_k^{in}}{1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in}} \right) = 0, \tag{6.133}
$$

te uvedimo oznake:

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out} z_k^{out}}{1 + z_k^{out} \bar{z}_k^{out}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in} z_k^{in}}{1 + z_k^{in} \bar{z}_k^{in}} \right), \\
B &= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out} \bar{z}_k^{out}}{1 + z_k^{out} \bar{z}_k^{out}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in} \bar{z}_k^{in}}{1 + z_k^{in} \bar{z}_k^{in}} \right), \\
X &= \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out} \bar{z}_k^{out}}{1 + z_k^{out} \bar{z}_k^{out}}, \quad Y = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in} \bar{z}_k^{in}}{1 + z_k^{in} \bar{z}_k^{in}}, \\
W &= \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^{out} z_k^{out}}{1 + z_k^{out} \bar{z}_k^{out}}, \quad Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^{in} z_k^{in}}{1 + z_k^{in} \bar{z}_k^{in}},
\end{aligned}
\tag{6.134}
$$

tako da vrijedi $B = X - Y$ i $A = W - Z$. Očito želimo pokazati da je zadovoljeno $B = 0$, što ćemo napraviti koristeći kompleksnu analizu. Iz (6.133) slijedi $A = -B$, ali također vrijedi i $A = B^*$ (zvjezdica i potez iznad varijable označavaju istu operaciju, odnosno kompleksnu konjugaciju). Uvedimo zapis $B = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) i iskoristimo (6.133):

$$
\begin{aligned}
0 =& B + B^* \\
=& a + ib + a - ib \\
=& 2a \rightarrow a = 0.
\end{aligned}
\tag{6.135}
$$

Varijabla B je stoga imaginarna; $B = ImB$. Na isti način ćemo razviti X i Y: $X = \alpha + i\beta$, $Y = \gamma + i\delta$; $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$. Tada imamo:

$$
\begin{aligned}
B =& \alpha + i\beta - \gamma - i\delta \\
=& (\alpha - \gamma) + i(\beta - \delta),
\end{aligned}
\tag{6.136}
$$

te iz uvjeta $B = ImB$ slijedi $\alpha = \gamma$. Za sada stoga možemo pisati:

$$
X = \alpha + i\beta, \quad Y = \alpha + i\delta, \quad B = i(\beta - \delta). \tag{6.137}
$$

Razvijmo dalje W i Z kao: $W = \Omega + i\xi$, $Z = \chi + i\tau$; $(\Omega, \xi, \chi, \tau \in \mathbb{R})$. Prema relaciji $A = W - Z$ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
A =& \Omega + i\xi - \chi - i\tau \\
=& (\Omega - \chi) + i(\xi - \tau).
\end{aligned}
\tag{6.138}
$$

Kako vrijedi $A = -B$ i $B = ImB$, mora vrijediti i $A = ImA$. Ovo nam daje $\Omega = \chi$. Prema tome, pišemo:

$$W = \Omega + i\xi, \quad Z = \Omega + i\tau, \quad A = i(\xi - \tau). \tag{6.139}$$

Iz (6.137), (6.139) i uvjeta $A = -B$ proizlazi jednadžba:

$$\xi - \tau = \delta - \beta \tag{6.140}$$

Sada ćemo iskoristiti uvjet na realnost impulsa. Za izlazne impulse imamo $X + W = \sum_{k=1}^{m} p_k'^1 \in \mathbb{R}$. Iz ovoga slijedi:

$$X + W = \alpha + i\beta + \Omega + i\xi \rightarrow \beta = -\xi. \tag{6.141}$$

Uvrštavanjem ovog uvjeta u (6.140) dobivamo i $\delta = -\tau$. Prema (6.137), varijabla B sada poprima formu:

$$B = i(\beta + \tau). \tag{6.142}$$

Uočimo i da jednakost $\delta = -\tau$ osigurava realnost ulaznih impulsa. Kako vrijedi $\sum_{k=1}^{n} p_k^1 = Y + Z = \alpha + i\delta + \Omega + i\tau$, uvjet $\delta = -\tau$ daje $Y + Z = \alpha + \Omega$, odnosno $\sum_{k=1}^{n} p_k^1 \in \mathbb{R}$. Jednadžbe možemo dodatno pojednostaviti opservacijom da vrijedi $X = W^*$, to jest: $\alpha + i\beta = (\Omega + i\xi)^* \rightarrow (\alpha - \Omega) + i(\beta + \xi) = 0$. Time smo opet dobili $\beta = -\xi$, dakle realnost izlaznih impulsa je automatski zadovoljena; nismo ni trebali pretpostavljati da jest. Uočavamo pak da smo dobili i dodatni uvjet $\alpha = \Omega$. Vrijedi i $Y = Z^*$, iz kojeg se čitatelj na ekvivalentan način može uvjeriti da ponovno slijedi $\alpha = \Omega$, ali i $\delta = -\tau$ što implicira da su i ulazni impulsi realni. Relevantne varijable sada imaju forme:

$$X = \alpha + i\beta, \quad Y = \alpha - i\tau, \quad W = \alpha - i\beta, \quad Z = \alpha + i\tau. \tag{6.143}$$

Nadalje, impuls mora biti očuvan i u $\hat{x}^2$ smjeru. Iz (6.112) slijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^2 = \sum_{k=1}^{m} p_k'^2 \rightarrow \sum_{k=1}^{m} \frac{-iE_k^{out}(z_k^{out} - \bar{z}_k^{out})}{(1 + z_k^{out}\bar{z}_k^{out})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-iE_k^{in}(z_k^{in} - \bar{z}_k^{in})}{(1 + z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}. \tag{6.144}$$

Napisat ćemo posljednju jednakost u ekvivalentnoj formi:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{E_k^{out}z_k^{out}}{(1+z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}+\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{in}\bar{z}_k^{in}}{(1+z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{in}z_k^{in}}{(1+z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}+\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{out}\bar{z}_k^{out}}{(1+z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}\right), \tag{6.145}$$

i uvesti oznake:

$$\begin{aligned} C&=\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{E_k^{out}z_k^{out}}{(1+z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}+\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{in}\bar{z}_k^{in}}{(1+z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}\right),\\ D&=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{in}z_k^{in}}{(1+z_k^{in}\bar{z}_k^{in})}+\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{out}\bar{z}_k^{out}}{(1+z_k^{out}\bar{z}_k^{out})}\right). \end{aligned} \tag{6.146}$$

Očigledno vrijedi $C-D=0$, ali imamo i $C=D^*$. Uvedimo zapis $D=c+id$; $(c,d\in\mathbb{R})$ i promotrimo račun:

$$\begin{aligned} 0=&D^*-D\\ =&c-id-c-id\rightarrow d=0. \end{aligned} \tag{6.147}$$

Dakle varijabla D mora biti realna; $D\in\mathbb{R}$. Uočimo još da iz (6.146) i (6.134) slijedi $D=Z+X$. Koristeći (6.143) dobivamo:

$$\begin{aligned} D=&Z+X\\ =&\alpha+i\tau+\alpha+i\beta\\ =&2\alpha+i(\tau+\beta). \end{aligned} \tag{6.148}$$

Uvjet $D\in\mathbb{R}$ stoga daje $\tau=-\beta$. Ovu jednakost uvrštavamo u (6.142) i pokazujemo da je zadovoljeno:

$$B=0. \tag{6.149}$$

Kako je varijabla B jednaka razlici zadnjih dvaju članova u (6.130), konačni razultat jest:

$$\begin{aligned} \langle z_1^{out},..,z_m^{out}|:P_z:|z_1^{in},..,z_n^{in}\rangle=&\langle z_1^{out},...z_m^{out}|\,S\,|z_1^{in},...,z_n^{in}\rangle\\ &\cdot\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{E_k^{out}}{(z-z_k^{out})}-\sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^{in}}{(z-z_k^{in})}\right]. \end{aligned} \tag{6.150}$$

Možemo napraviti preimenovanje varijable $z \to w$, čime smo uspješno reproducirali supertranslacijski Wardov identitet (4.281) i povezali dva vrha infracrvenog trokuta. Za kraj, spomenimo da postoji podređeni mekani teorem koji se na sličan način može identificirati sa superrotacijama [15], ali to ovdje nećemo raditi.

7 Zaključak

Rezimirajmo osnovne rezultate. Krenuli smo s analizom asimptotskih simetrija koristeći Bondi-Sachsov formalizam i pronašli beskonačno očuvanih naboja u asimptotski ravnom prostor-vremenu. Pritom smo radili u kontekstu opće teorije relativnosti i proučavali asimptotske generatore difeomorfizama. Posebno smo analizirali simetrijsku grupu vezanu uz supertranslacije i uvidjeli da u budućoj svjetlosnoj beskonačnosti možemo provoditi nezavisne translacije na svakom kutu ove regije. Razmotrili smo problem raspršenja i pronašli Wardov identitet asociran s BMS grupom simetrija. Nakon toga smo usvojili potpuno novi pristup i opisali gravitaciju u kontekstu efektivne teorije polja. Krećući iz ovog kuta gledišta, izveli smo Weinbergov teorem mekanog gravitona i na temelju istog uspješno reproducirali supertranslacijski Wardov identitet. Time smo uspješno povezali dva vrha infracrvenog trokuta. Nismo obrađivali relacije ekvivalencija ovih teorija s memorijskim efektom, ali ukratko smo ga opisali i vidjeli da je isti izuzetno bitan s eksperimentalnog stajališta. U [15] je pokazano da IR trokut igra bitnu ulogu i informacijskom paradoksu asociranom s crnim rupama, te da odjekuje kroz brojne fizikalne teorije. Primjerice, u $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills teoriji dolazi do ”čudesnih” kraćenja koje reduciraju vrlo komplicirane izraze za amplitude raspršenja u jednostavne formule. Moguće je da su ovakva kraćenja uzrokovana upravo simetrijskim grupama koje su dio IR trokuta. U svakom slučaju, IR struktura zasigurno igra bitnu ulogu u čitavoj fizici i preostaje vidjeti koji je njen doseg. Pred nama su uzbudljiva, ali i izazovna vremena u kojima nastavljamo potragu za teorijom koja bi ujedinila četiri fundamentalne sile, ili možda čak dala implikacije o postojanju dosad neotkrivenih sila. Koja je uloga IR trokuta u svemu tome, samo budućnost će reći.

Dodaci

Dodatak A Račun Christoffelovih simbola

U ovom dodatku računamo Christoffelove simbole konstruirane s obzirom na metriku (4.26). Pritom koristimo pojmove i konvencije uvedene u podpoglavlju 4.2. Koeficijenti konekcije su definirani izrazom:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{A.1}$$

Popis komponentri metrike i inverzne metrike dan je u (4.27) i (4.28). U ovom i idućem dodatku sporadično pratimo račune i usvajamo određene konvencije date u [10]. Krenimo dakle s računima.

$$\begin{aligned}\Gamma^{u}_{uu} =& \frac{1}{2} g^{u\rho}(\partial_u g_{u\rho} + \partial_u g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uu}) \\ =& g^{ur}\partial_u g_{ur} - \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r g_{uu}.\end{aligned} \tag{A.2}$$

U nastavku koristimo identitet $\partial_u g_{ur} = -|g_{ur}|\partial_u ln(|g_{ur}|)$. Po uvrštavanju dobivamo:

$$\begin{aligned}\Gamma^{u}_{uu} =& - g^{ur}|g_{ur}|\partial_u ln(|g_{ur}|) - \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r\left(-\frac{V}{r}e^{2\beta} + r^2 h_{AB}U^A U^B\right) \\ =& \partial_u ln(|g_{ur}|) + \frac{1}{2} g^{ur} e^{2\beta}\partial_r\left(\frac{V}{r}\right) + \frac{1}{2} g^{ur}\frac{V}{r}\partial_r e^{2\beta} - \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r\left(r^2 h_{AB}U^A U^B\right).\end{aligned} \tag{A.3}$$

Nakon kratkog računa lagano se pokazuje da vrijedi $\frac{1}{2} g^{ur} e^{2\beta}\partial_r\left(\frac{V}{r}\right) = -\frac{1}{2}\partial_r\left(\frac{V}{r}\right)$ i $\frac{1}{2} g^{ur}\frac{V}{r}\partial_r e^{2\beta} = -\frac{1}{2}\frac{V}{r}\partial_r ln(|g_{ur}|)$ čime kao konačni rezultat slijedi:

$$\Gamma^{u}_{uu} = \partial_u ln(|g_{ur}|) - \frac{1}{2}\partial_r\left(\frac{V}{r}\right) - \frac{1}{2}\frac{V}{r}\partial_r ln(|g_{ur}|) - \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r\left(r^2 h_{AB}U^A U^B\right). \tag{A.4}$$

Dalje imamo:

$$\Gamma^{u}_{ur} = \frac{1}{2} g^{u\rho}(\partial_u g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho u} - \partial_\rho g_{ur}). \tag{A.5}$$

U prethodnom izrazu svi članovi u sumaciji po ρ iščezavaju što znači da je zadovoljeno:

$$\Gamma^{u}_{ur} = \Gamma^{u}_{ru} = 0. \tag{A.6}$$

Idući koeficijent koji računamo jest Γ^u_{uA}:

$$\begin{aligned}\Gamma^u_{uA} =& \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_u g_{A\rho} + \partial_A g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uA}) \\ =& \frac{1}{2}g^{ur}\left(\partial_A g_{ur} - \partial_r\left(-r^2 h_{AB}U^B\right)\right).\end{aligned} \tag{A.7}$$

Koristeći izraze (4.20), (4.88) i činjenicu da vrijedi $\partial_A g_{ur} = D_A g_{ur}$, za konačni oblik koeficijenta odabiremo:

$$\Gamma^u_{uA} = \Gamma^u_{Au} = \frac{1}{2}g^{ur}\left(D_A g_{ur} + \partial_r U_A\right). \tag{A.8}$$

U nastavku promotrimo:

$$\Gamma^u_{rr} = \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_r g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rr}). \tag{A.9}$$

Ponovno, u sumi sve komponente metrike isčezavaju iz čega zaključujemo:

$$\Gamma^u_{rr} = 0. \tag{A.10}$$

Ekvivalentno, u izrazu:

$$\Gamma^u_{rA} = \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_r g_{A\rho} + \partial_A g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rA}), \tag{A.11}$$

također su svi faktori jednaki nuli. Prema tome:

$$\Gamma^u_{rA} = \Gamma^u_{Ar} = 0. \tag{A.12}$$

Preostaje nam još izračunati jedan simbol sa u indeksom gore koji je dan jednadžbom:

$$\Gamma^u_{BC} = \frac{1}{2}g^{u\rho}(\partial_B g_{C\rho} + \partial_C g_{\rho B} - \partial_\rho g_{BC}). \tag{A.13}$$

Primjetimo da su svi dosadašnji računi bili poprilično jednostavni budući da u sumi po ρ preživi samo komponenta inverzne metrike $g^{u\rho} = g^{ur}$. Isto vrijedi i ovdje te kako je zadovoljeno $g_{Cr} = g_{rB} = 0$ za rezultat dobivamo:

$$\Gamma^u_{BC} = -\frac{1}{2}g^{ur}\partial_r g_{BC}. \tag{A.14}$$

Prvi od koeficijenata konekcije s indeksom r gore koji računamo jest Γ^r_{uu}:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{uu} =& \frac{1}{2} g^{r\rho}(\partial_u g_{u\rho} + \partial_u g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uu}) \\
=& \frac{1}{2} g^{ur}\partial_u g_{uu} + g^{rr}\partial_u g_{ur} + g^{rA}\partial_u g_{uA} - \frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{uu} - \frac{1}{2} g^{rA}\partial_A g_{uu} \\
=& \frac{1}{2} g^{ur}\partial_u \left(-\frac{V}{r}e^{2\beta} + r^2 h_{AB}U^A U^B \right) + \frac{V}{r}e^{-2\beta}\partial_u g_{ur} \\
&+ (-)U^A e^{-2\beta}\partial_u(-r^2 h_{AB}U^B) - \frac{1}{2}\frac{V}{r}e^{-2\beta}\partial_r \left(-\frac{V}{r}e^{2\beta} + r^2 h_{AB}U^A U^B \right) \\
&- \frac{1}{2}(-)U^A e^{-2\beta}\partial_A \left(-\frac{V}{r}e^{2\beta} + r^2 h_{BC}U^B U^C \right).
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

Nakon blage simplifikacije proizlazi izraz:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{uu} =& \frac{1}{2} g^{ur}\partial_u \left(\frac{V}{r} g_{ur} \right) + \frac{1}{2} g^{ur}\partial_u \left(U_A U^A \right) - \frac{V}{r}\partial_u \left(ln|g_{ur}| \right) \\
&+ \frac{1}{2} g^{ur}\frac{V}{r}\partial_r \left(\frac{V}{r} g_{ur} \right) + \frac{1}{2} g^{ur}\frac{V}{r}\partial_r \left(U_A U^A \right) - g^{ur}U^A\partial_u U_A \\
&- \frac{1}{2} g^{ur}U^A D_A \left(\frac{V}{r} g_{ur} \right) - \frac{1}{2} g^{ur}U^A D_A \left(U_C U^C \right).
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

Kao što je čitatelj vjerojatno primjetio, u konačnim izrazima odlučujemo umjesto eksponencijalnih funkcija zadržati g^{ur} i g_{ur}. Nastavljamo s raspisima:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{ur} =& \frac{1}{2} g^{r\rho}(\partial_u g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho u} - \partial_\rho g_{ur}) \\
=& \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r g_{uu} + \frac{1}{2} g^{rA}\partial_r g_{uA} - \frac{1}{2} g^{rA}\partial_A g_{ur} \\
=& \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r \left(-\frac{V}{r}e^{2\beta} + g_{AB}U^A U^B \right) + \frac{1}{2} U^A(-)e^{-2\beta}\partial_r(-g_{AB}U^B) \\
&- \frac{1}{2} U^A(-)e^{-2\beta}\partial_A g_{ur.}
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

Nakon spuštanja indeksa na U^A i zapisa zadnjeg faktora preko logaritamske funkcije za konačan rezultat dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{ur} = \Gamma^r_{ru} =& \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r \left(\frac{V}{r} g_{ur} \right) + \frac{1}{2} g^{ur}\partial_r(U_A U^A) - \frac{1}{2} g^{ur}U^A\partial_r U_A \\
&- \frac{1}{2} U^A D_A ln|g_{ur}|.
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

Račun koeficijenta Γ^r_{uA}:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{uA} =& \frac{1}{2} g^{r\rho}(\partial_u g_{A\rho} + \partial_A g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uA}) \\
=& \frac{1}{2} g^{rB}\partial_u g_{AB} + \frac{1}{2} g^{ru}\partial_A g_{uu} + \frac{1}{2} g^{rr}\partial_A g_{ru} + \frac{1}{2} g^{rB}\partial_A g_{uB} \\
& - \frac{1}{2} g^{rr}\partial_r g_{uA} - \frac{1}{2} g^{rB}\partial_B g_{uA} \\
=& - \frac{1}{2} U^B e^{-2\beta}\partial_u g_{AB} + \frac{1}{2} g^{ur}\partial_A \left(-\frac{V}{r} e^{2\beta} + U_B U^B \right) + \frac{1}{2}\frac{V}{r} e^{-2\beta}\partial_A g_{ur} \\
& - \frac{1}{2} U^B e^{-2\beta}\partial_A(-U_B) - \frac{1}{2}\frac{V}{r} e^{-2\beta}\partial_r(-U_A) + \frac{1}{2} U^B e^{-2\beta}\partial_B(-U_A).
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

Po provedbi derivacija i kraćenja određenih faktora dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{uA} =& \frac{1}{2} D_A \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{1}{2} g^{ur} D_A(U_C U^C) - \frac{1}{2} g^{ur}\frac{V}{r}\partial_r U_A + \frac{1}{2} g^{ur} U^B \partial_u g_{AB} \\
& - g^{ur} U^B \left[\frac{1}{2}\left(\partial_A U_B - \partial_B U_A \right) \right].
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

Zadnji faktor u uglatoj zagradi prepoznajemo kao antisimetrizaciju $\partial_{[A}U_{B]}$. Primjetimo pak da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
D_{[A}U_{B]} =& \frac{1}{2}\left(D_A U_B - D_B U_A \right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\partial_A U_B - \breve{\Gamma}^D_{AB} U_D - \partial_B U_A + \breve{\Gamma}^D_{BA} U_D \right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\partial_A U_B - \partial_B U_A \right),
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

što znači da konačni izraz možemo zapisati u obliku:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{uA} = \Gamma^r_{Au} =& \frac{1}{2} D_A \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{1}{2} g^{ur} D_A(U_C U^C) - \frac{1}{2} g^{ur}\frac{V}{r}\partial_r U_A \\
& + \frac{1}{2} g^{ur} U^B \partial_u(r^2 h_{AB}) - g^{ur} U^B D_{[A}U_{B]}.
\end{aligned}
\tag{A.22}
$$

Znatno jednostavniji Christoffelov simbol za izračunati jest Γ^r_{rr}:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^r_{rr} =& \frac{1}{2} g^{r\rho}(\partial_r g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rr}) \\
=& g^{ru}\partial g_{ru}.
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

Kako bismo pojednostavili kasnije račune, koristimo logaritamsku funkciju:

$$
\Gamma^r_{rr} = \partial_r ln|g_{ur}|.
\tag{A.24}
$$

Idući koeficijent koji raspisujemo je Γ^r_{rA}:

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{rA} =& \frac{1}{2}g^{r\rho}(\partial_r g_{A\rho} + \partial_A g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rA}) \\ =& \frac{1}{2}g^{ru}\partial_r g_{Au} + \frac{1}{2}g^{rB}\partial_r g_{AB} + \frac{1}{2}g^{ru}\partial_A g_{ur}.\end{aligned} \tag{A.25}$$

Nakon uvrštavanja komponenti metrike slijedi izraz:

$$\Gamma^r_{rA} = \Gamma^r_{Ar} = \frac{1}{2}g^{ur}(D_A g_{ur} - g_{AB}\partial_r U^B). \tag{A.26}$$

Od koeficijenata konekcije s indeksom r gore preostaje izračunati još Γ^r_{AB}:

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{AB} =& \frac{1}{2}g^{r\rho}(\partial_A g_{B\rho} + \partial_B g_{\rho A} - \partial_\rho g_{AB}) \\ =& \frac{1}{2}g^{ru}\partial_A g_{Bu} + \frac{1}{2}g^{ru}\partial_B g_{uA} + \frac{1}{2}g^{rC}\partial_A g_{BC} + \frac{1}{2}g^{rC}\partial_B g_{CA} \\ &- \frac{1}{2}g^{rC}\partial_C g_{AB} - \frac{1}{2}g^{ru}\partial_u g_{AB} - \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{AB}.\end{aligned} \tag{A.27}$$

Raspisom, nakon grupacije članova i manipulacije određenim indeksima, slijedi jednadžba:

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{AB} =& -\frac{1}{2}g^{ur}\left[\partial_A U_B + \partial_B U_A - g^{DC}(\partial_A g_{BC} + \partial_B g_{CA} - \partial_C g_{AB})U_D\right] \\ &- \frac{1}{2}g^{ur}\left(\partial_u g_{AB} - \frac{V}{r}\partial_r g_{AB}\right).\end{aligned} \tag{A.28}$$

Primjetimo da vrijedi:

$$g^{DC}(\partial_A g_{BC} + \partial_B g_{CA} - \partial_C g_{AB}) = 2\tilde{\Gamma}^D_{AB} = \breve{\Gamma}^D_{AB} + \breve{\Gamma}^D_{BA}, \tag{A.29}$$

što znači da ove koeficijente možemo pridružiti parcijalnim derivacijama 1-formi u uglatoj zagradi izraza (4.28). Time parcijalne derivacije postaju kovarijantne. Štoviše, izraz možemo zapisati u kompaktnijem obliku koristeći simetrizaciju:

$$\Gamma^r_{AB} = -g^{ur}D_{(A}U_{B)} - \frac{1}{2}g^{ur}\left(\partial_u g_{AB} - \frac{V}{r}\partial_r g_{AB}\right). \tag{A.30}$$

Okrenimo se sada izračunu Christoffelovih simbola s angularnim gornjim indeksom.

Prvi na redu jest Γ^A_{uu}:

$$\begin{aligned}\Gamma^A_{uu} =& \frac{1}{2} g^{A\rho}(\partial_u g_{u\rho} + \partial_u g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uu}) \\ =& g^{Ar}\partial_u g_{ur} + g^{AB}\partial_u g_{uB} - \frac{1}{2} g^{Ar}\partial_r g_{uu} - \frac{1}{2} g^{AB}\partial_B g_{uu}.\end{aligned} \tag{A.31}$$

Nakon uvrštavanja koeficijenata metrike dobivamo:

$$\begin{aligned}\Gamma^A_{uu} =& g^{ur}U^A\partial_u g_{ur} - \frac{1}{2} g^{ur}U^A\partial_r\left(\frac{V}{r}g_{ur} + U_C U^C\right) \\ &- g^{AB}\partial_u U_B - \frac{1}{2r^2}D^A\left(\frac{V}{r}g_{ur}\right) - \frac{1}{2r^2}D^A\left(U_C U^C\right).\end{aligned} \tag{A.32}$$

Račun Γ^A_{ur}:

$$\begin{aligned}\Gamma^A_{ur} =& \frac{1}{2} g^{A\rho}(\partial_u g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho u} - \partial_\rho g_{ur}) \\ =& \frac{1}{2} g^{AB}\partial_r g_{Bu} - \frac{1}{2} g^{AB}\partial_B g_{ur}.\end{aligned} \tag{A.33}$$

Iz prethodnog izraza slijedi:

$$\Gamma^A_{ur} = \Gamma^A_{ru} = -\frac{1}{2} g^{AB}U^C\partial_r g_{BC} - \frac{1}{2}\partial_r U^A - \frac{1}{2r^2}D^A g_{ur}. \tag{A.34}$$

Idući koeficijent koji raspisujemo jest Γ^A_{uB}:

$$\begin{aligned}\Gamma^A_{uB} =& \frac{1}{2} g^{A\rho}(\partial_u g_{B\rho} + \partial_B g_{\rho u} - \partial_\rho g_{uB}) \\ =& \frac{1}{2} g^{AC}\partial_u g_{BC} + \frac{1}{2} g^{AC}\partial_B g_{Cu} + \frac{1}{2} g^{Ar}\partial_B g_{ur} \\ &- \frac{1}{2} g^{AC}\partial_C g_{uB} - \frac{1}{2} g^{Ar}\partial_r g_{uB} \\ =& \frac{1}{2} g^{ur}U^A D_B g_{ur} + \frac{1}{2} g^{ur}U^A\partial_r U_B + \frac{1}{2} g^{AC}\partial_u g_{BC} \\ &+ \frac{1}{2} g^{AC}\left(\partial_C U_B - \partial_B U_C\right).\end{aligned} \tag{A.35}$$

Sličnom analizom poput one provedene u računu (A.21), prepoznajemo da konačni rezultat možemo zapisati pomoću iduće formule:

$$\begin{aligned}\Gamma^A_{uB} = \Gamma^A_{Bu} =& \frac{1}{2} g^{ur}\left(U^A D_B g_{ur} + U^A\partial_r U_B\right) + \frac{1}{2} g^{AC}\partial_u g_{BC} \\ &+ g^{AC}D_{[C}U_{B]}.\end{aligned} \tag{A.36}$$

Kako je Γ^A_{rr} dan izrazom:

$$\Gamma^A_{rr} = \frac{1}{2} g^{A\rho}(\partial_r g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rr}), \tag{A.37}$$

ovaj Christoffelov simbol je jednak nuli budući da svi faktori u sumi iščezavaju. Pišemo dakle:

$$\Gamma^A_{rr} = 0. \tag{A.38}$$

Još jedan koeficijent čiji rapis ne zahtjeva puno posla jest Γ^A_{rB}:

$$\Gamma^A_{rB} = \frac{1}{2} g^{A\rho}(\partial_r g_{B\rho} + \partial_B g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rB}). \tag{A.39}$$

U prethodnoj jednakosti preživi samo prvi faktor u zagradi uz $\rho = C$. Prema tome vrijedi:

$$\Gamma^A_{rB} = \Gamma^A_{Br} = \frac{1}{2} g^{AC} \partial_r g_{BC}. \tag{A.40}$$

Posljednji simbol koji računamo je Γ^A_{BC}:

$$\begin{aligned}\Gamma^A_{BC} =& \frac{1}{2} g^{A\rho}(\partial_B g_{C\rho} + \partial_C g_{B\rho} - \partial_\rho g_{BC}) \\ =& \frac{1}{2} g^{AD}(\partial_B g_{CD} + \partial_C g_{BD} - \partial_D g_{BC}) \\ &+ \frac{1}{2} g^{Ar}(\partial_B g_{Cr} + \partial_C g_{Br} - \partial_r g_{BC})\end{aligned} \tag{A.41}$$

Prvi faktor u drugoj jednakosti prepoznajemo kao koeficijent konekcije definiran u (4.74) za koji smo utvrdili da je identičan koeficijentu definiranom u (4.80). Kako u drugoj zagradi preživljava samo posljednji član, za konačni rezultat pišemo:

$$\Gamma^A_{BC} = -\frac{1}{2} g^{ur} U^A \partial_r g_{BC} + \breve{\Gamma}^A_{BC}. \tag{A.42}$$

Time smo izračunali sve Christoffelove simbole.

Dodatak B Račun komponenti Riccijevog tenzora

U ovom dodatku računamo komponente Riccijevog tenzora i njihove određene kontrakcije relevantne za raspis 1. i 2. glavne jednadžbe. Uobičajena praksa je prvo izračunati sve komponenete Riemannovog tenzora te ih prosumirati po kontrahiranim indeksima kako bismo pronašli tražene komponente Riccijevog tenzora. Mi ćemo pak raspisati kontrahirani Riemannov tenzor preko Christoffelovih simbola, zatim na temelju rezultata iz dodatka A računamo Riccijev tenzor direktno. Koristimo standardnu definiciju:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} =& R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} \\
=& \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\rho\mu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \\
=& \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}\right) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\sqrt{-g}\right) - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \\
=& \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu\left(ln\sqrt{-g}\right) + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\partial_\sigma\left(ln\sqrt{-g}\right) - \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Definirajmo sada idući set veličina [10]:

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{\mu\nu} &= \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}, \\
R^{(2)}_{\mu\nu} &= -\partial_\mu\partial_\nu\left(ln\sqrt{-g}\right), \\
R^{(3)}_{\mu\nu} &= \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma\left(ln\sqrt{-g}\right), \\
R^{(4)}_{\mu\nu} &= -\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma},
\end{aligned} \tag{B.2}$$

tako da Riccijev tenzor možemo računati preko relacije:

$$R_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{4} R^{(i)}_{\mu\nu}. \tag{B.3}$$

Za svaku komponentu tenzora ćemo dakle računati jednu po jednu od četiri definirane veličine u (B.2) koje ćemo u konačnici sumirati.

Krećemo s računom R_{rr}.

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{rr} =& \partial_r \Gamma^r_{rr}, \\ R^{(2)}_{rr} =& -\partial_r \partial_r \left(ln\sqrt{-g} \right) \\ =& -\partial_r \partial_r \left(ln|g_{ur}| + ln\sqrt{f} \right), \\ R^{(3)}_{rr} =& \Gamma^r_{rr} \partial_r \left(ln|g_{ur}| + ln\sqrt{f} \right), \\ R^{(4)}_{rr} =& \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^A_{rB}\Gamma^B_{rA}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

U prethodnim računima smo prosumirali po svim relevantnim koeficijentima konekcije te smo za zapis faktora $R^{(2)}_{rr}$ i $R^{(3)}_{rr}$ iskoristili izraze (4.55) i (4.87). Pritom smo eksponencijalnu funkciju u izrazu za determinantu prepoznali kao apsolutnu vrijednost komponente metrike g_{ur}. Po uvrštavanju Christoffelovih simbola i sumacije vrijednosti u (B.4), dobivamo odmah traženu komponentu Riccijevog tenzora:

$$R_{rr} = -\partial_r \partial_r ln\sqrt{f} + \left(\partial_r ln|g_{ur}|\right)\left(\partial_r ln\sqrt{f}\right) - \frac{1}{4} g^{AC} g^{BD} \left(\partial_r g_{CB}\right)\left(\partial_r g_{DA}\right). \tag{B.5}$$

Za raspis $\nu = A$ komponenti 1. glavne jednadžbe preko koeficijenata metrike, potrebno je izračunati R_{rA}. Krenimo s računom faktora $R^{(1)}_{rA}$:

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{rA} =& \partial_\rho \Gamma^\rho_{rA} \\ =& \partial_r \Gamma^r_{rA} + \partial_C \Gamma^C_{rA}. \end{aligned} \tag{B.6}$$

U idućem koraku ćemo naizgled dodatno zakomplicirati račune, no u konačnici će doći do kraćenja određenih članova čime će finalni rezultat poprimiti kompaktniju formu. Christoffelovi simboli, dakako, nisu tenzori. No to nas ne sprječava da koeficijent Γ^C_{rA} definiramo kao tenzor sa dva angularna indeksa na podprostoru σ gdje je radijalna koordinata konstantna. Uvedimo stoga pomoćni tenzor na idući način:

$$\Gamma^C_{rA} = T^C{}_A \tag{B.7}$$

i promotrimo kovarijantnu derivaciju istog s obzirom na h_{AB}:

$$D_C T^C{}_A = \partial_C T^C{}_A + \check{\Gamma}^C_{CD} T^D{}_A - \check{\Gamma}^D_{CA} T^C{}_D. \tag{B.8}$$

Iz prethodnog izraza vidimo da parcijalnu derivaciju po angularnim koordinatama koeficijenta Γ^C_{rA} možemo zapisati u obliku:

$$\partial_C \Gamma^C_{rA} = D_C \Gamma^C_{rA} - \breve{\Gamma}^C_{CD}\Gamma^D_{rA} + \breve{\Gamma}^D_{CA}\Gamma^C_{rD}. \tag{B.9}$$

Koristeći jednakost $\breve{\Gamma}^C_{CD} = \frac{1}{\sqrt{h}}\partial_D\sqrt{h} = \partial_D ln(\sqrt{h})$, $R^{(1)}_{rA}$ poprima formu:

$$R^{(1)}_{rA} = \partial_r \Gamma^r_{rA} + D_C\Gamma^C_{rA} - \partial_E\left(ln(\sqrt{h})\right)\Gamma^E_{rA} + \breve{\Gamma}^E_{CA}\Gamma^C_{rE}. \tag{B.10}$$

Faktor $R^{(2)}_{rA}$ računamo na isti način kao i ranije:

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{rA} =& -\partial_A\partial_r\left(ln\sqrt{-g}\right) \\ =& -D_A\left(\partial_r ln|g_{ur}|\right) - \partial_A\partial_r ln\sqrt{f}, \end{aligned} \tag{B.11}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti samo zamijenili parcijalnu derivaciju skalarne veličine s kovarijantnom.

Raspisujemo dalje $R^{(3)}_{rA}$:

$$\begin{aligned} R^{(3)}_{rA} =& \Gamma^\sigma_{rA}\partial_\sigma\left(ln\sqrt{-g}\right) \\ =& \Gamma^r_{rA}\partial_r\left(ln\sqrt{-g}\right) + \Gamma^C_{rA}\partial_C\left(ln|g_{ur}|\right) + \Gamma^C_{rA}\partial_C\left(ln\sqrt{f}\right). \end{aligned} \tag{B.12}$$

Spomenimo da zadnji član možemo napisati na drugačiji način budući da vrijedi: $\Gamma^C_{rA}\partial_C\left(ln\sqrt{f}\right) = \Gamma^C_{rA}\partial_C(lnr^2 + ln\sqrt{h}) = \Gamma^C_{rA}\partial_C ln\sqrt{h}$. Ovaj član će se stoga u sumi pokratiti s trećim članom u (B.10). Provedimo na kraju sumaciju u izrazu za $R^{(4)}_{rA}$ koji ćemo za sada ostaviti iskazan preko Christoffelovih simbola:

$$\begin{aligned} R^{(4)}_{rA} =& -\Gamma^\sigma_{r\rho}\Gamma^\rho_{A\sigma} \\ =& -\Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{Ar} - \Gamma^r_{rC}\Gamma^C_{Ar} - \Gamma^C_{ru}\Gamma^u_{AC} - \Gamma^C_{rD}\Gamma^D_{AC}. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Nakon sumacije izraza (B.10), (B.11), (B.12) i (B.13) dobivamo:

$$\begin{aligned} R_{rA} =& \partial_r\Gamma^r_{rA} + D_C\Gamma^C_{rA} + \breve{\Gamma}^E_{CA}\Gamma^C_{rE} - D_A\left(\partial_r ln|g_{ur}|\right) - \partial_A\partial_r ln\sqrt{f} \\ &+ \Gamma^r_{rA}\partial_r\left(ln|g_{ur}|\right) + \Gamma^r_{rA}\partial_r\left(ln\sqrt{f}\right) + \Gamma^C_{rA}\partial_C\left(ln|g_{ur}|\right) \\ &- \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{Ar} - \Gamma^r_{rC}\Gamma^C_{Ar} - \Gamma^C_{ru}\Gamma^u_{AC} - \Gamma^C_{rD}\Gamma^D_{AC}. \end{aligned} \tag{B.14}$$

Po uvrštavanju koeficijenata Γ^r_{rr} i Γ^D_{AC} prethodni izraz se svodi na:

$$\begin{aligned} R_{rA} =& \frac{1}{\sqrt{f}}\partial_r\left(\sqrt{f}\Gamma^r_{rA}\right) + D_C\Gamma^C_{rA} - D_A\left(\partial_r ln|g_{ur}|\right) - D_A\left(\partial_r ln\sqrt{f}\right) \\ &+ g^{ur}\Gamma^C_{rA}D_C g_{ur} - \Gamma^r_{rC}\Gamma^C_{Ar} - \Gamma^C_{ru}\Gamma^u_{AC} + \frac{1}{2}\Gamma^C_{rD}g^{ur}U^D\partial_r g_{AC}, \end{aligned} \tag{B.15}$$

pri čemu smo 1. i 7. član u (B.14) udružili u 1. član prethodnog izraza te iskoristili jednostavno dokaziv identitet $\Gamma^C_{rA}\partial_C\left(ln|g_{ur}|\right) = g^{ur}\Gamma^C_{rA}D_C g_{ur}$. Uvrstimo sada koeficijente Γ^C_{rA}, Γ^C_{Ar}, Γ^C_{ru}, Γ^u_{AC} i Γ^C_{rD} u četiri zadnja člana jednadžbe (B.15). Nakon nekoliko redova računa i kraćenja pojedinih faktora dobivamo:

$$\begin{aligned} R_{rA} =& \frac{1}{\sqrt{f}}\partial_r\left(\sqrt{f}\Gamma^r_{rA}\right) + D_C\Gamma^C_{rA} - D_A\left(\partial_r ln|g_{ur}|\right) - D_A\left(\partial_r ln\sqrt{f}\right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}\left(\partial_r g_{AE}\right)D_C g_{ur} - \frac{1}{2}\Gamma^r_{rC}g^{CE}\partial_r g_{AE} - \frac{1}{4}\left(\partial_r U^C\right)g^{ur}\partial_r g_{AC} \\ &- \frac{1}{4r^2}\left(D^C g_{ur}\right)g^{ur}\partial_r g_{AC}. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Christoffelovi simboli koje sada uvrštavamo su Γ^r_{rA} i Γ^r_{rC}. Račun koji slijedi zahtjeva nešto dulji raspis ali nije naročito kompliciran pa ovdje navodimo samo konačan rezultat:

$$\begin{aligned} R_{rA} =& -\frac{1}{2}D_A\partial_r\left(ln|g_{ur}|\right) + \frac{1}{2}\left(D_A ln|g_{ur}|\right)\partial_r\left(ln\sqrt{f}\right) \\ &- \frac{1}{2\sqrt{f}}\partial_r\left(\sqrt{f}g^{ur}g_{AB}\partial_r U^B\right) + D_C\Gamma^C_{rA} - D_A\partial_r\left(ln\sqrt{f}\right). \end{aligned} \tag{B.17}$$

Promotrimo posebno 4. član prethodne jednakosti:

$$\begin{aligned} D_C\Gamma^C_{rA} =& D_C\left(\frac{1}{2}g^{CB}\partial_r g_{AB}\right) \\ =& \frac{1}{2}D_C\left(\frac{h^{CB}}{r^2}\partial_r g_{AB}\right) \\ =& \frac{1}{2r^2}D^B\partial_r g_{AB}. \end{aligned} \tag{B.18}$$

Koristeći (B.18) i identitet:

$$-\frac{1}{2}D_A\partial_r\left(ln|g_{ur}|\right) + \frac{1}{2}\left(D_A ln|g_{ur}|\right)\partial_r\left(ln\sqrt{f}\right) = -\frac{\sqrt{f}}{2}\partial_r\left(\frac{D_A ln|g_{ur}|}{\sqrt{f}}\right) \tag{B.19}$$

koji se jednostavno dokazuje deriviranjem, iznosimo konačni izraz za traženu komponentu Riccijevog tenzora:

$$\begin{aligned} R_{rA} =& -\frac{1}{2\sqrt{f}}\partial_r\left(\sqrt{f}g^{ur}g_{AB}\partial_r U^B\right) - \frac{\sqrt{f}}{2}\partial_r\left(\frac{D_A ln|g_{ur}|}{\sqrt{f}}\right) \\ & - D_A\partial_r\left(ln\sqrt{f}\right) + \frac{1}{2r^2}D^C\partial_r g_{AC}. \end{aligned} \tag{B.20}$$

Izračunajmo sada R_{AB}:

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{AB} =& \partial_\rho \Gamma^\rho_{AB} \\ =& \partial_u\Gamma^u_{AB} + \partial_r\Gamma^r_{AB} + \partial_C\Gamma^C_{AB}, \\ R^{(2)}_{AB} =& -\partial_A\partial_B\left(ln\sqrt{-g}\right) \\ =& -\partial_A\partial_B\left(ln|g_{ur}|\right) - \partial_A\partial_B\left(ln\sqrt{f}\right), \\ R^{(3)}_{AB} =& \Gamma^\sigma_{AB}\partial_\sigma ln\sqrt{-g} \\ =& \Gamma^u_{AB}\partial_u ln\sqrt{-g} + \Gamma^r_{AB}\partial_r ln\sqrt{-g} + \Gamma^C_{AB}\partial_C ln|g_{ur}| + \Gamma^C_{AB}\partial_C ln\sqrt{f}, \\ R^{(4)}_{AB} =& -\Gamma^\sigma_{A\rho}\Gamma^\rho_{B\sigma} \\ =& -\Gamma^u_{A\rho}\Gamma^\rho_{Bu} - \Gamma^r_{A\rho}\Gamma^\rho_{Br} - \Gamma^C_{A\rho}\Gamma^\rho_{BC} \\ =& -\Gamma^u_{Au}\Gamma^u_{Bu} - \Gamma^u_{AC}\Gamma^C_{Bu} - \Gamma^r_{Ar}\Gamma^r_{Br} - \Gamma^r_{AC}\Gamma^C_{Br} - \Gamma^C_{Au}\Gamma^u_{BC} \\ & -\Gamma^C_{Ar}\Gamma^r_{BC} - \Gamma^C_{AD}\Gamma^D_{BC}. \end{aligned} \tag{B.21}$$

Sumu prvih šest članova u izrazu za $R^{(4)}_{AB}$ ćemo definirati kao Γ_{AB}:

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma^u_{Au}\Gamma^u_{Bu} - \Gamma^r_{Ar}\Gamma^r_{Br} - \Gamma^u_{CA}\Gamma^C_{Bu} - \Gamma^u_{CB}\Gamma^C_{Au} - \Gamma^r_{CA}\Gamma^C_{Br} - \Gamma^r_{CB}\Gamma^C_{Ar}, \tag{B.22}$$

pri čemu primjećujemo da zadnja četiri člana možemo zapisati kompaktnije koristeći simetrizaciju, to jest:

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma^u_{Au}\Gamma^u_{Bu} - \Gamma^r_{Ar}\Gamma^r_{Br} - 2\Gamma^u_{C(A}\Gamma^C_{B)u} - 2\Gamma^r_{C(A}\Gamma^C_{B)r}. \tag{B.23}$$

Uočavamo i da sumu prvih, odnosno drugih članova u $R^{(1)}_{AB}$ i $R^{(3)}_{AB}$ možemo udružiti u faktore $\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u\left(\sqrt{-g}\Gamma^u_{AB}\right)$ i $\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}\Gamma^r_{AB}\right)$ respektivno. Tada, koristeći (B.3) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
R_{AB} =& \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u\left(\sqrt{-g}\Gamma^u_{AB}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}\Gamma^r_{AB}\right) + \Gamma_{AB} \\
&+ \partial_C\Gamma^C_{AB} - \partial_A\partial_B\left(ln|g_{ur}|\right) - \partial_A\partial_B\left(ln\sqrt{f}\right) \\
&+ \Gamma^C_{AB}D_C ln|g_{ur}| + \Gamma^C_{AB}D_C ln\sqrt{f} - \Gamma^C_{AD}\Gamma^D_{BC}.
\end{aligned} \tag{B.24}
$$

Raspisat ćemo prvo zadnjih šest članova prethodnog izraza. Nakon uvrštavanja Christoffelovih simbola slijedi jednakost:

$$
\begin{aligned}
&\partial_C\Gamma^C_{AB} - \partial_A\partial_B\left(ln|g_{ur}|\right) - \partial_A\partial_B\left(ln\sqrt{f}\right) + \Gamma^C_{AB}D_C ln|g_{ur}| + \Gamma^C_{AB}D_C ln\sqrt{f} \\
&- \Gamma^C_{AD}\Gamma^D_{BC} = \partial_C\tilde{\Gamma}^C_{AB} - \partial_A\partial_B ln\sqrt{|detg_{AB}|} + \tilde{\Gamma}^C_{AB}\partial_C ln\sqrt{|detg_{AB}|} - \tilde{\Gamma}^C_{AD}\tilde{\Gamma}^D_{BC} \\
&- \partial_A D_B\left(ln|g_{ur}|\right) + \tilde{\Gamma}^C_{AB}D_C\left(ln|g_{ur}|\right) - \frac{1}{2}\partial_C\left(g^{ur}U^C(\partial_r g_{AB})\right) \\
&- \frac{1}{2}g^{ur}\left(D_C ln|g_{ur}|\right)U^C\partial_r g_{AB} - \frac{1}{2}g^{ur}\left(D_C ln\sqrt{|detg_{AB}|}\right)U^C\partial_r g_{AB} \\
&- \frac{1}{4}g^{ur}g^{ur}U^C U^D(\partial_r g_{AD})(\partial_r g_{BC}) + \frac{1}{2}g^{ur}\tilde{\Gamma}^D_{BC}U^C(\partial_r g_{AD}) \\
&+ \frac{1}{2}g^{ur}\tilde{\Gamma}^C_{AD}U^D(\partial_r g_{BC}).
\end{aligned} \tag{B.25}
$$

Usporedbom s (B.1), vidimo da prva četiri člana s desne strane prethodne jednakosti čine Riccijev tenzor s obzirom na metriku g_{AB}:

$$
\tilde{R}_{AB} = \partial_C\tilde{\Gamma}^C_{AB} - \partial_A\partial_B ln\sqrt{|detg_{AB}|} + \tilde{\Gamma}^C_{AB}\partial_C ln\sqrt{|detg_{AB}|} - \tilde{\Gamma}^C_{AD}\tilde{\Gamma}^D_{BC}. \tag{B.26}
$$

Kako vrijedi $\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \breve{\Gamma}^A_{BC}$ i $\partial_C ln\sqrt{|detg_{AB}|} = \partial_C ln\sqrt{r^4 h} = \partial_C ln\sqrt{h}$, vidimo da je zadovoljeno $\tilde{R}_{AB} = \breve{R}_{AB}$, gdje je $\breve{R}_{AB}$ Riccijev tenzor konstruiran pomoću konformne metrike h_{AB} te možemo pisati:

$$
\breve{R}_{AB} = \partial_C\breve{\Gamma}^C_{AB} - \partial_A\partial_B ln\sqrt{h} + \breve{\Gamma}^C_{AB}\partial_C ln\sqrt{h} - \breve{\Gamma}^C_{AD}\breve{\Gamma}^D_{BC}. \tag{B.27}
$$

Uočimo još da sumu 5. i 6. člana s desne strane jedndžbe (B.25) možemo zapisati kao kovarijantnu derivaciju 1-forme $D_B\left(ln|g_{ur}|\right)$, odnosno imamo:

$$
\begin{aligned}
-\partial_A D_B\left(ln|g_{ur}|\right) + \tilde{\Gamma}^C_{AB}D_C\left(ln|g_{ur}|\right) =& - \partial_A D_B\left(ln|g_{ur}|\right) + \breve{\Gamma}^C_{AB}D_C\left(ln|g_{ur}|\right) \\
=& - D_A\left(D_B\left(ln|g_{ur}|\right)\right).
\end{aligned} \tag{B.28}
$$

Izraz (B.24) sada poprima oblik:

$$\begin{aligned}
R_{AB} =& \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u\left(\sqrt{-g}\Gamma^u_{AB}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}\Gamma^r_{AB}\right) + \Gamma_{AB} \\
&+ \breve{R}_{AB} - D_A\left(D_B\left(ln|g_{ur}|\right)\right) - \frac{1}{4}\left(g^{ur}\right)^2 U^C U^E (\partial_r g_{AE})(\partial_r g_{BC}) \\
&- \frac{1}{2}\partial_C\left(g^{ur}U^C(\partial_r g_{AB})\right) - \frac{1}{2}g^{ur}\left(D_C ln|g_{ur}|\right)U^C\partial_r g_{AB} \\
&- \frac{1}{2}g^{ur}\left(D_C ln\sqrt{|detg_{AB}|}\right)U^C\partial_r g_{AB} + \frac{1}{2}g^{ur}\breve{\Gamma}^D_{BC}U^C(\partial_r g_{AD}) \\
&+ \frac{1}{2}g^{ur}\breve{\Gamma}^C_{AD}U^D(\partial_r g_{BC}).
\end{aligned} \tag{B.29}$$

Jednostavno se pokazuje da sumu zadnjih pet članova u (B.29) možemo zapisati u idućem obliku:

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\partial_C\left(g^{ur}U^C(\partial_r g_{AB})\right) - \frac{1}{2}g^{ur}\left(D_C ln|g_{ur}|\right)U^C\partial_r g_{AB} \\
&- \frac{1}{2}g^{ur}\left(D_C ln\sqrt{|detg_{AB}|}\right)U^C\partial_r g_{AB} + \frac{1}{2}g^{ur}\breve{\Gamma}^D_{BC}U^C(\partial_r g_{AD}) \\
&+ \frac{1}{2}g^{ur}\breve{\Gamma}^C_{AD}U^D(\partial_r g_{BC}) = -\frac{1}{2}g^{ur}[\partial_C\left(U^C\partial_r(g_{AB})\right) \\
&+ \partial_C\left(ln\sqrt{|detg_{AB}|}\right)U^C\partial_r g_{AB} - \breve{\Gamma}^D_{BC}U^C\partial_r g_{AD} - \breve{\Gamma}^C_{AD}U^D\partial_r g_{BC}],
\end{aligned} \tag{B.30}$$

pri čemu smo iskoristili identitet: $-\frac{1}{2}g^{ur}D_C ln|g_{ur}| = \frac{1}{2}D_C g_{ur}$. Definirajmo sada pomoćni tenzor na σ relacijom:

$$X^C{}_{AB} = U^C\left(\partial_r g_{AB}\right) \tag{B.31}$$

te promotrimo iduću kovarijantnu derivaciju:

$$D_C X^C{}_{AB} = \partial_C X^C{}_{AB} + \breve{\Gamma}^C_{CD}X^D{}_{AB} - \breve{\Gamma}^D_{CA}X^C{}_{DB} - \breve{\Gamma}^D_{CB}X^C{}_{AB}. \tag{B.32}$$

Kako vrijedi:

$$\begin{aligned}
\breve{\Gamma}^C_{CD}X^D{}_{AB} =& \breve{\Gamma}^D_{DC}X^C{}_{AB} \\
=& \frac{\partial_C\sqrt{h}}{\sqrt{h}}X^C{}_{AB} \\
=& \frac{\partial_C\sqrt{|detg_{AB}|}}{\sqrt{|detg_{AB}|}}X^C{}_{AB} \\
=& \partial_C\left(ln\sqrt{|detg_{AB}|}\right)X^C{}_{AB}
\end{aligned} \tag{B.33}$$

i $X^A{}_{BC} = X^A{}_{(BC)}$, uočavamo da je faktor u uglatoj zagradi s desne strane jednakosti (B.30) jednak kovarijantnoj derivaciji $D_C\left(U^C\partial_r(g_{AB})\right)$. Možemo dakle pisati:

$$\begin{aligned}R_{AB} =& \breve{R}_{AB} - D_A\left(D_B\left(ln|g_{ur}|\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u\left(\sqrt{-g}\Gamma^u_{AB}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}\Gamma^r_{AB}\right)\\ & - \frac{1}{2}g^{ur}D_C\left(U^C\partial_r(g_{AB})\right) - \frac{1}{4}\left(g^{ur}\right)^2U^CU^E(\partial_r g_{AE})(\partial_r g_{BC}) + \Gamma_{AB}.\end{aligned} \tag{B.34}$$

Izračunajmo sada faktor Γ_{AB}. Krenut ćemo s raspisom prvih dvaju članova u (B.23). Po uvrštavanju Christoffelovih simbola dobivamo:

$$\begin{aligned}-\Gamma^u_{Au}\Gamma^u_{Bu} - \Gamma^r_{Ar}\Gamma^r_{Br} =& -[\frac{1}{2}g^{ur}(D_A g_{ur} + \partial_r U_A)\frac{1}{2}g^{ur}(D_B g_{ur} + \partial_r U_B)\\ & + \frac{1}{2}g^{ur}(D_A g_{ur} - g_{AC}\partial_r U^C)\frac{1}{2}g^{ur}(D_B g_{ur} - g_{BD}\partial_r U^D)].\end{aligned} \tag{B.35}$$

Nakon kraćeg raspisa, (B.35) poprima oblik:

$$\begin{aligned}-\Gamma^u_{Au}\Gamma^u_{Bu} - \Gamma^r_{Ar}\Gamma^r_{Br} =& -\frac{1}{2}(g^{ur})^2[(D_A g_{ur})(D_B g_{ur}) + U^E\partial_r g_{E(A}D_{B)}g_{ur}\\ & + g_{F(A}\partial_r g_{B)E}U^E\partial_r U^F + \frac{1}{2}U^EU^F(\partial_r g_{EA})(\partial_r g_{FB})\\ & + (\partial_r U^E)(\partial_r U^F)g_{EA}g_{BF}]\end{aligned} \tag{B.36}$$

Treba imati na umu da u simetriziranim faktorima prethodnog izraza parcijalne derivacije po r djeluju samo na prve članove s desne strane. Npr. $g_{F(A}\partial_r g_{B)E}U^E\partial_r U^F = \frac{1}{2}[g_{FA}(\partial_r g_{BE})U^E\partial_r U^F + g_{FB}(\partial_r g_{AE})U^E\partial_r U^F]$. Računamo dalje sumu druga dva člana u (B.23):

$$\begin{aligned}& -2\Gamma^u_{C(A}\Gamma^C_{B)u} - 2\Gamma^r_{C(A}\Gamma^C_{B)r} = -[-\frac{1}{2}g^{ur}(\partial_r g_{CA})[\frac{1}{2}g^{ur}(U^C D_B g_{ur} + U^C\partial_r U_B)\\ & + \frac{1}{2}g^{CD}\partial_u g_{DB} + g^{CD}D_{[D}U_{B]}] + (-)\frac{1}{2}g^{ur}(\partial_r g_{CB})[\frac{1}{2}g^{ur}(U^C D_A g_{ur} + U^C\partial_r U_A)\\ & + \frac{1}{2}g^{CD}\partial_u g_{DA} + g^{CD}D_{[D}U_{A]}] + [-g^{ur}D_{(C}U_{A)}\\ & - \frac{1}{2}g^{ur}[\partial_u g_{CA} - \frac{V}{r}\partial_r g_{CA}]]\frac{1}{2}g^{CD}\partial_r g_{BD}\\ & + [-g^{ur}D_{(C}U_{B)} - \frac{1}{2}g^{ur}[\partial_u g_{CB} - \frac{V}{r}\partial_r g_{CB}]]\frac{1}{2}g^{CD}\partial_r g_{AD}].\end{aligned} \tag{B.37}$$

Prethodna jednakost se raspisom svodi na iduću jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
&-2\Gamma^u_{C(A}\Gamma^C_{B)u} - 2\Gamma^r_{C(A}\Gamma^C_{B)r} = \frac{1}{2}(g^{ur})^2[U^C\partial_r g_{C(A}D_{B)}g_{ur} + U^C U^E\partial_r g_{C(A}\partial_r g_{B)E} \\
&+ U^C(\partial_r U^E)\partial_r g_{C(A}g_{B)E}] + \frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}[(\partial_r g_{CA})D_E U_B + (\partial_r g_{CB})D_E U_A)] \\
&+ g^{ur}g^{CE}\partial_r g_{C(A}\partial_u g_{B)E} - \frac{1}{2}\frac{V}{r}g^{ur}g^{CE}\partial_r g_{E(A}\partial_r g_{B)C}.
\end{aligned} \tag{B.38}
$$

Sumacijom izraza (B.36) i (B.38), nakon kraćenja i grupiranja određenih članova, dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{AB} =& \frac{1}{2}(g^{ur})^2[\frac{1}{2}U^C U^E(\partial_r g_{CB})(\partial_r g_{AE}) - (D_A g_{ur})(D_B g_{ur}) \\
&- (\partial_r U^E)(\partial_r U^F)g_{AE}g_{BF}] + \frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}[(\partial_r g_{CA})D_E U_B + (\partial_r g_{CB})D_E U_A] \\
&+ g^{ur}g^{CE}\partial_r g_{C(A}\partial_u g_{B)E} - \frac{1}{2}\frac{V}{r}g^{ur}g^{CE}\partial_r g_{E(A}\partial_r g_{B)C}.
\end{aligned} \tag{B.39}
$$

Prethodni izraz sada možemo uvrstiti u (B.34):

$$
\begin{aligned}
R_{AB} =& \breve{R}_{AB} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u\left(\sqrt{-g}\Gamma^u_{AB}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r\left(\sqrt{-g}\Gamma^r_{AB}\right) \\
&- \frac{1}{2}g^{ur}D_C\left(U^C\partial_r(g_{AB})\right) - D_A\left(D_B\left(ln|g_{ur}|\right)\right) \\
&- \frac{1}{2}(g^{ur})^2(D_A g_{ur})(D_B g_{ur}) - \frac{1}{2}(g^{ur})^2 g_{AE}g_{BF}(\partial_r U^E)(\partial_r U^F) \\
&+ g^{ur}g^{CE}\partial_r g_{C(A}\partial_u g_{B)E} + \frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}[(\partial_r g_{CA})D_E U_B + (\partial_r g_{CB})D_E U_A] \\
&- \frac{1}{2}\frac{V}{r}g^{ur}g^{CE}\partial_r g_{E(A}\partial_r g_{B)C}.
\end{aligned} \tag{B.40}
$$

Četvrti član posljednjeg izraza ćemo zapisati u malo drugačijoj formi, odnosno koristimo jednakost:

$$
-D_A\left(D_B\left(ln|g_{ur}|\right)\right) = \frac{-2}{\sqrt{|g_{ur}|}}D_A D_B\sqrt{|g_{ur}|} + \frac{1}{2}(g^{ur})^2(D_A g_{ur})(D_B g_{ur}) \tag{B.41}
$$

koja se jednostavno pokazuje koristeći činjenicu da kovarijantna derivacija poštuje Leibnitzovo pravilo. Primjetimo da se drugi član posljednje jednadžbe krati sa istovjetnim faktorom u izrazu za R_{AB}. Konačno, uvrštavanjem koeficijenata Γ^u_{AB} i Γ^r_{AB} u (B.40) te iskazom determinante metrike pomoću volumnog elementa na σ, dobivamo konačni rezultat za Riccijev tenzor:

$$
\begin{aligned}
R_{AB} =& \breve{R}_{AB} - \frac{2}{\sqrt{|g_{ur}|}} D_A D_B \sqrt{|g_{ur}|} - \frac{1}{2} g^{ur} D_C \left(U^C \partial_r (g_{AB}) \right) \\
&- \frac{g^{ur}}{2\sqrt{f}} \left[\partial_u (\sqrt{f} \partial_r g_{AB}) + \partial_r (\sqrt{f} \partial_u g_{AB}) \right] - \frac{g^{ur}}{\sqrt{f}} \partial_r (\sqrt{f} D_{(A} U_{B)}) \\
&+ \frac{g^{ur}}{2\sqrt{f}} \partial_r \left(\sqrt{f} \frac{V}{r} \partial_r g_{AB} \right) - \frac{1}{2} (g^{ur})^2 g_{AE} g_{BF} (\partial_r U^E)(\partial_r U^F) \\
&+ \frac{1}{2} g^{ur} g^{CE} [(\partial_r g_{CA})(\partial_u g_{BE}) + (\partial_r g_{CB})(\partial_u g_{AE})] \\
&+ \frac{1}{2} g^{ur} g^{CE} [(\partial_r g_{CA}) D_E U_B + (\partial_r g_{CB}) D_E U_A] \\
&- \frac{1}{4} \frac{V}{r} g^{ur} g^{CE} [(\partial_r g_{EA})(\partial_r g_{BC}) + (\partial_r g_{EB})(\partial_r g_{AC})].
\end{aligned}
\tag{B.42}
$$

Za izračun jednadžbe (4.102) nam treba kontrakcija $g^{AB} R_{AB}$, pa u nastavku računamo istu. Kontrahirat ćemo jedan po jedan član prethodnog izraza. Krenimo stoga s prvim:

$$
\begin{aligned}
g^{AB} \breve{R}_{AB} =& \frac{1}{r^2} h^{AB} \breve{R}_{AB} \\
=& \frac{1}{r^2} \breve{R}.
\end{aligned}
\tag{B.43}
$$

Iskoristili smo činjenicu da je $\breve{R}_{AB}$ Riccijev tenzor konstruiran metrikom h_{AB}. Tada kontrakcija $h^{AB} \breve{R}_{AB}$ predstavlja Riccijev skalar $\breve{R}$ s obzirom na istu konformnu metriku. Za potrebe daljnjih računa ćemo drugi faktor u (B.42) izraziti ponovno preko sume dvaju članova koristeći jednadžbu (B.41). Pritom koristimo identitet $\frac{1}{2}(g^{ur})^2 \cdot (D_A g_{ur})(D_B g_{ur}) = \frac{1}{2|g_{ur}|^2} D_A(|g_{ur}|) D_B(|g_{ur}|)$. Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
-g^{AB} \frac{2}{\sqrt{|g_{ur}|}} D_A D_B \sqrt{|g_{ur}|} =& - g^{AB} D_A \left(D_B \left(ln |g_{ur}| \right) \right) \\
&- \frac{g^{AB}}{2|g_{ur}|^2} D_A(|g_{ur}|) D_B(|g_{ur}|) \\
=& \frac{-h^{AB}}{r^2} D_A D_B ln e^{2\beta} - \frac{h^{AB}}{2r^2 e^{4\beta}} D_A \left(e^{2\beta} \right) D_B \left(e^{2\beta} \right) \\
=& \frac{-2}{r^2} h^{AB} D_A D_B \beta - 2 \frac{h^{AB}}{r^2} (D_A \beta)(D_B \beta).
\end{aligned}
\tag{B.44}
$$

Treći član:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}g^{ur}g^{AB}D_C(U^C\partial_r g_{AB}) = -\frac{1}{2}g^{ur}\frac{h^{AB}}{r^2}D_C(U^C\partial_r(r^2h_{AB}))\\
&= -\frac{g^{ur}}{r^2}h^{AB}D_C(rU^Ch_{AB}) - \frac{g^{ur}}{2r^2}h^{AB}D_C(r^2U^C\partial_r h_{AB})\\
&= -\frac{g^{ur}}{r^2}D_C(rU^Ch^{AB}h_{AB}) - \frac{g^{ur}}{2r^2}D_C(r^2U^Ch^{AB}\partial_r h_{AB})\\
&= -2\frac{g^{ur}}{r^2}D_C(rU^C)\\
&= 2\frac{e^{-2\beta}}{r}D_CU^C.
\end{aligned}
\tag{B.45}
$$

U prethodnom računu smo iskoristili kompatibilnost metrike, izraz (4.30), činjenicu da derivacija radijalne koordinate po angularnim koordinatama iščezava i definiciju inverzne metrike $h^{AB}h_{AB} = 2$. Raspisi idućih nekoliko članova su vrlo slični i potrebno je koristiti već spomenute koncepte pa račune istih nećemo detaljno provoditi. U nastavku navodimo konačne rezultate:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{g^{ur}}{2\sqrt{f}}g^{AB}\partial_u(\sqrt{f}\partial_r g_{AB}) = \frac{e^{-2\beta}}{2}h^{AB}\partial_u\partial_r h_{AB},\\
&-\frac{g^{ur}}{2\sqrt{f}}g^{AB}\partial_r(\sqrt{f}\partial_u g_{AB}) = \frac{e^{-2\beta}}{2}h^{AB}\partial_r\partial_u h_{AB},\\
&-\frac{g^{ur}}{\sqrt{f}}g^{AB}\partial_r(\sqrt{f}D_{(A}U_{B)}) = \frac{e^{-2\beta}}{2}[h^{AB}(\partial_r h_{BC})D_AU^C + h^{AB}(\partial_r h_{AC})D_BU^C]\\
&+\frac{e^{-2\beta}}{r^4}\partial_r(r^4D_AU^A).
\end{aligned}
\tag{B.46}
$$

Zadnju kontrakciju u (B.46) ćemo zapisati u malo drugačijem obliku, ali da bismo to napravili moramo iskoristiti identitet koji možda nije toliko očit pa ćemo ga sada dokazati. Raspišimo faktor $\partial_r(r^4D_AU^A)$ u trećoj jednakosti unutar (B.46):

$$
\begin{aligned}
\partial_r(r^4D_AU^A) =&\partial_r D_A(r^4U^A)\\
=&\partial_r[\partial_A(r^4U^A) + \breve{\Gamma}^A_{AB}(r^4U^B)]\\
=&\partial_r\partial_A(r^4U^A) + \partial_r\left[\frac{\partial_B\sqrt{h}}{\sqrt{h}}(r^4U^B)\right]\\
=&\partial_A\partial_r(r^4U^A) + \frac{\partial_B\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\partial_r(r^4U^B),
\end{aligned}
\tag{B.47}
$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti iskoristili izraz $\partial_r det h_{AB} = 0$. S druge strane, očito vrijedi:

$$D_A(\partial_r(r^4U^A)) = \partial_A\partial_r(r^4U^A) + \frac{\partial_B\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\partial_r(r^4U^B). \tag{B.48}$$

Kako su izrazi (B.47) i (B.48) identični, ∂_r i D_A u ovom slučaju komutiraju te ćemo ovu činjenicu iskoristiti u zapisu treće kontrakcije unutar (B.46):

$$\begin{aligned}&-\frac{g^{ur}}{\sqrt{f}}g^{AB}\partial_r(\sqrt{f}D_{(A}U_{B)}) = \frac{e^{-2\beta}}{2}[h^{AB}(\partial_r h_{BC})D_AU^C + h^{AB}(\partial_r h_{AC})D_BU^C]\\&+\frac{e^{-2\beta}}{r^4}D_A[\partial_r(r^4U^A)].\end{aligned} \tag{B.49}$$

Kontrakcije preostalih članova ne uključuju ništa sa čim se već nismo sreli. Čitatelj se po potrebi može uvjeriti da vrijedi iduće:

$$\begin{aligned}&\frac{g^{ur}}{2\sqrt{f}}g^{AB}\partial_r\left(\sqrt{f}\frac{V}{r}\partial_r g_{AB}\right) = -\frac{2}{r^2}e^{-2\beta}\partial_r V - \frac{4}{r^3}e^{-2\beta}V - \frac{V}{2r}e^{-2\beta}h^{AB}\partial_r\partial_r h_{AB},\\&-\frac{1}{2}(g^{ur})^2g^{AB}g_{AE}g_{BF}(\partial_r U^E)(\partial_r U^F) = -\frac{1}{2}r^2e^{-4\beta}h_{AB}(\partial_r U^A)(\partial_r U^B),\\&\frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}g^{AB}[(\partial_r g_{CA})(\partial_u g_{BE}) + (\partial_r g_{CB})(\partial_u g_{AE})] = -e^{-2\beta}h^{AB}\partial_r\partial_u h_{AB},\\&\frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}g^{AB}[(\partial_r g_{CA})D_EU_B + (\partial_r g_{CB})D_EU_A] = -\frac{e^{-2\beta}}{2}[h^{AB}(\partial_r h_{BC})D_AU^C\\&+h^{AB}(\partial_r h_{AC})D_BU^C] - 2\frac{e^{-2\beta}}{r}D_CU^C,\\&-\frac{1}{4}\frac{V}{r}g^{ur}g^{CE}g^{AB}[(\partial_r g_{EA})(\partial_r g_{BC}) + (\partial_r g_{EB})(\partial_r g_{AC})] = \frac{V}{2r}e^{-2\beta}h^{AB}\partial_r\partial_r h_{AB}\\&+4e^{-2\beta}\frac{V}{r^3}.\end{aligned} \tag{B.50}$$

Sumacijom svih kontrakcija dolazi do kraćenja velikog broja članova te skalar $g^{AB}R_{AB}$ poprima oblik:

$$\begin{aligned}g^{AB}R_{AB} =&\frac{1}{r^2}\breve{R} - \frac{2h^{AB}}{r^2}[D_AD_B\beta + (D_A\beta)(D_B\beta)] + \frac{e^{-2\beta}}{r^4}D_A[\partial_r(r^4U^A)]\\&-\frac{1}{2}r^2e^{-4\beta}h_{AB}(\partial_r U^A)(\partial_r U^B) - 2e^{-2\beta}\frac{1}{r^2}(\partial_r V).\end{aligned} \tag{B.51}$$

Za potrebe 2. glavne jednadžbe, trebamo odrediti i skalar $m^Am^BR_{AB}$. Ponovno ćemo kontrahirati jedan po jedan član u (B.42), pri čemu koristimo svojstva vektora

m^A data u podpoglavlju 4.2. Krenimo s kontrakcijom tenzora $\breve{R}_{AB}$:

$$\begin{aligned}
m^A m^B \breve{R}_{AB} =& m^A m^B \breve{R}^C{}_{ACB} \\
=& m^A m^B h^{CD} \breve{R}_{DACB} \\
=& m^A m^B \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (m^C \bar{m}^D + m^D \bar{m}^C) \breve{R}_{DACB} \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DACB} + m^A m^B m^D \bar{m}^C \breve{R}_{DACB}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DACB} + m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{CADB}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DACB} - m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{ACDB}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DACB} - m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DBCA}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DACB} - m^C m^A m^B \bar{m}^D \breve{R}_{DACB}) \\
=& \frac{1}{\chi\bar{\chi}} (m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DACB} - m^A m^B m^C \bar{m}^D \breve{R}_{DACB}) \\
=& 0.
\end{aligned} \tag{B.52}$$

U prvom redu smo $\breve{R}_{AB}$ napisali kao kontrahirani Riemmanov tenzor $\breve{R}_{DACB}$ konstruiran s obzirom na h_{AB}. Nakon raspisa inverza metrike pomoću izraza (4.107), napravili smo preimenovanje slijepih indeksa $D \leftrightarrow C$ u drugom članu 4. reda. U idućem koraku smo iskoristili svojstvo Riemmanovog tenzora $\breve{R}_{CADB} = -\breve{R}_{ACDB}$ čime se u 6. redu pojavio $-$ predznak. Potom smo iskoristili simetričnost Riemmanovog tenzora u zamjeni parova prvih i drugih dvaju indeksa: $\breve{R}_{ACDB} = \breve{R}_{DBAC}$. U 2. članu 7. reda smo preimenovali indekse $B \to A$, $A \to C$ i $C \to B$ te smo u konačnici samo razmjestili vektore kako bismo pokazali da se članovi krate i izraz isčezava. Idućih nekoliko članova u (B.42) je poprilično jednostavno kontrahirati pa iznosimo samo konačne rezultate:

$$\begin{aligned}
& m^A m^B \left(-\frac{2}{\sqrt{|g_{ur}|}} D_A D_B \sqrt{|g_{ur}|} \right) = m^A m^B \left(-2e^{-\beta} D_A D_B e^{\beta} \right), \\
& m^A m^B \left(-\frac{1}{2} g^{ur} D_C \left(U^C \partial_r (g_{AB}) \right) \right) = m^A m^B [\frac{r^2}{2} e^{-2\beta} (\partial_r h_{AB})(D_C U^C) \\
& + \frac{r^2}{2} e^{-2\beta} U^C D_C (\partial_r h_{AB})], \\
& m^A m^B \left[-\frac{g^{ur}}{2\sqrt{f}} \left[\partial_u (\sqrt{f} \partial_r g_{AB}) + \partial_r (\sqrt{f} \partial_u g_{AB}) \right] \right] = m^A m^B e^{-2\beta} [r^2 \partial_u \partial_r h_{AB} \\
& + 3r \partial_u h_{AB}],
\end{aligned} \tag{B.53}$$

$$m^A m^B \left[-\frac{g^{ur}}{\sqrt{f}}\partial_r(\sqrt{f}D_{(A}U_{B)})\right] = e^{-2\beta}r^2 m^A m^B(\partial_r h_{AC})h_{BE}(D^C U^E + D^E U^C)$$
$$+ 2e^{-2\beta}rm^A m^B h_{AC}h_{BE}(D^C U^E + D^E U^C)$$
$$+ \frac{e^{-2\beta}}{2}r^2 m^A m^B h_{AC}h_{BE}(\partial_r(D^C U^E) + \partial_r(D^E U^C)),$$
$$m^A m^B \left[\frac{g^{ur}}{2\sqrt{f}}\partial_r\left(\sqrt{f}\frac{V}{r}\partial_r g_{AB}\right)\right] = -\frac{1}{2}e^{-2\beta}m^A m^B\partial_r(rV\partial_r h_{AB}) \tag{B.54}$$
$$- e^{-2\beta}m^A m^B V(\partial_r h_{AB}) - \frac{e^{-2\beta}}{r^2}m^A m^B\partial_r(r^2 V h_{AB}),$$
$$m^A m^B \left[-\frac{1}{2}(g^{ur})^2 g_{AE}g_{BF}(\partial_r U^E)(\partial_r U^F)\right] =$$
$$- \frac{1}{2}r^4 e^{-4\beta}m^A m^B h_{AC}h_{BD}(\partial_r U^C)(\partial_r U^D).$$

Malo detaljnije ćemo razmotriti iduću kontrakciju. Jednostavno se pokazuje da vrijedi:

$$\begin{aligned} &m^A m^B \left[\frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}[(\partial_r g_{CA})(\partial_u g_{BE}) + (\partial_r g_{CB})(\partial_u g_{AE})]\right] = \\ &- e^{-2\beta}r^2 m^A m^B h^{CE}(\partial_r h_{CA})(\partial_u h_{BE}) - 2e^{-2\beta}rm^A m^B(\partial_u h_{AB}), \end{aligned} \tag{B.55}$$

no ono što nije toliko očito jest da prvi član s desne strane jednakosti isčezava. Pažljivim raspisom konformne metrike preko izraza (4.107), pokazuje se da je zadovoljeno:

$$\begin{aligned} &m^A m^B h^{CE}(\partial_r h_{CA})(\partial_u h_{BE}) = \frac{2}{(\chi\bar{\chi})}[m^A m^B(\partial_u m_B)(\partial_r \bar{m}_A) \\ &+ m^A m^B(\partial_u \bar{m}_B)(\partial_r m_A) + m^A \bar{m}^B(\partial_u m_B)(\partial_r m_A) + m^A \bar{m}^B(\partial_u m_A)(\partial_r m_B)]. \end{aligned} \tag{B.56}$$

Iz identiteta (4.114) je sada vidljivo kako su svi članovi u uglatoj zagradi jednaki nuli. Pišemo dakle:

$$\begin{aligned} &m^A m^B \left[\frac{1}{2}g^{ur}g^{CE}[(\partial_r g_{CA})(\partial_u g_{BE}) + (\partial_r g_{CB})(\partial_u g_{AE})]\right] = \\ &- 2e^{-2\beta}rm^A m^B(\partial_u h_{AB}). \end{aligned} \tag{B.57}$$

Preostaje nam kontrahirati posljednja dva člana u (B.42). Rezultati su:

$$
\begin{aligned}
&m^A m^B \left[\frac{1}{2} g^{ur} g^{CE} [(\partial_r g_{CA}) D_E U_B + (\partial_r g_{CB}) D_E U_A]\right] = \\
&- 2e^{-2\beta} r m^A m^B h_{AC} h_{BE} D^C U^E - e^{-2\beta} r^2 m^A m^B (\partial_r h_{AC}) h_{BE} D^C U^E \\
&m^A m^B \left[-\frac{1}{4}\frac{V}{r} g^{ur} g^{CE} [(\partial_r g_{EA})(\partial_r g_{BC}) + (\partial_r g_{EB})(\partial_r g_{AC})]\right] = \\
&2e^{-2\beta} V m^A m^B (\partial_r h_{AB}).
\end{aligned}
\tag{B.58}
$$

Spomenimo samo da smo pri računu posljednje kontrakcije koristili raspis sličan poput onog u (B.56). Jedina razlika jest što su u ovom slučaju obje parcijalne derivacije po radijalnoj koordinati, ali to ne mijenja konačni rezultat, odnosno činjenicu da izraz (5.56) iščezava uz zamjenu $u \to r$. Kontrahirane veličine sada možemo sumirati i grupirati nakon čega slijedi:

$$
\begin{aligned}
m^A m^B R_{AB} =& m^A m^B [e^{-2\beta} r^2 \partial_u \partial_r h_{AB} + e^{-2\beta} 3r \partial_u h_{AB} - e^{-2\beta} 2r (\partial_u h_{AB})] \\
&+ m^A m^B [-\frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_r (r V \partial_r h_{AB}) - e^{-2\beta} V (\partial_r h_{AB}) \\
&- e^{-2\beta} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 V h_{AB}) + 2e^{-2\beta} V (\partial_r h_{AB})] \\
&+ m^A m^B [-2e^{-\beta} D_A D_B e^{\beta}] \\
&+ m^A m^B [e^{-2\beta} \frac{r^2}{2} (\partial_r h_{AB})(D_C U^C) + e^{-2\beta} \frac{r^2}{2} U^C D_C (\partial_r h_{AB}) \\
&+ e^{-2\beta} r^2 (\partial_r h_{AC}) h_{BE} (D^C U^E + D^E U^C) \\
&+ e^{-2\beta} 2r h_{AC} h_{BE} (D^C U^E + D^E U^C) \\
&+ e^{-2\beta} \frac{r^2}{2} h_{AC} h_{BE} (\partial_r (D^C U^E) + \partial_r (D^E U^C)) \\
&- \frac{1}{2} e^{-4\beta} r^4 h_{AC} h_{BD} (\partial_r U^C)(\partial_r U^D) - 2e^{-2\beta} r h_{AC} h_{BE} D^C U^E \\
&- e^{-2\beta} r^2 (\partial_r h_{AC}) h_{BE} D^C U^E].
\end{aligned}
\tag{B.59}
$$

Sada ćemo još jednom zasebno promotriti i raspisati svaki od četiriju članova prethodnog izraza u uglatim zagradama. Prvi član se simplificira u idući oblik:

$$
\begin{aligned}
&m^A m^B [e^{-2\beta} r^2 \partial_u \partial_r h_{AB} + e^{-2\beta} 3r \partial_u h_{AB} - e^{-2\beta} 2r (\partial_u h_{AB})] = \\
&e^{-2\beta} m^A m^B r \partial_r [r (\partial_u h_{AB})],
\end{aligned}
\tag{B.60}
$$

pri čemu smo iskoristili identitet $r\partial_r[r(\partial_u h_{AB})] = r^2 \partial_u \partial_r h_{AB} + r \partial_u h_{AB}$. Drugi član se također znatno pojednostavljuje:

$$
\begin{aligned}
&m^A m^B[-\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r(rV\partial_r h_{AB}) - e^{-2\beta}V(\partial_r h_{AB}) - e^{-2\beta}\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 V h_{AB}) \\
&+ 2e^{-2\beta}V(\partial_r h_{AB})] = -\frac{1}{2}e^{-2\beta}m^A m^B \partial_r[rV(\partial_r h_{AB})].
\end{aligned}
\tag{B.61}
$$

Treći član ostavljamo kakav jest te se okrećemo četvrtom članu. Nakon poduljeg raspisa pokazuje se da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&m^A m^B[e^{-2\beta}\frac{r^2}{2}(\partial_r h_{AB})(D_C U^C) + e^{-2\beta}\frac{r^2}{2}U^C D_C(\partial_r h_{AB}) \\
&+ e^{-2\beta}r^2(\partial_r h_{AC})h_{BE}(D^C U^E + D^E U^C) + e^{-2\beta}2r h_{AC}h_{BE}(D^C U^E + D^E U^C) \\
&+ e^{-2\beta}\frac{r^2}{2}h_{AC}h_{BE}(\partial_r(D^C U^E) + \partial_r(D^E U^C)) \\
&- \frac{1}{2}e^{-4\beta}r^4 h_{AC}h_{BD}(\partial_r U^C)(\partial_r U^D) - 2e^{-2\beta}r h_{AC}h_{BE}D^C U^E \\
&- e^{-2\beta}r^2(\partial_r h_{AC})h_{BE}D^C U^E] = m^A m^B[e^{-2\beta}h_{CA}D_B[\partial_r(r^2 U^C)] \\
&- \frac{1}{2}r^4 e^{-4\beta}h_{AC}h_{BD}(\partial_r U^C)(\partial_r U^D) + e^{-2\beta}\frac{r^2}{2}(\partial_r h_{AB})(D_C U^C) \\
&+ e^{-2\beta}r^2 U^C D_C(\partial_r h_{AB}) - e^{-2\beta}r^2(\partial_r h_{AC})h_{BE}(D^C U^E - D^E U^C)].
\end{aligned}
\tag{B.62}
$$

Osvrnimo se na dva ključna koraka u dokazu prethode jednakosti. U prvom dijelu dokaza je korišten identitet $2m^A m^B e^{-2\beta} r h_{AC} h_{BE} D^E U^C = e^{-2\beta} m^A m^B h_{CA} D_B[\partial_r(r^2 U^C)] - e^{-2\beta} m^A m^B r^2 h_{CA} D_B(\partial_r U^C)$ koji se jednostavno pokazuje deriviranjem. Nadalje, u jednom trenutku je korištena i iduća jednadžba:

$$
\begin{aligned}
&- m^A m^B e^{-2\beta} r^2 h_{CA} D_B(\partial_r U^C) + m^A m^B e^{-2\beta} r^2 h_{AC} h_{BE} \partial_r(D^C U^E) = \\
&\frac{1}{2}e^{-2\beta} r^2 m^A m^B U^C D_C(\partial_r h_{AB}) - e^{-2\beta} r^2 m^A m^B (\partial_r h_{AC}) h_{BE} D^C U^E.
\end{aligned}
\tag{B.63}
$$

Prethodni izraz nije očit, ali može se pokazati da vrijedi raspisom kovarijantnih derivacija preko Christoffelovih simbola. Konačno, sumacijom četiriju kontrahiranih članova dobivamo traženi izraz za skalarnu veličinu $m^A m^B R_{AB}$:

$$
\begin{aligned}
m^A m^B R_{AB} =& m^A m^B[e^{-2\beta} r \partial_r[r(\partial_u h_{AB})] - \frac{e^{-2\beta}}{2}\partial_r[rV(\partial_r h_{AB})] - 2e^{-\beta} D_A D_B e^{\beta} \\
&+ e^{-2\beta} h_{CA} D_B[\partial_r(r^2 U^C)] - \frac{1}{2} r^4 e^{-4\beta} h_{AC} h_{BD} (\partial_r U^C)(\partial_r U^D) \\
&+ e^{-2\beta}\frac{r^2}{2}(\partial_r h_{AB})(D_C U^C) + e^{-2\beta} r^2 U^C D_C(\partial_r h_{AB}) \\
&- e^{-2\beta} r^2 (\partial_r h_{AC}) h_{BE}(D^C U^E - D^E U^C)].
\end{aligned}
\tag{B.64}
$$

Dodatak C Dokaz jednadžbe evolucije Bondijeve mase

Cilj ovog dodatka je raspisati drugi dodatni uvjet (4.65). Pritom ćemo zadržati samo dominantne članove i pronaći oblik jednadžbe u prostornoj bekonačnosti. Spomenuti izraz implicira da mora biti zadovoljeno:

$$E^r{}_u = 0, \tag{C.1}$$

što raspisujemo kao:

$$\begin{aligned} E^r{}_u =& R^r{}_u - \frac{1}{2} R\delta^r{}_u - 8\pi T^r{}_u \\ =& g^{r\mu} R_{\mu u} - 8\pi T^r{}_u \\ =& g^{ru} R_{uu} + g^{rr} R_{ru} + g^{rA} R_{Au} - 8\pi T^r{}_u = 0. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Račun provodimo u vakuumu, što znači da tenzor energije-impulsa isključujemo. Nadalje, Nećemo raspisivati cijeli prethodni izraz, već ćemo samo vidjeti što nam daje jednadžba:

$$R_{uu} = 0. \tag{C.3}$$

Riječ je o Einsteinovoj jednadžbi u vakuumu koja mora biti zadovoljena neovisno o drugom dodatnom uvjetu. Naime, (C.2) i (C.3) u vodećem redu (uz $T_{\mu\nu} = 0$) daju potpuno isti rezultat [11]. Kako (C.3) vrijedi automatski ako su 1. i 2. glavna jednadžba zadovoljene, koristit ćemo rješenja koeficijenata metrike koja iz ovih jednadžbi slijede. Ista su pronađena u podpoglavlju 4.3., gdje je dan i njihov asimptotski razvoj. Iz (B.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{uu} &= \partial_\rho \Gamma^\rho_{uu} = \partial_u \Gamma^u_{uu} + \partial_r \Gamma^r_{uu} + \partial_A \Gamma^A_{uu}, \\ R^{(2)}_{uu} &= -\partial_u \partial_u ln(\sqrt{-g}), \\ R^{(3)}_{uu} &= \Gamma^\sigma_{uu} \partial_\sigma ln(\sqrt{-g}) = \Gamma^u_{uu} \partial_u ln(\sqrt{-g}) + \Gamma^r_{uu} \partial_r ln(\sqrt{-g}) + \Gamma^A_{uu} \partial_A ln(\sqrt{-g}), \\ R^{(4)}_{uu} &= -\Gamma^\sigma_{u\rho} \Gamma^\rho_{u\sigma} = -\Gamma^u_{u\rho} \Gamma^\rho_{uu} - \Gamma^r_{u\rho} \Gamma^\rho_{ur} - \Gamma^A_{u\rho} \Gamma^\rho_{uA} \\ &= -\Gamma^u_{uu} \Gamma^u_{uu} - 2\Gamma^u_{uA} \Gamma^A_{uu} - 2\Gamma^r_{uA} \Gamma^A_{ur} - \Gamma^r_{ur} \Gamma^r_{ur} - \Gamma^A_{uB} \Gamma^B_{uA}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Prvo ćemo razviti u red koeficijente Γ^u_{uu}, Γ^r_{uu} i Γ^A_{uu}. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{uu} =& \partial_u ln e^{2\beta} - \frac{1}{2}\partial_r\left(\frac{V}{r}\right) - \frac{1}{2}\frac{V}{r}\partial_r ln e^{2\beta} - \frac{1}{2}(-)e^{-2\beta}\partial_r(r^2 h_{AB}U^A U^B) \\
=& \left(\frac{-1}{16}\frac{\partial_u(C_{AB}C^{AB})}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})\right) - \frac{1}{2}\left(-2M\frac{-1}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})\right) \\
&- \left(1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})\right)\left(\frac{-1}{32}C_{AB}C^{AB}\frac{-2}{r^3} + \mathcal{O}(r^{-4})\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(1 - 2\beta + \mathcal{O}((2\beta)^2)\right)\partial_r\left[r^2(q_{AB} + \mathcal{O}(r^{-1}))\left(\frac{\eth_E C^{AE}\eth_F C^{BF}}{4r^4} + \mathcal{O}(r^{-5})\right)\right] \\
=& \frac{1}{r^2}\left(\frac{-1}{16}\partial_u(C_{AB}C^{AB}) - M\right) + \mathcal{O}(r^{-3}).
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Na isti način nalazimo i preostala dva koeficijenta:

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{uu} &= \frac{1}{r}(-\partial_u M) + \mathcal{O}(r^{-2}), \\
\Gamma^A_{uu} &= \frac{1}{2r^2}\partial_u(\eth_E C^{AE}) + \mathcal{O}(r^{-3}).
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Po provedbi derivacija, nalazimo odmah $R^{(1)}_{uu}$:

$$R^{(1)}_{uu} = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{1}{16}\partial_u\partial_u(C_{AB}C^{AB}) + \frac{1}{2}\partial_u\partial_A(\eth_E C^{AE})\right) + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.7}$$

Tražimo sada $R^{(2)}_{uu}$. Kako vrijedi:

$$ln(\sqrt{-g}) = (lnr^2 + 2\beta + ln\sqrt{h}), \tag{C.8}$$

dobivamo odmah:

$$R^{(2)}_{uu} = -2\partial_u\partial_u\beta = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{16}\partial_u\partial_u(C^{AB}C_{AB})\right) + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.9}$$

Sumirat ćemo (C.7) i (C.9):

$$R^{(1)}_{uu} + R^{(2)}_{uu} = \frac{1}{2r^2}\partial_u\partial_A(\eth_E C^{AE}) + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.10}$$

Nakon razvoja, faktori u $R^{(3)}_{uu}$ postaju:

$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{uu}\partial_u ln(\sqrt{-g}) &= \mathcal{O}(r^{-4}),\\
\Gamma^r_{uu}\partial_r ln(\sqrt{-g}) &= -\frac{2}{r^2}\partial_u M + \mathcal{O}(r^{-3}),\\
\Gamma^A_{uu}\partial_A ln(\sqrt{-g}) &= \frac{1}{2r^2}\partial_u(\eth_E C^{AE})\frac{\partial_A\sqrt{h}}{\sqrt{h}} + \mathcal{O}(r^{-3}),
\end{aligned} \tag{C.11}$$

iz čega slijedi:

$$R^{(3)}_{uu} = -\frac{2}{r^2}\partial_u M + \frac{1}{2r^2}\partial_u(\eth_E C^{AE})\frac{\partial_A\sqrt{h}}{\sqrt{h}} + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.12}$$

Sumiramo sada (C.12) i (C.10) i koristimo činjenicu da $\eth_E$ i ∂_u komutiraju jer metrika na sferi ne ovisi o retardiranom vremenu:

$$R^{(1)}_{uu} + R^{(2)}_{uu} + R^{(3)}_{uu} = \frac{1}{r^2}\left[-2\partial_u M + \frac{1}{2}\left(\partial_A(\eth_E(\partial_u C^{AE})) + \eth_E(\partial_u C^{AE})\frac{\partial_A\sqrt{h}}{\sqrt{h}}\right)\right] + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.13}$$

Pomoću identiteta $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}V^\mu)$, uočavamo da prethodni izraz možemo zapisati u formi:

$$R^{(1)}_{uu} + R^{(2)}_{uu} + R^{(3)}_{uu} = \frac{1}{r^2}\left[-2\partial_u M + \frac{1}{2}\eth_A\eth_E(\partial_u C^{AE})\right] + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.14}$$

Konačno, preimenovat ćemo slijepe indekse $E \to B$ i iskoristiti definiciju tenzora novosti (4.137). Slijedi rezultat:

$$R^{(1)}_{uu} + R^{(2)}_{uu} + R^{(3)}_{uu} = \frac{1}{r^2}\left[-2\partial_u M + \eth_A\eth_B N^{AB}\right] + \mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.15}$$

Preostaje još izračunati $R^{(4)}_{uu}$. Iz (C.5) vidimo odmah da je prvi faktor u (C.4) reda $-\Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uu} = \mathcal{O}(r^{-4})$. Nije se teško uvjeriti i da svi ostali faktori osim posljednjeg ne sadrže članove koji su više potencije od r^{-3} u radijalnoj koordinati. Redu r^{-2} doprinosi jedino produkt $-\Gamma^A_{uB}\Gamma^B_{uA}$, i to samo umnožak 3. člana u (A.35) s istovjetnim faktorom u Γ^B_{uA}. Razvoj daje:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g^{AC}\partial_u(g_{BC})\frac{1}{2}g^{BE}\partial_u(g_{AE}) =&\frac{1}{2}\frac{h^{AC}}{r^2}\partial_u(r^2h_{BC})\frac{1}{2}\frac{h^{BE}}{r^2}\partial_u(r^2h_{AE})\\ =&\frac{1}{4}(q^{AC}+\mathcal{O}(r^{-1}))\partial_u(q_{BC}+\frac{C_{BC}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))\cdot\\ &(q^{BE}+\mathcal{O}(r^{-1}))\partial_u(q_{AE}+\frac{C_{AE}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))\\ =&\frac{1}{4r^2}q^{AC}q^{BE}\partial_uC_{BC}\partial_uC_{AE}+\mathcal{O}(r^{-3})\\ =&\frac{1}{r^2}N^{AB}N_{AB}+\mathcal{O}(r^{-3}).\end{aligned} \tag{C.16}$$

Kako ovaj faktor ulazi s minus predznakom, dobivamo:

$$R^{(4)}_{uu} = -\frac{1}{r^2}N^{AB}N_{AB}+\mathcal{O}(r^{-3}). \tag{C.17}$$

Suma izraza (C.17) i (C.15) daje komponentu Riccijevog tenzora R_{uu} koju izjednačavamo s nulom:

$$\frac{1}{r^2}\left[-2\partial_uM+\eth_A\eth_BN^{AB}-N_{AB}N^{AB}\right]+\mathcal{O}(r^{-3})=0. \tag{C.18}$$

Nakon množenja s r^2 i uzimanja limesa $r\to\infty$, dolazimo do jednadžbe evolucije Bondijeve mase:

$$2\partial_uM=\eth_A\eth_BN^{AB}-N_{AB}N^{AB}. \tag{C.19}$$

Ako znamo N_{AB} za vremena $u_0\leq u\leq u_1$, integracija određuje Bondijevu masu M s obzirom na njenu vrijednost u početnom trenutku $M(u_0,x^A)$. Uz prisutan tenzor energije impulsa, prethodna jednadžba bi sadržavala faktor proporcionalan s r^2T_{uu}.

Dodatak D Difeomorfizmi i translacije

Primarni cilj ovog dodatka jest izvesti generator konačnih translacija duž krivulja na mnogostrukosti. Pritom ćemo napraviti kratki uvod u difeomorfizme i dati interpretaciju Liejeve derivacije kao infinitezimalnu promjenu tenzora uslijed koordinatnih translacija. U nastavku uglavnom pratimo [5].

Pretpostavimo da imamo dvije mnogostrukosti M i N i preslikavanje $\phi : M \to N$. Ograničit ćemo se na slučaj u kojem su ove dvije mnogostrukosti iste, tada postoji i inverz $\phi^{-1} : N \to M$. Ukoliko imamo tenzor $T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l}$ na M te set 1-formi $W^{(i)}$ i vektora $V^{(i)}$ na na N, tada vrijedi [5]:

$$(\phi_* T)(W^{(1)}, ..., W^{(k)}, V^{(1)}, ..., V^{(l)}) = T(\phi^* W^{(1)}, ..., \phi^* W^{(k)}, [\phi^{-1}]_* V^{(1)}, ..., [\phi^{-1}]_* V^{(l)}), \tag{D.1}$$

gdje je $(\phi_* T)$ tenzor T gurnut sa M na N, dok su $\phi^* W^{(i)}$ i $[\phi^{-1}]_* V^{(i)}$ povlačenja 1-formi $W^{(i)}$ i vektora $V^{(i)}$ sa N na M. Prethodni izraz interpretiramo na idući način: djelovanje tenzora T gurnutog sa M na N na vektore i 1-forme na N je ekvivalentno djelovanju tenzora T na M na vektore i 1-forme povučene sa N na M. Ukoliko N opremimo s koordinatama y^α i M sa x^μ, tada je guranje tenzora T sa M na N dato izrazom [5]:

$$(\phi_* T)^{\alpha_1...\alpha_k}{}_{\beta_1...\beta_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} T^{\mu_1...\mu_k}{}_{\nu_1...\nu_l}. \tag{D.2}$$

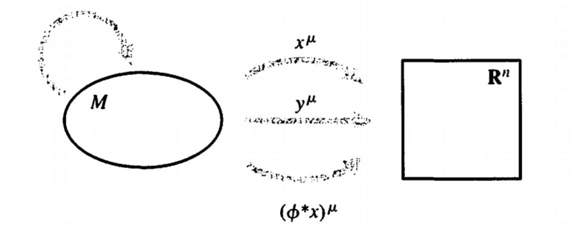
Ukoliko bismo T definirali kao tenzor na N, tada je povlačenje istog sa N na M:

$$(\phi^* T)^{\mu_1...\mu_k}{}_{\nu_1...\nu_l} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_k}}{\partial y^{\alpha_k}} \frac{\partial y^{\beta_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\beta_l}}{\partial x^{\nu_l}} T^{\alpha_1...\alpha_k}{}_{\beta_1...\beta_l}. \tag{D.3}$$

(D.2) i (D.3) ćemo kasnije i dokazati. Općenito sa jedne mnogostrukosti na drugu možemo povlačiti samo tenzore tipa $(0, l)$ (nula indeksa gore i l indeksa dolje) i gurati samo tenzore tipa $(k, 0)$ (k indeksa gore i nula indeksa dolje). Međutim, ukoliko postoji inverz ϕ^{-1} preslikavanja ϕ između mnogostrukosti, one su iste te možemo povlačiti i gurati proizvoljne (k, l) tenzore [5]. Tada je preslikavanje ϕ difeomorfizam i vrijede izrazi (D.2) i (D.3). Prisjetimo se da je standardna transformacija tenzora uslijed koordinatne transformacije $x^\mu \to x^{\mu'}$ dana formulom [5]:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \tag{D.4}$$

Vidimo da su izrazi (D.4) i (D.2) u biti ekvivalentni, dok je (D.3) ekvivalentan inverznoj transformaciji (D.4). Kada govorimo o standardnim koordinatnim transformacijama, pritom mislimo da su takve transformacije pasivne. Dakle n-dimenzionalnu mnogostrukost M držimo fiksnom i napravimo promjenu koordinatne karte $x^\mu : M \to \mathbb{R}^n$ u $y^\mu : M \to \mathbb{R}^n$. Možemo i uvesti difeomorfizam $\phi : M \to M$, čime efektivno pomičemo točke na M, evaluirati koordinate novih točaka te uvesti koordinatnu transformaciju putem povlačenja $(\phi^* x)^\mu : M \to \mathbb{R}^n$. Ovakve transformacije zovemo aktivnim transformacijama. Oba pristupa su prikazana na slici D.1.



Slika D.1: Pasivne i aktivne koordinatne transformacije. Preuzeto iz [5].

Obrazložimo detaljnije transformacije putem difeomorfizama. Pretpostavimo da na M imamo proizvoljnu točku p_0 s koordinatnom kartom $x^\mu(p_0)$. Istu koordinatu možemo translatirati putem dobro definirane krivulje na M i evaluirati ju na nekoj drugoj točki p. Riječ je o guranju $x^\mu(p_0) \to x^\mu(p) = y^\mu(p)$. Namjerno smo iskoristili oznaku y^μ budući da je riječ o koordinati ekvivalentnoj onoj koju smo označili sa y^α pri uvođenju koordinatne karte na mnogostrukosti N. U ovom slučaju su M i N iste te možemo koristiti izraze (D.2) i (D.3) kao i ranije, ali pamtimo da se y^α odnosi na translatiranu, odnosno gurnutu koordinatu duž krivulje na M. Jednom kada smo evaluirali koordinate točke p, možemo napraviti povlačenje $x^\mu(p) \to \tilde{x}^\mu(p_0)$, gdje je $\tilde{x}^\mu(p_0)$ sada transformirana koordinata originalne točke. Treba vrijediti i $\tilde{x}^\mu(p) = x^\mu(p_0)$ [3], ali ovo ćemo pokazati malo kasnije.

Pozabavimo se sada metodom povlačenja i guranja duž krivulja na mnogostrukosti. Neka ponovno imamo difeomorfizam $\phi : M \to M$ i tenzor $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}(x)$ na istoj mnogostrukosti. Zanima nas razlika između vrijednosti ovog tenzora na nekoj točki p i njegove vrijednosti povučene sa $\phi(p)$ natrag na p, $\phi^*[T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}(\phi(p))]$.

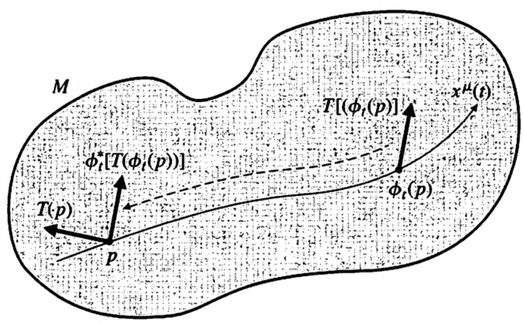
Kako bismo specificirali preslikavanje $\phi : p \to \phi(p)$, uvodimo jednoparametarsku familiju difeomorfizama ϕ_t tako da je zadovoljeno $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ za $\forall t, s \in \mathbb{R}$. Nadalje, definiramo vektor $V^\mu(x)$ tangencijalan na krivulju $x^\mu(t)$ na M parametriziranu sa $t \in \mathbb{R}$. Odnosno vrijedi:

$$V^\mu(t) = \frac{dx^\mu(t)}{dt}. \tag{D.5}$$

Konačno, napravimo zahtjev prema kojem difeomorfizam ϕ_t predstavlja preslikavanje $\phi_t : M \to M$ duž krivulje $x^\mu(t)$. Dakle s ϕ_t je definiran "tok" niz "integralnu krivulju" $x^\mu(t)$. Ovakva krivulja je određena s vektorskim poljem u (D.5), koji nazivamo "generatorom difeomorfizma". Kao što smo rekli, zanima nas razlika [5]:

$$\Delta_t T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(p) = \phi_t^*[T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(\phi_t(p))] - T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(p). \tag{D.6}$$

Promotrimo sliku D.2 kako bi bilo jasnije o čemu govorimo.



Slika D.2: Brzina promjene tenzora duž integralne krivulje. Preuzeto iz [5].

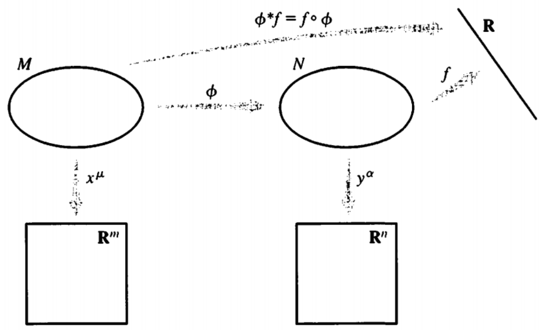
Imamo tenzor $T(p)$ evaluiran na točki p na M. Pomoću difeomorfizma $\phi_t : M \to M$ vršimo preslikavanje $\phi_t : p \to \phi_t(p)$ duž krivulje $x^\mu(t)$ i evaluiramo T na točki $\phi_t(p)$, odnosno imamo $T(\phi_t(p))$. Konačno, $\phi_t^*[T(\phi_t(p))]$ predstavlja tenzor na točki p povučen iz točke $\phi_t(p)$ natrag u točku p. Liejeva derivacija duž vektorskog polja (D.5) je dana izrazom [5]:

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\Delta_t T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}}{t}\right), \tag{D.7}$$

pri čemu je zadovoljeno Leibnitzovo pravilo $\mathcal{L}_V(T \otimes S) = (\mathcal{L}_V T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_V S)$ i linearnost $\mathcal{L}_V(aT + bS) = a(\mathcal{L}_V T) + b(\mathcal{L}_V S)$, gdje su T i S tenzori i a i b konstante. Jednostavno je uvjeriti se i da se Liejeva derivacija skalarne funkcije svodi na usmjerenu derivaciju duž generatora difeomorfizma [5]:

$$\mathcal{L}_V f = V^\mu \partial_\mu f. \tag{D.8}$$

Prije nego nastavimo s diskusijom o akciji Liejeve derivacije na tenzore, napravit ćemo kratku digresiju radi potreba kasnijih razmatranja. Zamislimo ponovno da imamo mnogostrukosti M i N (koje mogu biti različitih dimenzionalnosti), preslikavanje $\phi : M \to N$ i funkciju $f : N \to \mathbb{R}$ kako je prikazano na slici D.3.



Slika D.3: Povlačenje funkcije f sa N na M preko preslikavanja $\phi : M \to N$ je ekvivalentno kompoziciji $f \circ \phi$. Preuzeto iz [5].

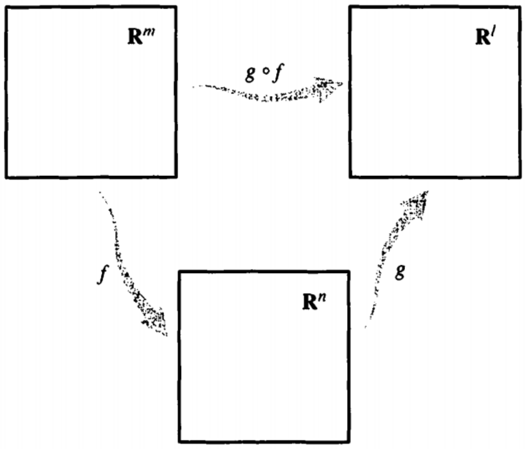
Pritom su uvedene koordinatne karte $x^\mu : M \to \mathbb{R}^m$ i $y^\alpha : N \to \mathbb{R}^n$. Kompozicija funkcija $(f \circ \phi) : M \to \mathbb{R}$ je po definiciji jednaka povlačenju funkcije f sa N na M preko ϕ, odnosno $f \circ \phi = \phi^* f$. Ukoliko imamo vektor V na M, tada mora biti zadovoljeno:

$$(\phi_* V)(f) = V(\phi^* f), \tag{D.9}$$

odnosno djelovanje vektora gurnutog sa M na N na funkciju f na N je jednako djelovanju vektora V na M na funkciju f povučenu sa N na M. Vektor V ima oblik $V = V^\mu \partial_\mu$, dok gurnuti vektor možemo zapisati u formi $(\phi_* V) = (\phi_* V)^\alpha \partial_\alpha$, pri čemu smo pazili da indeksi budu u skladu s odabirom kordinatnih karti. Prema tome, (D.9) pišemo kao:

$$(\phi_* V)^\alpha \partial_\alpha f = V^\mu \partial_\mu (f \circ \phi). \tag{D.10}$$

Da bismo ovaj izraz dalje raspisali iskoristit ćemo lančano pravilo. Promotrimo prvo sliku D.4.



Slika D.4: Lančano pravilo povezuje derivacije kompozicije $g \circ f$ sa derivacijama funkcija f i g. Preuzeto iz [5].

Preslikavanja na slici su $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$. Data je i kompozicija $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$. Označimo sada točke svakog prostora na idući način: x^a na $\mathbb{R}^m$, y^b na $\mathbb{R}^n$ i z^c na $\mathbb{R}^l$, gdje je raspon indeksa ovisan o dimenzionalnosti pojedinog prostora. Uz ovakav odabir koordinata, lančano pravilo je dano izrazom [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x^a}(g \circ f)^c = \sum_b \frac{\partial f^b}{\partial x^a}\frac{\partial g^c}{\partial y^b}, \tag{D.11}$$

koje se češće zapisuje kao:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_b \frac{\partial y^b}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial y^b}. \tag{D.12}$$

Koristeći ovo pravilo, deriviramo kompoziciju u (D.10):

$$\begin{aligned} \partial_\mu (f \circ \phi) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \phi) \\ &= \sum_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \\ &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\partial_\alpha f. \end{aligned} \tag{D.13}$$

U prethodnom raspisu smo iskoristili činjenicu da je kodomena funkcije ϕ na N, nakon čega smo iskoristili koordinatnu kartu $y^\alpha : N \to \mathbb{R}^n$, dok je kodomena funkcije f prostor realnih brojeva. Usporedbom izraza (D.10) i (D.13) vidimo da je zadovoljeno:

$$(\phi_* V)^\alpha \partial_\alpha f = V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f. \tag{D.14}$$

Ova jednakost nas navodi da uvedemo operaciju guranja ϕ_* kao matrični operator preko relacije $(\phi_* V)^\alpha = (\phi_*)^\alpha{}_\mu V^\mu$. Iz (D.14) je sad jasno vidljivo da vrijedi:

$$(\phi_*)^\alpha{}_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{D.15}$$

Na sličan način nalazimo i matrični operator povlačenja. Ukoliko imamo vektor V na M i 1-formu W na N tada mora vrijediti $(\phi^* W)(V) = W(\phi_* V)$. Postoji jednostavan matrični opis djelovanja operatora povlačenja na forme, $(\phi^* W)_\mu = (\phi^*)_\mu{}^\alpha W_\alpha$, koji se može izvesti koristeći lančano pravilo. Dan je jednadžbom [5]:

$$(\phi^*)_\mu{}^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{D.16}$$

Dakle matrice guranja i povlačenja su jednake. Jedina razlika je u tome što se kontrahiraju različiti indeksi. (D.15) i (D.16) je jednostavno poopćiti za proizvoljne tenzore čime smo dokazali (D.2) i (D.3).

Vratimo se sada analizi difeomorfizma ϕ_t na M definiranog preko (D.5). Neka su koordinate na ovoj n-dimenzionalnoj mnogostrukosti $x^\mu = (x^1, ..., x^n)$. Odaberimo sada koordinatu x^1 kao parametar duž integralnih krivulja. Tada očito vrijedi $V^\mu = \delta^\mu{}_1$, odnosno $V^\mu = (1, 0, ..., 0)$. U punoj formi ovaj vektor dakle ima oblik $V = \delta^\mu{}_1 \partial_\mu = \partial_1$. Uočimo da uz ovakav odabir koordinatnog sustava izraz (D.5) možemo pisati u idućem obliku:

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = 1 \rightarrow dx^1(t) = dt. \tag{D.17}$$

Prethodnu jednadžbu možemo integrirati od $t = 0$ do neke proizvoljne vrijednosti čime dobivamo:

$$x^1(t) = x^1(0) + t, \tag{D.18}$$

i uvesti zapis $x^1(t = 0) = x^1$, $\Delta x^1 = t$, $y^1 = x^1(t \neq 0)$. Dakle translatirali smo koordinatu x^1 za neku proizvoljnu vrijednost parametra t. To jest, proveli smo guranje:

$$x^\mu \to y^\mu = (x^1 + t, x^2, ..., x^n). \tag{D.19}$$

Koordinatna transformacija na originalnoj točki gdje vrijedi $t = 0$ je tada dana povlačenjem $\tilde{x}^1(t = 0) = x^1(t = 0) - t$. Ovo rješenje možemo translatirati na isti način kao u (D.18) čime dobivamo $\tilde{x}^1(t) = \tilde{x}^1(t = 0) + t = x^1(t = 0)$, što je u skladu s izrazom $\tilde{x}^\mu(p) = x^\mu(p_0)$. Iz (D.16) možemo pronaći matrični operator povlačenja:

$$(\phi_t^*)_\mu{}^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu{}^\nu, \tag{D.20}$$

pri čemu smo napravili zamjenu u označavanju indeksa $\alpha \to \nu$ budući da povlačenje vršimo preko krivulje na istoj mnogostrukosti. Iskoristili smo izraz $y^\nu = (x^1 + t, x^2, ..., x^n)$ i činjenicu da vrijedi $t = konst.$ Riječ je samo o parametru kojim određujemo za koliko smo se pomakli na M. Operator guranja poprima isti oblik:

$$(\phi_{t*})^\nu{}_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu{}_\mu. \tag{D.21}$$

Kako je kroneckerov simbol simetričan u smislu $\delta_\mu{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu$ (često se piše jednostavno δ_μ^ν), povlačenje u izrazu (D.6) možemo izraziti preko operatora guranja u obliku:

$$(\phi_{t*})_\mu{}^\nu = \delta_\mu^\nu. \tag{D.22}$$

Prema tome, komponente tenzora povučenog sa $\phi_t(p)$ u p su:

$$\phi_{t*}[T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l}(\phi_t(p))] = T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l}(x^1 + t, x^2, ..., x^n), \tag{D.23}$$

gdje smo iskoristili (D.22) i činjenicu da je preslikavanje $\phi_t : p \to \phi_t(p)$ dano s (D.19). Liejeva derivacija (D.7) postaje:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l} =& \lim_{t\to 0} \frac{T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l}(x^1 + t, x^2, ..., x^n) - T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l}(x^1, ..., x^n)}{t} \\ =& \frac{dT^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l}}{dt}.\end{aligned} \tag{D.24}$$

Rezultat možemo interpretirati na idući način. Iz (D.24) je jasno vidljivo da je infinitezimalna promjena tenzora uslijed pomaka za δt duž integralne krivulje $x^\mu(t)$ dana izrazom $\delta T = \delta t \mathcal{L}_V T$. Iz ovoga slijedi da se uslijed infinitezimalne koordinatne translacije $x^1(t=0) \to x^1(t \neq 0) = x^1(t=0) + \delta t$ (D.18), tenzor T mijenja kao:

$$T(x^1(t=0), ..., x^n) \to T(x^1(t \neq 0), ..., x^n) = T(x^1(t=0), ..., x^n) + \delta t \mathcal{L}_V T. \tag{D.25}$$

Jednadžbu (D.25) ćemo poopćiti malo kasnije. Za sada primjetimo da se uz ovakav odabir koordinatnog sustava (u kojem je koordinata x^1 birana kao parametar duž integralne krivulje), Liejeva derivacija (D.24) svodi na:

$$\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l} = \frac{\partial}{\partial x^1} T^{\mu_1\mu_2...\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2...\nu_l}. \tag{D.26}$$

Derivacija vektora je:

$$\mathcal{L}_V U^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1}. \tag{D.27}$$

Prethodni izraz nije kovarijantan, ali znamo da je komutator $[V, U]$ dobro definiran tenzor neovisan o izboru koordinata. U ovom sustavu imamo:

$$\begin{aligned} [V, U]^\mu =& V^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu V^\mu \\ =& \delta^\nu{}_1 \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu \delta^\mu{}_1 \\ =& \frac{\partial U^\mu}{\partial x^1}. \end{aligned} \tag{D.28}$$

Kako smo dobili isti rezultat kao u (D.27), znamo da mora vrijediti:

$$\mathcal{L}_V U^\mu = [V, U]^\mu. \tag{D.29}$$

Kao posljedicu imamo odmah $\mathcal{L}_V U = -\mathcal{L}_U V$. Djelovanje Liejeve derivacije na 1-formu se može dobiti ukoliko razmotrimo djelovanje iste na skalar $\mathcal{L}_V(W_\mu V^\mu)$. Ova operacija mora biti jednaka usmjerenoj derivaciji skalara duž generatora difeomorfizma. Akciju Liejeve derivacije na 1-formu tada možemo izvući primjenom Leibnitzovog pravila na originalni skalar. Koristeći ovaj postupak pokazuje se da vrijedi [5]:

$$\mathcal{L}_V W_\mu = V^\nu \partial_\nu W_\mu + (\partial_\mu V^\nu) W_\nu. \tag{D.30}$$

Sličnom procedurom koju ovdje nećemo provoditi nalazimo i djelovanje Liejeve derivacije na proizvoljan tenzor [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} =& V^\sigma \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} \\ & - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - \ldots \\ & + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_l} \\ & + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_l} + \ldots. \end{aligned} \tag{D.31}$$

Iako nije očito, prethodni izraz vrijedi i uz zamjenu parcijalnih derivacija sa kovarijantnim derivacijama uz odsustvo torzije. Možemo dakle pisati i [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} =& V^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - (\nabla_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} \\ & - (\nabla_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - \ldots \\ & + (\nabla_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\lambda\nu_2\ldots\nu_l} \\ & + (\nabla_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\lambda\ldots\nu_l} + \ldots. \end{aligned} \tag{D.32}$$

Obje formule su korisne ovisno o situaciji.

Prije nego konstruiramo generator konačnih translacija, napravit ćemo kratki rezime i poopćiti osnovne rezultate. Neka imamo n-dimenzionalnu mnogostrukost M i difeomorfizam $\phi_\epsilon : M \to M$ koji predstavlja tok niz integralne krivulje $x^\mu(\epsilon)$ parametrizirane sa $\epsilon \in \mathbb{R}$. Ovakve krivulje su definirane s generatorom difeomorfizma:

$$\frac{dx^\mu(\epsilon)}{d\epsilon} = \xi^\mu. \tag{D.33}$$

Infinitezimalna promjena koordinate jest $\delta x^\mu = \delta\epsilon \xi^\mu$, dok je infinitezimalna koordinatna translacija uslijed pomaka za $\delta\epsilon$ duž integralne krivulje:

$$x^\mu(\epsilon = 0) \to x^\mu(\epsilon \neq 0) = x^\mu(\epsilon = 0) + \delta\epsilon \xi^\mu(x^\nu(\epsilon = 0)) \tag{D.34}$$

Često ćemo koristiti oznake $x^\mu(\epsilon = 0) = x^\mu$ i $x^\mu(\epsilon \neq 0) = y^\mu$. Uslijed infinitezimalne translacije koordinata $x \to y = x + \delta\epsilon\xi(x)$ tenzori se transformiraju kao:

$$T^{\mu_1...\mu_k}{}_{\nu_1...\nu_l}(x) \to T^{\mu_1...\mu_k}{}_{\nu_1...\nu_l}(y) = T^{\mu_1...\mu_k}{}_{\nu_1...\nu_l}(x) + \delta\epsilon\mathcal{L}_{\xi(x)}T^{\mu_1...\mu_k}{}_{\nu_1...\nu_l}(x), \quad \text{(D.35)}$$

gdje je infinitezimalna promjena tenzora $\delta T = \delta\epsilon\mathcal{L}_\xi T$ određena Liejevom derivacijom (D.31) ili (D.32). Želimo naći operator konačne translacije tako da je zadovoljeno $\frac{dx^\mu(\epsilon)}{d\epsilon} = \xi^\mu(x^\nu(\epsilon))$ i $\frac{dx^\mu(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = \xi^\mu(x^\nu(\epsilon = 0))$. Tvrdimo da je za proizvoljne pomake uz $\epsilon > 0$ konačna translacija dana izrazom [13]:

$$x^\mu(\epsilon) = e^{\epsilon\xi^\nu(x^\sigma(\epsilon=0))\partial_\nu}x^\mu(\epsilon = 0), \quad \text{(D.36)}$$

gdje je $e^{\epsilon\xi^\nu(x^\sigma(\epsilon=0))\partial_\nu}$ generator translacije. Pritom treba imati na umu da je ovdje $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu(\epsilon=0)}$. Primjetimo prvo da očito vrijedi:

$$\begin{aligned} x^\mu(\epsilon)|_{\epsilon=0} =& e^{\epsilon\xi^\nu(x^\sigma(\epsilon=0))\partial_\nu}|_{\epsilon=0}x^\mu(\epsilon = 0) \\ =& x^\mu(\epsilon = 0). \end{aligned} \quad \text{(D.37)}$$

Provjerimo dalje je li zadovoljena infinitezimalna transformacija:

$$x^\mu(\epsilon) = (1 + \epsilon\xi^\nu(x^\sigma(\epsilon = 0))\partial_\nu + \mathcal{O}(\epsilon^2))x^\mu(\epsilon = 0) \quad \text{(D.38)}$$

Uz zahtjev $\epsilon = \delta\epsilon$ možemo odbaciti $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ članove u razvoju čime odmah dobivamo:

$$\begin{aligned} x^\mu(\epsilon \neq 0) =& x^\mu(\epsilon = 0) + \delta\epsilon\xi^\nu(x^\sigma(\epsilon = 0))\frac{\partial x^\mu(\epsilon = 0)}{\partial x^\nu(\epsilon = 0)} \\ =& x^\mu(\epsilon = 0) + \delta\epsilon\xi^\nu(x^\sigma(\epsilon = 0))\delta^\mu{}_\nu \\ =& x^\mu(\epsilon = 0) + \delta\epsilon\xi^\mu(x^\sigma(\epsilon = 0)). \end{aligned} \quad \text{(D.39)}$$

Dokažimo sada da (D.36) vrijedi općenito.

$$\begin{aligned} y^\mu =& e^{\epsilon\xi^\nu(x)\partial_\nu}x^\mu \\ =& [1 + \epsilon\xi^\nu(x)\partial_\nu + \frac{\epsilon^2}{2!}\xi^\nu(x)\partial_\nu(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma) + \frac{\epsilon^3}{3!}\xi^\nu(x)\partial_\nu[\xi^\rho(x)\partial_\rho(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma)] + ...]x^\mu. \end{aligned} \quad \text{(D.40)}$$

Napravimo na trenutak kratku digresiju kako bismo iznijeli važnu tvrdnju. Promotrimo član uz $\frac{\epsilon^2}{2!}$ prethodnog razvoja. Isti se može raspisati na idući način:

$$\xi^\nu(x)\partial_\nu(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma) = \xi^\nu(x)\frac{\partial\xi^\sigma(x)}{\partial x^\nu}\partial_\sigma + \xi^\nu(x)\xi^\sigma(x)\partial_\nu\partial_\sigma. \tag{D.41}$$

Operator (D.41) djeluje na x^μ. Prvi član će dati kroneckerov simbol, dok drugi iščezava jer imamo $\partial_\nu\partial_\sigma x^\mu = \partial_\nu\delta^\mu{}_\sigma = 0$. Dakle jednom kada raspetljamo izraz, dovoljno je zadržati samo članove koji djeluju 1. derivacijom na x^μ, ostali iščezavaju. Derivirat ćemo sada (D.40) po ϵ. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{dy^\mu}{d\epsilon} =&[\xi^\nu(x)\partial_\nu + \frac{2\epsilon}{2!}\xi^\nu(x)\partial_\nu(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma) + \frac{3\epsilon^2}{3!}\xi^\nu(x)\partial_\nu[\xi^\rho(x)\partial_\rho(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma)] + ...]x^\mu \\
=&[\xi^\nu(x)\partial_\nu + \epsilon\xi^\nu(x)\partial_\nu(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma) + \frac{\epsilon^2}{2!}\xi^\nu(x)\partial_\nu[\xi^\rho(x)\partial_\rho(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma)] + ...]x^\mu \\
=&\xi^\nu(x)\partial_\nu[1 + \epsilon\xi^\sigma(x)\partial_\sigma + \frac{\epsilon^2}{2!}\xi^\rho(x)\partial_\rho(\xi^\sigma(x)\partial_\sigma) + ...]x^\mu \\
=&\xi^\nu(x)\partial_\nu e^{\epsilon\xi^\sigma(x)\partial_\sigma}x^\mu
\end{aligned} \tag{D.42}$$

S druge strane, očito vrijedi:

$$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\nu e^{\epsilon\xi^\sigma(x)\partial_\sigma}x^\mu. \tag{D.43}$$

Usporedbom (D.42) i (D.43) vidimo da je zadovoljeno:

$$\frac{dy^\mu}{d\epsilon} = \xi^\nu(x)\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{D.44}$$

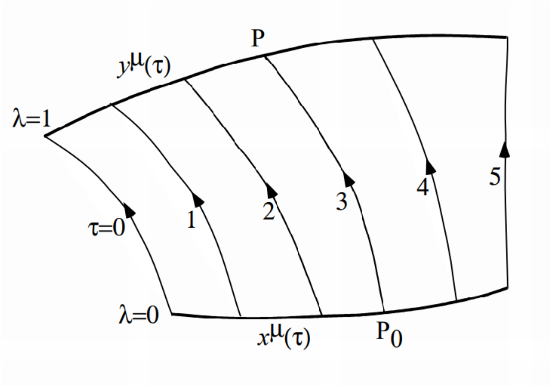
No iz (D.2) slijedi da je desna strana prethodne jednadžbe guranje vektora ξ^ν. Pomoću izraza (D.23) zaključujemo da se uslijed ovakve operacije vektor transformira kao:

$$\xi^\nu(x)\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = \xi^\mu(y). \tag{D.45}$$

Tada vrijedi:

$$\frac{dy^\mu}{d\epsilon} = \xi^\mu(y), \tag{D.46}$$

što je ekvivalentno izrazu $\frac{dx^\mu(\epsilon)}{d\epsilon} = \xi^\mu(x^\nu(\epsilon))$. Time smo pokazali da je (D.36) uistinu konačna koordinatna translacija. Pomoću ovakvih transformacija možemo pomicati i krivulje na M kao što je prikazano na slici D.5.



Slika D.5: Guranje krivulja na M. Preuzeto iz [3].

Donja krivulja (koja može predstavljati svjetsku liniju čestice ili trajektoriju ruba jednodimenzionalne strune) je parametrizirana s $\tau \in \mathbb{R}$. Pritom τ raste kako se pomičemo s lijeva na desno. Svaku točku ovakve krivulje možemo gurati pomoću (D.36) (uz $\epsilon \to \lambda$) duž integralne krivulje parametrizirane s λ krećući od vrijednosti $\lambda = 0$ do nekog proizvoljnog odredišta (obično se bira $\lambda = 1$). Koristeći konvencije koje smo uveli ranije, donju krivulju možemo prametrizirati kao $x^{\mu}(\tau) = x^{\mu}(\tau, \lambda = 0)$ i gornju kao $y^{\mu}(\tau) = x^{\mu}(\tau, \lambda = 1)$.

Završimo ovaj dodatak s analizom djelovanja Liejeve derivacije na tenzor metrike. Koristit ćemo difeomorfizam uveden u (D.33). Iz (D.31) slijedi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi} g_{\mu\nu} =& \xi^{\sigma} \nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} + (\nabla_{\mu} \xi^{\lambda}) g_{\lambda\nu} + (\nabla_{\nu} \xi^{\lambda}) g_{\mu\lambda} \\ =& \nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu} \xi_{\mu} \\ =& 2\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)},\end{aligned} \tag{D.47}$$

pri čemu smo iskoristili kompatibilnost metrike. Uz infinitezimalnu transformaciju $x \to y = x + \delta\epsilon\xi(x)$, metrika se mijenja kao:

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(x) + \delta\epsilon \mathcal{L}_{\xi(x)} g_{\mu\nu}(x). \tag{D.48}$$

Ukoliko je metrika invarijantna na ovakvu transformaciju, odnosno ako je zadovoljeno $\delta g_{\mu\nu} = \delta\epsilon \mathcal{L}_{\xi(x)} g_{\mu\nu}(x) = 0$, Liejeva derivacija metrike iščezava te iz (D.47) dobivamo:

$$\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0, \tag{D.49}$$

što prepoznajemo kao Killingovu jednadžbu. Generator difeomorfizma je stoga ujedno i Killingov vektor. Ako vrijedi $\mathcal{L}_{\xi(x)}g_{\mu\nu}(x) = 0$, tada kažemo da je difeomorfizam izometrija. Uslijed transformacije $x \to y = x + \delta\epsilon\xi(x)$ metrika može doživjeti i konformno reskaliranje:

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(y) = \Omega(x)g_{\mu\nu}(x), \tag{D.50}$$

gdje je $\Omega(x)$ pozitivno definitna funkcija. Može se pokazati da u ovakvom slučaju generator difeomorfizma zadovoljava iduću jednadžbu [5]:

$$\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = f(x)g_{\mu\nu}, \tag{D.51}$$

za neku skalarnu funkciju $f(x)$. Kontrakcijom prethodne jednadžbe sa $g^{\mu\nu}$ dobivamo odmah $f(x) = \frac{2}{n}\nabla_\mu\xi^\mu$, pri čemu je n dimenzija mnogostrukosti. Uvrštavanjem u (D.51) proizlazi:

$$\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = \frac{2}{n}g_{\mu\nu}\nabla_\rho\xi^\rho. \tag{D.52}$$

Prethodni izraz predstavlja konformu Killingovu jednadžbu. Vektor koji zadovoljava (D.52) se zove konformni Killingov vektor. Ako je f^A ovakav vektor na S^2, tada je specijalno zadovoljeno i [15]:

$$\begin{aligned} \eth_A\eth_B\eth_C f^C =& \frac{1}{2}q_{AB}\eth_C\bar{\eth}^C\eth_E f^E \\ =& -q_{AB}\eth_E f^E, \end{aligned} \tag{D.53}$$

gdje je $\eth_A$ kovarijantna derivacija s obzirom na metriku q_{AB} na jediničnoj S^2.

Dodatak E Asimptotske izometrije Bondi-Sachsove metrike

U ovom dodatku tražimo difeomorfizme koji zadovoljavaju Bondijev uvjet $\partial_r det\left(\frac{g_{AB}}{r^2}\right) = 0$ i čuvaju granična opadanja metrike (4.166). U nastavku sporadično pratimo račune i usvajamo određene konvencije uvedene u [1]. Neka je generator difeomorfizma:

$$\frac{dx^\mu(\epsilon)}{d\epsilon} = \xi^\mu, \tag{E.1}$$

tako da se uslijed infinitezimalne translacije koordinata duž integralne krivulje $x \to y = x + \delta\epsilon\xi(x)$ Bondijeva metrika mijenja kao:

$$g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(x) + \delta\epsilon\mathcal{L}_{\xi(x)}g_{\mu\nu}(x). \tag{E.2}$$

Metrika (4.165) je asimptotski ravna. Želimo pronaći difeomorfizme koji asimptotsku ravnost čuvaju, odnosno, transformacije (E.2) ne smiju uzrokovati promjene u opadanjima komponenti metrike (4.166). Ukoliko bi do takvih promjena došlo, automatski bi bili narušeni rubni uvjeti (4.121). Postavljamo dakle uvjete [15]:

$$\begin{aligned}
&g_{uu} = -1 + \mathcal{O}(r^{-1}) \to \delta g_{uu} = \mathcal{O}(r^{-1}),\\
&g_{ur} = -1 + \mathcal{O}(r^{-2}) \to \delta g_{ur} = \mathcal{O}(r^{-2}),\\
&g_{uA} = 0 + \mathcal{O}(1) \to \delta g_{uA} = \mathcal{O}(1),\\
&g_{AB} = r^2 q_{AB} + \mathcal{O}(r) \to \delta g_{AB} = \mathcal{O}(r)\\
&g_{rr} = 0 \to \delta g_{rr} = 0,\\
&g_{rA} = 0 \to \delta g_{rA} = 0,
\end{aligned} \tag{E.3}$$

gdje je $\delta g_{\mu\nu} = \delta\epsilon\mathcal{L}_{\xi(x)}g_{\mu\nu}(x)$. Prema (E.3), ravni dio metrike uslijed transformacija (E.2) ostaje nepromijenjen, dok ostali članovi u razvoju poštuju opadanja skladna s rubnim uvjetima. Difeomorfizmi koji zadovoljavaju (E.3) su stoga asimptotske izometrije. Postavit ćemo još jedan uvjet koji formuliramo jednadžbom [1]:

$$g^{AB}\delta g_{AB} = 0. \tag{E.4}$$

Prethodnim izrazom izražavamo zahtjev prema kojem ne želimo da angularna metrika uslijed transformacije doživi konformno reskaliranje. Ukoliko bi vrijedilo $g_{AB}(y) = g_{AB}(x) + \delta g_{AB} = \Omega(x) g_{AB}(x)$, tada odmah slijedi:

$$g^{AB}(x)\delta g_{AB} = g^{AB}(x) g_{AB}(x)(\Omega(x) - 1) \neq 0. \tag{E.5}$$

Postoje i generalizacije u kojima je reskaliranje dozvoljeno, ali mi ćemo se držati uvjeta (E.4). Kako je infinitezimalna promjena metrike $\delta g_{\mu\nu}$ u potpunosti određena Liejevom derivacijom (do na faktor $\delta\epsilon$), generatore difeomorfizama možemo pronaći pomoću jednadžbe:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \tag{E.6}$$

Promotrit ćemo prvo što nam daje peti uvjet u (E.3). Imamo očito $\delta g_{rr} = 0 \rightarrow \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$. Odnosno:

$$\nabla_r \xi_r + \nabla_r \xi_r = 0 \rightarrow \nabla_r \xi_r = 0. \tag{E.7}$$

Raspisujemo (E.7):

$$\begin{aligned} \nabla_r \xi_r =& \partial_r \xi_r - \Gamma^\mu_{rr} \xi_\mu \\ =& \partial_r \xi_r - \Gamma^u_{rr} \xi_u - \Gamma^r_{rr} \xi_r - \Gamma^r_{rr} \xi_r \\ =& \partial_r \xi_r - \Gamma^r_{rr} \xi_r. \end{aligned} \tag{E.8}$$

Izjednačavanjem zadnje jednakosti u (E.8) s nulom i uvrštavanjem Christoffelovog simbola (A.24) dobivamo jednadžbu:

$$\partial_r \xi_r = 2\xi_r \partial_r \beta. \tag{E.9}$$

Rješenje ove jednadžbe jest:

$$\xi_r = f(u, x^A) e^{2\beta}, \tag{E.10}$$

gdje je $f(u, x^A)$ proizvoljna funkcija koja ovisi o koordinatama u i x^A, ali ne i o radijalnoj koordinati. Uvrštavanjem u (E.9) se možemo uvjeriti da je rješenje ispravno:

$$
\begin{aligned}
\partial_r \xi_r =& f(u, x^A)\partial_r e^{2\beta} \\
=& f(u, x^A) e^{2\beta} 2\partial_r \beta \\
=& 2\xi_r \partial_r \beta.
\end{aligned}
\tag{E.11}
$$

Okrenimo se sada analizi posljednjeg uvjeta u (E.3) koji implicira da mora biti zadovoljeno:

$$
\nabla_r \xi_A + \nabla_A \xi_r = 0.
\tag{E.12}
$$

Raspišimo ovaj izraz:

$$
\begin{aligned}
0 =& \partial_r \xi_A - \Gamma^{\mu}_{rA}\xi_\mu + \partial_A \xi_r - \Gamma^{\mu}_{Ar}\xi_\mu \\
=& \partial_r \xi_A + \partial_A \xi_r - 2\Gamma^{r}_{rA}\xi_r - 2\Gamma^{B}_{rA}\xi_B \\
=& \partial_r \xi_A + \partial_A \xi_r + e^{-2\beta}(-\partial_A e^{2\beta} - r^2 h_{AB}(\partial_r U^B))\xi_r \\
&- \frac{1}{r^2} h^{BC}\partial_r (r^2 h_{AC})\xi_B, \\
\rightarrow& \partial_r \xi_A - r^2 h_{AB} f(\partial_r U^B) - \frac{2}{r}\xi_A - (\partial_r h_{AC}) h^{BC}\xi_B = -e^{2\beta}(\partial_A f).
\end{aligned}
\tag{E.13}
$$

U prethodnom računu smo uvrstili koeficijente konekcije iz dodatka A i iskoristili rješenje za ξ_r (E.10). Pokazat ćemo prvo da je posljednja jednakost u (E.13) ekvivalentna izrazu:

$$
\partial_r (\xi_B g^{BD} - f U^D) + e^{2\beta} g^{AD}(\partial_A f) = 0.
\tag{E.14}
$$

Imamo:

$$
\begin{aligned}
&\partial_r (\xi_B g^{BD} - f U^D) + e^{2\beta} g^{AD}(\partial_A f) = g^{BD}\partial_r \xi_B + \xi_B \partial_r g^{BD} - f\partial_r U^D \\
&+ e^{2\beta} g^{AD}\partial_A f \\
=& \frac{1}{r^2} h^{BD}\partial_r \xi_B + \xi_B \left(\frac{-2}{r^3} h^{BD} + \frac{1}{r^2}\partial_r h^{BD}\right) - f\partial_r U^D + e^{2\beta}\frac{1}{r^2} h^{AD}\partial_A f \\
=& 0.
\end{aligned}
\tag{E.15}
$$

Posljednju jednakost kontrahiramo sa $r^2 h_{DC}$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
&\delta^B{}_C \partial_r \xi_B - \frac{2}{r}\xi_B \delta^B{}_C + \xi_B h_{DC} \partial_r h^{BD} - r^2 h_{DC} f \partial_r U^D + e^{2\beta}\delta^A{}_C \partial_A f = 0, \\
&\to \partial_r \xi_C - \frac{2}{r}\xi_C + \xi_B(\partial_r(h_{DC}h^{BD}) - h^{BD}\partial_r h_{DC}) - r^2 h_{DC} f \partial_r U^D \\
&+ e^{2\beta}\partial_C f = 0.
\end{aligned} \tag{E.16}$$

Primjećujemo da faktor $\partial_r(h_{DC}h^{BD})$ isčezava jer je riječ o derivaciji kroneckerovog simbola. Ako u posljednjoj jednakosti unutar (E.16) napravimo zamjenu $C \to A$ i preimenujemo slijepi indeks $D \to B$ dobivamo upravo izraz (E.13). Tražimo dakle ξ_B koji zadovoljava (E.14). Uvrstit ćemo probno rješenje:

$$\xi_B = -h_{DB} f^D r^2 + f U^D h_{DB} r^2 + r^2 h_{DB}(\partial_C f)\int_r^\infty \frac{e^{2\beta}h^{CD}}{r'^2}dr' \tag{E.17}$$

i provjeriti je li ispravno. U (E.17) smo uveli dvije proizvolje diferencijabilne funkcije $f^A = f^A(x^A, u)$, odnosno vektor na S^2 tako da je zadovoljeno $f^A = q^{AB} f_B$. Ovaj vektor (isto kao i funkcija f iz (E.10) s kojom ga ne smijemo miješati) ovisi o u i x^A, ali ne i o r. Uvrštavamo (E.17) u prvi član izraza (E.14):

$$\begin{aligned}
\partial_r(\xi_B g^{BD} - f U^D) =& \partial_r[\frac{1}{r^2}h^{BD}(-h_{CB} f^C r^2 + f U^C h_{CB} r^2 \\
&+ r^2 h_{CB}(\partial_E f)\int_r^\infty \frac{e^{2\beta}h^{EC}}{r'^2}dr') - f U^D] \\
=& \partial_r[-\delta^D{}_C f^C + f U^C \delta^D{}_C + \delta^D{}_C(\partial_E f)\int_r^\infty \frac{e^{2\beta}h^{EC}}{r'^2}dr' \\
&- f U^D] \\
=& \partial_r[-f^D + (\partial_E f)\int_r^\infty \frac{e^{2\beta}h^{EC}}{r'^2}dr'] \\
=& -(\partial_E f)\partial_r \int_\infty^r \frac{e^{2\beta}h^{DE}}{r'^2}dr'.
\end{aligned} \tag{E.18}$$

U nastavku koristimo identitet $\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(t)dt = f(x)$. Dakle:

$$\begin{aligned}
-(\partial_E f)\partial_r \int_\infty^r \frac{e^{2\beta}h^{DE}}{r'^2}dr' =& -(\partial_E f)\frac{e^{2\beta}h^{DE}}{r^2} \\
=& -e^{2\beta}g^{AD}(\partial_A f).
\end{aligned} \tag{E.19}$$

Rješenje (E.19) se pokrati s drugim članom u (E.14) čime dobivamo nulu. Naše probno rješenje je stoga točno. Možemo pisati:

$$\xi_A = -h_{DA} f^D r^2 + f U^D h_{DA} r^2 + r^2 h_{DA} I^D, \tag{E.20}$$

gdje je:

$$I^D = (\partial_B f) \int_r^\infty \frac{e^{2\beta} h^{BD}}{r'^2} dr'. \tag{E.21}$$

Radi potreba budućih razmatranja, proučimo i kako izgleda asimptotski razvoj ovog integrala:

$$\begin{aligned} I^D =& (\partial_B f) \int_r^\infty \frac{(1 + \mathcal{O}(r'^{-2}))(q^{BD} - \frac{C^{BD}}{r'} + \mathcal{O}(r'^{-2}))}{r'^2} dr' \\ =& (\partial_B f) \left[\int_r^\infty \frac{q^{BD}}{r'^2} dr' - \int_r^\infty \frac{C^{BD}}{r'^3} dr' + \int_r^\infty \mathcal{O}(r'^{-4}) dr' \right] \\ =& \frac{1}{r} q^{BD} (\partial_B f) - \frac{1}{2r^2} (\partial_B f) C^{BD} + \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned} \tag{E.22}$$

U nastavku raspisujemo uvjet (E.4) koji je ekvivalentan izrazu $g^{AB}(\nabla_A \xi_B + \nabla_B \xi_A) = 0$.

$$g^{AB}(\nabla_A \xi_B + \nabla_B \xi_A) = \frac{1}{r^2} h^{AB} (\partial_A \xi_B + \partial_B \xi_A - 2\Gamma^u_{AB} \xi_u - 2\Gamma^r_{AB} \xi_r - 2\Gamma^C_{AB} \xi_C) \tag{E.23}$$

Desnu stranu zadnjeg izraza izjednačavamo s nulom i množimo s r^2. Odmah slijedi:

$$2h^{AB} \Gamma^u_{AB} \xi_u = h^{AB} (\partial_A \xi_B + \partial_B \xi_A - 2\Gamma^r_{AB} \xi_r - 2\Gamma^C_{AB} \xi_C). \tag{E.24}$$

Uvrstimo sada koeficijent Γ^u_{AB}. Lijeva strana jednakosti (E.24) postaje:

$$\begin{aligned} 2h^{AB} \Gamma^u_{AB} \xi_u =& 2h^{AB} \left(\frac{-1}{2} \right) g^{ur} \partial_r (g_{AB}) \xi_u \\ =& (2re^{-2\beta} h^{AB} h_{AB} + r^2 e^{-2\beta} h^{AB} \partial_r h_{AB}) \xi_u \\ =& 4re^{-2\beta} \xi_u \end{aligned} \tag{E.25}$$

(E.25) umećemo u (E.24), množimo jednakost s $\frac{e^{2\beta}}{4r}$ te iskorištavamo činjenicu da vrijedi $h^{AB}(\partial_A\xi_B + \partial_B\xi_A) = 2h^{AB}\partial_A\xi_B$. Time dobivamo:

$$\xi_u = -\frac{e^{2\beta}}{2r}(\Gamma^r_{AB}\xi_r + \Gamma^C_{AB}\xi_C - \partial_A\xi_B)h^{AB}. \tag{E.26}$$

U (E.26) sada uvrštavamo Christoffelove simbole i rješenja za ξ_r i ξ_A. Slijedi raspis:

$$\begin{aligned}
\xi_u =& -\frac{e^{2\beta}}{2r}[(-g^{ur}D_{(A}U_{B)} - \frac{1}{2}g^{ur}(\partial_u g_{AB} - \frac{V}{r}\partial_r g_{AB}))\xi_r \\
&+ (\frac{-1}{2}g^{ur}U^C\partial_r g_{AB} + \breve{\Gamma}^C_{AB})\xi_C - \partial_A\xi_B]h^{AB} \\
=& -\frac{1}{2r}[(D_A(g_{BC}U^C)h^{AB} - 2V)\xi_r + (2rU^C + e^{2\beta}\breve{\Gamma}^C_{AB}h^{AB})\xi_C \\
&- e^{2\beta}h^{AB}\partial_A\xi_B] \\
=& -\frac{1}{2r}[(r^2D_AU^A - 2V)\xi_r + (2rU^C + \frac{e^{2\beta}}{2}h^{AB}h^{CE}(2\partial_A h_{BE} - \partial_E h_{AB}))\xi_C \\
&- e^{2\beta}h^{AB}\partial_A\xi_B] \\
=& -\frac{1}{2r}[(r^2\partial_AU^A + r^2\breve{\Gamma}^A_{AC}U^C - 2V)fe^{2\beta} \\
&+ (2rU^C + \frac{e^{2\beta}}{2}h^{AB}h^{CE}(2\partial_A h_{BE} - \partial_E h_{AB}))\cdot \\
&(-h_{DC}f^Dr^2 + fU^Dh_{DC}r^2 + r^2h_{DC}I^D) \\
&- e^{2\beta}h^{AB}\partial_A(-h_{DB}f^Dr^2 + fU^Dh_{DB}r^2 + r^2h_{DB}I^D)] \\
=& -\frac{1}{2r}[-2Vfe^{2\beta} - 2r^3h_{DC}U^Cf^D + 2r^3fh_{DC}U^CU^D + 2r^3h_{DC}U^CI^D \\
&- e^{2\beta}r^2f^Dh^{AB}\partial_A h_{BD} + \frac{e^{2\beta}}{2}r^2f^Dh^{AB}\partial_D h_{AB} + e^{2\beta}r^2h^{AB}\partial_A(h_{DB}f^D) \\
&+ e^{2\beta}r^2I^Dh^{AB}(\partial_A h_{BD}) - \frac{e^{2\beta}}{2}r^2I^Dh^{AB}(\partial_D h_{AB}) - e^{2\beta}r^2h^{AB}\partial_A(h_{DB}I^D) \\
&- r^2e^{2\beta}U^A(\partial_A f)],
\end{aligned} \tag{E.27}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti uvrstili $\breve{\Gamma}^A_{AC} = \frac{1}{2}h^{AD}(\partial_A h_{CD} + \partial_C h_{DA} - \partial_D h_{AC}) = \frac{1}{2}h^{AD}\partial_C h_{DA}$. Koristeći iduće jednostavno dokazive identitete:

$$\begin{aligned}
&- e^{2\beta}r^2f^Dh^{AB}\partial_A h_{BD} + \frac{e^{2\beta}}{2}r^2f^Dh^{AB}\partial_D h_{AB} + e^{2\beta}r^2h^{AB}\partial_A(h_{DB}f^D) = \\
&\frac{e^{2\beta}}{2}r^2f^Dh^{AB}\partial_D h_{AB} + e^{2\beta}r^2\partial_A f^A = \frac{e^{2\beta}}{2}r^2\partial_D(h_{AB}f^D)h^{AB}, \\
&e^{2\beta}r^2I^Dh^{AB}(\partial_A h_{BD}) - \frac{e^{2\beta}}{2}r^2I^Dh^{AB}(\partial_D h_{AB}) - e^{2\beta}r^2h^{AB}\partial_A(h_{DB}I^D) = \\
&-\frac{e^{2\beta}}{2}r^2I^Dh^{AB}(\partial_D h_{AB}) - e^{2\beta}r^2\partial_A I^D = -\frac{e^{2\beta}}{2}r^2\partial_D(h_{AB}I^D)h^{AB},
\end{aligned} \tag{E.28}$$

(E.27) se pojednostavljuje u oblik:

$$\begin{aligned}\xi_u = &-\frac{e^{2\beta}r}{4}\partial_D(h_{AB}f^D)h^{AB} + \frac{e^{2\beta}r}{2}(\partial_A f)U^A + \frac{e^{2\beta}r}{4}\partial_D(h_{AB}I^D)h^{AB} \\ &+ e^{2\beta}\frac{V}{r}f + r^2 h_{AB}(U^A f^B - U^A U^B f - U^A I^B)\end{aligned} \tag{E.29}$$

U idućem koraku razmatramo 4. uvjet u (E.3) koji implicira da mora biti zadovoljeno $\nabla_A\xi_B + \nabla_B\xi_A = \mathcal{O}(r)$. Princip je sljedeći; raspisat ćemo prvo lijevu stranu ovog izraza i razviti koeficijente metrike u red pomoću (4.147), (4.161) i (4.162). Članove ćemo tada grupirati i izjednačiti s nulom faktore koji množe r^n za $\forall n > 1$. Slijedi:

$$\begin{aligned}\nabla_A\xi_B + \nabla_B\xi_A =&\partial_A\xi_B - \Gamma^\mu_{AB}\xi_\mu + \partial_B\xi_A - \Gamma^\mu_{BA}\xi_\mu \\ =&\partial_A\xi_B + \partial_B\xi_A - 2\Gamma^u_{AB}\xi_u - 2\Gamma^r_{AB}\xi_r - 2\Gamma^C_{AB}\xi_C.\end{aligned} \tag{E.30}$$

Imamo 5 članova od kojih računamo svaki zasebno. Pritom ćemo (kada god to bude moguće), nastojati prepoznati koji faktori doprinose s $\mathcal{O}(r)$. Takve faktore nećemo eksplicitno ni računati jer nisu interesantni za ovu analizu, odnosno ne daju nikakve restrikcije. Prvi član u (E.30) daje:

$$\begin{aligned}\partial_A\xi_B =&\partial_A(-h_{DB}f^D r^2 + f h_{DB}U^D r^2 + r^2 h_{DB}I^D) \\ =&\partial_A[-(q_{DB} + \frac{C_{DB}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}))f^D r^2 \\ &+ (q_{DB} + \mathcal{O}(r^{-1}))(\frac{-\eth_E C^{DE}}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}))f r^2 \\ &+ (q_{DB} + \mathcal{O}(r^{-1}))(\frac{q^{DE}}{r}(\partial_E f) + \mathcal{O}(r^{-2}))r^2] \\ =&\partial_A[-q_{DB}f^D r^2 + \mathcal{O}(r)] \\ =&-r^2\partial_A f_B + \mathcal{O}(r).\end{aligned} \tag{E.31}$$

Drugi član je ekvivalentan do na zamjene $A \leftrightarrow B$:

$$\partial_B\xi_A = -r^2\partial_B f_A + \mathcal{O}(r). \tag{E.32}$$

Treći član:

$$\begin{aligned}
-2\Gamma^u_{AB}\xi_u =& g^{ur}(\partial_r g_{AB})[-\frac{e^{2\beta}r}{4}\partial_E(h_{CD}f^E)h^{CD} + \frac{e^{2\beta}r}{2}(\partial_E f)U^E \\
&+ \frac{e^{2\beta}r}{4}\partial_E(h_{CD}I^E)h^{CD} + e^{2\beta}\frac{V}{r}f \\
&+ r^2 h_{CD}(U^C f^D - U^C U^D f - U^C I^D)] \\
=& - e^{-2\beta}\partial_r(r^2 h_{AB})\cdot \\
&[-\frac{r}{4}(1+2\beta+\mathcal{O}((2\beta)^2))\partial_E((q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))f_E)h^{CD} \\
&+ \frac{r}{2}(1+2\beta+\mathcal{O}((2\beta)^2))(\partial_E f)(\frac{-\eth_F C^{EF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3})) \\
&+ \frac{r}{4}(1+2\beta+\mathcal{O}((2\beta)^2))\partial_E((q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{1}{r}q^{EF}(\partial_F f)+\mathcal{O}(r^{-2})))h^{CD} \\
&+ (1+2\beta+\mathcal{O}((2\beta)^2))\frac{r-2M+\mathcal{O}(r^{-1})}{r}f \\
&+ r^2(q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{-\eth_F C^{CF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))f^D \\
&- r^2(q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{-\eth_F C^{CF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(\frac{-\eth_E C^{DE}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))f \\
&- r^2(q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{-\eth_F C^{CF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(\frac{1}{r}q^{DE}(\partial_E f)+\mathcal{O}(r^{-2}))]
\end{aligned} \tag{E.33}$$

Promotrimo prvo kako izgleda razvoj faktora $-e^{-2\beta}\partial_r(r^2 h_{AB})$ koji množi uglatu zagradu:

$$\begin{aligned}
&- e^{-2\beta}\partial_r(r^2 h_{AB}) = -(1-2\beta+\mathcal{O}((2\beta)^2))(r^2\partial_r h_{AB}+2rh_{AB}) \\
&= -(1+\frac{1}{16}\frac{C^{GH}C_{GH}}{r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(r^2\partial_r(q_{AB}+\frac{C_{AB}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))+2r(q_{AB}+\frac{C_{AB}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))) \\
&= -(1+\frac{1}{16}\frac{C^{GH}C_{GH}}{r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(2rq_{AB}+C_{AB}+\mathcal{O}(r^{-1})) \\
&= -2rq_{AB}-C_{AB}+\mathcal{O}(r^{-1}).
\end{aligned} \tag{E.34}$$

Ono što bi trebalo biti očito jest da su članovi u uglatoj zagradi maksimalno reda $\mathcal{O}(r)$ (ne postoje faktori reda r^2 ili viših potencija). Kako ova zagrada množi faktor koji je reda $\mathcal{O}(r)$ (prethodni razvoj), pronaći ćemo samo članove reda r^1 koji nakon množenja s $-2rq_{AB}$ daju tražene veličine reda r^2. Ostale $\mathcal{O}(1)$ faktore u zagradi ignoriramo. Prvi član je (nakon razvoja tenzora h^{CD} i funkcije β):

$$\begin{aligned}
&-\frac{r}{4}(1-\frac{1}{16}\frac{C^{LM}C_{LM}}{r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))\partial_E((q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))f_E)(q^{CD}-\frac{C^{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))\\
&=\frac{-r}{4}\partial_E(q_{CD}f^E)q^{CD}+\mathcal{O}(1).
\end{aligned} \tag{E.35}$$

Preostali članovi:

$$\begin{aligned}
&\frac{r}{2}(1+\mathcal{O}(r^{-2}))(\partial_E f)(\frac{-\eth_F C^{EF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))=\mathcal{O}(r^{-1}),\\
&\frac{r}{4}(1+\mathcal{O}(r^{-2}))\partial_E((q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{1}{r}q^{EF}(\partial_F f)+\mathcal{O}(r^{-2})))(q^{CD}+\mathcal{O}(r^{-1}))=\mathcal{O}(1),\\
&(1+\mathcal{O}(r^{-2}))(1-\frac{2M}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))f=\mathcal{O}(1),\\
&r^2(q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{-\eth_F C^{CF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))f^D=\mathcal{O}(1),\\
&-r^2(q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{-\eth_F C^{CF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(\frac{-\eth_E C^{DE}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))f=\mathcal{O}(r^{-2}),\\
&-r^2(q_{CD}+\frac{C_{CD}}{r}+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{-\eth_F C^{CF}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(\frac{1}{r}q^{DE}(\partial_E f)+\mathcal{O}(r^{-2}))=\mathcal{O}(r^{-1}).
\end{aligned} \tag{E.36}$$

Dakle redu r^2 doprinosi samo eksplicitno izračunati član u (E.35). Treći faktor u (E.30) je stoga:

$$\begin{aligned}
-2\Gamma^u_{AB}\xi_u=&(-2rq_{AB})(\frac{-r}{4}\partial_E(q_{CD}f^E)q^{CD})+\mathcal{O}(r)\\
=&\frac{r^2}{2}q_{AB}\partial_E(q_{CD}f^E)q^{CD}+\mathcal{O}(r).
\end{aligned} \tag{E.37}$$

Raspisujemo sada 4. član u (E.30) i ponovno tražimo faktore reda r^2. Imamo:

$$\begin{aligned}
-2\Gamma^r_{AB}\xi_r=&-2fe^{2\beta}[e^{-2\beta}\frac{1}{2}(D_AU_B+D_BU_A)+\frac{1}{2}e^{-2\beta}(\partial_u(r^2h_{AB})-\frac{V}{r}\partial_r(r^2h_{AB}))]\\
=&-2f[\frac{1}{2}(D_AU_B+D_BU_A)+\frac{1}{2}r^2\partial_u h_{AB}-\frac{1}{2}\frac{V}{r}(r^2\partial_r h_{AB}+2rh_{AB})]
\end{aligned} \tag{E.38}$$

Promotrimo prvo:

$$\begin{aligned}
D_AU_B=&D_A(g_{BC}U^C)=D_A(r^2h_{BC}U^C)=r^2h_{BC}D_AU^C\\
=&r^2(q_{BC}+\mathcal{O}(r^{-1}))(\partial_AU^C+\breve{\Gamma}^C_{AH}U^H).
\end{aligned} \tag{E.39}$$

Uočimo za početak da je $U^A = \mathcal{O}(r^{-2})$. Kako je $\breve{\Gamma}^C_{AH}$ reda r^0 (sadrži produkte tipa $h^{AB}\partial_E h_{CF}$), (E.39) ne sadrži tražene faktore i ukupno je reda r^0. Možemo dakle pisati:

$$\frac{1}{2}(D_A U_B + D_B U_A) = \mathcal{O}(1). \tag{E.40}$$

Drugi faktor u (E.38) je:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r^2\partial_u h_{AB} =& \frac{1}{2}r^2\partial_u(q_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})) \\ =& \frac{1}{2}r^2(\frac{\partial_u C_{AB}}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})), \\ =& \mathcal{O}(r)\end{aligned} \tag{E.41}$$

koji također ne doprinosi redu r^2.

Razvoj posljednjeg člana u (E.38) daje:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{V}{r}(r^2\partial_r h_{AB} + 2rh_{AB}) =& -\frac{1}{2}[1 - \frac{2M}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})][2rq_{AB} + C_{AB} + \mathcal{O}(r^{-1})] \\ =& \mathcal{O}(r)\end{aligned} \tag{E.42}$$

Prema tome, četvrti faktor u (E.30) nam nije interesantan. Pišemo:

$$-2\Gamma^r_{AB}\xi_r = \mathcal{O}(r). \tag{E.43}$$

Preostaje nam vidjeti što daje član $-2\Gamma^C_{AB}\xi_C$. Imamo:

$$-2\Gamma^C_{AB}\xi_C = (g^{ur}U^C\partial_r g_{AB} - 2\breve{\Gamma}^C_{AB})(-h_{DC}f^D r^2 + fU^D h_{DC}r^2 + r^2 h_{DC}I^D) \tag{E.44}$$

Primjetimo prvo da očito vrijedi:

$$\begin{aligned}& -h_{DC}f^D r^2 = \mathcal{O}(r^2), \\ & fU^D h_{DC}r^2 = \mathcal{O}(1), \\ & r^2 h_{DC}I^D = \mathcal{O}(r).\end{aligned} \tag{E.45}$$

Razvoj prvog člana u lijevoj zagradi s desne strane (E.44) jest:

$$
\begin{aligned}
g^{ur}U^C\partial_r g_{AB} =& (-1+\mathcal{O}(r^{-2}))(\frac{-\eth_H C^{CH}}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-3}))(2rq_{AB}+C_{AB}+\mathcal{O}(r^{-1})) \\
=& \mathcal{O}(r^{-1}).
\end{aligned}
\tag{E.46}
$$

Ovaj faktor umnoškom s veličinama (E.45) ne može dati članove koji sadrže više potencije u radijalnoj koordinati od r^1. S druge strane, znamo da je $\breve{\Gamma}^C_{AB}=\mathcal{O}(1)$. Dakle produkt ovog koeficijenta s prvim faktorom u (E.45) može dati članove reda r^2 koje želimo izračunati eksplicitno. Promotrimo:

$$
\begin{aligned}
&-2\breve{\Gamma}^C_{AB}(-)h_{DC}f^D r^2 = 2r^2\frac{1}{2}h^{CE}(\partial_A h_{BE}+\partial_B h_{AE}-\partial_E h_{AB})h_{DC}f^C \\
&= r^2(q^{CE}+\mathcal{O}(r^{-1}))[\partial_A(q_{BE}+\mathcal{O}(r^{-1}))+\partial_B(q_{AE}+\mathcal{O}(r^{-1}))+\partial_E(q_{AB}+\mathcal{O}(r^{-1}))]\cdot \\
&[q_{DC}+\mathcal{O}(r^{-1})]f^D \\
&= r^2q^{CE}(\partial_A q_{BE}+\partial_B q_{AE}-\partial_E q_{AB})f_C+\mathcal{O}(r).
\end{aligned}
\tag{E.47}
$$

Sve skupa:

$$
-2\Gamma^C_{AB}\xi_C = r^2q^{CE}(\partial_A q_{BE}+\partial_B q_{AE}-\partial_E q_{AB})f_C+\mathcal{O}(r).
\tag{E.48}
$$

Možemo sada sumirati rezultate (E.31), (E.32), (E.37), (E.43) i (E.48) čime dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\nabla_A\xi_B+\nabla_B\xi_A =& r^2[-\partial_A f_B-\partial_B f_A+\frac{1}{2}q_{AB}\partial_E(q_{CD}f^E)q^{CD} \\
&+q^{CE}(\partial_A q_{BE}+\partial_B q_{AE}-\partial_E q_{AB})f_C]+\mathcal{O}(r).
\end{aligned}
\tag{E.49}
$$

Faktor u uglatoj zagradi izjednačavamo s nulom i primjećujemo da vrijedi $\frac{1}{2}q^{CD}(\partial_A q_{BD}+\partial_B q_{AD}-\partial_D q_{AB})=\gamma^C_{AB}$, gdje je γ^C_{AB} Christoffelov simbol na S^2 uveden u (4.140). Slijedi rezultat:

$$
\begin{aligned}
&-(\partial_A f_B-\gamma^C_{AB}f_C)-(\partial_B f_A-\gamma^C_{BA}f_C) = -\frac{1}{2}q_{AB}\partial_D(q_{CE}f^D)q^{CE} \\
&\to \eth_A f_B+\eth_B f_A = \frac{1}{2}q_{AB}\partial_D(q_{CE}f^D)q^{CE},
\end{aligned}
\tag{E.50}
$$

pri čemu smo prepoznali faktore u zagradama kao kovarijantne derivacije s obzirom na q_{AB}, iskoristili odsustvo torzije i preimenovali slijepe indekse. Raspišimo desnu stranu posljednje jednakosti u (E.50):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}q_{AB}\partial_D(q_{CE}f^D)q^{CE} =&\frac{1}{2}q_{AB}q_{CE}q^{CE}\partial_D f^D + \frac{1}{2}q_{AB}q^{CE}(\partial_D q_{CE})f^D \\ &= q_{AB}(\partial_D + \frac{1}{2}q^{CE}(\partial_D q_{CE}))f^D\end{aligned} \tag{E.51}$$

Uočimo još da vrijedi:

$$\begin{aligned}q_{AB}\eth_D f^D =&q_{AB}(\partial_D f^D + \gamma^D_{DE}f^E) \\ =&q_{AB}(\partial_E f^E + \frac{1}{2}q^{DF}(\partial_D q_{EF} + \partial_E q_{DF} - \partial_F q_{DE})f^E) \\ =&q_{AB}(\partial_E + \frac{1}{2}q^{DF}(\partial_E q_{DF}))f^E.\end{aligned} \tag{E.52}$$

Dakle (E.51) i (E.52) su ekvivalentni izrazi. Možemo pisati konačno:

$$\eth_A f_B + \eth_B f_A = q_{AB}\eth_C f^C, \tag{E.53}$$

što prepoznajemo kao konformnu Killingovu jednadžbu (D.52) uz $n = 2$, što je dimenzija prostora S^2. Uvjet $\delta g_{AB} = \mathcal{O}(r)$ se stoga svodi na zahtjev da f^A bude konformni Killingov vektor.

Okrećemo se analizi 3. uvjeta u (E.3) koji implicira da mora biti zadovoljeno $\nabla_u\xi_A + \nabla_A\xi_u = \mathcal{O}(1)$. U ovom slučaju ćemo izjednačiti s nulom sve faktore koji su reda r^n za $\forall n > 0$. Računi su slični onima koje smo proveli ranije te je često moguće pozvati se na razvoje koji su već napravljeni. Liejeva derivacija komponente metrike g_{uA} je:

$$\nabla_u\xi_A + \nabla_A\xi_u = \partial_u\xi_A + \partial_A\xi_u - 2\Gamma^u_{uA}\xi_u - 2\Gamma^r_{uA}\xi_r - 2\Gamma^B_{uA}\xi_B. \tag{E.54}$$

Čitatelj se može uvjeriti da nakon razvoja proizlazi:

$$\begin{aligned}&\partial_u\xi_A = \partial_u[-r^2 f_A + r(\partial_A f - C_{DA}f^D) + \mathcal{O}(1)], \\ &\partial_A\xi_u = \partial_A[-\frac{r}{4}\partial_E(q_{CD}f^E)q^{CD} + \mathcal{O}(1)], \\ &-2\Gamma^u_{uA}\xi_u = \mathcal{O}(1), \quad -2\Gamma^r_{uA}\xi_r = \mathcal{O}(r^{-1}), \\ &-2\Gamma^B_{uA}\xi_B = rq^{BC}f_B\partial_u C_{AC} + \mathcal{O}(1).\end{aligned} \tag{E.55}$$

Spomenimo samo da je u računima korištena jednakost (4.142) i činjenica da vrijedi $\mathcal{C}^D_{CE} = \mathcal{O}(r^{-1})$. Sumacijom faktora u (E.44) dobivamo:

$$\begin{aligned} &\nabla_u \xi_A + \nabla_A \xi_u = r^2(-\partial_u f_A) \\ &+ r[\partial_u \partial_A f - \partial_u (C_{DA} f^D) - \frac{1}{4}\partial_A(\partial_E(q_{CD} f^E) q^{CD}) + q^{BC} f_B \partial_u C_{AC}] \\ &+ \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{E.56}$$

Član uz r^2 daje:

$$\partial_u f_A = 0 \to f_A = f_A(x^C). \tag{E.57}$$

Odnosno, konformni Killingov vektor f^A na S^2 smije ovisiti samo o angularnim koordinatama. Ovaj uvjet sada možemo iskoristiti u raspisu faktora uz r koji također izjednačavamo s nulom (članovi koji sadrže C_{AB} se pokrate). Slijedi:

$$\begin{aligned} &\partial_A[\partial_u f - \frac{1}{4}\partial_E(q_{CD} f^E) q^{CD}] = 0 \\ &\to \partial_u f = \frac{1}{4}\partial_D(q_{AB} f^D) q^{AB}. \end{aligned} \tag{E.58}$$

Time smo u principu gotovi. Nismo pokazali da su zadovoljeni 1. i 2. uvjet u (E.3), ali oni ne daju ništa novo. To jest, dat će restrikcije koje smo već uveli. Primjerice, rješavanjem jednadžbe $\delta g_{ur} = \mathcal{O}(r^{-2})$ i izjednačavanjem s nulom člana uz r^0 dobili bismo upravo uvjet (E.58). Iskoristit ćemo sada jednadžbu $\frac{1}{2} q_{AB} \partial_D (q_{CE} f^D) q^{CE} = q_{AB} \eth_D f^D$ koju smo izveli koristeći (E.51) i (E.52). Ova jednakost implicira da mora vrijediti i $\frac{1}{2}\partial_D(q_{AB} f^D) q^{AB} = \eth_D f^D$. (E.58) postaje:

$$\partial_u f = \frac{1}{2}\eth_D f^D. \tag{E.59}$$

Rezultat možemo uvrstiti u konformnu Killingovu jednadžbu (E.53) čime dobivamo:

$$\eth_A f_B + \eth_B f_A = 2 q_{AB} \partial_u f. \tag{E.60}$$

Ukoliko ovu jednadžbu parcijalno deriviramo po u i iskoristimo (E.57), odmah slijedi:

$$\partial_u^2 f = 0. \tag{E.61}$$

Rješenje za f koje zadovoljava (E.59) i (E.61) je stoga očito:

$$f(u, x^C) = \alpha(x^C) + \frac{u}{2} \eth_A f^A(x^C), \tag{E.62}$$

gdje je $\alpha(x^C)$ potpuno proizvoljna funkcija koja ovisi samo o angularnim koordinatama. Preostaje nam još dignuti indekse na (E.10), (E.20) i (E.29) i uvrstiti (E.62). Računamo dakle $\xi^\mu = g^{\mu\nu}\xi_\nu$ za sve vrijednosti indeksa μ. Krenimo s $\mu = u$ komponentom:

$$\xi^u = g^{u\nu}\xi_\nu = g^{ur}\xi_r = -e^{-2\beta} f e^{2\beta} = -f. \tag{E.63}$$

Iz (E.65) sada slijedi:

$$\xi^u = -\alpha(x^C) - \frac{u}{2} \eth_A f^A(x^C). \tag{E.64}$$

Za $\mu = A$ imamo:

$$\xi^A = g^{A\nu}\xi_\nu = g^{AB}\xi_B + g^{Ar}\xi_r \tag{E.65}$$

Nakon uvrštavanja g^{AB}, g^{Ar}, ξ_B i ξ_r proizlazi rezultat:

$$\xi^A = -f^A + I^A. \tag{E.66}$$

Prethodni rezultat je egzaktan, ali nas zanima kakve fizikalne fenomene opisuju difeomorfizmi u blizini $\mathcal{I}^+$ pa ćemo integral I^D razviti pomoću (E.22). Slijedi:

$$\begin{aligned} \xi^A &= -f^A + \frac{1}{r} q^{BA}(\partial_B f) - \frac{1}{2r^2}(\partial_B f) C^{BA} + \mathcal{O}(r^{-3}) \\ &= -f^A + \frac{1}{r} q^{BA}(\partial_B \alpha + \frac{u}{2}\partial_B(\eth_C f^C)) - \frac{1}{2r^2} C^{BA} \partial_B(\alpha + \frac{u}{2}\eth_C f^C) + \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned} \tag{E.67}$$

Moramo još pronaći komponentu ξ^r. Ista je dana izrazom:

$$\xi^r = g^{r\mu}\xi_\mu = g^{ur}\xi_u + g^{rr}\xi_r + g^{rA}\xi_A. \tag{E.68}$$

Po uvrštavanju komponenti metrike i 1-formi ξ_μ te provedbe $1/r$ razvoja dobiva se:

$$\begin{aligned}\xi^r =& r[\frac{1}{2}\partial_D f^D + \frac{1}{4} f^D q^{AB}\partial_D q_{AB}] + \frac{1}{4} f^D (q^{AB}\partial_D C_{AB} - C^{AB}\partial_D q_{AB}) \\ &- \frac{1}{2}\partial_D(q^{BD}\partial_B f) - \frac{1}{4} q^{AB} q^{ED}(\partial_E f)\partial_D q_{AB} + \mathcal{O}(r^{-1}).\end{aligned} \tag{E.69}$$

Ono što možda nije toliko očito jest da izraz u drugoj zagradi iščezava. Dokažimo stoga da je to istinita tvrdnja. Prvo ćemo iskoristiti činjenicu da trag tenzora C_{AB} iščezava. Imamo:

$$\begin{aligned}&\partial_D(C^{AB}q_{AB}) = C^{AB}\partial_D q_{AB} + q_{AB}\partial_D C^{AB} = 0 \\ &\to C^{AB}\partial_D q_{AB} = -q_{AB}\partial_D C^{AB}.\end{aligned} \tag{E.70}$$

Ekvivalentno se pokazuje i da je zadovoljeno:

$$C_{AB}\partial_D q^{AB} = -q^{AB}\partial_D C_{AB} \tag{E.71}$$

Faktor $q^{AB}\partial_D C_{AB}$ sada možemo raspisati na idući način:

$$\begin{aligned}q^{AB}\partial_D C_{AB} =& q^{AB}\partial_D(q_{AE}q_{BF}C^{EF}) \\ =& q^{AB}q_{AE}q_{BF}\partial_D C^{EF} + q^{AB}q_{AE}C^{EF}\partial_D q_{BF} + q^{AB}q_{BF}C^{EF}\partial_D q_{AE} \\ =& q_{AB}\partial_D C^{AB} + 2C^{AB}\partial_D q_{AB} \\ =& q_{AB}\partial_D C^{AB} - 2q_{AB}\partial_D C^{AB},\end{aligned} \tag{E.72}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili (E.70). Vrijedi dakle i:

$$q^{AB}\partial_D C_{AB} = -q_{AB}\partial_D C^{AB}. \tag{E.73}$$

Ovaj rezultat koristimo u raspisu druge zagrade s desne strane jednakosti u (E.69):

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}f^D(q^{AB}\partial_D C_{AB} - C^{AB}\partial_D q_{AB}) =&\frac{1}{4}f^D(-q_{AB}\partial_D C^{AB} - C^{AB}\partial_D q_{AB})\\ =&-\frac{1}{4}f^D\partial_D(q_{AB}C^{AB})\\ =&0.\end{aligned} \tag{E.74}$$

Time smo tvrdnju dokazali. Prvi faktor u (E.69) je jednostavno:

$$\frac{1}{2}\partial_D f^D + \frac{1}{4}f^D q^{AB}\partial_D q_{AB} = \frac{1}{2}\eth_D f^D, \tag{E.75}$$

što smo pokazali u (E.52). Nakon uvrštavanja (E.62) preostala dva faktora daju:

$$-\frac{1}{2}\partial_D(q^{BD}\partial_B f) - \frac{1}{4}q^{AB}q^{ED}(\partial_E f)\partial_D q_{AB} = -\frac{1}{2}\eth_D\eth^D\alpha - \frac{u}{4}\eth_D\eth^D\eth_E f^E, \tag{E.76}$$

čime dobivamo:

$$\xi^r = \frac{r}{2}\eth_C f^C - \frac{1}{2}\eth_C\eth^C\alpha - \frac{u}{4}\eth_C\eth^C\eth_A f^A + \mathcal{O}(r^{-1}). \tag{E.77}$$

Napraviti ćemo redefinicije $f^A = -Y^A$ i $\alpha = -\gamma$ i uvesti natrag originalne oznake $Y^A \to f^A$, $\gamma \to \alpha$ kako bismo se riješili minus predznaka na nespretnim mjestima. Na kraju, iskoristit ćemo svojstvo konformnog Killingovog vektora na S^2 $\eth_C\eth^C\eth_A f^A = -2\eth_C f^C$ koje slijedi iz (D.53) radi kompaktnijeg zapisa ξ^r. Konačni rezultati su:

$$\begin{aligned}&\xi^u = \alpha(x^C) + \frac{u}{2}\eth_A f^A(x^C),\\ &\xi^A = f^A - \frac{1}{r}q^{BA}(\partial_B\alpha + \frac{u}{2}\partial_B(\eth_C f^C)) + \frac{1}{2r^2}C^{BA}\partial_B(\alpha + \frac{u}{2}\eth_C f^C) + \mathcal{O}(r^{-3}),\\ &\xi^r = -\frac{u+r}{2}\eth_C f^C + \frac{1}{2}\eth_C\eth^C\alpha + \mathcal{O}(r^{-1}).\end{aligned} \tag{E.78}$$

Najopćenitiji mogući generator difeomorfizma $\xi = \xi^\mu\partial_\mu$ koji čuva asimptotsku ravnost dakle poprima oblik:

$$\begin{aligned}\xi =&(\alpha + \frac{u}{2}\eth_A f^A)\partial_u + (-\frac{u+r}{2}\eth_C f^C + \frac{1}{2}\eth_C\eth^C\alpha + \mathcal{O}(r^{-1}))\partial_r\\ &+ (f^A - \frac{1}{r}\eth^A\alpha - \frac{u}{2r}\eth^A\eth_C f^C + \mathcal{O}(r^{-2}))\partial_A.\end{aligned} \tag{E.79}$$

Uzimajući limes $r \to \infty$, nalazimo generator difeomorfizma na $\mathcal{I}^+$:

$$\xi^+ = (\alpha + \frac{u}{2}\eth_A f^A)\partial_u + f^A\partial_A. \tag{E.80}$$

Primjetimo da komponenta ξ^r ovdje divergira, ali translacije koordinata u prostoru gdje one poprimaju beskonačne vrijednosti nisu dobro definirane. Budući a svjetlosna beskonačnost je trodimenzionalna površina parametrizirana sa $(u, z, \bar{z})$, dakle potrebni su nam ξ^u, ξ^z i $\xi^{\bar{z}}$.

Dodatak F Očuvani naboji

Cilj ovog dodatka je pronaći izraz koji daje ukupnu energiju prostor-vremena. Vidjet ćemo da je isti dan Komarovim integralom u prostornoj beskonačnosti. Ovaj integral ćemo evaluirati za Schwarzschildov prostor jer se analogija jednostavno može povući i na Bondijevu metriku. U nastavku uglavnom pratimo [5].

Stokesov teorem je u najopćenitijem obliku dan idućom jednadžbom:

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w, \tag{F.1}$$

gdje je M n-dimenzionalna mnogostrukost s metrikom $g_{\mu\nu}$ i koordinatama x^μ ($\mu = 1, ..., n$). Integral s desne strane jednakosti se provodi po $(n-1)$-dimenzionalnom rubu ove mnogostrukosti ∂M s induciranom metrikom (koja se može dobiti povlačenjem) γ_{ij} i koordinatama y^i ($i = 1, ..., n-1$). Sa w je označena $(n-1)$-forma, dok je dw eksterna derivacija od w, odnosno n-forma. Formu w možemo zapisati kao Hodgeov dual 1-forme V, odnosno:

$$w = \star V. \tag{F.2}$$

Pokazano je da integrandi u (F.1) poprimaju iduće oblike [5]:

$$\begin{aligned} dw &= \nabla_\nu V^\nu \sqrt{|g|} d^n x, \\ w &= n_\mu V^\mu \sqrt{|\gamma|} d^{n-1} y, \end{aligned} \tag{F.3}$$

gdje su g i γ determinante metrika na M i ∂M, dok je n^μ jedninični vektor okomit na ∂M. Za prostornolike površine (površine konstantnog vremena) se bira normalizacija $n^\mu n_\mu = -1$, dok za vremenolike površine vrijedi $n^\mu n_\mu = +1$. Stokesov teorem (F.1) se stoga svodi na:

$$\int_M d^n x \sqrt{|g|} \nabla_\mu V^\mu = \int_{\partial M} d^{n-1} y \sqrt{|\gamma|} n_\mu V^\mu \tag{F.4}$$

Proučimo prvo kako se definiraju očuvani naboji u elektromagnetizmu. Neka je

J^μ očuvana struja na M:

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \rightarrow d(\star J) = 0. \tag{F.5}$$

Naboj koji prolazi kroz hiperpovršinu Σ se definira kao:

$$Q_\Sigma = -\int_\Sigma \star J. \tag{F.6}$$

Usporedbom s (F.2) i (F.3), vidimo da se integral (F.6) može prevesti u oblik:

$$Q_\Sigma = -\int_\Sigma d^{n-1}y\sqrt{|\gamma|}n_\mu J^\mu. \tag{F.7}$$

Obično se Σ bira kao hiperpovršina konstantnog vremena; tada (F.7) predstavlja ukupni naboj u prostoru u tom vremenskom trenutku. Minus predznak je stvar konvencije kojim kompenziramo minus predznak koji vremenolika komponenta jediničnog vektora n^μ na Σ pokupi uslijed spuštanja indeksa. Time pozitivna gustoća naboja $\rho = J^0$ daje daje pozitivan integrirani ukupni naboj. Iz Maxwellovih jednadžbi $\nabla_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu$, vidimo da je (F.7) ekvivalentan izrazu:

$$Q_\Sigma = -\int_\Sigma d^{n-1}y\sqrt{|\gamma|}n_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu}. \tag{F.8}$$

Koristeći činjenicu da je $F^{\mu\nu}$ antisimetričan tenzor, može se pokazati da iz Stokesovog teorema slijedi [5]:

$$\int_\Sigma d^{n-1}y\sqrt{|\gamma|}n_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} = \int_{\partial\Sigma} d^{n-2}z\sqrt{|\gamma^{(\partial\Sigma)}|}n_\mu \sigma_\nu F^{\mu\nu}, \tag{F.9}$$

pri čemu je $\partial\Sigma$ $n-2$ dimenzionalan rub hiperpovršine Σ s koordinatama z^a ($a = 1, ..., n-2$) i metrikom $\gamma_{ab}^{(\partial\Sigma)}$. Jedinični vektor σ^μ je na $\partial\Sigma$ okomit. Ukoliko bismo radili u prostoru Minkowskog s metrikom (2.2), (F.8) bi reproducirao točkasti naboj q uz električno polje (u Heaviside-Lorentzovim jedinicama) $E^r = \frac{q}{4\pi r^2}$.

Okrenimo se sada analizi očuvanih naboja u gravitacijskom polju. Pretpostavit ćemo da je prostor četverodimenzionalan i da sadrži Killingov vektor K^μ koji zadovoljava jednadžbu:

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = 0. \tag{F.10}$$

U nastavku će nam trebati i iduća svojstva Killingovih vektora:

$$\begin{aligned} &\nabla_\mu \nabla_\sigma K^\mu = R_{\sigma\nu}K^\nu, \\ &K^\lambda \nabla_\lambda R = 0. \end{aligned} \tag{F.11}$$

Prva jednadžba slijedi iz kontrakcije izraza $\nabla_\mu \nabla_\sigma K^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}K^\nu$, dok je druga ekvivalentna tvrdnji da usmjerena derivacija Riccijevog skalara duž Killingovog vektorskog polja iščezava. Očuvanu struju možemo definirati preko tenzora energije-impulsa na idući način:

$$J_T^\mu = K_\nu T^{\mu\nu}. \tag{F.12}$$

Dokažimo da je ova struja očuvana:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J_T^\mu =& (\nabla_\mu K_\nu)T^{\mu\nu} + K_\nu(\nabla_\mu T^{\mu\nu}) \\ =& \frac{1}{2}[(\nabla_\mu K_\nu)T^{\mu\nu} + (\nabla_\nu K_\mu)T^{\nu\mu}] \\ =& \frac{1}{2}[(\nabla_\mu K_\nu) + (\nabla_\nu K_\mu)]T^{\mu\nu} \\ =& 0. \end{aligned} \tag{F.13}$$

U dokazu smo iskoristili očuvanje tenzora energije-impulsa, činjenicu da je isti simetričan, i Killingovu jednadžbu (F.10). Koristeći analogiju iz elektrodinamike, integraciju možemo provesti po prostornolikoj hiperpovršini Σ i definirati ukupnu energiju kao u (F.7):

$$E_T = \int_\Sigma d^3x \sqrt{|\gamma|} n_\mu J_T^\mu. \tag{F.14}$$

Pretpostavimo da je prostor-vrijeme opisano Schwarzschildovom metrikom. Ovakav prostor sadrži Killingov vektor, ali tenzor energije-impulsa svugdje iščezava. Iz (F.14) bismo mogli naivno zaključiti da je energija crne rupe jednaka nuli, ali ista sadrži singularitet zbog kojeg je integral teško evaluirati. Iz tog razloga, energiju želimo dobiti kao integral po rubu od Σ u prostornoj beskonačnosti. Uvedimo alternativnu definiciju očuvane struje:

$$J_R^\mu = K_\nu R^{\mu\nu}. \tag{F.15}$$

Kontrakcijom Einsteinove jednadžbe (4.42) sa $g^{\mu\nu}$ dobivamo:

$$R = -8\pi GT, \tag{F.16}$$

što znači da ju možemo pisati u obliku:

$$R^{\mu\nu} = 8\pi G(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu}). \tag{F.17}$$

Struja (F.15) je dakle:

$$J_R^\mu = 8\pi GK_\nu(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu}) \tag{F.18}$$

Promotrimo još što nam daje divergencija Einsteinove jednadžbe sa dignutim indeksima:

$$\begin{aligned} &\nabla_\mu R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu(Rg^{\mu\nu}) = 8\pi\nabla_\mu T^{\mu\nu} \\ &\to \nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla^\nu R. \end{aligned} \tag{F.19}$$

Druga jednakost je u biti kontrahirani Bianchijev identitet. Sada možemo pokazati da je struja (F.15) zbilja očuvana:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J_R^\mu =& \nabla_\mu(K_\nu R^{\mu\nu}) \\ =& (\nabla_\mu K_\nu)R^{\mu\nu} + K_\nu(\nabla_\mu R^{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{F.20}$$

Prvi član isčezava zbog simetričnosti Ricijevog tenzora i Killingove jednadžbe (jednako kao u (F.13)). Iz (F.19) vidimo da se (F.20) svodi na:

$$\nabla_\mu J_R^\mu = \frac{1}{2}K_\nu\nabla^\nu R, \tag{F.21}$$

ali desna strana jednakosti je proporcionalna usmjerenoj derivaciji Riccijevog skalara duž K_μ što znači da imamo:

$$\nabla_\mu J^\mu_R = 0. \tag{F.22}$$

Budući da je struja je očuvana, možemo kao i ranije definirati energiju asociranu s ovom strujom:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_\Sigma d^3x\sqrt{|\gamma|}n_\mu J^\mu_R. \tag{F.23}$$

Faktor normalizacije ćemo objasniti nešto kasnije. Primjetimo za sada da je prva jednakost u (F.11) ekvivalentna izrazu $\nabla_\nu(\nabla^\mu K^\nu) = K_\nu R^{\mu\nu}$. Prema tome, iz (F.15) slijedi:

$$J^\mu_R = \nabla_\nu(\nabla^\mu K^\nu) \tag{F.24}$$

tako da je energija:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_\Sigma d^3x\sqrt{|\gamma|}n_\mu \nabla_\nu(\nabla^\mu K^\nu) \tag{F.25}$$

Kako iz Killingove jednadžbe dobivamo $\nabla^\mu K^\nu = -\nabla^\nu K^\mu$, faktor pod kovarijantnom derivacijom u (F.25) je antisimetričan te možemo iskoristiti Stokesov teorem kao u (F.9) i pisati:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{|\gamma^{(2)}|}n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu K^\nu \tag{F.26}$$

Ovo je Komarov integral asociran s vremenolikim Killingovim vektorom K^μ. Može se interpretirati kao ukupna energija prostor-vremena. Sada ćemo izračinati E_R za Schwarzschildov prostor. U koordinatama $x^\mu = (t, r, \Theta, \phi)$ metrika je:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{F.27}$$

s komponenetama:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right), g_{11} = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1}. \tag{F.28}$$

Kako je metrika dijagonalna, znamo da su inverzi $g^{00} = (g_{00})^{-1}$ i $g^{11} = (g_{11})^{-1}$. U (F.25), Σ je hiperpovršina konstantnog vremena, vektor n^μ dakle mora imati formu $n^\mu = (n^0, 0, 0, 0)$. U ovom slučaju $\partial\Sigma$ je 2-sfera u prostornoj beskonačnosti. Prema tome, vrijedi: $\sigma^\mu = (0, \sigma^1, 0, 0)$. Ove vektore možemo pronaći pomoću normalizacija uvedenih ranije u ovom dodatku. Imamo:

$$\begin{aligned} n_\mu n^\mu = g_{\mu\nu} n^\nu n^\mu = g_{00} n^0 n^0 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)\left(n^0\right)^2 = -1 \\ \rightarrow n^0 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{F.29}$$

U korjenovanju $(n^0)^2$ postoji neodređenost u predznaku, ali bira se tako da je usmjeren prema budućim vremenima. Slijedi:

$$\begin{aligned} &n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu = g_{\mu 0} n^0 \\ &\rightarrow n_0 = g_{00} n^0 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{F.30}$$

Ostale komponente iščezavaju zbog dijagonalnosti metrike $g_{\mu 0} = \delta_\mu{}^0 g_{00}$. Na sličan način nalazimo i σ_μ:

$$\begin{aligned} \sigma_\mu \sigma^\mu = g_{\mu\nu} \sigma^\nu \sigma^\mu = g_{11} \sigma^1 \sigma^1 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1}\left(\sigma^1\right)^2 = +1 \\ \rightarrow \sigma^1 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{F.31}$$

Ovdje se predznak bira tako da je vektor okomit na rub hiperpovršine usmjeren "prema van". Odnosno u pozitivnom $\hat{r}$ smjeru. Dobivamo konačno:

$$\begin{aligned} &\sigma_\mu = g_{\mu\nu} \sigma^\nu = g_{\mu 1} \sigma^1 \\ &\rightarrow \sigma_1 = g_{11} \sigma^1 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1}\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{F.32}$$

Ostale komponente ponovno iščezavaju zbog identiteta $g_{\mu 1} = \delta_\mu{}^1 g_{11}$. Promotrimo dalje čemu je jednak faktor $n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu K^\nu$ u Komarovom integralu:

$$\begin{aligned} n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu K^\nu =& n_0 \sigma_1 \nabla^0 K^1 = -\nabla^0 K^1 = -g^{0\mu} \nabla_\mu K^1 = -g^{00} \nabla_0 K^1 \\ =& -g^{00}(\partial_0 K^1 + \Gamma^1_{0\lambda} K^\lambda) \end{aligned} \tag{F.33}$$

Koristimo činjenicu da je vremenoliki Killingov vektor Schwarzschilovog prostora jednostavno [5]:

$$K^\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{F.34}$$

Prema tome, (F.33) postaje:

$$n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu K^\nu = -g^{00} \Gamma^1_{00} K^0. \tag{F.35}$$

Christoffelov simbol od interesa konstruiran s obzirom na (F.27) je [5]:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{Gm}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm}{r} \right). \tag{F.36}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu K^\nu =& - (-) \left(1 - \frac{2Gm}{r} \right)^{-1} \frac{Gm}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm}{r} \right) K^0 \\ =& \frac{Gm}{r^2} K^0. \end{aligned} \tag{F.37}$$

Metrika na S^2 u prostornoj beskonačnosti je:

$$\gamma^{(2)}_{ij} dx^i dx^j = r^2 (d\Theta^2 + sin^2\Theta d\phi), \tag{F.38}$$

što znači da imamo:

$$\sqrt{|\gamma^{(2)}|} = r^2 sin\Theta. \tag{F.39}$$

Prethodni izraz možemo zapisati i u idućem obliku:

$$\sqrt{|\gamma^{(2)}|} = r^2 \sqrt{|detq_{ij}|}, \tag{F.40}$$

pri čemu je $detq_{ij}$ determinanta metrike na jediničnoj 2-sferi. U sfernom sustavu vrijedi $\sqrt{|detq_{ij}|} = sin\Theta$. Nakon uvrštavanja (F.30) i (F.40) u Komarov integral, dobivamo:

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{|detq_{ij}|}K^0 Gm \tag{F.41}$$

Izraz smo namjerno zapisali u ovakvom obliku jer je pogodan za izračun energije Bondijevog prostor-vremena. Koristeći $K^0 = 1$ i $d^2x = d\Theta d\phi$, slijedi konačno

$$E_R = \frac{1}{4\pi}\int d\Theta d\phi sin(\Theta)m = m, \tag{F.42}$$

što je dakako traženi rezultat kojim je ujedno i objašnjena normalizacija $1/4\pi G$. Potvrda da E_R zbilja možemo interpretirati kao energiju dolazi iz formulacije opće teorije relativnosti putem Hamiltonijana. Ukoliko bismo pažljivo definirali generator vremenske translacije u asimptotski ravnom prostor-vremenu i identificirali pripadni očuvani naboj s ukupnom energijom, dobili bismo tzv. ADM energiju. Asimptotski ravna metrika se može zapisati kao u perturbacijskoj teoriji:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{F.43}$$

pri čemu zahtjevamo da komponente tenzora $h_{\mu\nu}$ budu male u prostornoj beskonačnosti, ali ne nužno i svugdje drugdje. ADM energija ovakve metrike se može pisati kao integral po S^2 u prostornoj beskonačnosti [5]:

$$E_{ADM} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{|\gamma^{(2)}|}\sigma^i(\partial_j h^j{}_i - \partial_i h^j{}_j), \tag{F.44}$$

gdje se prostorni indeksi dižu sa δ^{ij}, odnosno prostornom metrikom u beskonačnosti. Pokazano je da se ADM i Komarova energija slažu [5].

Bibliography

[1] Alessio. F. ”Asymptotic structure and Bondi-Metzner-Sachs group in General Relativity.” [arXiv:1801.01714 [gr-qc]].

[2] Bern Z. ”Perturbative quantum gravity and it’s relation to gauge theory.” Living Rev. Rel. **5** (2002), 5 doi:10.12942/lrr-2002-5 [arXiv:gr-qc/0206071 [gr-qc]].

[3] Bertschinger E. ”Symmetry transformations, the Einstein-Hilbert action, and gauge invariance.” Physics 8.962. Spring 2002.

[4] Bondi H.; van der Burg M. G. J.; Metzner A. W. K. ”Gravitational waves in general relativity, VII. Waves from axi-symmetric isolated system.” 1962. Proc. R. Soc. Lond. A26921–52 http://doi.org/10.1098/rspa.1962.0161

[5] Carroll, S. ”Spacetime and geometry. An introduction to general relativity.” Pearson new international edition 2014. Edinburgh gate.

[6] Christodoulou D.; Klainerman S. ”The global nonlinear stability of the Minkowski space.” Princeton University Press, Princeton, 1993.

[7] Donoghue J. F.; Ivanov M. M.; Shkerin A. “EPFL Lectures on General Relativity as a Quantum Field Theory.” [arXiv:1702.00319 [hep-th]].

[8] He T.; Lysov V.; Mitra P.; Strominger A. ”BMS supertranslations and Weinberg’s soft graviton theorem.” JHEP **05** (2015), 151 doi:10.1007/JHEP05(2015)151 [arXiv:1401.7026 [hep-th]].

[9] Ilakovac A. ”Teorija polja-predavanja”. 2020.

[10] Mädler T. ”Affine-null metric formulation of general relativity at two intersecting null hypersurfaces.” Phys. Rev. D **99** (2019) no.10, 104048, arXiv:1810.04743v3.

[11] Mädler T.; Winicour J. ”Bondi-Sachs formalism.” Scholarpedia **11** (2016), 33528 doi:10.4249/scholarpedia.33528 [arXiv:1609.01731 [gr-qc]].

[12] Peskin E. M.; Schroeder V. D. ”An introduction to quantum field theory.” Perseus Books Publishing, L.L.C. 1995.

[13] Peterman A. ”Vector fields, flows and Lie groups or diffeomorphisms.” Eur. Phys. J. C **14** (2000), 705-708 doi:10.1007/s100520000375 [arXiv:hep-th/9912131 [hep-th]].

[14] Sachs R. K.”Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time.” 1962. Proc. R. Soc. Lond. A270103–126 http://doi.org/10.1098/rspa.1962.0206

[15] Strominger, A. ”Lectures on the infrared structure of gravity and gauge theory.” [arXiv:1703.05448 [hep-th]].

[16] Strominger, A. ”On BMS invariance of gravitational scattering”. JHEP **07** (2014), 152 doi:10.1007/JHEP07(2014)152 [arXiv:1312.2229 [hep-th]].

[17] Wikipedia. Graviton. Experimental observation. url: ht-tps://en.wikipedia.org/wiki/Graviton. 21.6.2021.