Povijest kompleksnih brojeva

Bešlić, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Bešlić

POVIJEST KOMPLEKSNIH BROJEVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, srpanj, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Zahvaljujem se svojoj mentorici, doc. dr. sc. Franki Miriam Brückler na pomoći,
strpljenju i ljubaznosti tijekom pisanja ovoga rada.
Posebno hvala mojim roditeljima, sestri i bratu koji su mi omogućili studiranje,
podržavali me i bili potpora, posebno kada je bilo teško.
Hvala mojim „Matka je sve” najdražim kolegicama koje su bile velika motivacija i pomoć
tijekom cijelog studiranja, a bez kojih ono ne bi bilo toliko zabavno.
Hvala i ostalim bližnjima i prijateljima koji su vjerovali i bili uz mene.*

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu kroz tri poglavlja ćemo obraditi povijesni tijek razvoja kompleksnih brojeva do nastanka kompleksne analize. U prvome poglavlju govoriti ćemo o prvim pojavama kompleksnih brojeva. Pisat ćemo o njihovom razvoju tijekom renesanse te o glavnim idejama tadašnjih matematičara, del Ferra, Cardana i Bombellija, kao i o samoj potrebi za uvođenjem novog skupa brojeva.

Drugo poglavlje govori o razvoju tijekom 17. i 18. stoljeća, kada su se matematičari, zbog nedostatka vizualne predodže, koncentrirali na pronalazak geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva. Istaknut ćemo doprinose najvažnijih matematičara ovog razdoblja: Descartesa, koji je zaslužan za uvođenje pojma imaginarnog broja, Wallisova geometrijska interpretacija negativnih brojeva te osmišljavanje glavne ideje koja ih je navela na zaključke vezane uz geometrijsku interpretaciju imaginarnih brojeva, Eulerovog zapisa poznate formule koja nosi njegovo ime — Eulerov identitet, Wessela koji je zaključio da se množenje s $\sqrt{-1}$ interpretira kao rotacija za 90°, De Moivrea i De Moivreove formule, Gaußovog dokaza osnovnog teorema algebre, ali i opisa kompleksne ravnine koja je danas nazvana po njemu i Argandu.

Posljednje, treće poglavlje posvećeno je utemeljenju tada potpuno nove teorije u matematici — kompleksnoj analizi. Istaknut ćemo posebno Cauchyjeve doprinose — kako je došao do Cauchyjevog teorema i integralne formule, a zatim i glavne doprinose Riemanna, Laurenta i Weierstraßa, te ukratko opisati Riemannovu hipotezu.

Poglavlje 1

Algebra u renesansi

1.1 Scipione del Ferro

Kada nekoga upoznajemo s pojmom kompleksnog broja najčešće nam prvo na um padne kvadratna jednadžba $x^2 + 1 = 0$ i njena rješenja. Zaista, mnogi smatraju da su kompleksni brojevi uvedeni da bi svaka kvadratna jednadžba imala rješenje. Jednadžba $x^2 + 1 = 0$ nema realnih rješenja, ali uvođenjem kompleksnih brojeva to su $x = i$ i $x = -i$. Također, jednadžba $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$ ima četiri rješenja: dvostruko realno rješenje $x = 1$ te $x = i$ i $x = -i$. Ovo su samo neki od primjera zašto su matematičari odlučili uvesti kompleksne brojeve. Iako se korijen iz negativnog broja pojavljivao i stoljećima ranije u pokušajima rješavanja kvadratnih jednadžbi (ali se smatrao besmislenim), prva prava potreba za uvođenjem kompleksnih brojeva javlja se u 16. stoljeću, kada se intenzivno razmatrala problematika rješavanja kubnih jednadžbi u radikalima. Matematičari talijanske renesanse posežu za raznim metodama rješavanja da bi došli do njihovih rješenja, a složenost njihovih računa uspoređuje se s pristupima nerješivim antičkim problemima. Talijanski matematičar Luca Pacioli (oko 1445.–1515.) kaže da je odrediti rješenja kubne jednadžbe „podjednako nemoguće u trenutačnom stanju znanosti kao i kvadratura kruga.” [6, 5].

U ovom razdoblju algebra postaje samostalna matematička disciplina, za čiji su razvoj najzaslužniji talijanski matematičari. Među prvim rješenjima kubnih jednadžbi pojavljuje se ono matematičara Scipionea del Ferra (1465.–1526.). On je 1515. godine otkrio metodu rješavanja specijalnog slučaja kubnih jednadžbi[1]:

$$x^3 + px = q,\ p, q > 0\ ^2.$$

[1]Simbolika u to doba još nije bila kao danas, ali mi ćemo račune, postupke i rezultate zapisivati suvremenom simbolikom.

[2]Kao većina u to doba i del Ferro je izbjegavao negativne koeficijente u svojim jednadžbama. Također, u

Njegova metoda zasniva se na ideji prikaza rješenja kao sume, tj. $x = u + v$. Supstitucijom u kubnu jednadžbu redom dobivamo:

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 + p(u+v) &= q,\\
(u+v)[(u+v)^2 + p] &= q,\\
(u+v)[u^2 + 2uv + v^2 + p] &= q,\\
u^3 + v^3 + up + vp + 3u^2v + 3uv^2 &= q,\\
u^3 + v^3 + p(u+v) + 3uv(u+v) &= q,\\
u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) &= q.
\end{aligned}$$

Ako bi u i v bili odabrani tako da je $3uv + p = 0$, preostaje:

$$u^3 + v^3 = q,$$

tj. dobivamo sustav:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ v = -\frac{p}{3u} \end{cases}$$

iz kojeg jednostavnim računom dolazimo do jednadžbe:

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Supstitucijom $t = u^3$ jednadžbu svodimo na kvadratnu $t^2 - qt - \frac{p^3}{27} = 0$, čije rješenje znamo (a znao je i del Ferro) odrediti:

$$(u^3)_{1,2} = t_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Del Ferro uzima u obzir samo pozitivan korijen te dolazi do rješenja polazne kubne jednadžbe:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

---

to doba je uobičajno poštivati princip homogenosti u jednadžbama (nepoznanica se interpretira kao duljina, a kubovi se mogu zbrajati i izjednadčavati samo s kubovima, jer se intepretiraju kao volumeni), pa je p zapravo kvadrat neke duljine (površina), a q je kub neke duljine (volumen).

Iz suvremene perspektive, ovaj postupak rješava i sve druge tipove kubnih jednadžbi. Naime, već su del Ferro i njegovi suvremenici znali da se linearnom supstitucijom iz svake kubne jednadžbe može ukloniti kvadratni član, a ako dozvolimo i negativne brojeve kao p i q opisani postupak je i dalje korektan [6].

Jedan od glavnih novčanih izvora matematičara talijanske renesanse bilo je rješavanje zadataka onima koji su ih trebali kao i natjecanja u rješavanju isth. To je bio razlog zašto su mnogi svoja saznanja čuvali za sebe, pa tako i del Ferro. Netom prije svoje smrti, del Ferro je svoje otkriće podijelio sa svojim studentom Antoniom Mariom Fiorom. Na tadašnjoj matematičkoj sceni istim pitanjima bavio se i Niccolò Fontana (1499. ili 1500.–1557.), poznat pod imenom Tartaglia. On je 1530-ih otkrio i obznanio metodu za rješavanje kubnih jednadžbi oblika $x^3 + px^2 = q^3$. Misleći da Tartaglia blefira, godine 1535. Fior ga je izazvao na matematički dvoboj. Tartaglia je sumnjao na to da je del Ferro Fioru otkrio svoju metodu, pa je osmislio vlastitu (u biti del Ferrovu) metodu za rješavanje tog tipa zadataka. Na natjecanju su jedan drugome zadali 30 zadataka koje je Tartaglia, kombinirajući svoje znanje o oba tipa kubnih jednadžbi, uspio sve riješiti. Fior, kao ne tako dobar matematičar, nije uspio riješiti sve zadatke čime je izgubio, a Tartaglia je stekao slavu. Vijest o pobjedi u dvoboju brzo se pročula dalje i došla do Girolama Cardana [12].

1.2 Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501.–1576.) talijanski je matematičar rođen u Paviji kao nezakonito dijete. Njegov otac bio je pravnik i profesor geometrije, kojemu je Cardano pomagao u poslu već od malena. Svjestan svojeg znanja i sposobnosti, odlučio je upisati studij. Uz očevo dopuštenje upisao je studij medicine u Padovi, usprkos očevim željama da postane pravnik. Paralelno sa studijom bavio se i matematikom. Još jedna velika strast kojom je dodatno zarađivao za život bilo je kockanje, u kojem je bio izrazito uspješan zahvaljujući poznavanju matematike. No, ono je postalo njegova ovisnost koja ga je dovela do gubitka novca i reputacije. Pred kraj svoga života predvidio je datum svoje smrti. Prema legendi, da bi predviđanje ispalo točno, 1576. godine oduzeo si je život [19].

Nakon što je odnio pobjedu u dvoboju, Tartaglia je odlučio zadržati za sebe novostečeno znanje. Njegov plan bio je objaviti knjigu u kojoj će iznijeti metode rješavanja za oba tipa kubnih jednadžbi. Znatiželjan Cardano molio je Tartagliau da mu oda metode, no ispočetka mu nije uspjelo. Naposlijetku, Cardano ga je na prevaru doveo u Milano. Nakon dugog nagovaranja Tartaglia je pristao odati mu metode, ali uz zakletvu da ju Cardano neće nikome odati dok ih on, Tartaglia, ne objavi. Međutim, kada je Cardano, nakon više godina, saznao da Tartaglia nije jedini koji zna riješiti oba tipa kubnih jednadžbi odlučio je prekršiti dogovor. Nakon što je proširio metodu, 1545. godine objavio je knjigu *Ars Magna* u kojoj opisuje postupak za rješavanje svih tipova kubnih jednadžbi. Također, naveo je Tartagliu i del Ferra kao autore metoda. Tartaglia je optužio Cardana za izdaju i izazvao ga na natjecanje. Cardano je kao zamjenika poslao svog studenta Ferrarija, koji je i pobjedio, a Tartaglia je bio prisiljen otići s natjecanja. Objavljivanjem metoda Tartaglia je počeo gubiti na natjecanjima, što mu je zadalo veliki financijski udarac [12].

Cardano je del Ferrovu metodu proširio tako da se može primijeniti na sve tipove kubnih jednadžbi. Pogledajmo suvremeni jedinstveni slučaj u kojemu ćemo objediniti sve slučajeve, tj. prikazat ćemo njegov postupak uz pretpostavku da koeficijenti ne moraju biti pozitivni.

Neka je

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

opća normirana kubna jednadžba. Supstitucijom $x = y - \frac{1}{3}a_1$ dobivamo:

$$\left(y - \frac{1}{3}a_1\right)^3 + a_1\left(y - \frac{1}{3}a_1\right)^2 + a_2\left(y - \frac{1}{3}a_1\right) + a_3 = 0,$$
$$y^3 + y\left(a_2 - \frac{1}{3}a_1^2\right) = -\frac{2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_1a_2 - a_3.$$

Dobili smo kubnu jednadžbu oblika $y^3 + py = q$, gdje je

$$p = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2,$$
$$q = -\frac{2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_1a_2 - a_3.$$

Dakle, opću kubnu jednadžbu sveli smo na del Ferrovu, koju znamo riješiti. Pogledajmo korijen kubne jednadžbe oblika $x^3 = px + q$. Imamo:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Danas znamo da imamo sljedeća tri slučaja:

1. $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$: kubna jednadžba ima jedno realno i dva kompleksna rješenja;

2. $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 0$: kubna jednadžba ima tri realna rješenja od kojih je jedno dvostruko;

3. $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0$: kubna jednadžba ima tri različita realna rješenja.

No, u Cardanovo doba još nije bila poznata veza između stupnja jednadžbe i broja rješenja (osnovni teorem algebre), a osim toga se zbog interpretacije nepoznanice kao duljine tražilo samo (pozitivna) realna rješenja. Ipak, kao što vidimo, upravo u slučaju jedinstvenog realnog rješenja kubne jednadžbe, pod drugim korijenom pojavit će se negativni broj. Pogledajmo to na jednom primjeru.

Primjer 1.2.1. *Riješimo kubnu jednadžbu* $x^3 = 15x + 4$.

Ovo je kubna jednadžba s koeficijentima $a_1 = 0, a_2 = -15, a_3 = -4$. Pomoću formula dobijemo:

$$
\begin{aligned}
p &= a_2 - \frac{1}{3}a_1^2 = -15,\\
q &= -\frac{2}{27}a_1^3 + \frac{1}{3}a_1a_2 - a_3 = 4.
\end{aligned}
$$

Sada po del Ferrovom izvodu za u i v možemo izračunati korijen naše kubne jednadžbe.

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15^3}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}\\
&= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.
\end{aligned}
$$

Vidimo da je $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = -121 < 0$. Lagano se provjeri da ova kubna jednažba zaista ima jedno realno i dva kompleksna rješenja. Ovu je jednadžbu u svojoj *Ars Magna* rješavao Cardano, a znao je da je rješenje ove jednadžbe $x = 4$. No, ono što mu je zadalo muke bilo je kako izračunati korijen negativnog broja. Ipak znajući da je jednadžba rješiva i da je postupak korektan, Cardano je odlučio prihvatiti $\sqrt{-121}$ kao međukorak, iako ga nije smatrao brojem. Prvi koji je dokazao da je dobiveno rješenje $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ uistinu jednako 4 bio je Rafael Bombelli [12, 6].

1.3 Rafael Bombelli

Rafael Bombelli (1526.–1572.) bio je talijanski matematičar i arhitekt rođen u Bologni. Bio je učenik arhitekta Clementija, zbog koga je i zavolio arhitekturu. Iako nije imao fakultetsko obrazovanje, bio je izvrstan matematičar. Tijekom života proučavao je Cardanov i Tartagliain rad. Napisao je djelo od pet knjiga nazvano *Algebra*, djelo koje sadrži potpun prikaz tada poznate algebre. Među ostalim, u njegovoj *Algebri* nalazi se i dokaz da je Cardanovo rješenje kubne jednadžbe $x^3 = 15x + 4$ uistinu 4. Pogledajmo kako je došao do tog rezultata [22].

Bombelli je prvo uočio da ako je rješenje dobiveno Cardanovom formulom realno, tada mora vrijediti da su $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ i $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ ono što danas nazivamo parom konjugirano kompleksnih brojeva. Bombelli zapisuje:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}, \tag{1.1}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}, \tag{1.2}$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$. Zbrajanjem (1.1) i (1.2) dobivamo $x = 2a$, što je realan broj. Kubiranjem (1.1) i (1.2) dobivamo:

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{-121} &= a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1}, \\ 2-\sqrt{-121} &= a^3 - 3a^2b\sqrt{-1} - 3ab^2 + b^3\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Pogledajmo prvu jednadžbu. Jednakosti vrijede ako je zadovoljeno sljedeće:

$$\begin{aligned} 2 &= a(a^2 - 3b^2), \\ 11 &= b(3a^2 - b^2), \end{aligned}$$

što vrijedi za $a = 2$ i $b = 1$. Dakle, Bombelli dobiva:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} &= 2+\sqrt{-1}, \\ \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} &= 2-\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

tj.

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} + 2-\sqrt{-1} = 4.$$

Ovim, iz današnje perspektive nesavršenim, a za ono doba genijalnim dokazom Bombelli postaje prva osoba u povijesti koja je prihvatila kompleksne brojeve. U *Algebri* je dao i opća pravila za račun s njima, pri čemu je imaginarne brojeve zapisivao kao kvadratne korijene negativnih brojeva [6].

Poglavlje 2

Problem geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi te Bombellijevo objašnjenje samog $\sqrt{-1}$ bili su matematički noviteti 16. stoljeća. Unatoč tome, matematičari su još dugo ostali skeptični prema njima, ponajviše zbog nedostatka njihove vizualne predodžbe. Za razliku od korijena pozitivnih brojeva čija je geometrijska konstrukcija već poznata, problemi su se počeli javljati prilikom konstrukcije korijena negativnih brojeva [4].

2.1 René Descartes

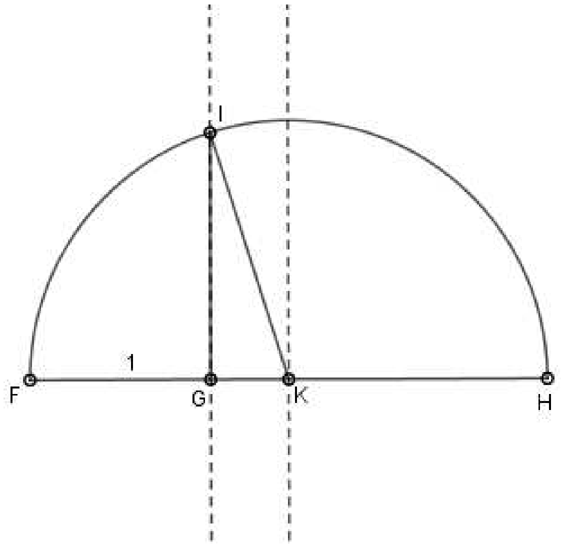
René Descartes (1596.–1650.) je francuski filozof i matematičar uz koga vežemo prve korake u otkrivanju geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva. U svojoj *La Géométrie* iz 1637. donosi geometrijsku konstrukciju korijena pozitivnog broja (slika 2.1), koja je u biti Euklidova konstrukcija kvadrature proizvoljnog pravokutnika.

Descartes zapisuje: Pretpostavimo da je GH dana dužina.[1] Konstruirajmo dužinu duljine $\sqrt{GH}$. Produljimo dužinu GH do točke F tako da je FG jedinične duljine (slika 2.1). Tada vrijedi:

$$FH = FG + GH = 1 + GH.$$

Neka je K polovište dužine FH, dobiveno konstrukcijom simetrale dužine. Konstruirajmo polukružnicu sa središtem u K, radijusa KH. Presjek polukružnice i okomice na dužinu FH u točki G je točka I.

[1] U to doba još se ne koristi simbolika $\overline{AB}$ za dužinu koja spaja točke A i B, a $|AB|$ za njenu duljinu, nego se AB koristi za oba ta značenja.



Slika 2.1: Descartesova konstrukcija korijena iz pozitivnog broja.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} FG + GH &= 2IK, \\ 1 + GH &= 2IK, \\ IK &= \frac{1}{2}(1 + GH). \end{aligned}$$

Sa slike 2.1 vidimo da vrijedi:

$$FK = FG + GK = IK,$$

pa je

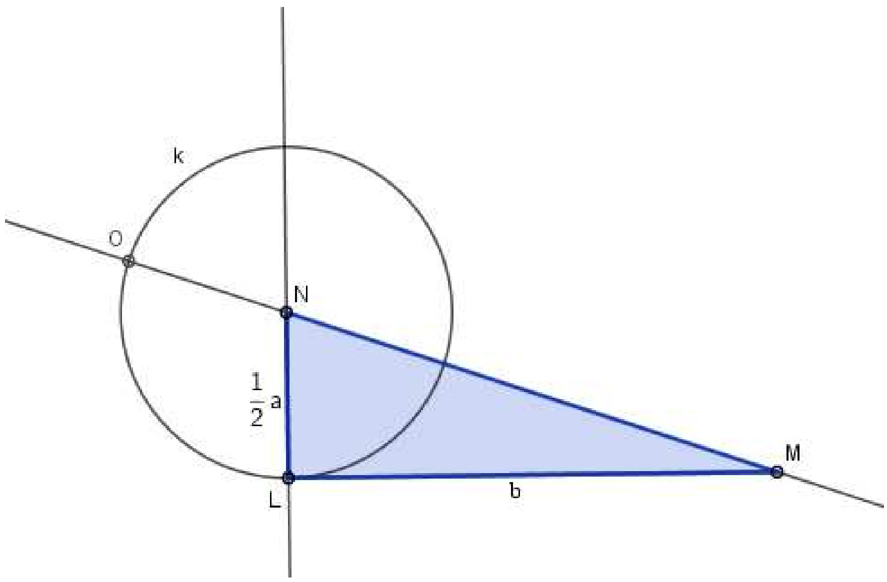
$$GK = IK - FG = IK - 1 = \frac{1}{2}(1 + GH) - 1 = \frac{1}{2}(GH - 1).$$

Trokut GKI je pravokutan, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} &(IG)^2 + (GK)^2 = (IK)^2, \\ &(IG)^2 + \frac{1}{4}(GH - 1)^2 = \frac{1}{4}(1 + GH)^2, \\ &(IG)^2 = GH, \\ &IG = \sqrt{GH}. \end{aligned}$$

Dakle, matematičari su konstrukciju korijena pozitivne duljine, tj. pozitivnog broja, prihvatili i koristili. No, glavno pitanje koje su si postavljali bilo je što korijen iz negativnog broja zapravo znači. Sam Descartes smatra da je provedba te konstrukcije nemoguća, a zaključak je donio rješavajući nekoliko tipova kvadratnih jednadžbi geometrijskom konstrukcijom. Pogledajmo kako je on došao do njihovih rješenja.

Prva od njih bila je $z^2 = az + b^2$, gdje su $a, b^2 > 0$ (slika 2.2). Neka je duljina dužine LM korijen iz b^2, a duljina dužine LN polovina duljine dužine a. (LN dobivamo konstrukcijom simetrale dane dužine duljine a). Descartes dužine LN i LM postavlja tako da budu međusobno okomite. Konstruirajmo potom kružnicu $k(N, \frac{1}{2}a)$. Presjek kružnice k i pravca MN označimo točkom O.



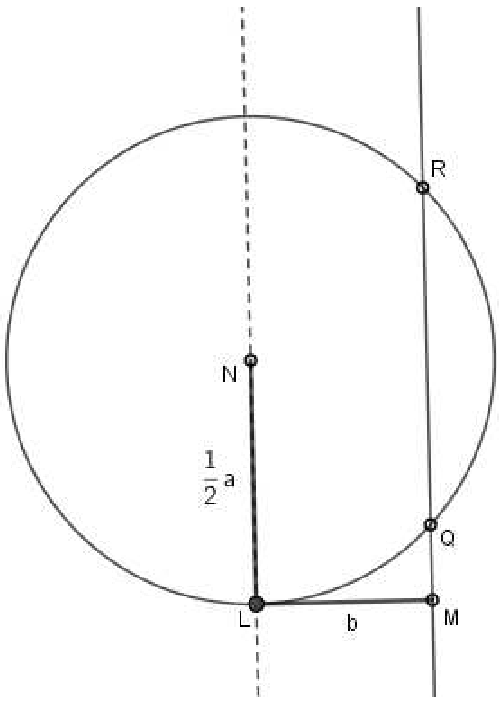
Slika 2.2: Descartesova konstrukcija rješenja kvadratne jednadžbe $z^2 = az + b^2$.

Tada vrijedi:

$$OM = ON + NM,$$
$$OM = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}.$$

Ovom konstrukcijom je Descartes konstruirao pozitivno rješenje OM početne kvadratne jednadžbe. Drugo rješenje ove kvadratne jednadžbe, $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2}$, postiže negativne vrijednosti za sve pozitivne a i b^2 te ga je Descartes ignorirao [6].

Drugi oblik kvadratne jednadžbe koju je Descartes proučavao bila je oblika $z^2 = az - b^2$ (slika 2.3). Kao i u prvom primjeru, neka je $LN = \frac{1}{2}a$, a $LM = b$. Postavljamo dužine LN i LM tako da budu okomite. U točki N konstruiramo kružnicu $k(N, \frac{1}{2}a)$. U presjeku kružnice k i paralele sa dužinom LN kroz točku M dobivamo točke Q i R.



Slika 2.3: Descartesova konstrukcija rješenja kvadratne jednadžbe $z^2 = az - b^2$.

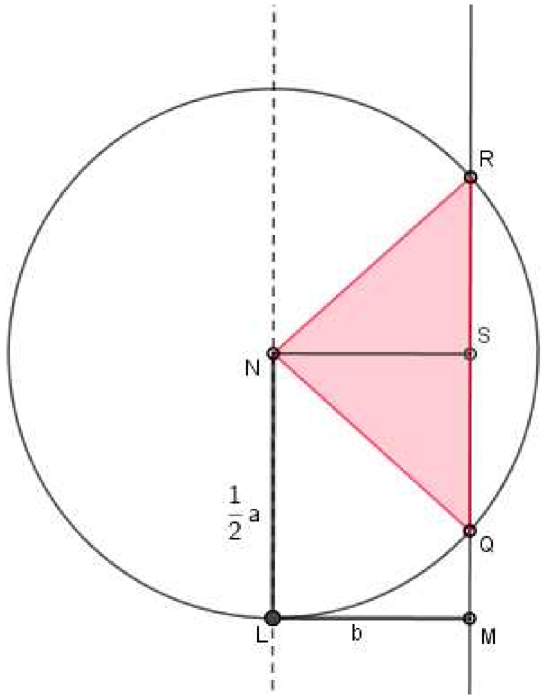
Uistinu, rješenja ove kvadratne jednadžbe su duljine dužina MQ i MR, što ćemo algebarski pokazati. Očito je da

$$MQ = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}QR. \tag{2.1}$$

Odredimo i QR. Pogledajmo trokut NQR (slika 2.4). Neka je NS visina trokuta. Dakle NS dijeli trokut na dva pravokutna trokuta NSR i NSQ. Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo:

$$SR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2},$$

$$QS = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2},$$



Slika 2.4: Pomoćna slika sa istaknutim trokutom NQR.

iz čega dobivamo:

$$QR = QS + SR = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}. \tag{2.2}$$

Supstitucijom (2.2) u (2.1) dobivamo:

$$MQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2},$$

a onda znamo izračunati i MR:

$$MR = MQ + QR = \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2} + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2} =$$
$$= \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}.$$

Iz ovoga računa Descartes je došao do sljedećeg zaključaka: Ako se kružnica i pravac MR ne sijeku i ne dodiruju, jednadžba nema rješenja.[2] Dvostruko rješenje kod njega ne postoji, jer je isključio mogućnost dodira pravca i kružnice.

Jednadžbu oblika $z^2 + az + b^2 = 0$ nikada nema pozitivnih rješenja, jedinih rješenja koja je Descartes prihvaćao. Stoga je ovu jednadžbu ignorirao. Primjenjujući svoje metode pri računanju korijena negativnog broja Descartes je naišao na probleme. Nemogućnost rješavanja takvih problema dovela ga je do netočnog zaključka da je geometrijska konstrukcija korijena negativnog broja nemoguća. Unatoč svemu ovome, Descartes je prvi matematičar koji je uveo pojam imaginarnog broja [6].

2.2 John Wallis

Na netočnost Descartesove tvrdnje ukazao je engleski matematičar John Wallis (1616.–1703.). Wallisovi rezultati bili su prvi konkretni napredak prema geometrijskoj interpretaciji broja $\sqrt{-1}$. Wallis je, za razliku od Descartesa, smatrao da način za konstrukciju $\sqrt{-1}$ postoji. Da su mu imaginarni brojevi bili u interesu istraživanja pokazuju i pisma koja je izmjenjivao sa Johom Collinsom, u kojima Wallis razmatra trokut sa stranicama duljina $1, 2$ i 4. Pokazao je kako koristeći algebru segmenti baze ispod stranica duljina 1 i 2 postaju realni iako takav trokut ne postoji. No, naslućuje se da i sam Wallis prije 1675. još uvijek nije bio siguran u postojanje poveznice između imaginarnih brojeva i njihove geometrijske interpretacije [6].

Tek je 1685. godine došao do značajnijeg napretka u istraživanju. Prvo od važnih otkrića bilo je tumačenje negativnih brojeva prema kojima su mnogi do tada bili sumnjičavi. U djelu *Treatise of Algebra* čitatelje upoznaje s pojmom ishodišta i geometrijskom interpretacijom pozitivnih i negativnih brojeva na pravcu. Prema njemu, pozitivan broj je onaj čiju duljinu dužine nanosimo na pravcu desno od ishodišta, a negativan lijevo. Davanje na važnosti negativnim brojevima otvorio mu je put prema osmišljavanju geometrijske interpretacije imaginarnih brojeva.

Sljedeće što je istraživao bile su proporcionalne veličine. Jedna od definicija onoga doba glasi:

Definicija 2.2.1. *Ako su b i c dani pozitivni brojevi, x je glavna proporcionala brojeva b i c ako vrijedi*

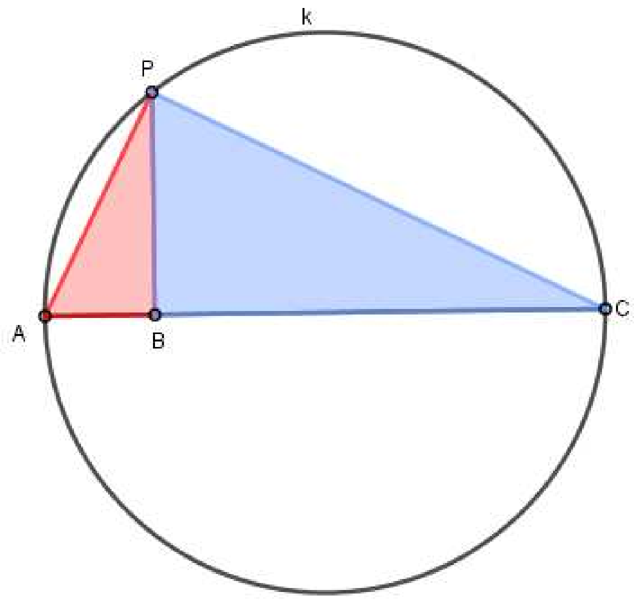
$$b : x = x : c.$$

Vidimo da je definicija glavne proporcionale dvaju brojeva u biti definicija njihove geometrijske sredine:

$$x = \sqrt{bc}.$$

[2]Nema realnih rješenja.

Pogledajmo Wallisovu konstrukciju glavne proporcionale dviju danih dužina (slika 2.5), koja je zapravo generalizacija Descartesove konstrukcije drugog korijena iz pozitivnog broja. Neka je A ishodište. Konstruirajmo dužinu duljine $|AC|$ te kružnicu k sa promjerom $|AC|$. Na promjeru AC odaberimo proizvoljnu točku B iz koje konstruiramo okomicu na AC. U presjeku sa kružnicom dobivamo točku P.



Slika 2.5: Wallisova konstrukcija glavne proporcionale ($|BP| = \sqrt{|AB| \cdot |BC|}$).

Dobili smo dva pravokutna trokuta, $\triangle ABP$ i $\triangle BCP$, na koja možemo primijeniti Pitagorin poučak. Dobivamo:

$$|BP|^2 + |AB|^2 = |AP|^2\,, \tag{2.3}$$

$$|BP|^2 + |BC|^2 = |PC|^2\,. \tag{2.4}$$

Također, prema Talesovom poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice vrijedi

$$|AP|^2 + |PC|^2 = |AC|^2\,. \tag{2.5}$$

Supstitucijom jednadžbi (2.3) i (2.4) u (2.5) dobivamo:

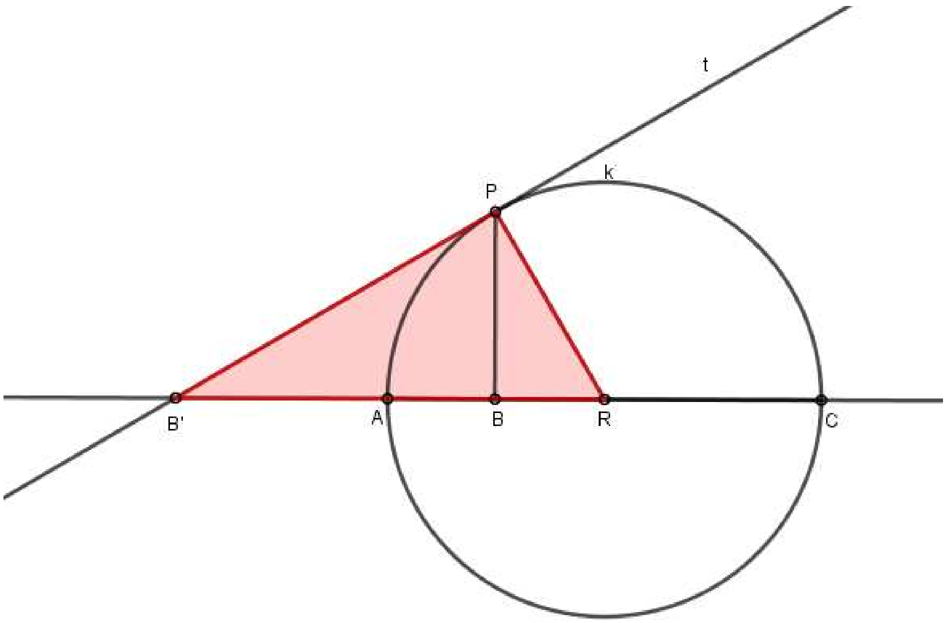
$$|BP|^2 + |AB|^2 + |BP|^2 + |BC|^2 = (|AB| + |BC|)^2,$$

pa je

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot |BP|^2 + |AB|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + 2 \cdot |AB| \cdot |BC| + |BC|^2\,, \\
&|BP|^2 = |AB| \cdot |BC|\,, \\
&|BP| = \sqrt{|AB| \cdot |BC|}.
\end{aligned}
$$

Dakle, Wallis je dobio da je $|BP|$ glavna proporcionala duljina $|AB|$ i $|BC|$. Kako su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ konstruirane na desno od ishodišta, to znači da su brojevi koje one predstavljaju pod korijenom pozitivni. Na dobiveni rezultat je odlučio primijeniti pravilo o konstrukciji negativnih i pozitivnih brojeva [6].

Prikažimo sada i drugi slučaj primjenjujući ovu metodu (slika 2.6). Postupak konstrukcije identičan je kao u prvom slučaju sve do određivanja točke P na kružnici k. U ovome slučaju konstruiramo tangentu t na kružnicu k sa diralištem u točki P. Presjek tangente i pravca AC na kojemu leži promjer neka je B'. Točka B' nalazi se lijevo od ishodišta.



Slika 2.6: Konstrukcija $|B'P| = \sqrt{|AB'| \cdot |B'C|}$.

Očito, trokut $\triangle\ PRB'$ je pravokutan pa primjenom Pitagorinog poučka dobivamo:

$$|B'P|^2 + |RP|^2 = |B'R|^2\,. \tag{2.6}$$

Također, vrijedi:

$$|B'C| = |B'A| + |AC|\,.$$

Dobivamo:

$$|RP| = \frac{1}{2}\,|AC| = \frac{1}{2}(|B'C| - |B'A|).$$

Nadalje:

$$|B'R| = |B'A| + |AR| = |B'A| + \frac{1}{2}\,|AC|\,,$$

stoga je:

$$|B'R| = |B'A| + \frac{1}{2}(|B'C| - |B'A|) = \frac{1}{2}(|B'A| + |B'C|).$$

Supstitucijom $|RP|$ i $|B'R|$ u (2.6) dobivamo:

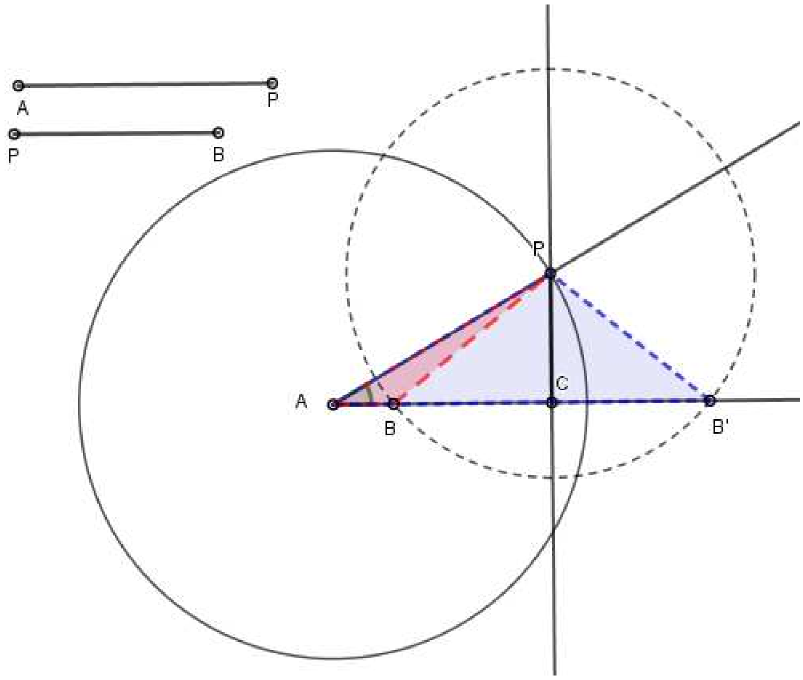
$$\begin{aligned}
&|B'P|^2 + \frac{1}{4}(|B'C| - |B'A|)^2 = \frac{1}{4}(|B'A| + |B'C|)^2,\\
&|B'P|^2 = \frac{1}{4}\left[(|B'A| + |B'C|)^2 - (|B'C| - |B'A|)^2\right],\\
&|B'P|^2 = \frac{1}{4}\left[|B'A|^2 + 2\,|B'A|\cdot|B'C| + |B'C|^2 - |B'C|^2 + 2\,|B'C|\cdot|B'A| - |B'A|^2\right],\\
&|B'P|^2 = |B'A|\cdot|B'C|\,,\\
&|B'P| = \sqrt{|B'A|\cdot|B'C|}.
\end{aligned}$$

Kako je za Wallisa smjer bitan, to znači da je $|B'C| > 0$, a $|B'A| < 0$, tj. umnožak pod korijenom je negativan broj. No, Wallis nije bio toliko zadovoljan ovim rezultatom pa je svoje istraživanje nastavio dalje. U novom pokušaju otkrivanja zagonetke geometrijske interpretacije Wallis je rješavao sljedeći problem:

Primjer 2.2.2. *Konstruirajmo trokut kome su zadane duljine dviju stranica a i b te kut α koji nije između njih.*

Postavimo zadani kut α tako da mu vrh bude točka A. Na jednom kraku označimo točku P, tako da je $|AP| = b$. Tražimo treći vrh trokuta, točku B, tako da bude $|PB| = a$. Prvo iz P povučemo okomicu na drugi krak kuta α, neka je njen presjek s tim krakom C (slika 2.7). Tada je $\overline{PC}$ visina traženog trokuta. Mogući su sljedeći slučajevi:

- Ako je $a > |PC|$, tada imamo dva rješenja.



Slika 2.7: Wallisova konstrukcija trokuta kome su dane dvije dužine i kut.

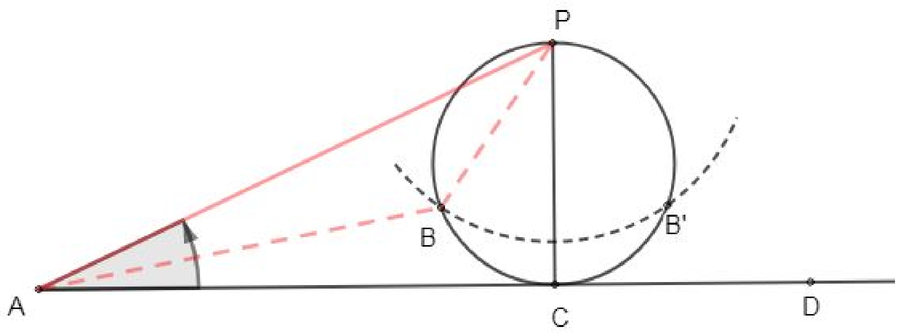
- Ako je $a = |PC|$, onda je rješenje jedinstveno ($B = C$).
- Ako je $a < |PC|$, tada rješenje ne postoji.

Algebarski bismo to zapisali ovako:

$$|AB| = |AC| - |BC| = \sqrt{|AP|^2 - |PC|^2} - \sqrt{|PB|^2 - |PC|^2},$$
$$|AB'| = |AC| + |CB'| = \sqrt{|AP|^2 - |PC|^2} + \sqrt{|PB'|^2 - |PC|^2}.$$

Zaista, u slučaju kada je $|PB| < |PC|$ pod korijenom dobivamo negativnu vrijednost. Prisjetimo se, Descartes je za takve vrijednosti smatrao da su nemoguće. No, Wallis je otišao korak dalje. Njegova ideja, a upravo zbog nje je zapamćen kao prethodnik geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva, bila je dopustiti točkama B i B' da ne leže na kraku AD. Wallis u tom slučaju konstruira kružnicu k promjera $|PC|$ (slika 2.8). Tu kružnicu presijeca (u točkama B i B') kružnicom kojoj je središte P i polumjer a.

Iako bismo na prvu rekli da zadatak nije točno riješen, zbog dvosmislene formulacije (traži se trokut određen duljinama dviju stranica i kutem koji nije kut među njima — nije rečeno da to mora biti unutrašnji kut u trokutu) možemo reći da ipak je. Ovako rješavajući



Slika 2.8: Konstrukcija trokuta kad vrhovi B i B' ne leže na kraku kuta α.

zadatak Wallis je došao do zaključka — važne nove ideje — da se geometrijska interpretacija imaginarnih brojeva očituje u vertikalnom pomaku (točke B i B' su iznad kraka AD umjesto na njemu). Iako to nije uspio precizirati, došao je veoma blizu. Wallisovo razmišljanje uvelike je pomoglo matematičarima nakon njega koji su se bavili istim pitanjem [6].

2.3 Leonhard Euler

Poznati švicarski matematičar, Leonhard Euler (1707.–1783.), također je pokazao interes za kompleksne brojeve. Jedan je od najznačajnijih matematičara svih vremena. Već s 14 godina upisao je sveučilište, najprije je studirao teologiju, ali njegova strast ubrzo je postala matematika. Za svoga života radio je kao profesor na Akademiji u Sankt Petersburgu, kamo je došao na poziv svog prijatelja Daniela Bernoullija, te na Sveučilištu u Berlinu. Od 1727. držao je katedru fizike u Sankt Petersburgu, a od 1731. i matematike. Zbog nereda u Rusiji, razdoblje od 1741. do 1766. proveo je u Berlinu, a tada se opet vraća u Rusiju gdje i umire. Posljednjih 17 godina svog života je bio slijep, no to ga nije spriječilo u njegovom znanstvenom radu. U njegovom znanstvenom opusu mogu se naći rezultati iz raznih grana matematike. Proučavao je infinitezimalni račun, teoriju brojeva, teoriju redova i drugo. Već

1740. godine u jednome pismu Johannu Bernoulliju izjavljuje da se rješenje diferencijalne jednadžbe $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ može zapisati na dva načina kao:

$$y(x) = 2\cos x\,,$$

te kao

$$y(x) = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}.$$

Uistinu, prve i druge derivacije danih funkcija su

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2\sin x\,,\\ y''(x) &= -2\cos x\,, \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sqrt{-1}e^{x\sqrt{-1}} - \sqrt{-1}e^{-x\sqrt{-1}}\,,\\ y''(x) &= -e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\,, \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= -2\cos x + 2\cos x = 0\,,\\ y''(x) + y(x) &= -e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} + e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 0\,. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem dobivamo:

$$2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}},$$

dakle

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

što je kompleksni zapis trigonometrijske funkcije kosinusa. Slično je dobio i zapis funkcije sinus kao

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2i}.$$

Korištenjem redova uspio je povezati funkcije sinus i kosinus s kompleksnom eksponencijalnom funkcijom u obliku znamenitog Eulerovog identiteta [6].

Definicija 2.3.1. *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

gdje je e baza prirodnog logaritma, a i imaginarna jedinica.

Euler kreće od reda, kojeg je ranije izveo:

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}.$$

Zatim uvodi supstituciju $y = \sqrt{-1}x$, te dobiva:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}x} &= 1 + (\sqrt{-1}x) + \frac{1}{2!}(\sqrt{-1}x)^2 + \frac{1}{3!}(\sqrt{-1}x)^3 + \frac{1}{4!}(\sqrt{-1}x)^4 + ... = \\ &= 1 + \sqrt{-1}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}\sqrt{-1}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \end{aligned}$$

Zapišemo li dobiveni broj u obliku $x + \sqrt{-1}y$ dobivamo:

$$e^{\sqrt{-1}x} = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ...\right) + \sqrt{-1}\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...\right).$$

Naposlijetku je uočio da su izrazi u zagradama zapisi funkcija kosinus i sinus u obliku redova, poznati matematičarima još od Newtona. Euler time zaključuje da je $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$. Dobivenu formulu Euler objavljuje 1748. godine u svojoj knjizi *Introductio in Analysis Infinitorum*. Poznato je da je većinu današnje notacije uveo Euler, pa je tako 1777. godine radi lakšeg pisanja uveo i notaciju i kao oznaku imaginarne jedinice [6, 9].

Pisma koja su Euler i Johann Bernoulli razmijenjivali su pravi mali izvor matematičkog blaga. Imaginarna jedinica budila je znatiželju, ali i motivaciju u matematičarima. Mnogo prije nego što je Euler zapisao navedenu formulu, postojali su mnogi pokušaji izračunavanja vrijednosti i^i. U koresponednciji ove dvojice velikih matematičara pronašao se i jedan njihov pokušaj. Posebnu ulogu u tome imao je Bernoullijev zapis kružnice. On je u jednom pismu izjavio da jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu možemo zapisati kao $x^2 + y^2 = 1$, tvrdnja koja je opće prihvaćena u modernoj matematici i koja je poznata još od Descartesovog utemeljenja analitičke geometrije. Bernoulli je također zapisao integral kojim se određuje četvrtina njene površine u prvom kvadrantu. Označimo li tu površinu s A, imamo:

$$A = \int_0^1 y \, dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

Neka je $u = ix$. Tada je:

$$x = -iu,$$
$$\mathrm{d}x = -i\,\mathrm{d}u\,,$$

pa imamo:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^i \sqrt{1-(-iu)^2}\,(-i\,\mathrm{d}u) \\ &= -i\int_0^i \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Riješimo ovaj integral. Supstitucijom

$$u = \operatorname{tg} z\,, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z\,,$$

granice se mijenjaju u $z_1 = \operatorname{arctg}(0)$ i $z_2 = \operatorname{arctg}(i)$ i vrijedi:

$$A = -i\int_0^i \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -i\int_{\operatorname{arctg}(0)}^{\operatorname{arctg}(i)} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}\cdot\frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z\,.$$

Uočimo:

$$1+\operatorname{tg}^2 z = 1+\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}. \tag{2.8}$$

Supstitucijom u gornji integral imamo:

$$A = -i\int_{\operatorname{arctg}(0)}^{\operatorname{arctg}(i)} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 z}}\cdot\frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z = -i\int_{\operatorname{arctg}(0)}^{\operatorname{arctg}(i)} \frac{1}{\cos^3 z}\,\mathrm{d}z.$$

Izračunajmo integral $I = \int \frac{1}{\cos^3 z}\,\mathrm{d}z$. Parcijalnom integracijom, uz:

$$t = \frac{1}{\cos z}\,,\ \mathrm{d}t = \frac{\sin z}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z,$$
$$\mathrm{d}v = \frac{1}{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z\,,\ v = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

slijedi:

$$
\begin{aligned}
I &= \operatorname{tg} z \frac{1}{\cos z} - \int \frac{\sin z}{\cos z} \cdot \frac{\sin z}{\cos^2 z}\, \mathrm{d}z = \frac{\sin z}{\cos^2 z} - \int \frac{\sin^2 z}{\cos^3 z}\, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{\sin z}{\cos^2 z} - \int \frac{1 - \cos^2 z}{\cos^3 z}\, \mathrm{d}z = \frac{\sin z}{\cos^2 z} - \int \frac{1}{\cos^3 z}\, \mathrm{d}z + \int \frac{1}{\cos z}\, \mathrm{d}z\,.
\end{aligned}
$$

Dakle

$$
I = \frac{1}{2}\frac{\sin z}{\cos^2 z} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos z}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos z}\operatorname{tg} z + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos z}\, \mathrm{d}z,
$$

što je, uvrstimo li (2.7) i (2.8), jednako:

$$
I = \frac{1}{2} u\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos z}\, \mathrm{d}z. \tag{2.9}
$$

Želimo još odrediti integral $\int \frac{1}{\cos z}\, \mathrm{d}z$. Zapišimo ga u ovom obliku:

$$
\int \frac{\frac{1}{\cos z}\cdot(\frac{1}{\cos z} + \operatorname{tg} z)}{\frac{1}{\cos z} + \operatorname{tg} z}\, \mathrm{d}z\,.
$$

Neka je $s = \frac{1}{\cos z} + \operatorname{tg} z$. Tada je:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \left(\frac{\sin z}{\cos^2 z} + \frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}z, \\
\mathrm{d}s &= \left(\operatorname{tg} z \frac{1}{\cos z} + \frac{1}{\cos^2 z}\right)\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

te supstitucijom u integral dobivamo:

$$
\int \frac{\frac{1}{\cos^2 z} + \frac{\operatorname{tg} z}{\cos z}}{s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\frac{1}{\cos^2 z} + \frac{\operatorname{tg} z}{\cos z}} = \int \frac{1}{s}\, \mathrm{d}s = \ln|s| = \ln\left|\frac{1}{\cos z} + \operatorname{tg} z\right|. \tag{2.10}
$$

Konačno, uvrštavanjem (2.10) u (2.9), vraćanjem prvobitne supstitucije $u = \operatorname{tg} z$ te uvrštavanjem granica našeg početnog određenog integrala dobivamo sljedeći rezultat:

$$
\begin{aligned}
A &= -i \cdot \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left|\sqrt{1+u^2} + u\right|\right)\Big|_0^i \\
A &= -\frac{1}{2} i \ln(i).
\end{aligned}
$$

No, znamo da je površina četvrtine kruga jednaka $\frac{\pi}{4}$, pa izjednačavanjem dobivamo:

$$\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} i \ln(i),$$

odnosno

$$-\frac{\pi}{2} = \ln(i^i),$$

tj.

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} .$$

Važno je naglasiti da ovaj zadnji korak u to vrijeme nisu napravili ni Euler ni Bernoulli. Postojalo je još pokušaja ovog izračuna. Talijanski grof Giulio Carlo dei Toschi di Fagnano (1682.–1766.) primijenio je sličnu metodu, ali uzima opsega kruga, a rezultat koji je dobio bio je identičan Bernoullijevom. Iako Euler nije bio prvi koji je razmatrao i^i, bio je prvi koji je zaključio da $e^{-\frac{\pi}{2}}$ nije jedina njena vrijednost [6].

2.4 Wessel (i De Moivre)

Bilo je potrebno stoljeće nakon Wallisovih rezultata da bi problem geometrijske interpretacije konačno bio riješen. Za to je zaslužan Norvežanin Caspar Wessel (1745.–1818.). Bio je student prava na Sveučilištu u Kopenhagenu, ali je zbog financijskih poteškoća postao geodet i kartograf. Svakodnevni problemi s kojima se kartografi susreću pomogli su mu u rješavanju geometrijske zagonetke kompleksnih brojeva. Wessel kaže da se kompleksni broj oblika $a + bi$ može predočiti kao točka (a, b), $a, b \in \mathbb{N}$, smještena u kompleksnoj ravnini ili kao usmjerena dužina s početnom točkom u ishodištu, a krajnjoj u toj točki (a, b) [6].

Wessel kompleksni broj kojemu je duljina radijus-vektora koji ga reprezentira (dakle, kojemu je apsolutna vrijednost) r i čiji kut smjera (kut radijus-vektora s pozitivnim dijelom x-osi, tj. argument) je θ zapisuje kao $r \angle \theta$ te ćemo u ovom odjeljku koristiti taj zapis. Wessel je naravno znao, to je posljedica već davno poznatih osnovnih rezultata analitičke geometrije, da je duljina usmjerene dužine koja predstavlja kompleksni broj z, tj. duljina usmjerene dužine s početkom O i krajem (a, b) jednaka $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Wessel je napravio čak tri otkrića koja zajedno čine kompleksnu ravninu. Prvo od njih bilo je pravilo za zbrajanje usmjerenih dužina koje predstavljaju kompleksne brojeve (uočimo da takve uvijek imaju početak u ishodištu). Promatra dva slučaja:

1. Dvije usmjerene dužine koje leže na x-osi zbrajaju se tako da početnu točku jedne usmjerene dužine postavimo na krajnju točku druge, te je njihov zbroj usmjerena dužina s početnom točkom prve, te krajnjom točkom druge usmjerene dužine.

2. Neparalelne usmjerene dužine zbrajaju se po pravilu paralelograma: Zbroj dviju orijentiranih dužina kojima su krajevi u točkama z i w je orijentirana dužina koja spaja ishodište s četvrtim vrhom paralelograma kojemu su prva tri vrha ishodište, z i w.

Drugo pravilo odnosi se na njihovo množenje, koje uspoređuje s množenjem realnih brojeva. Omjer produkta i jednog faktora jednak je omjeru drugog faktora i jedinice. Na primjer, produkt brojeva 5 i -3 je -15. Prema pravilu vrijedi: $\frac{-15}{5} = -3 = \frac{-3}{1}$ i obrnuto, $\frac{-15}{-3} = 5 = \frac{5}{1}$. Wessel pretpostavlja, analogno realnim brojevima, da za produkt dvije usmjerene dužine vrijedi:

1. Duljina produkta usmjerenih dužina jednaka je produktu duljina usmjerenih dužina.
2. Smjer usmjerene dužine dobivene produktom razlikuje se od smjera jedne usmjerene dužine za istu veličinu kuta kao što se druga usmjerena dužina razlikuje u smjeru u usporedbi s jediničnom usmjerenom dužinom i obrnuto [6].

Uočimo da je Wessel ovime postavio i temelje algebre geometrijskih vektora, koji u to doba još nisu bili definirani. Iako o njima nije razmišljao na način na koji to danas činimo, pokazalo se da su usmjerene dužine koje je koristio u računima ekvivalentne današnjim geometrijskim vektorima [4].

Primjer 2.4.1. *Izračunajte modul i argument produkta $z = (1+i)(2+i)$ koristeći Wesselova pravila.*

Odredimo najprije duljine usmjerenih dužina produkta, tj. module kompleksnih brojeva, te kutove koje zatvaraju s x-osi, tj. njihove argumente:

$$|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2},$$
$$|2 + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Stoga je prema prvom od Wesselovih pravila za množenje kompleksnih brojeva modul od z jednak $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$. Nadalje, broju $1 + i$ odgovara usmjerena dužina s krajem $(1, 1)$, dakle je kut smjera tog vektora $45°$, odnosno u Wesselovoj notaciji prvi član produkta je $\sqrt{2} \angle 45°$. Broju $2 + i$ odgovara usmjerena dužina s krajem $(2, 1)$ pa je to broj $\sqrt{5} \angle \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Prema drugom Wesselovom pravilu za množenje kompleksnih brojeva je kut broja z jednak $45° + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, tj. $z = \sqrt{10} \angle \left(45° + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.

Wessel pretpostavlja da postoji usmjerena dužina $\sqrt{-1}$ duljine l s kutom smjera θ, tj. $\sqrt{-1} = l \angle \theta$. Kvadriranjem dobiva: $-1 = l^2 \angle 2\theta$. Budući da znamo da je $-1 = 1 \angle 180°$, izjednačavanjem imamo:

$$l^2 \angle 2\theta = 1 \angle 180°,$$

pa je

$$l = 1,\ \theta = 90^\circ,$$

tj.

$$i = \sqrt{-1} = 1 \angle 90^\circ.$$

Iz ovoga zaključuje da je imaginarna os okomita na realnu, tj. da je množenje sa $\sqrt{-1} = i$ zapravo rotacija za 90°, što je bilo njegovo treće pravilo, ujedno i najvažnije. Sva svoja otkrića zapisao je u dokumentu *„O analitičkoj reprezentaciji smjera"* predstavljenom 1797. godine danskoj Karaljevskoj akademiji znanosti. Dokument je javno objavljen, na danskom jeziku, tek 1799. godine, čime je Wessel postao prva osoba koja nije član Akademije, a čiji je rad objavljen [6].

Ovi rezultati omogučili su matematičarima puno lakše računanje i izvođenje formula kao što su trigonometrijski identiteti $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, funkcije dvostrukog argumenta i slično. Inspiriran ovim uspjehom, Wessel izvodi i formule za korijen i potenciju kompleksnog broja. Uzima jedinični radijus-vektor s kutom smjera $\frac{\theta}{m}$, $m \in \mathbb{Z}$, te zapisuje sljedeću formulu:

$$\begin{aligned}
\left\{1 \angle \frac{\theta}{m}\right\}^m &= 1^m \angle \left(\underbrace{\frac{\theta}{m} + \ldots + \frac{\theta}{m}}_{m \text{ puta}}\right) \\
&= \underbrace{\left(1^m \angle \frac{\theta}{m}\right) \cdot \left(1^m \angle \frac{\theta}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1^m \angle \frac{\theta}{m}\right)}_{m \text{ puta}} \\
&= \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{m}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{m}\right)\right)}_{m \text{ puta}} \\
&= \left\{\cos(\frac{\theta}{m}) + i \sin(\frac{\theta}{m})\right\}^m \\
&= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\
&= 1 \angle \theta.
\end{aligned}$$

Potom uzima kut smjera θ te na analogan način računa m-ti korijen kompleksnog broja:

$$\{\cos(\theta) + i \sin(\theta)\}^{\frac{1}{m}} = \cos\left(\frac{\theta}{m}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{m}\right)$$

Wessel nije bio prvi koji je izveo ove formule.

Abraham De Moivre (1667.–1754.) francuski je matematičar najpoznatiji po formuli koja nosi njegovo ime: De Moivreova formula. Formula povezuje kompleksne brojeve sa trigonometrijskim funkcijama, a služi za lakše računanje korijena i potencija kompleksnih brojeva. Danas je ona matematičarima poznata kao De Moivreov teorem koji glasi:

Teorem 2.4.2. *Za svaki kompleksan broj* $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ *i prirodan broj* n *vrijedi:*

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \ \ [1].$$

U časopisu *Philosophical Transactionsof the Royal Society of London*, iz 1698. godine De Moivre je objavio članak koji sadrži ovu formulu, a jednu varijantu iste objavio je još 1707. godine. De Moivre navodi da je već 1676. godine Newton znao za tvrdnju ekvivalentnu ovoj, pomoću koje je izračunao treći korijen kompleksnih rješenja Cardanove kubne jednadžbe. Pomoću De Moivreovog teorema matematičari su jednostavnije izračunavali potencije kompleksnih brojeva, no nedostajala je geometrijska interpretacija $|z|$ i θ, odnosno broja z.

Ako za n dozvolimo i razlomke tipa $\frac{1}{m}$, De Moivreova formula omogućuje izračunavanje (prve od m vrijednosti) m-tog korijena kompleksnog broja. Tako je i Wessel uspio izračunati $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ kao $2\angle 10^\circ$. Kompleksni broj čiji treći korijen traži zapisuje kao:

$$\sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} \ \angle \ \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = 8 \angle 30^\circ,$$

te potom računa treći korijen:

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}} = 8^{\frac{1}{3}} \angle \frac{30^\circ}{3} = 2 \angle 10^\circ.$$

Wessel je znao da postoji m vrijednosti m-tog korijena rotiranih za isti kut $\frac{360^\circ}{m}$, tj. da je prethodni broj $2\angle 10^\circ$ samo prvi od tri kompleksna treća korijena broja $4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}$. Dakle, $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ ima vrijednosti: $2\angle 10^\circ$, $2\angle 130^\circ$ i $2\angle 250^\circ$ [6].

Primjer 2.4.3. *Koristeći De Moivreovu formulu pokažite da je jedno rješenje Cardanove kubne jednažbe* $x^3 = 15x + 4$ *jednako* 4.

U primjeru 1.2.1. već smo odredili njeno rješenje: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Koristeći De Moivreovu formulu, izračunajmo vrijednost ovog x-a. Kompleksni broj $2+11i$ zapisan na Wesselov način ima oblik:

$$\sqrt{4 + 121} \ \angle \ \operatorname{arctg}\left(\frac{11}{2}\right) = \sqrt{125} \angle 79.69515353^\circ$$

Prvi od trećih korijena tog kompleksnog broja je:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} &= \sqrt[3]{\sqrt{125}}\ \angle\ \frac{79.69515353^\circ}{3}\\ &= \sqrt[3]{\sqrt{125}}\ \angle\ 26.56505117^\circ\\ &= \sqrt[3]{\sqrt{125}}\ (\cos(26.56505117)^\circ + i\sin(26.56505117)^\circ)\\ &= 2+i\end{aligned}$$

Analogno, $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-i$, čime smo pokazali da je $x = 4$ prvo od tri rješenja jednadžbe $x^3 = 15x + 4$.

Spomenimo još i da je Wessel naveo i treći način zapisa kompleksnih brojeva: pomoću eksponencijalne funkcije, tj. temeljem Eulerovog identiteta: Svaki kompleksan broj z s modulom $|z|$ i argumentom θ je $z = |z|\,e^{i\theta}$. Sva ova otkrića bila su veliki iskorak u napretku matematike. Jedini do tada poznati brojevi, realni, bili su ograničeni samo na jednu, tzv. realnu os. Uvođenjem kompleksnih brojeva razmatranja brojeva se proširuju na dvodimenzionalnu ravninu, a skup realnih brojeva time je proširen na skup kompleksnih brojeva [6].

2.5 Gauß i Argand

Wesselov rad objavljen 1799. godine dugo je ostao nepoznat, posebice jer je bio pisan na danskom jeziku, objavljen u lokalnom danskom časopisu. Široj javnosti postao je poznat tek nakon 1897. godine, kad je objavljen prijevod na francuski jezik [18]. Posljedica je da danas kompleksnu ravninu nazivamo po dva matematičara koji su je otkrili međusobno nezavisno, a i nezavisno od Wessela, početkom 19. stoljeća. Prvi od njih je švicarsko-francuski hobi-matematičar Jean-Robert Argand (1768.–1822.). On je 1806. proučavao kompleksne brojeve. Svoje ideje objavio je u nepotpisanome radu, čije je kopije poslao kolegama u nadi da će oni znati tko je autor. No, rad je brzo „nestao” s javne scene. Rad je naime dospio u ruke Adrien-Marie Legendreu, koji ga je proslijedio braći François i Jacques Français. Jacques Français je objavio Argandov članak 1813. godine, navodeći da opisuje rad nepoznatog znanstvenika na području geometrije kompleksnih brojeva. U istom se Argand prepoznao te je objavio novi članak kao odgovor na prethodni. Jacques Français zatim sve zasluge pridaje Argandu, ne znajući za Wesselova otkrića od prije skoro 20 godina [6].

Još je jedan znanstvenik obilježio ovo razdoblje. Bio je to Carl Friedrich Gauß (1777.–1855.), njemački matematičar i astronom koji je svoju darovitost pokazao već kao dijete. Usprkos tome što je već 1796. godine posjedovao ideje o teoriji geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva, objavio ih je tek 1831. godine. Iako su kompleksnu ravnini opisali nezavisno jedan od drugog i ne znajući za raniji Wesselov opis, danas ju nazivamo po njima: Gaußova ili Argandova ravnina [11].

Ova dva matematičara dali su i bitne nezavisne doprinose konačnom dokazu osnovnog teorema algebre:

Teorem 2.5.1. *Polinom*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,$$

ima n nultočaka u $\mathbb{C}$*, računajući njihove kratnosti [2].*

Krajem 16. stoljeća François Viète (1541.–1603.) je dao prve primjere jednadžbi stupnja n koje imaju n rješenja. Francuski matematičar, Albert Girard (1595.–1632.) je 1629. godine zapisao da svaka algebarska jednadžba s realnim koeficijentima ima onoliko rješenja koliki je njen stupanj, ali da se ta rješenja nalaze u možda nekom većem skupu od skupa kompleksnih brojeva. Mnogi su se matematičari okušali u dokazivanju ovog teorema, ali većina njih bezuspješno. Problem je bio u tome što su pažnju usmjerili na dokazivanje toga da su rješenja kompleksni brojevi, umjesto na tvrdnju da postoji n rješenja. I Descartes se okušao u dokazu teorema. On je u svome djelu *La Géométrie* naveo da je moguće zamisliti da jednadžba n-tog stupnja ima n rješenja, ali da zamišljena rješenja nemaju realnu vrijednost. U svome pokušaju je ponudio nekoliko ilustracija dokaza, ali bez generalnog dokaza [14].

Za razliku od Descartesa, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.) je tvrdio da teorem ne vrijedi, a 1702. godine je svoju tvrdnju potkrijepio protuprimjerom. Tvrdio je da se $x^4 + t^4$ ne može zapisati kao produkt dva kvadratna polinoma. Mislio je da se $\sqrt{i}$ ne može zapisati u formi kompleksnog broja, odakle je i proizašla greška. Grešku u njegovom dokazu ispravio je Euler, a također je dokazao osnovni teorem algebre za polinome stupnja $n \leq 6$ s realnim koeficijentima. Nedostatke u Eluerovom dokazu popravio je Lagrange, ali ni on nije uspio dati generalni dokaz [7, 14].

Prvi objavljen ispravan dokaz teorema dao je Gauß 1799. godine u svojoj doktorskoj disertaciji. Za vrijeme svog života Gauß je ponudio još tri dokaza: dva 1816. godine i jedan 1849. godine, u kojem je prvi put pokazano da kompleksan polinom stupnja n ima n kompleksnih rješenja. Zanimljivo je da je Argand prvi koji je izrekao taj teorem za slučaj kompleksnih koeficijenata, a dao je i jedan vlastiti dokaz za slučaj realnih koeficijenata [14].

Poglavlje 3

Nastanak kompleksne analize

Početkom 19. stoljeća matematika se počela razvijati u potpuno novom smjeru. To je razdoblje zabilježilo stvaranje teorije funkcija, a matematičari su se usredotočili na proučavanje kompleksnih funkcija s kompleksnim varijablama. Glavnim utemeljiteljima smatraju se Cauchy, Riemann i Weierstraß.

3.1 Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789.–1857.) francuski je matematičar, inžinjer i fizičar. Rođen je u Parizu, ali zbog tadašnje političke situacije uzrokovane Francuskom revolucijom djetinjstvo je proveo u Arcueilu. Važnu ulogu u njegovom obrazovanju imali su Cauchyjev otac, kao i obiteljski prijatelji, Joseph-Louis Lagrange (1736.–1813.) i Pierre-Simon Laplace (1749.–1827.). Njih dvoje su Cauchya i usmjerili k matematici. Lagrange je savjetovao njegovog oca da Cauchy najprije nauči jezike, a potom se usmjeri k matematici, što su i napravili. Nakon dvije godine studiranja klasičnih jezika Cauchy se posvetio studiju matematike i inžinjerstva. O njegovom inžinjerskom uspjehu svjedoči i to da je kao student sudjelovao u projektu konstrukcije pomorske baze za Napoleona i njegovu vojsku. Ipak, sa 23 godine sve više ga je počela privlačiti matematika, a interes za inžinjerski posao pomalo je blijedio. Iako je zadržao svoje inžinjersko radno mjesto, u periodu od 1813. do 1815. godine većinu svojega vremena posvetio je proučavanju simetričnih funkcija i teoriji algebarskih jednadžbi višeg stupnja. Od 1815. godine nadalje predavao je na *École Polytechnique*. Rješenjem jednog Fermatovog problema iz teorije brojeva stekao je slavu među matematičarima. Nakon pada Napoleona, vlast je preuzela dinastija Bourbona te su uslijedile promjene. Na pariškoj Akademiji znanosti, nakon otpuštanja nekoliko profesora, jedno od radnih mjesta je dodjeljeno Cauchyju. Kao nastavnik predavao je o metodama integracije koje je sam osmislio, ali ne i objavio. U tome periodu svojega rada postavio je uvjete konvergencije beskonačnih redova kao i definiciju integrala. 1829. godine postavio je temelje kompleksne analize definirajući pojam kompleksne funkcije s kompleksnom varijablom. Nije bio poznat po dobrim odnosima sa svojim kolegama, a mnoge njihove radove je zagubio ili pak zaboravio na njih. Također, često je tuđe rezultate objavljivao pod svojim imenom [13, 16].

Svoju matematičku nadarenost potvrdio je memoarom objavljenim 1814. godine u kojemu je iznio same početke moderne teorije funkcija kompleksne varijable i njihove integracije. Rad je prezentirao Akademiji znanosti, a u njemu se po prvi put pojavljuje ideja o reziduumima. Ipak, rad je prvi puta pušten u javnost 1825. godine zajedno s dodacima, a iznova je izdan 1882. godine. Jedine promjene u novom izdanju bile su u pogledu zapisa. Proučavajući ponašanje funkcija u točkama prekida unutar putanje nekog zatvorenog puta, došao je do glavne ideje za pisanje rada, a to je da integral analitičke funkcije s kompleksnom varijablom duž nekog puta ovisi o ponašanju te funkcije u točkama prekida. Primjene koje je Cauchy koristio u ovome memoaru uključivale su isključivo jednostavnije integrale. Jedan od ciljeva ovog memoara bio je objasniti zašto dvostruki integrali postižu različite vrijendosti, ovisno o redoslijedu integracije. Također, Cauchy je izbjegavao kompleksne vrijednosti razdvajajući ih na realni i imaginarni dio. Matematički jezik u radu je sadržavao dulje jednadžbe te nejasne oznake i račune. Posljedično tome, istraživanje nije bilo prihvaćeno od njegovih suvremenika. Izdanje iz 1825. godine ipak je uključivalo jednostavnije kompleksne funkcije iz kojih su se lakše shvatile njegove ideje [3].

Stvaranje ove nove grane matematike proizašlo je iz traženja odgovora na pitanje što je to derivacija kompleksne funkcije kompleksne varijable. Današnja definicija glasi:

Definicija 3.1.1. *Neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z_0 \in \Omega$. Funkcija f je derivabilna u točki z_0 ako postoji*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ukoliko taj limes postoji, označavamo ga s $f'(z_0)$ i nazivamo derivacija funkcije f u točki z_0 [2].

No, prije otkrića temeljnog teorema kompleksne analize, matematičari su izveli izraze danas poznate pod nazivom Cauchy-Riemannove jednadžbe (C-R uvjeti) [1]. Jasno je da se kompleksna funkcija s kompleksnim varijablama može zapisati u obliku $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, gdje su u i v realne funkcije s realnim varijablama. Upravo se na njih odnose C-R uvjeti:

Teorem 3.1.2 (Cauchy-Riemannovi uvjeti)**.** *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija, $z_0 \in \Omega$. Neka je $f = u + iv$. Tada je f derivabilna u točki z_0 ako i samo ako je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*

[1] U nastavku teksta C-R uvjeti.

diferencijabilna u točki (x_0, y_0) *i vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ [2].$$

Do ovih uvjeta dolazi se jednostavnim računom, iz definicije derivacije kompleksne funkcije s kompleksnim varijablama.[2] Kako znamo da je

$$\Delta z = z - z_0 \ ,$$

to je

$$z = \Delta z + z_0 \ ,$$

te za $z \rightarrow z_0$ dobivamo ekvivalentan izraz definicije naše derivacije:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z + z_0) - f(z_0)}{\Delta z} \ .$$

Zapišemo li z_0 i Δz kao $z_0 = x_0 + iy_0$ i $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ slijedi:

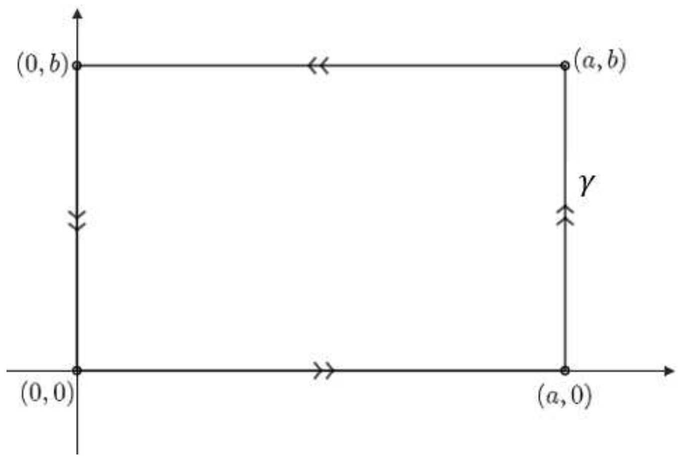
$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} \ .$$

Razmatrajući slučajeve kada je Δz paralelan s realnom odnosno imaginarnom osi, točnije kada je $\Delta x = 0$ odnosno $\Delta y = 0$ te ih uvrštavajući u gore navedenu formulu dobivamo upravo C-R uvjete. Obrat, tj. da C-R uvjeti povlače derivabilnost f (uočimo da u definiciji $f'(z_0)$ broj z teži prema z_0 iz svih smjerova, a ne samo paralelno s realnom ili imaginarnom osi) uočio je i dokazao Riemann u svojoj disertaciji 1851. godine..

Iako uvjeti nose Cauchyjevo i Riemannovo ime, prvi koji je došao do izraza ekvivalentnim njima bio je Jean le Rond d'Alambert (1717.–1783.), proučavajući hidrodinamiku 1752. godine. Ipak, matematičari su veću pažnju posvetili istraživanjima „čistih" matematičara i naravno korektnim dokazima, stoga se uvjeti nazivaju po Cauchyju i Riemannu [6].

U svojim bilješkama Cauchy je odredio vrijednost integrala funkcije $f(z) = e^{-z^2}$ duž zatvorenog pravokutnika (slika 3.1). Zanimljivo je da je i prije nego je riješio ovaj zadatak poznavao činjenicu da je vrijednost integrala (derivabilne) funkcije definirane na $\mathbb{C}$ duž bilo kojeg zatvorenog puta γ jednak nuli. Iako je znao da je vrijednost ovog integrala nula, Cauchy ga je ipak izračunao rastavljajući ga na dijelove. To je rezultiralo davanjem općeg postupka, tj. teorema danas poznatog kao Cauchyjev teorem, a glasi:

[2]U doba Eulera i D'Alemberta limes još nije bio definiran pojam; tek Cauchy ga je razjasnio i derivacije definirao na današnji način.



Slika 3.1: Zatvoreni put duž kojeg je Cauchy integrirao funkciju $f(z) = e^{-z^2}$.

Teorem 3.1.3 (Cauchyjev teorem). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje, a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ vrijedi:*

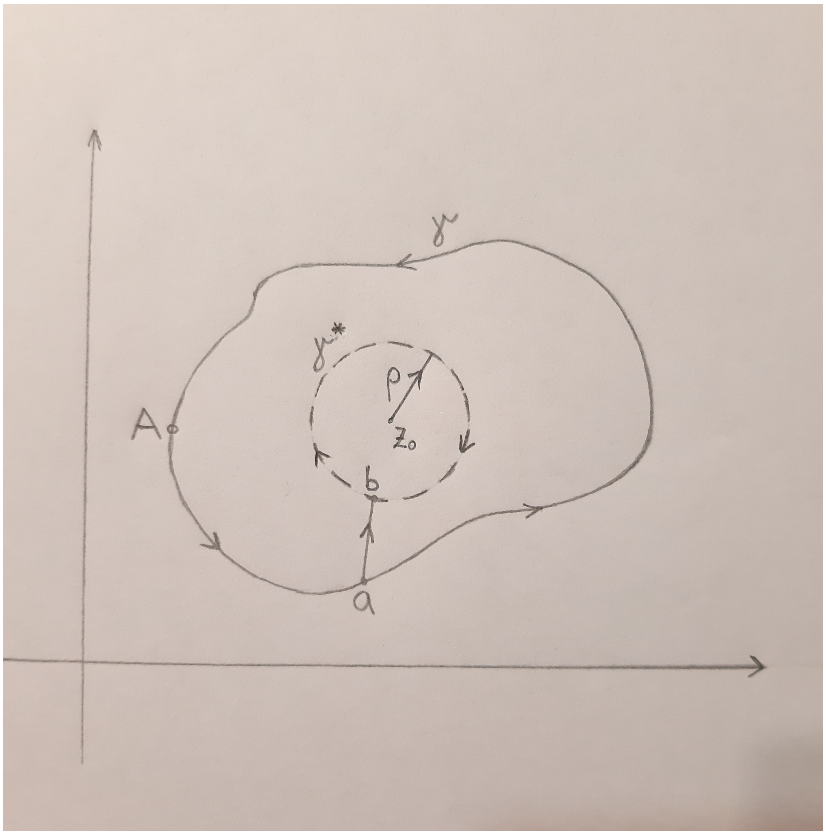
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \text{ [2].}$$

Iz Gaußovog pisma prijatelju, iz 1811. godine, saznajemo da je i Gauß poznavao ovaj teorem, no nije ga htio objaviti dok ne bude pravi trenutak. Međutim, Cauchy ga je objavljivanjem memoara, tri godine kasnije, preduhitrio te rezultat pripisujemo njemu. Prema dogovoru za smjer integracije duž puta uzima se pozitivan smjer, te njime opisujemo unutrašnjost puta γ. Put integracije je jednostavna krivulja, tj. zatvorena krivulja koja područje dijeli na unutarnje i vanjsko. Danas Cauchyjev teorem dokazujemo pomoću Greenovog teorema. Godine 1846. Cauchy je prihvatio Greenov teorem te se pretpostavlja da bi ga i on sam dokazao na današnji način da ga je prije poznavao.

Drugi značajan rezultat kojeg je Cauchy objavio u memoaru bio je još jedan teorem, točnije Cauchyjeva integralna formula. Proučavajući ponašanje analitičke funkcije na određenom području, zapitao se što bi se desilo kada bismo integrirali kompleksnu funkciju s kompleksnim varijablama duž nekog puta unutar kojega se nalazi točka, ili više njih, u kojoj funkcija nije derivabilna. Cauchy se zapitao čemu bi bio jednak integral:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\,.$$

Odgovor na to pitanje je upravo Cauchyjev drugi teorem, tj. Cauchyjeva integralna formula. Prije nego je došao do odgovora, Cauchy je proučavao kako se funkcija ponaša u „problematičnim" točkama, tj. u onim točkama u kojima funkcija $\frac{f(z)}{z-z_0}$ nije definirana. Pretpostavimo da je naša funkcija f holomorfna[3] na nekom području unutar puta γ koji uključuje točku $z = z_0$ za koju vrijedi $f(z) \neq 0$. Tada je i funkcija $\frac{f(z)}{z-z_0}$ analitička na čitavom skupu osim u točki $z = z_0$. Točku z_0 nazivamo singularitetom. Na slici je prikazana jed-



Slika 3.2: Prikaz jednostavno zatvorene krivulje oko singulariteta z_0.

nostavna zatvorena krivulja γ i njena unutrašnjost koja sadrži točku z_0, te kružnica γ^* sa središtem u točki $z = z_0$ radijusa ρ. Pogledajmo još kako se krećemo po našem putu γ. Zamislimo da smo krenuli iz točke A u pozitivnom smjeru. Kad samo došli do a naš put se nastavlja prema kružnici γ^*. Zatim se vraćamo istim putem nazad, te nastavljamo po putu γ u pozitivnom smjeru nazad do točke A. Primijetimo da je, ovako obilazeći, točka $z = z_0$

[3]Kompleksna funkcija je holomorfna na nekom području kompleksne ravnine ako u svakoj točki tog područja ima derivaciju.

uvijek s unutarnje strane. Primjenom Cauchyjevog teorema dobivamo:

$$\oint_{\gamma,ab,-\gamma^*,ba} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Također, primijetimo da se putevi *ab* i *ba* mogu „poništiti”, jer smo se istim putem „popeli i spustili”. Stoga, zapisujemo:

$$\oint_{\gamma,-\gamma^*} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

tj.

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \oint_{\gamma^*} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0.$$

γ^* je krug sa središtem z_0 i radijusom ρ, stoga možemo zapisati:

$$z = z_0 + \rho \cdot e^{i\theta},$$

te je

$$\mathrm{d}z = i\rho e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Sada možemo zapisati

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\, i\rho\, e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho\, e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Primijetimo da je integral na lijevoj strani neovisan o ρ. Zbog jednakosti to znači da je i integral na desnoj strani neovisan o ρ. Dakle, za proizvoljno mali ρ, tj. $\rho \to 0$ dobivamo $f(z) = f(z_0)$. unutar γ^*. Ako je $z = z_0$ unutar γ vrijedi:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = i f(z_0)\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi\, i f(z_0).$$

Konačno dobivamo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

tj. Cauhyjevu integralnu formulu [6].

U svome radu Cauchy je predstavio i izveo nekoliko zanimljivih primjera kojima je pokazao svu moć integracije kompleksnih funkcija s kompleksnim varijablama. Pokažimo jedan primjer.

Primjer 3.1.4. *Odredimo vrijednost integrala*

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x,$$

gdje su $m, n > 0$ *i* $n > m$.

Zapišimo našu funkciju kao

$$\oint_\gamma \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,\mathrm{d}z\,,$$

gdje je γ područje integracije koje ne sadrži sve singularitete. Odredimo najprije singularitete naše funkcije pod integralom. Zanimaju nas nultočke izraza $z^{2n}+1$. Vrijedi:

$$z^{2n} = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = \cos\pi,$$

pa je

$$z = \sqrt[2n]{-1} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{2n},$$

tj.

$$z_k = e^{i\pi\frac{1+2k}{2n}}\ ,\ k = 0, 1, 2, ..., 2n-1\ .$$

Znamo da su korijeni našeg kompleksnog broja su smješteni na kružnicu, pa zbog simetrije vrijedi da su korijeni koji se postižu za $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ nalaze iznad x-osi, a korijeni koji se postižu za $k = n, n+1, ..., 2n-1$ ispod. Cauchy za područje integracije uzima gornju polukružnicu (slika 3.3). Sada možemo zapisati:

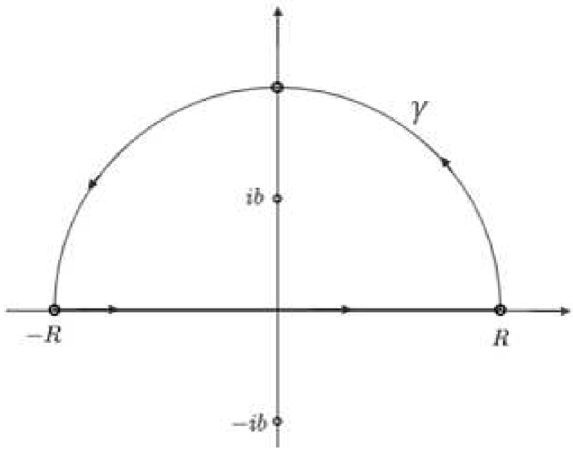
$$\oint_\gamma \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x + \int_\gamma \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,\mathrm{d}z\,.$$

S obzirom da ovako postavljeno područje γ sadrži pola singulariteta, prema Cauchyjevom teoremu znamo da je vrijednost integrala $\int_\gamma \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,\mathrm{d}z$ nula. Nadalje, kako se z nalazi na kružnici možemo ga zapisati kao $z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta}$, te imamo:

$$\oint_\gamma \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{R^{2m}e^{i2m\theta}}{1+R^{2n}e^{i2n\theta}} iR^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Kada $R \to \infty$ dobivamo:

$$\oint_\gamma \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x\,.$$



Slika 3.3: Prikaz područja integracije funkcije iz primjera.

Izračunamo li integral s lijeve strane, znat ćemo iznos traženog integrala. Pogledajmo nazivnik našeg razlomka na lijevoj strani. On se može zapisati kao:

$$1 + z^{2n} = (1 + iz^n)(1 - iz^n) = (1 + i\sqrt{i}z^{\frac{n}{2}})(1 - i\sqrt{i}z^{\frac{n}{2}})(1 + \sqrt{i}z^{\frac{n}{2}})(1 - \sqrt{i}z^{\frac{n}{2}}) = \prod_{k=0}^{2n-1}(z - z_k)\ .$$

Raspišimo još i cijeli razlomak. Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo:

$$\frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}} = \frac{z^{2m}}{\prod_{k=0}^{2n-1}(z - z_k)} = \frac{N_0}{z - z_0} + \frac{N_1}{z - z_1} + ... + \frac{N_{2n-1}}{z - z_{2n-1}}\ .$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}}\,\mathrm{d}z &= \oint_\gamma \frac{N_0}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \oint_\gamma \frac{N_1}{z - z_1}\,\mathrm{d}z + ... + \oint_\gamma \frac{N_{2n-1}}{z - z_{2n-1}}\,\mathrm{d}z \\ &= \left[\oint_\gamma \frac{N_0}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + ... + \oint_\gamma \frac{N_{n-1}}{z - z_{n-1}}\,\mathrm{d}z\right] + \left[\oint_\gamma \frac{N_n}{z - z_n}\,\mathrm{d}z + ... + \oint_\gamma \frac{N_{2n-1}}{z - z_{2n-1}}\,\mathrm{d}z\right].\end{aligned}$$

Uočimo da se singulariteti iz prve zagrade nalaze u našem području, dok oni iz druge zagrade ne. Stoga su, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, vrijednosti integrala u drugoj zagradi jednake 0. Vrijednosti u prvoj zagradi iznose $2i\pi\, N_k$. Time smo dobili:

$$\oint_\gamma \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\, i \sum_{k=0}^{n-1} N_k = 2\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}\,\mathrm{d}x,$$

iz čega slijedi:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = i\pi \sum_{k=0}^{n-1} N_k \,.$$

Za kraj, odredimo još vrijednost N_k. Neka je p proizvoljan cijeli broj, takav da $0 \leq p \leq n-1$. Množenjem

$$\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}} = \frac{N_0}{z-z_0} + \frac{N_1}{z-z_1} + ... + \frac{N_p}{z-z_p} + \frac{N_{p+1}}{z-z_{p+1}} + ... + \frac{N_{n-1}}{z-z_{n-1}}$$

sa $(z-z_p)$ dobivamo:

$$\frac{(z-z_p)z^{2m}}{1+z^{2n}} = \frac{(z-z_p)N_0}{z-z_0} + \frac{(z-z_p)N_1}{z-z_1} + ... + N_p + \frac{(z-z_p)N_{p+1}}{z-z_{p+1}} + ... + \frac{(z-z_p)N_{n-1}}{z-z_{n-1}} \,. \tag{3.1}$$

Pustimo li da z teži u z_p, lako ćemo odrediti vrijednost od N_p. Članovi na desnoj strani jednakosti u (3.1) postaju nula za $z \to z_p$. Iz toga slijedi da je

$$N_p = \frac{(z-z_p)z^{2m}}{1+z^{2n}} \,.$$

Pogledajmo limes ovog izraza.

$$N_p = \lim_{z \to z_p} \frac{(z-z_p)z^{2m}}{1+z^{2n}} = \lim_{z \to z_p} \frac{z^{2m+1} - z_p z^{2m}}{1+z^{2n}} = \frac{0}{0} \,.$$

Primjenom L'Hôpitalovog pravila[4] dobivamo:

$$\begin{aligned} N_p &= \lim_{z \text{ to } z_p} \frac{(2m+1)z^{2m} - 2mz_p z^{2m-1}}{2nz^{2n-1}} = \frac{2mz_p^{2m} + z_p^{2m} - z_p 2mz_p^{2m-1}}{2nz_p^{2n-1}} \\ &= \frac{z_p^{2m}}{2nz_p^{2n-1}} = \frac{z_p^{2(m-n)+1}}{2n} \,. \end{aligned}$$

Prisjetimo se, z_k smo zapisali kao:

$$z_k = e^{i\pi \frac{1+2k}{2n}} ,$$

[4]Neka su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ osim možda u točki $c \in I$, te neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I \setminus c$. Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ i $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ tada je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ [8].

pa iz toga slijedi:

$$N_p = \frac{e^{i\pi\frac{(1+2p)(2m+1-2n)}{2n}}}{2n} = \frac{e^{\frac{i\pi(2p+1)(2m+1)}{2n}} \cdot e^{-i\pi(1+2p)}}{2n}.$$

No,

$$e^{-i\pi(1+2p)} = -1,$$

pa konačno dobivamo:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = -\frac{i\pi}{2n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi(2p+1)(2m+1)}{2n}}.$$

Uočimo da smo dobili geometrijski red s kvocijentom $e^{\frac{2i\pi(2m+1)}{2n}}$, pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi(2p+1)(2m+1)}{2n}} &= e^{\frac{i\pi(2m+1)}{2n}} \cdot \frac{1-e^{\frac{2ni\pi(2m+1)}{2n}}}{1-e^{\frac{2i\pi(2m+1)}{2n}}} \\
&= e^{\frac{i\pi(2m+1)}{2n}} \cdot \frac{1-e^{i\pi(2m+1)}}{1-e^{\frac{i\pi(2m+1)}{n}}} \\
&= \frac{1}{e^{-\frac{i\pi(2m+1)}{2n}}} \cdot \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi(2m+1)}{n}}} \\
&= \frac{2}{e^{-\frac{i\pi(2m+1)}{n}} - e^{\frac{i\pi(2m+1)}{n}}}.
\end{aligned}$$

Primjenom kompleksnog zapisa trigonometrijske funkcije sinusa slijedi da je gornji izraz jednak

$$\frac{2}{-2i\sin\frac{\pi(2m+1)}{2n}},$$

tj.

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = -\frac{i\pi}{2n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{i\pi(2p+1)(2m+1)}{2n}} = -\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{2}{-2i\sin\frac{\pi(2m+1)}{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

što je konačno rješenje.

Matematičari poput Adrien-Marie Legendrea (1752.–1833.) i Sylvestrea Francoisa Lacroixa (1765.–1843.) kao pozitivne značajke Cauchyjevog rada istaknuli su osmišljavanje niza općih formula za vrednovanje i transformaciju određenih integrala, te činjenicu da vrijednost dvostrukih integrala zaista ovisi o redoslijedu integracije te otkriće njenog uzroka. Ipak, iskazali su da iako nova teorija nosi nova saznanja, ne treba odbaciti staru [3, 6].

3.2 Laurent, Riemann i Weierstraß

Objavivši memoare 1814. godine, Cauchy je svoj rad usmjerio prema kompleksnoj analizi. Tako je u sljedećih 35 godina razvio osnove teorije. Većinu danas znanih teorema i formula pripisujemo Cauchyju. Unatoč tome, Cauchy u to doba nije pridavao veliku pažnju redovima potencija kompleksnih funkcija. Oni su dobili na važnosti tek 1843. godine kada ih je francuski matematičar Pierre Alphonse Laurent (1813.–1854.) osmislio i zapisao. Pierre Alphonse Laurent rođen je 1813. godine u Parizu kao peto dijete u obitelji. No, kada je Francuska doživjela austrijsku i prusku okupaciju, obitelj se početkom 1814. godine preselila u Englesku, Cheltenham. Nakon deset godina provedenih u Engleskoj, obitelj se vratila u Francusku. Tamo je 1830. godine, u doba kada je u Francuskoj došlo do smjene vlasti, tj. svrgavanja kralja Karla X, Pierre Alphonse Laurent upisao *École Polytechnique*. Dvije godine kasnije, Laurent je završio školu kao jedan od najboljih učenika. Tih godina Francuska je pokušavala osvojiti područje Alžira, tadašnje autonomne provincije Otomanskog carstva. U srpnju, 1830. godine francuske trupe iskrcale su se u Alžiru. Kako u Alžiru nisu postojale ujedinjene snage kojima bi se oduprijeli, Francuska je osvojila određena područja. Ipak, dvojica čelnika skupila su podršku protiv francuskih osvajača. Odgovor Francuske bio je slanje novih trupa koje bi svladale otpor vođa. U dvije od tih ekspedicija sudjelovao je i Laurent. Oko 1840. godine vratio se u Pariz gdje se bavio inžinjerskim poslovima. Paralelno s time započeo je pisati svoje prve matematičke izvode. Jedan od razvoja reda potencija koji danas nosi njegovo ime, Laurentov razvoj, osmislio je 1843. godine [21]. Današnja formulacija teorema glasi:

Teorem 3.2.1. *Neka je $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ kružni vijenac i f holomorfna funkcija na V. Tada za sve $z \in V$ vrijedi*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

pri čemu vrijedi da je

$$a_n = \frac{1}{2\pi\, i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \, ,$$

gdje je γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u z_0 radijusa $\rho \in \langle\, r, R \rangle$ [2].

Ipak, ovaj rezultat je postao poznat i ostalim matematičarima zahvaljujući Cauchyju, koji ga je predstavio francuskoj akademiji i pokušao osigurati njegovo objavljivanje. No, rad je svoje izdanje dočekao tek 1863. godine, nakon smrti obojice matematičara.

Drugi značajan rad kojeg je Laurent predstavio akademiji bio je proširenje jednog od Cauchyjevih teorema. Laurentova ideja zasnivala se na tome da x predstavlja realnu ili imaginarnu varijablu. Tada se realna ili imaginarna funkcija $f(x)$ može prikazati kao zbroj dva konvergentna reda, jedan s rastućim potencijama broja x, a drugi s padajućim potencijama broja x, pri čemu je modul od x unutar intervala na kojem je funkcija ili njena derivacija konačna i neprekidna. Cauchy se opet zalagao za objavljivanje rada, naravno kako bi kroz njega prezentirao i vlastiti. No, Akademija je to odbila. Razočaran ishodom, Laurent se posvetio radu na proučavanju teorije polarizacije i svjetlosnih valova [21].

Bernhard Rieman, njemački matematičar, smatra se drugim osnivačem teorije funkcija. Rođen je 1826. godine kao drugo dijete u obitelji. Sve do njegove desete godine učitelj mu je bio vlastiti otac. 1840. godine upisao je srednju školu u Lyceumu, preskočivši prva dva razreda. Tamo je živio sa svojom bakom. Nakon njene smrti preselio se u Lüneburg gdje je upisao gimnaziju Johanneum. Pokazao je veliki interes za matematiku te mu je tamošnji ravnatelj dopustio da u njegovoj vlastitoj knjižnici proučava matematičke tekstove. Zanimljivo je da je Legendreovu knjigu o teoriji brojeva, od 900 stranica, pročitao u šest dana [17].

Godine 1846. upisao je studij teologije u Göttingenu, gdje je pohađao dodatne sate matematike. Ipak, ljubav prema matematici je bila jača te se prebacio na studij filozofije gdje joj se mogao više posvetiti. Jedan od njegovih tamošnjih profesora je bio i Gauß, koji je već 1811. godine posjedovao osnovne koncepte teorije funkcija. Upravo je on imao najveći utjecaj na Riemannov matematički rad. Dokaz tome su pisma u kojima su njih dvojica raspravljali o diferencijalnim jednadžbama, a Riemannu su svakako poslužila kao inspiracija. Međuostalim, Riemann je u Göttingenu proučavao i njegove doprinose teoriji konformalnog mapiranja [17, 15].

Godinu dana kasnije prebacio se na Sveučilište u Berlinu gdje su mu međuostalim predavali Carl Gustav Jacobi (1804.–1851.), Johan Gustav Dirichlet (1805.–1859.) i Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823.–1852.). S Eisensteinom i Jacobijem je raspravljao o računima s eliptičnim funkcijama[5] s kompleksnim varijablama, a s Dirichletom o teoriji određenih integrala i parcijalnim jednadžbama. Njegov talent prepoznao je Dirichlet te mu je svojim doprinosom pomogao u napretku njegove karijere omogučivši mu literaturu za pisanje habilitacije kojom je Riemann dobio poziv sveučilišnog docenta. Upravo za vrijeme svog boravka u Berlinu, Riemann je razvio opću teoriju kompleksnih funkcija koja mu je kasnije poslužila i kao temelj njegovih najvažnijih dijela [17, 15].

Također, stekao je dobro znanje u teorijskoj fizici te topologiji koje je primjenio u kasnijem radu. Rad se bazirao na teoriji kompleksnih varijabli te tzv. Riemannovim površinama. 1851. godine otkrio je poveznicu između višeznačnih kompleksnih funkcija i topologije. Ispitivao je geometrijska svojstva analitičkih funkcija te konformna preslikavanja. Ovim otkrićem teorija kompleksnih funkcija se uvelike proširila. Riemann je umro mlad, u dobi od samo 39 godine, od tuberkuloze (1866.) [6].

Riemannove napore u ovoj grani matematike priznao je i Weierstraß, treći suosnivač teorije kompleksnih funkcija. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815.–1897.) bio je

[5] Eliptična funkcija je analitička funkcija f takva da $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pri čemu je f periodična.

njemački matematičar rođen u Ostenfeldeu. Kao dijete, zbog prirode očevog posla, često je mijenjao školu. Kasnije je upisao katoličku gimnaziju gdje je bio odličan učenik. Nakon završetka srednje škole upisao je studij financija i administracije u Bonnu. Proučavao je Laplaceove i Jacobijeve radove vezane uz eliptičke funkcije. Kao student napisao je tri članka u kojima je najavio bitne ideje njegovog rada u teoriji funkcija. U njima je iznio dokaz Laurentovog teorema, zatim koncept uniformne konvergencije, definiciju analitičke funkcije zapisane pomoću redova potencija i drugo. Ipak, samo jedan rad je objavljen. Weierstraß je naglasio kako je na njegov rad najveći utjecaj imao Niels Henrik Abel (1802.–1829.). Proučavanje upravo Abelovih funkcija, koje su poopćenje eliptičkih funkcija jedne kompleksne varijable na više njih, i pisanje o njima u jednom od svoja tri rada osiguralo mu je poziv u Berlin 1856. godine. Iste godine odnos između njega i Riemanna postaje napetiji. Weierstraßova proučavanja Abelovih funkcija objavljena su javno u matematičkom časopisu, što je natjeralo Riemanna na još veći angažman u vlastitome radu. Riemann je istom časopisu opisao svoj rad, nakon čega je Weierstraß ipak povukao svoje djelo [20, 15].

Unatoč svemu, na osobnoj razini su se slagali, dok su na profesionalnoj razini jedan na drugoga imali veliki utjecaj. Oboje su radili kao profesori, Weierstraß je došao na mjesto Dirichleta u Göttingenu, a Riemann kao redoviti profesor teorijske astronomije i mehanike. Weierstraß je bio inspiriran Riemannovim radovima. No, ostali matematičari su smatrali da Weierstraßova predavanja ne uključuju dovoljno Cauchyjevih otkrića, dok Riemannove metode ne pripadaju matematici Eulera, Lagrangea, Gaußa i ostalih [15].

3.3 Riemannova hipoteza

Rad završavamo kratkim opisom najpoznatijeg neriješenog problema današnjice, Riemannove hipoteze. Ovaj matematički problem istaknuo se svojom važnošću već u 18. stoljeću. Bio je na meti raznih matematičara, no njegovo rješenje još ni danas nije otkriveno. Priča o njemu započinje s Eulerom. Euler je zapisao potpuno novu funkciju, nazvanu ζ-funkcija. Krenuo je od reda jednakih potencija recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva:

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \ p = 1, 2, 3\dots .$$

Primijetimo, za $p = 1$ dobivamo harmonijski red čiju je divergenciju pokazao još Nicole Oresme (1325.–1382.). On je S_1 zapisao kao:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots .$$

Članove je grupirao tako da je u svakoj zagradi najmanji član oblika $\frac{1}{2^n}, n \in Z$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} S_1 &> 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ... = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... \end{aligned}$$

Zbrajanje $\frac{1}{2}$ beskonačno mnogo puta očigledno daje beskonačnu vrijednost, dakle S_1 divergira. 1731. godine Euler je otkrio da ako je $S_1^{(n)}$ n-ta parcijalna suma od S_1, tada

$$\lim_{n\to\infty}\{S_1^{(n)} - \ln(n)\}$$

konvergira broju γ, gdje je γ takozvana *Eulerova konstanta* koja iznosi $\gamma = 0.577215664...$. S druge strane, njemačko-danski matematičar Nicolaus Mercator (1620.–1687.) je još 1668. godine izveo Mercatorov red $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}$ za koji danas znamo da konvergira za $x \in \langle -1, 1]$. Dakle, Eulerova konstanta se može opisati i ovako:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\{S_1^{(n)} - \ln(n+1)\} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right\} = \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} S_p .$$

Nakon što su otkrili vrijednost sume S_1, matematičari su htjeli više, te im je pažnju okupiralo određivanje vrijednosti sume S_2. No, zadatak nije bio nimalo lak. Mnogi su se okušali u tome, ali bezuspješno, sve do 1734. godine i Eulerovog uspjeha, do kojeg je došao koristeći zapis funkcije sinusa u red. Prisjetimo se, razvoj funkcije sinus kao reda potencija glasi:

$$\sin x = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... .$$

Euler to koristi da zapiše

$$f(y) = \frac{\sin(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = 1 - \frac{1}{3!}y + \frac{1}{5!}y^2 - \frac{1}{7!}y^3 + ... , \tag{3.2}$$

te je promatrao nultočke ove funkcije f. To su očito oni brojevi y za koje je $\sin(\sqrt{y}) = 0$ uz uvjet da je $\sqrt{y} \neq 0$, tj. $y \neq 0$. Dakle,

$$y = k^2\pi^2,\ k \in \mathbb{N}.$$

S druge strane, znao je da se polinom čije su nultočle $x_1, x_2, ..., x_n$ (od kojih nijedna nije 0) možemo zapisati ovako:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n) \\ &= (-x_1)\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \cdot (-x_2)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdot ... \cdot (-x_n)\left(1 - \frac{x}{x_n}\right) \\ &= (x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n)\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{x}{x_n}\right). \end{aligned}$$

Kako su $x_1, ..., x_n \neq 0$, to znači da je, za polinom f, $f(x) = 0$ točno ako $\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) = 0$.

Pogledajmo vrijednost koeficijenta uz x u takvoj jednadžbi. Jednostavnim računom dolazimo do:

$$a_1 = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}\right),$$

tj. koeficijent uz prvu potenciju varijable je suprotni zbroj recipročnih vrijednosti nultočaka polinoma. Euler to razmišljanje, nepravilno, primjenjuje na „beskonačni polinom”, tj. red $f(y)$ i zaključuje u našem slučaju:

$$a_1 = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ...\right). \tag{3.3}$$

Iz (3.2) vidimo da je $a_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$, te izjednačavanjem sa (3.3) dobivamo:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ...\right) &= -\frac{1}{6}, \\ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... &= \frac{\pi^2}{6}, \\ \frac{\pi^2}{6} &= S_2 . \end{aligned}$$

Iako postupak nije sasvim korektan, rješenje je točno. Rješenje ovog problema, kasnije poznatog pod imenom Baselski problem, Euleru je donio najveću slavu. Pokazalo se da je ovom metodom moguće odrediti vrijednosti od S_p za svaki parni p, dok za neparne ova metoda ne daje točne rezultate. Eulerova upornost dovela je do novog rezultata kojeg je zapisao 1740. godine. Otkrio je da se S_p može zapisati u obliku $S_p = N\pi^p$, tako da je za parne brojeve p broj N racionalan, a za neparne je iracionalan. Posljedično ovim rezultatima, 1737. godine Euler je zapisao ζ-funkciju kao:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + ...$$

Kako bi osigurao konvergenciju sume, Euler je varijablu z ograničio na z realan broj veći od 1. Uočimo da je $S_p = \zeta(p)$.

Nadalje se pokazalo da postoji poveznica između $\zeta(z)$ i prostih brojeva, a rezultirala je izvođenjem relacije koju nazivamo Eulerov produkt. Da bismo ju lakše razumjeli prisjetimo se osnovnog teorema aritmetike:

Teorem 3.3.1. *Faktorizacija svakog prirodnog broja $n > 1$ na proste faktore je jedinstvena, do na poredak prostih faktora.*

Pogledajmo kako je Euler došao do „svog" produkta. Pomnožimo $\zeta(z)$ s $\frac{1}{2^z}$. Tada dobivamo:

$$\frac{1}{2^z}\zeta(z) = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \frac{1}{8^z} + \ldots .$$

Oduzimanjem gornje jednadžbe od $\zeta(z)$ imamo:

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{9^z} + \ldots . \tag{3.4}$$

Sada ćemo jednadžbu (3.4) pomnožiti sa $\frac{1}{3^z}$:

$$\frac{1}{3^z}\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = \frac{1}{3^z} + \frac{1}{9^z} + \frac{1}{15^z} + \frac{1}{21^z} + \ldots ,$$

te oduzimanjem od (3.4) dobivamo:

$$\zeta(z)\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\left(1 - \frac{1}{3^z}\right) = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} + \ldots .$$

Množenjem svake sljedeće jednadžbe sa $\frac{1}{p^z}$, gdje je p prosti broj, te oduzimanjem od prethodne uočavamo da su se svi članovi čiji je nazivnik višekratnik prostog broja p pokratili. Konačno imamo:

$$\left\{\prod_{p\ prost}\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)\right\}\zeta(z) = 1 ,$$

tj.

$$\zeta(z) = \prod_{p\ prost}\left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1} .$$

Dobivena relacija naziva se Eulerov produkt.

Dakako, ζ-funkcija je zaintrigirala i druge matematičare, među kojima se najviše istaknuo Bernhard Riemann. On je 1859. godine proširio ζ-funkciju na skup kompleksnih brojeva. Za kompleksne brojeve z s realnim dijelom većim od 1 je $\zeta(z)$ definirana istim redom kao kod Eulera, a zatim je pokazao da se tako definirana ζ-funkcija može proširiti do holomorfne funkcije s domenom $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Riemann je dalje razmatrao njezine nultočke. Prvo je otkrio da je svaki negativan paran broj njezina nultočka; te nultočke nazivamo trivijalnim nultočkama ζ-funkcije. Tražeći netrivijalne nultočke ζ-funkcije utvrdio je da im realni dio mora biti unutar intervala $\langle 0, 1\rangle$. Budući da nije našao nikoju netrivijalnu nultočku kojoj je realni dio različit od $\frac{1}{2}$, postavio je hipotezu: Sve netrivijalne nultočke ζ-funkcije imaju realni dio jednak $\frac{1}{2}$. Navedena tvrdnja naziva se Riemannova hipoteza. Iako su do danas mnogi matematičari pokušali dokazati ovu hipotezu, ona je i danas nedokazana te se smatra najvećim neriješenim problemom suvremene matematike [9, 6].

Poglavlje 4

Zaključak

Usporedimo li povijesni tijek razvoja kompleksnih brojeva s današnjim pristupom u školama vidimo da uvođenje imaginarne jedinice dolazi iz različitih potreba. Ona je u 16. stoljeću uvedena zbog nemogućnosti određivanja rješenja problema koje su pred matematičare stavljale kubne jednadžbe. Danas ju uvodimo ne samo da bismo definirali kompleksan broj, nego i da bismo učenike upoznali s činjenicom da nikoje kvadratne jednadžbe nisu nerješive, nego je samo pitanje je li skup dovoljno „velik“ da bismo ju mogli riješiti. Cardanova formula za određivanje rješenja kubnih jednadžbi u tadašnje doba je bila revolucionarna. Matematičari su imali alat kojim su rješavali kubne jednadžbe, no rješenja koja su dobivali mogla su, iz današnje perspektive, biti „još ljepše zapisana“. Tek je Bombelli došao do toga nakon što je prihvatio kompleksne brojeve. Dakle, povijesno gledano, potreba za uvođenjem kompleksnih brojeva ne potječe od toga što želimo da sve kvadratne jednadžbe budu rješive u nekom dovoljno velikom skupu, nego jer su nužni da bismo dobili realna rješenja kubnih jednadžbi.

Ono što danas uzimamo zdravo za gotovo, negativne brojeve, pokazalo se kao prepreka i temelj u određivanju geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva. Kroz rad vidimo da se, postepeno, mijenjao i način njihove reprezentacije. Prvi od tih načina bio je Kartezijev, gdje je kompleksni broj zapisan u obliku $a + bi$. Wessel je prvi istaknuo da se on može reprezentirati točkom (a, b). Ovo je možda najlakši način na koji danas kompleksne brojeve vizualno u kompleksnoj ravnini predočujemo učenicima. Wessel je tada na kompleksne brojeve gledao kao na usmjerene dužine te je dao pravila za njihovo zbrajanje i množenje koje danas primjenjujemo na vektorima. Za razliku od toga, u školama se najčešće pred djecu stavljaju gotove formule i pravila: kompleksne brojeve zbrajamo tako da im zbrojimo realni dio s realnim, a imaginarni s imaginarnim, tj.

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) ,$$

dok ih množimo po sljedećoj formuli

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(da + bc) .$$

U većini zadataka zahtjeva se drugi način zapisa, trigonometrijski: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdje je $\theta \in [0, 2\pi\rangle$. To je zato jer je pogodniji za izvođenje operacija množenja i dijeljenja, ali i zato što su De Moivreove formule za potenciranje i korijenovanje zapisane u ovoj formi. Upravo se u ovom načinu vidi jasna razlika u notaciji koju koristimo danas, i onoj koju je koristio Wessel. U obje notacije je jasno naglašen modul kompleksnog broja i njegov argument. Gledajući vizualno, jedina razlika je što je tadašnja notacija $l\ \angle\theta$ svakako bila kraća. Neovisno o stilu zapisa, vidimo da je Wesselova geometrijska interpretacija, tj. otkriće kompleksne ravnine, ne samo doprinijelo boljem razumijevanju (a u konačnici i primjenama) kompleksne ravnine, nego je i pojednostavilo računanje s kompleksnim brojevima.

Treći način reprezentacije je eksponencijalni zapis:

$$z = |z|\, e^{i\theta} ,$$

poznati Eulerov identitet. Danas se s tim zapisom susrećemo tek na fakultetima, a najčešće se koristi u području kompleksne analize, kao i ostali Cauchyjevi rezultati u teoriji kompleksnih funkcija. Više o povijesnom razvoju može se pročitati u knjizi Paula J. Nahina, An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$.

Pišući naš rad mogli smo uočiti da se današnja matematička stvarnost razlikuje od njenih samih početaka, a razlika se uočava u notaciji, načinu računanja. Međutim povijesni razvoj uvelike je olakšao pristup današnjoj generaciji matematičara, a poznavanje istog pomaže u razumijevanju problema s kojima se učenici susreću kad upoznaju kompleksne brojeve.

Bibliografija

[1] S. Antoliš i A. Copić, *Matematika 4, udžbenik sa zbirkom zadataka za 4. razred za prirodoslovno-matematičku gimnaziju* (urednik: Dumančić Poljski, Š.), Školska knjiga, 2006., str. 64.

[2] Lj. Arambašić, G. Muić i P. Pandžić, *Kompleksna analiza*, dostupno na `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Kompleksna_analiza.pdf` (lipanj 2021.).

[3] H. J. Ettlinger, *Cauchy's Paper of* 1814 *on Definite Integrals*, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 23, No. 3, 1922., str. 255–270, dostupno na `https://www.jstor.org/stable/1967922?seq=1#metadata_info_tab_contents` (lipanj 2021.).

[4] Georges, *The Geometry of Complex Numbers*, dostupno na `https://dmoverdt.wordpress.com/2015/03/19/the-geometry-of-complex-numbers/` (veljača 2021.).

[5] I. Gusić, *Zašto su uvedeni kompleksni brojevi*, dostupno na `http://e.math.hr/old/povmat/pov1.html` (veljača 2021.).

[6] P. J. Nahin, *An Imaginary Tale: the story of* $\sqrt{-1}, Princeton University Press$, 1998.

[7] N. Kišić, *Osnovni teorem algebre*, dostupno na `https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf:5500` (lipanj 2021.) (2014.).

[8] G. Kovačvić, *L'Hospitalovo pravilo*, ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA Series didactica, Vol.1, str. 51–62, 2018.

[9] A. Lovrić, *Leonhard Euler - znameniti matematičar XVIII. stoljeća*, dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/LOV11.pdf` (lipanj 2021.) (2019.).

[10] O. Merino, *A Short History of Complex Numbers*, dostupno na http://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf (veljača 2021.).

[11] F. Miriam Brückler, *Aritmetika, kombinatorika, nastanak teorije vjerojatnosti i statistike*, dostupno na https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/povmat07-2021.pdf (ožujak 2021.).

[12] ———, *Matematika u doba renesanse*, dostupno na https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/povmat06-2021.pdf (veljača 2021.).

[13] ———, *Nastanak infinitezimalnog računa*, dostupno na https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/povmat12-2021.pdf (travanj 2021.).

[14] ———, *Teorija brojeva i algebra u novom vijeku*, dostupno na https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/povmat10-2021.pdf (lipanj 2021.).

[15] E. Neuenschwander, *An Imaginary Tale: the story of* $\sqrt{-1}$, $Bulletin of the American mathematical society$, $Vol.5$, $No.2$, $str.87 - -100$, 1981.

[16] J. J. O'Connor i E. F. Robertson, *Augustin Louis Cauchy*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/ (lipanj 2021.).

[17] ———, *Bernhard Riemann*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann/ (lipanj 2021.).

[18] ———, *Caspar Wessel*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel/ (svibanj 2021.).

[19] ———, *Girolamo Cardano*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan/ (veljača 2021.).

[20] ———, *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Weierstrass/ (lipanj 2021.).

[21] ———, *Pierre Alphonse Laurent*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laurent_Pierre/ (lipanj 2021.).

[22] ———, *Rafael Bombelli*, dostupno na https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bombelli/ (veljača 2021.).

Sažetak

Ovaj diplomski rad daje pregled razvoja teorije kompleksnih brojeva i funkcija, od prvih pojava imaginarnih brojeva do utemeljenja kompleksne analize. Prva pojava kompleksnih brojeva seže još u doba renesanse, kada su matematičari Cardano i Bombelli, rješavajući kubne jednadžbe, otkrili da su za dobivanje realnih rješenja istih ponekad potrebni kvadratni korijeni negativnih brojeva te opisali kako s njima računati; tim prvim pojavama kompleksnih brojeva posvećeno je prvo poglavlje ovog rada. U drugom poglavlju opisano je kako su u 17. i 18. stoljeću matematičari pokušavali naći njihovu geometrijsku interpretaciju, što je konačno na prijelazu 18./19. st. pošlo za rukom Wesselu, Gaußu i Argandu. U ovom razdolju nastali su vrijedni rezultati za računanje s kompleksnim brojevima, poput Eulerovog produkta i De Moivreove formule. U posljednjem, trećem poglavlju, opisujemo kako su Cauchy, Laurent, Riemann i Weierstraß utemeljili teoriju kompleksnih funkcija, tj. kompleksnu analizu.

Summary

The subject of this thesis is the historical development of the theory of complex numbers and functions, from the first use of imaginary numbers up to the establishment of complex analysis. Complex numbers first appeared in the Renaissance period, when mathematicians Cardano and Bombelli, solving cubic equations, realized that, in order to get real solutions it was sometimes necessary to use square roots of negative numbers, and described how to calculate with them. This is the topic of the first chapter of this thesis. The second chapter describes the progress made during the 17th and 18th century when mathematicians tried to find their geometric interpretation, which was finally successfully done by Wessel, Gauß and Argandat the turn of the 18th to the 19th century. This period brought significant results for calculation with complex numbers, e.g. the Euler product and the De Moivre formula. The last, third, chapter describes how Cauchy, Laurent, Riemann and Weierstraß established the theory complex functions, i.e. complex analysis.

Životopis

Rođena sam 28. prosinca 1996. godine u Zagrebu, u čijoj sam okolici odrasla. Osnovnoškolsko obrazovanje sam završila u Osnovnoj školi Rugvica, nakon čega sam 2011. godine upisala XV. gimnaziju u Zagrebu, informatički smjer. U srpnju 2015. godine upisala sam studij Matematike, smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski studij završila sam 2018. godine, nakon čega sam upisala i diplomski studij Matematike, smjer nastavnički.