Strogo konveksni i glatki normirani prostori

Jakovljević, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Jakovljević

STROGO KONVEKSNI I GLATKI NORMIRANI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Tomislav Berić

Zagreb, srpanj, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj obitelji koja me uvijek bodrila i tijekom čitavog školovanja bila najveća podrška. Također zahvaljujem prijateljima koji su mi pokazali ljepotu studentskih dana. Posebna zahvala mentoru na brojnim sugestijama, motivaciji i strpljenju tijekom pisanja ovog rada.

Sadržaj

Uvod

U normiranim prostorima su kugle i sfere važan alat za opisivanje brojnih svojstava. Ponekad je teško zamisliti kuglu u nekom apstraktnom prostoru, ali sama riječ "kugla" nas navodi na razmišljanje o okruglom, glatkom objektu. U dvodimenzionalnom Euklidskom prostoru, kugle zaista i jesu takve - okrugle, bez oštrih rubova i imaju brojna lijepa svojstva. Željeli bismo ta svojstva poopćiti na proizvoljan normiran prostor i izvesti rezultate vezane uz njih. U ovome radu ćemo uvesti strogo konveksne, te glatke normirane prostore čije će kugle imati slična svojstva.

Prvo ćemo obraditi strogo konveksne prostore u poglavlju 2, te vidjeti njihovu vezu s fundamentalnim teoremima funkcionalne analize kao što je Hahn - Banachov teorem. Pokazat ćemo da je normiran prostor strogo konveksan ako i samo ako njegova jedinična sfera ne sadrži netrivijalne segmente, te ako i samo ako je svaka točka jedinične sfere ekstremna točka zatvorene jedinične kugle. Također, dat ćemo karakterizaciju strogo konveksnih prostora preko potpornih funkcionala. Nadalje, vidjet ćemo da na strogo konveksnim prostorima vrijedi analogna tvrdnja za pojavu jednakosti u nejednakosti trokuta kao i za unitarne prostore. Važan primjer strogo konveksnih prostora su unitarni prostori, te prostori $L^p(X)$ i ℓ^p za $1 < p < \infty$. Pokazat ćemo da strogo konveksni prostori nisu nužno refleksivni, te ćemo uvesti uniformno konveksne prostore. Ovdje će nam biti bitan Milman - Pettisov teorem koji garantira refleksivnost uniformno konveksnih Banachovih prostora.

U poglavlju 3 ćemo obraditi glatke prostore i pokazati da je normiran prostor gladak ako i samo ako za svaku točku jedinične sfere postoji jedinstveni potporni funkcional za zatvorenu jediničnu kuglu. Nadalje, uvest ćemo pojam Gâteauxove derivacije norme, te pokazati da je prostor gladak ako i samo ako mu je norma Gâteaux derivabilna. Važan primjer glatkih prostora su prostori $L^p(X)$ i ℓ^p za $1 < p < \infty$. Pokazat ćemo da je normiran prostor gladak ako mu je dualni prostor strogo konveksan, te je strogo konveksan ako mu je dualni prostor gladak. Također, vidjet ćemo da i glatki prostori nisu nužno refleksivni i uvesti uniformno glatke prostore koji će biti refleksivni. Kod uniformno glatkih prostora važna će nam biti uniformna Fréchetova derivacija norme. Za kraj ćemo pokazati Šmulianov teorem koji kaže da je normiran prostor uniformno gladak ako i samo ako mu je dualni prostor uniformno konveksan, te je uniformno konveksan ako i samo ako mu je dualni prostor gladak.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Navedimo za početak neke osnovne pojmove teorije normiranih prostora koje ćemo koristiti u nastavku rada. Proučavat ćemo isključivo realne ili kompleksne vektorske prostore pa uvodimo zajedničku oznaku za polje - $\mathbb{F}$.

1.1 Normirani prostori

Definicija 1.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X,$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X,$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normirani prostor.

Definicija 1.2. *Norme $x \mapsto |||x|||$ i $x \mapsto \|x\|$ na X su ekvivalentne ako postoje $M, m > 0$ takvi da je*

$$m \cdot |||x||| \leq \|x\| \leq M \cdot |||x|||, \qquad \forall x \in X.$$

Oznaka: $||| \cdot ||| \sim \| \cdot \|$.

Primjer 1.3. a) $(\mathbb{F}, |\cdot|)$ *(ovdje je $|\cdot|$ apsolutna vrijednost)*

b) $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2), \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=n}^{n} |x_i|^2}$

c) $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_1), \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

d) $(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$

Primjer 1.4. *Sa $C(K)$ označavamo skup svih neprekidnih realnih ili kompleksnih funkcija na K. Uz $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ je $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ normirani prostor.*

Definicija 1.5. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X,$
2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X,$
4. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \quad \forall x_1, x_2, y \in X,$
5. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad \forall x, y \in X.$

Uređeni par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ naziva se unitaran prostor.

Uz $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ svaki unitaran prostor postaje normirani prostor i vrijedi *relacija paralelograma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in X. \tag{1.1}$$

U normiranom prostoru X skup $K(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ je otvorena kugla radijusa r sa središtem u točki x_0, a skup $S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$ je sfera radijusa r sa središtem u točki x_0. Skup $S \subseteq X$ je *otvoren* ako je unija neke familije otvorenih kugala. Nadalje, $F \subseteq X$ je *zatvoren* ako je $X \setminus F$ otvoren. Zatvorenu kuglu označavamo s $\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$.

Za $A \subseteq X$ definiramo *interior* skupa A, $\operatorname{Int} A$, kao uniju svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ koji su sadržani u A. Iz definicije slijedi da je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup. *Zatvarač* skupa A, $\overline{A}$, definiramo kao presjek svih zatvorenih skupova $Z \subseteq X$ koji sadrže A. Također, $\overline{A}$ je zatvoren skup.

Definicija 1.6. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira prema $x \in X$ i pišemo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev ako

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad n, m \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Definicija 1.7. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Skup S je kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji je limes u S.*

Propozicija 1.8. *Neka je X normiran prostor i $A \subseteq X$. Skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih konvergentnih nizova svojih članova.*

1.2 Potpuni prostori

Definicija 1.9. *Kažemo da je normirani prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normirani prostor naziva se Banachov prostor. Potpun unitaran prostor naziva se Hilbertov prostor.*

Primjer 1.10. a) $\ell^p = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$
Posebno, za $p = 2$, ℓ^2 je Hilbertov prostor uz skalarni produkt $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$, $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell^2$.

b) $\ell^\infty = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$

c) $c_0 = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} \leq \ell^\infty$

Primjer 1.11. *Neka je (X, M, μ) prostor mjere. Za $0 \leq p < \infty$ definiramo*

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{F} : f \textit{ izmjeriva}, \ \|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Za $p = \infty$ definiramo

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{F} : f \textit{ izmjeriva}, \ \|f\|_\infty < \infty\},$$

gdje je $\|f\|_\infty := \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}$.

$\left(L^p, \|\cdot\|_p\right)$ je Banachov prostor za $p \in [1, \infty]$. Posebno, za $p = 2$, L^2 je Hilbertov prostor uz skalarni produkt $\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}d\mu$, $f, g \in L^2(X)$.

1.3 Ograničeni linearni operatori

Definicija 1.12. *Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je linearan operator $A : X \to Y$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$. Skup svih ograničenih operatora označavamo s $\mathbb{B}(X, Y)$. Ako je $X = Y$, pišemo $\mathbb{B}(X)$.*

Definicija 1.13. *Neka je X normiran prostor. Skup svih ograničenih linearnih funkcionala na X, $\mathbb{B}(X, \mathbb{F})$, zove se dualni prostor prostora X i označava se s X'.*

Definicija 1.14. *Na $\mathbb{B}(X, Y)$ definiramo normu $\|A\|$ operatora A kao najmanji $M > 0$ za koji je $\|Ax\| \leq M\|x\|$.*

Propozicija 1.15. *Neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$. Tada je*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Propozicija 1.16. *Neka je X normiran prostor i neka je $x \in X$. Tada je*

$$\|x\| = \sup \{|f(x)| : \ f \in \overline{K}_{X'}(0, 1)\}. \tag{1.2}$$

Prostor $X'' = (X')'$ zovemo *bidual* prostora X. Za $x \in X$ definiramo preslikavanje $\hat{x} \in X''$ formulom $\hat{x}(f) = f(x)$. Sada definiramo linearnu izometriju $\varphi : X \to X''$ formulom $\varphi(x) = \hat{x}$.

Definicija 1.17. *Kažemo da je normirani prostor X refleksivan ako je* $\operatorname{Im}\varphi = X''$.

Teorem 1.18 (Pettis)**.** *Ako je X Banachov prostor, tada je X refleksivan ako i samo ako je X' refleksivan.*

Na X, uz topologiju norme, možemo uvesti i slabu topologiju koja je inducirana svim ograničenim funkcionalima na X. Konvergencija u smislu slabe topologije dana je sljedećom definicijom.

Definicija 1.19. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira slabo prema $x \in X$ i pišemo $x = w - \lim_{n\to\infty} x_n$ ako za svaki $f \in X'$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Nizove možemo promatrati kao preslikavanja $\mathbb{N} \ni n \mapsto X$. Ako indeksni skup nije $\mathbb{N}$, imamo sljedeću definiciju tzv. hipernizova.

Definicija 1.20. *Usmjeren skup je uređen par $(I, \preceq)$ koji se sastoji od nepraznog skupa I i binarne relacije $\preceq$ za koju vrijedi:*

(a) $\alpha \preceq \alpha, \quad \forall \alpha \in I$,

(b) $\alpha \preceq \beta,\ \beta \preceq \gamma \ \Rightarrow \ \alpha \preceq \gamma$,

(c) $\forall \alpha, \beta \in I$, $\exists \gamma \in I$ *takav da je* $\alpha \preceq \gamma$ *i* $\beta \preceq \gamma$.

Hiperniz je svako preslikavanje $x : I \to X$.

Propozicija 1.21. *U Banachovom prostoru svaki Cauchyjev hiperniz konvergira.*

Kažemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ *slabo poluneprekidna odozdo* ako za svaki hiperniz $(x_\alpha)_\alpha$ koji slabo konvergira prema $x \in X$ vrijedi $f(x) \leq \liminf_\alpha f(x_\alpha)$. Važan primjer takvih funkcija su norme.

Kao i na X, slabu topologiju možemo uvesti i na X' i nju zovemo slaba* topologija. Nadalje, norma na X' je slabo* poluneprekidna odozdo funkcija.

Definicija 1.22. *Neka je X normiran prostor i $(f_n)_n$ niz funkcionala iz X'. Kažemo da $(f_n)_n$ konvergira slabo* prema $f \in X'$ i pišemo $f = w^* - \lim_{n\to\infty} f_n$ ako za svaki $x \in X$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Teorem 1.23 (Banach - Alaoglu)**.** *Neka je X normiran prostor. Kugla $\overline{K}_{X'}(0,1)$ je slabo* kompaktan skup u X'.*

Korolar 1.24. *U refleksivnom prostoru svaki ograničeni niz ima slabo konvergentan podniz.*

Teorem 1.25 (Goldstine)**.** *Neka je X normiran prostor, te neka je preslikavanje $\varphi : X \to X''$ kao u Definiciji 1.17. Tada je $\varphi\left(\overline{K}(0,1)\right)$ slabo* gust podskup u $\overline{K}_{X''}(0,1)$.*

Teorem koji sada navodimo jedan je od fundamentalnih teorema funkcionalne analize i u nastavku rada ćemo ga često koristiti. Prvo dajemo općenitiju verziju za vektorske prostore. Dokazi se mogu pronaći u [8].

Teorem 1.26 (Hahn-Banach za vektorske prostore)**.** *Neka je p sublinearan funkcional na realnom vektorskom prostoru X, te f_0 linearan funkcional na $Y \leq X$ takav da je $f_0(x) \leq p(x),\ x \in Y$. Tada postoji linearan funkcional f na X takav da je $f|_Y = f_0$ i $f(x) \leq p(x),\ x \in X$.*

Napomena 1.27. *Funkcional f je pozitivno homogen ako je $f(tx) = tf(x)$ za $t > 0$ i $x \in X$, te je subaditivan ako je $f(x+y) \leq f(x) + f(y),\ x, y \in X$. Ako f ima oba svojstva, kažemo da je sublinearan.*

Teorem 1.28 (Hahn-Banach za normirane prostore)**.** *Neka je X normiran prostor, $Y \leq X$ i $f \in Y'$. Postoji $F \in X'$ takav da je $F|_Y = f$ i $\|F\| = \|f\|$.*

Hahn-Banachov teorem ima mnogo važnih posljedica, nama će od najveće koristi biti sljedeći rezultat.

Korolar 1.29. *Neka je X normiran prostor i $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Tada postoji $f \in X'$ takav da je $\|f\| = 1$ i $f(x) = \|x\|$.*

Dokaz. Neka je $M := [\{x_0\}] \leq X$ i neka je $f_0 : M \to \mathbb{F}$ dan s $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|,\ \alpha \in \mathbb{F}$. Tada je $|f_0(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\|$, tj. f_0 je ograničen funkcional na Y i vrijedi $\|f_0\| = 1$. Nadalje, za $\alpha = 1$, $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Primjenom Teorema 1.28 slijedi tvrdnja. □

1.3.1 Realni dio funkcionala

Neka je X normiran prostor, te neka je $f : X \to \mathbb{C}$ ograničen. Tada je

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x), \quad x \in X,$$

gdje su $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ realni funkcionali koji označavaju realni, odnosno kompleksni dio funkcionala f. Ovdje pod realnim funkcionalom podrazumijevamo funkcionale koji su homogeni za $\alpha \in \mathbb{R}$. Iako djeluje da imamo dvije odvojene informacije o funkcionalu f, on je zapravo u potpunosti određen samo svojim realnim dijelom. Zaista,

$$\operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix) = f(ix) = i f(x) = -\operatorname{Im} f(x) + i \operatorname{Re} f(x),$$

iz čega slijedi $\operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x)$, tj. $f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix)$, $x \in X$. Također, da bismo odredili normu od f, dovoljno je odrediti samo normu realnog dijela. Kako je f ograničen na X, iz $|\operatorname{Re} f(x)| \le |f(x)| \le \|f\| \, \|x\|$, $x \in X$, dobivamo ograničenost operatora $\operatorname{Re} f$. Također, $\|\operatorname{Re} f\| \le \|f\|$. Pokažimo da vrijedi i obratna nejednakost. Neka je $x \in X$ i neka su $\varphi \in \langle -\pi, \pi]$, $r > 0$, takvi da je $f(x) = re^{i\varphi}$. Tada je, uz $\alpha = e^{-i\varphi}$, $|\alpha| = 1$,

$$|f(x)| = r = \operatorname{Re}(\alpha f(x)) = \operatorname{Re} f(\alpha x) \le \|\operatorname{Re} f\| \, \|\alpha x\| = \|\operatorname{Re} f\| \, |\alpha| \, \|x\| = \|\operatorname{Re} f\| \, \|x\|,$$

pa vrijedi i obratna nejednakost, tj. $\|\operatorname{Re} f\| = \|f\|$.

Poglavlje 2

Strogo konveksni normirani prostori

Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za $x, y \in X$ skup

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$$

nazivamo *segment* s krajevima x i y. Koristit ćemo i oznaku $\langle x, y\rangle$ za *otvoreni interval* s krajevima x i y, tj.

$$\langle x, y\rangle = \{tx + (1-t)y : t \in \langle 0, 1\rangle\}.$$

Skup $K \subseteq X$ je *konveksan* ako vrijedi

$$(\forall x, y \in X) \quad [x, y] \subseteq K.$$

Dokažimo za početak jednu jednostavnu tehničku lemu koju ćemo često koristiti u nastavku poglavlja.

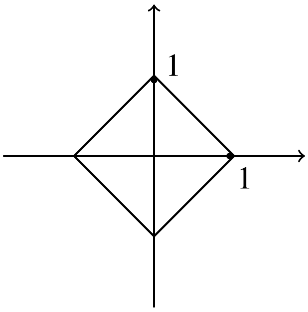
Lema 2.1. *Neka je X normiran prostor i $C \subseteq X$ konveksan. Ako je $x \in C$ i $y \in \operatorname{Int} C$ tada je $\langle x, y\rangle \subseteq \operatorname{Int} C$.*

Dokaz. Dovoljno je primijetiti da je skup $tC + (1-t)\operatorname{Int} C$ otvoren i sadržan u C. □

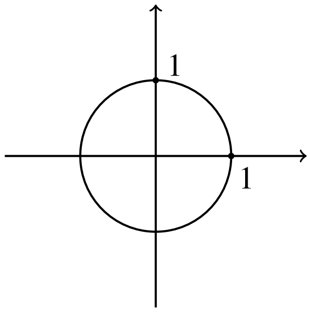
U normiranom prostoru X svaka kugla je konveksan skup. Nama su od posebnog interesa jedinične sfere normiranih prostora. Sfera na Slici 1 (a) ima svojstvo da sadrži ne samo točke $e_1 = (0, 1)$ i $e_2 = (1, 0)$ nego i cijeli segment $[e_1, e_2]$, dok za sferu na Slici 1 (b) to nije slučaj. Općenito, za jediničnu sferu u normiranom prostoru X kažemo da je *strogo konveksna sfera* ako za $x, y \in X$, $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$ vrijedi $\|tx+(1-t)y\| < 1, \quad \forall t \in \langle 0, 1\rangle$.

Motivirani gornjom diskusijom, definirat ćemo strogo konveksne normirane prostore.

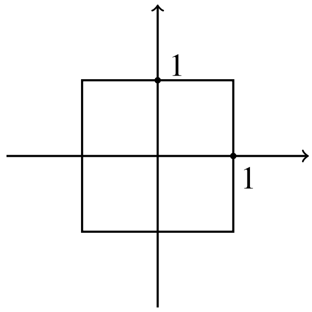
Definicija 2.2. *Normirani prostor X je strogo konveksan ako mu je jedinična sfera strogo konveksna.*



(a) $p = 1$



(b) $p = 2$



(c) $p = \infty$

Slika 1: Jedinične sfere u $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$, $\quad p = 1, 2, \infty$.

Ako normirani prostor X zadovoljava uvjete definicije još kažemo da je norma strogo konveksna ili da je jedinična zatvorena kugla strogo konveksna. U literaturi na engleskom jeziku strogo konveksni prostori se zovu *strictly convex* ili *rotund*. Naziv rotund u prijevodu znači *okrugao* što slikovito opisuje situaciju na Slici 1 - jedinična sfera u $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ je "okrugla" pa segment koji spaja dvije njezine različite točke siječe sferu samo u krajnjim točkama.

Definicija 2.2 zapravo kaže da je normirani prostor strogo konveksan ako njegova jedinična sfera ne sadrži netrivijalne segmente. Formalno, neka je X normiran prostor. Ako je X strogo konveksan i $x, y \in S(0,1), x \neq y$, tada iz definicije slijedi da je interval (x, y) sadržan u $K(0,1)$ pa $S(0,1)$ ne sadrži netrivijalne segmente. Obratno, neka $S(0,1)$ ne sadrži netrivijalne segmente i neka su $x, y \in S(0,1), x \neq y$. Tada se neke točke intervala (x, y) nalaze u $K(0,1)$ pa po Lemi 2.1 sve točke tog intervala leže u $K(0,1)$. Dakle, X je strogo konveksan. Koristeći slične argumente dobivamo sljedeću karakterizaciju strogo konveksnih normiranih prostora.

Propozicija 2.3. *Normiran prostor X je strogo konveksan ako i samo ako za $x, y \in S(0,1)$, $x \neq y$, vrijedi $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| < 1$.*

Prije samih primjera, navedimo jednu korisnu posljedicu stroge konveksnosti. Ako je X Banachov prostor takav da je X' strogo konveksan i $M \leq X$, tada svaki $f \in M'$ ima jedinstveno Hahn-Banachovo proširenje, tj. proširenje koje ima istu normu kao f. Zaista, neka su F i G dva Hahn-Banachova proširenja od $f \in M'$. Tada je

$$\left\|\frac{F}{\|f\|}\right\| = \frac{1}{\|f\|}\|F\| = \frac{1}{\|f\|} = 1 \quad \text{i} \quad \left\|\frac{G}{\|f\|}\right\| = \frac{1}{\|f\|}\|G\| = \frac{1}{\|f\|} = 1.$$

Također,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{F}{\|f\|}+\frac{G}{\|f\|}\right\| &\geq \sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}\left|\frac{F(x)}{\|f\|}+\frac{G(x)}{\|f\|}\right| = \frac{1}{\|f\|}\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}|F(x)+G(x)| \\ &= \frac{1}{\|f\|}\sup_{\substack{x\in M\\ \|x\|=1}}|f(x)+f(x)| = \frac{1}{\|f\|}2\|f\| = 2.\end{aligned}$$

Kako je X' strogo konveksan, po Propoziciji 2.3 je nužno $\frac{F}{\|f\|} = \frac{G}{\|f\|}$, tj. $F = G$.

Navedimo sada neke primjere.

Primjer 2.4. *Skalarno polje $\mathbb{F}$, gledano kao normirani prostor nad $\mathbb{F}$ je očigledno strogo konveksan prostor. Zapravo je svaki jednodimenzionalni normirani prostor strogo konveksan.*

Primjer 2.5. *Neka su e_1 i e_2 vektori kanonske baze prostora c_0. Označimo $x = e_1 + e_2$ i $y = e_1 - e_2$. Sada je*

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_\infty = 1,$$

pa c_0 nije strogo konveksan prostor. Također, ℓ^∞ nije strogo konveksan. Nadalje, za $t \in [0,1]$ vrijedi $\|te_1 + (1-t)e_2\|_1 = 1$ pa je cijeli segment $[e_1, e_2]$ sadržan u jediničnoj sferi prostora ℓ^1. Dakle, ℓ^1 također nije strogo konveksan.

Primjer 2.6. *Kažemo da je topološki prostor X Hausdorffov ako za bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ takvi da je $x_1 \in U_1$ i $x_2 \in U_2$. Uzmimo sada kompaktan Hausdorffov skup K i neka su $k_1, k_2 \in K, k_1 \neq k_2$. Po Urysohnovoj lemi (vidi [7]) postoji neprekidno preslikavanje $f_1 : K \to [0,1]$ takvo da je $f_1(k_1) = 0$ i $f_1(k_2) = 1$. Neka je f_2 neprekidno preslikavanje za koje vrijedi $f_2(k) = 1, \forall k \in K$. Sada je*

$$\|f_1\|_\infty = \|f_2\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right\|_\infty = 1,$$

pa $C(K)$ nije strogo konveksan prostor.

Primjer 2.7. *Svaki unitaran prostor je strogo konveksan. Zaista, neka je X unitaran prostor i $x, y \in X, \|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$. Po relaciji paralelograma (1.1) imamo*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1$$

što povlači $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$ pa Propozicija 2.3 daje tvrdnju.

Primjer 2.8. *Neka je* $1 < p < \infty$ *i neka su* $x, y \in \ell^p$ *jedinični vektori. Nadalje, neka vrijedi* $\|x + y\|_p = 2$. *Tada je*

$$2 = \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p = 2,$$

pa vrijedi jednakost u nejednakosti trokuta. Slijedi da postoje konstante $\alpha, \beta \geq 0$ *ne obje jednake 0 takve da je* $\alpha x = \beta y$ *(vidi [3]). Uzimanjem norme dobivamo*

$$\alpha = \alpha\|x\|_p = \beta\|y\|_p = \beta,$$

pa je $\alpha x = \alpha y$. *Stoga mora biti* $\alpha > 0$ *i dijeljenjem dobivamo* $x = y$. *Dakle, za* $1 < p < \infty$, ℓ^p *je strogo konveksan prostor.*

Propozicija 2.9. *Svaki normirani prostor koji je izometrički izomorfan strogo konveksnom normiranom prostoru je i sam strogo konveksan.*

U nastavku ćemo dati nekoliko karakterizacija strogo konveksnih prostora. Navedimo prvo potrebne definicije.

Definicija 2.10. *Neka je* X *normiran prostor i* $C \subseteq X$ *neprazan, zatvoren i konveksan podskup. Podskup* $D \subseteq C$ *je ekstremalan u* C *ako je* D *i sam neprazan, zatvoren i konveksan te ima sljedeće svojstvo: ako su* $x, y \in C$ *i* $tx + (1-t)y \in D$ *za neki* $t \in \langle 0, 1\rangle$, *tada su* $x, y \in D$.

Definicija 2.11. *Neka je* X *normiran prostor i* $C \subseteq X$ *neprazan, zatvoren i konveksan podskup. Kažemo da je* $x \in C$ *ekstremna točka skupa* C *ako je* $\{x\}$ *ekstremalan skup u* C.

Neposredno iz Leme 2.1 slijedi da ako za $x_0 \in S(0, 1)$ postoje točke $x, y \in \overline{K}(0, 1)$ i $t \in \langle 0, 1\rangle$ tako da vrijedi $x_0 = tx + (1 - t)y$, tada su nužno $x, y \in S(0, 1)$. Tada, ako je $x_0 \in S(0, 1)$ unutrašnja točka segmenta $[x, y] \subseteq \overline{K}(0, 1)$ i $x \neq y$, oba kraja segmenta leže u $S(0, 1)$. Ponovo, po Lemi 2.1, zaključujemo da je cijeli segment $[x, y]$ sadržan u $S(0, 1)$. Dakle, svaka točka sfere $S(0, 1)$ je ekstremna točka kugle $\overline{K}(0, 1)$ ako i samo ako $S(0, 1)$ ne sadrži netrivijalne segmente što je zadovoljeno ako i samo ako je X strogo konveksan. Time smo dokazali propoziciju:

Propozicija 2.12. *Normirani prostor* X *je strogo konveksan ako i samo ako je svaki element jedinične sfere* $S(0, 1)$ *ekstremna točka zatvorene jedinične kugle* $\overline{K}(0, 1)$.

Idući korisna karakterizacija strogo konveksnih prostora bazirana je na pojavi jednakosti u nejednakosti trokuta. U unitarnim prostorima vrijedi jednakost u nejednakosti trokuta $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ako i samo ako postoji $\lambda > 0$ takav da vrijedi $x = \lambda y$. Pokazuje se da to svojstvo karakterizira strogo konveksne norme, odnosno strogo konveksne prostore.

Propozicija 2.13. *Neka je* X *normiran prostor. Ekvivalentno je:*

(a) *Prostor* X *je strogo konveksan.*

(b) *Ako za $x, y \in X$ vrijedi $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, tada postoji $\lambda > 0$ takav da je $x = \lambda y$.*

Dokaz. Neka je X strogo konveksan normiran prostor i neka su $x, y \in X$ takvi da vrijedi $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da x i y nisu nul-vektori. Također, možemo pretpostaviti da vrijedi $1 = \|x\| \leq \|y\|$. Neka je $z = \frac{y}{\|y\|}$. Tada je:

$$\begin{aligned} 2 \geq \|x + z\| &= \left\|x + y - \left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right)y\right\| \geq \|x + y\| - \left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right)\|y\| \\ &= \|x\| + \|y\| - \|y\| + 1 = 2 \end{aligned}$$

iz čega slijedi $\left\|\frac{1}{2}(x + z)\right\| = 1$. Kako su $x, z \in S(0, 1)$ i X je strogo konveksan nužno je $x = z = \frac{y}{\|y\|}$ što dokazuje (b).

Neka vrijedi (b) i neka su $x, y \in S(0, 1)$. Ako je $x \neq y$, ne postoji $\lambda > 0$ takav da je $x = \lambda y$ pa vrijedi $\|x + y\| < \|x\| + \|y\| = 2$ što povlači $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| < 1$. Dakle, X je strogo konveksan. □

Neka je X proizvoljan normiran prostor. Ako za $x, y \in X$ postoji $\lambda > 0$ takav da vrijedi $x = \lambda y$, tada je $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Dakle, vrijedi sljedeća jača tvrdnja za nejednakost trokuta u strogo konveksnim prostorima:

Propozicija 2.14. *Neka je X strogo konveksan normiran prostor i $x, y \in X$. Tada je $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ i jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda > 0$ takav da je $x = \lambda y$.*

Primjer 2.15. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ strogo konveksan prostor i neka je $T \in B(X, Y)$ injektivan operator. Pokažimo da je tada s*

$$|||x||| = \|x\| + \|Tx\|_Y, \qquad x \in X \tag{2.1}$$

definirana strogo konveksna norma na X ekvivalentna normi $\|\cdot\|$. Lako vidimo da norma definirana s (2.1) zaista norma. Nadalje, ekvivalencija normi slijedi iz

$$\|x\| \leq |||x||| \leq (1 + \|T\|)\|x\|, \quad x \in X$$

gdje smo u posljednjoj nejednakosti koristili ograničenost operatora T. Preostalo je pokazati strogu konveksnost. Neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da vrijedi $|||x_1 + x_2||| = |||x_1||| + |||x_2|||$. Tada je

$$\begin{aligned} \|Tx_1 + Tx_2\|_Y &= |||x_1 + x_2||| - \|x_1 + x_2\| \\ &= |||x_1||| + |||x_2||| - \|x_1 + x_2\| \\ &\geq |||x_1||| + |||x_2||| - \|x_1\| - \|x_2\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|x_1\| + \|Tx_1\|_Y + \|x_2\| + \|Tx_2\|_Y - \|x_1\| - \|x_2\| \\ &= \|Tx_1\|_Y + \|Tx_2\|_Y. \end{aligned}$$

Obratna nejednakost uvijek vrijedi pa je $\|Tx_1 + Tx_2\|_Y = \|Tx_1\|_Y + \|Tx_2\|_Y$. *Kako je* Y *strogo konveksan, po Propoziciji 2.13 postoji* $\lambda > 0$ *takav da je* $Tx_1 = \lambda Tx_2$. *Iz injektivnosti operatora* T *tada slijedi* $x_1 = \lambda x_2$. *Dakle,* X *s normom* $|||\cdot|||$ *je strogo konveksan prostor.*

Primjer 2.16. *Neka je* (X, M, μ) *prostor mjere i* $1 < p < \infty$. *Za* $x, y \in L^p$ *vrijedi nejednakost Minkowskog (vidi [6]):* $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, *te uz* $x, y \neq 0$, *vrijedi jednakost ako i samo ako postoji realni broj* $\lambda > 0$ *takav da je* $x = \lambda y$. *Sada iz Propozicije 2.13 slijedi da je* L^p *strogo konveksan prostor. Da bi pokazali da isto ne vrijedi za* L^1 *i* L^∞, *uzmimo* $A_1, A_2 \subseteq X$ *neprazne, međusobno disjunktne i takve da je* $0 < \mu(A_1), \mu(A_2) < \infty$. *Nadalje, neka su funkcije* $f_1, f_2 \in L^1(X),\ g_1, g_2 \in L^\infty(X)$ *definirane s*

$$f_1 = \frac{1}{\mu(A_1)}\mathbb{1}_{A_1} \quad f_1 = \frac{1}{\mu(A_2)}\mathbb{1}_{A_2} \quad g_1 = \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} \quad g_2 = \mathbb{1}_{A_1} - \mathbb{1}_{A_2}.$$

Sada je

$$\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = \left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\|_1 = \|g_1\|_\infty = \|g_2\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}(g_1 + g_2)\right\|_\infty = 1,$$

pa L^1 *i* L^∞ *nisu strogo konveksni prostori.*

U dosadašnjim primjerima dalo se naslutiti da je refleksivnost usko vezana uz pojam stroge konveksnosti. Međutim, koristeći Primjer 2.15, pokazat ćemo da prostor može biti strogo konveksan i nerefleksivan.

Primjer 2.17. *Neka je* $I : \ell^1 \to \ell^2$ *dan s* $I(x) = x$. *Tada je* I *trivijalno ograničen i injektivan operator. Kako je* ℓ^2 *strogo konveksan prostor, po Primjeru 2.15 je* $|||x||| = \|x\|_1 + \|x\|_2$ *strogo konveksna norma ekvivalentna normi* $\|\cdot\|_1$. *Iz ekvivalencije normi slijedi da je* $\left(\ell^1, |||\cdot|||\right)$ *također Banachov prostor, te kako* ℓ^1 *nije refleksivan (vidi [6]),* $\left(\ell^1, |||\cdot|||\right)$ *je strogo konveksan i nerefleksivan Banachov prostor.*

Iduća karakterizacija uključuje potpornu hiperplohu pa počnimo s definicijom. Ovdje koristimo notaciju $\operatorname{Re} x$ za realni dio kompleksnog broja x.

Definicija 2.18. *Neka je* X *topološki vektorski prostor i* $A \subseteq X$. *Za* $x^* \in X'$, $x^* \neq 0$ *kažemo da je potporni funkcional za* A *ako postoji* $x_0 \in A$ *takav da je*

$$\operatorname{Re} x^*(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} x^*(x) : x \in A\}.$$

U tom slučaju kažemo da je x_0 *potporna točka skupa* A *i skup*

$$H = \{x \in X : \operatorname{Re} x^*(x) = \operatorname{Re} x^*(x_0)\}$$

nazivamo potporna hiperploha skupa A. Za potporni funkcional i potpornu hiperplohu kažemo da podupiru A u x_0.

Primijetimo da je $H \cap A$ skup točaka u kojima hiperploha H podupire skup A. Također, zbog linearnosti funkcionala x^* je H konveksan skup.

U terminima linearne algebre, hiperploha u vektorskom prostoru V je skup definiran s $\{v \in V : f(v) = \alpha_0\}$, gdje je $f \neq 0$ linearan funkcional na V i α_0 proizvoljan skalar. U Definiciji 2.18 potporna hiperploha je definirana kao skup točaka u kojima *realni* funkcional poprima konstantnu vrijednost. Kada je promatrano skalarno polje $\mathbb{R}$ definicija ima smisla - potporna hiperploha je zaista hiperploha. Razlika je, dakle, kada je skalarno polje $\mathbb{C}$. Međutim, svaki kompleksni vektorski prostor možemo promatrati kao realni vektorski prostor ako je množenje vektora skalarom restringirano na $\mathbb{R} \times X$ pa i u tom slučaju definicija ima smisla.

Vratimo se sada na karakterizaciju strogo konveksnih prostora. Za motivaciju ćemo navesti svojstva potporne hiperplohe u slučaju realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Kako je svaki linearan funkcional na $\mathbb{R}^2$ oblika $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha_0\alpha + \beta_0\beta, \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, hiperplohe u $\mathbb{R}^2$ su skupovi oblika

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_0\alpha + \beta_0\beta = \gamma_0\},$$

gdje su $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$ te α_0 i β_0 nisu istovremeno jednaki 0. Dakle, hiperplohe u $\mathbb{R}^2$ su pravci. Hiperplohe koje prolaze kroz ishodište su *hiperravnine* u $\mathbb{R}^2$ i to su zapravo jezgre linearnih funkcionala na $\mathbb{R}^2$. Ako to nije slučaj, odnosno ako je H hiperploha u $\mathbb{R}^2$ koja ne sadrži ishodište, očigledno postoji linearan funkcional na $\mathbb{R}^2$ takav da je

$$H = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : f(\alpha, \beta) = 1\},$$

iz čega slijedi da je $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : f(\alpha, \beta) < 1\}$ otvorena poluravnina ograničena s H koja sadrži ishodište, dok je $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : f(\alpha, \beta) > 1\}$ otvorena poluravnina s druge strane hiperplohe H.

Neka je sada X realan normiran prostor s vektorima iz $\mathbb{R}^2$. Potporne hiperplohe zatvorene kugle $\overline{K}(0, 1)$ su pravci u $\mathbb{R}^2$ koji sijeku kuglu i ne prolaze kroz njenu unutrašnjost, dakle, *tangente* na $\overline{K}(0, 1)$. Ako je X strogo konveksan, tada potporna hiperploha ne može sjeći $\overline{K}(0, 1)$ u više od jedne točke jer bi tada sfera $S(0, 1)$ sadržavala cijeli segment što je u suprotnosti sa strogom konveksnosti. Pretpostavimo sada da X nije strogo konveksan i neka su x_1, x_2 različite točke na sferi $S(0, 1)$ takve da cijeli segment $[x_1, x_2]$ leži na sferi. Po Lemi 2.1 pravac koji sadrži taj segment ne siječe $\operatorname{Int} K(0, 1)$ pa je to potporna hiperploha kugle $\overline{K}(0, 1)$ koja ju siječe u više od jedne točke. Dakle, prostor X je strogo konveksan ako i samo ako svaka potporna hiperploha za $\overline{K}(0, 1)$ siječe kuglu u točnoj jednoj točki. Tvrdnja se može generalizirati za proizvoljan normiran prostor.

Lema 2.19. *Neka je X topološki vektorski prostor, $A \subseteq X$ i neka je H potporna hiperploha od A. Tada je $H \cap \operatorname{Int} A = \emptyset$.*

Dokaz. Neka je $x^* \in X'$ ne-nul funkcional i $x_0 \in A$ takav da je

$$\operatorname{Re} x^*(x_0) = \sup\{\operatorname{Re} x^*(x) : x \in A\} \quad \text{i} \quad H = \{x \in X : \operatorname{Re} x^*(x) = \operatorname{Re} x^*(x_0)\}.$$

Pretpostavimo suprotno, neka je $y \in H \cap \operatorname{Int} A$. Neka je $x_1 \in X$ takav da je $\operatorname{Re} x^*(x_1) = 1$. Tada je $y + \delta x_1 \in \operatorname{Int} A$ za dovoljno mali $\delta > 0$. Sada je

$$\operatorname{Re} x^*(x_0) \geq \operatorname{Re} x^*(y + \delta x_1) = \operatorname{Re} x^*(x_0) + \delta > \operatorname{Re} x^*(x_0)$$

što je kontradikcija. □

Idući teorem ćemo koristiti u dokazu Teorema 2.21 i navodimo ga bez dokaza (vidi [8]).

Teorem 2.20 (Eidelheitov teorem separacije)**.** *Neka je X topološki vektorski prostor i neka su $C_1, C_2 \subseteq X$ neprazni i konveksni podskupovi od X takvi da je $\operatorname{Int} C_2 \neq \emptyset$. Ako je $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, tada postoje $x^* \in X'$ i $s \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:*

(a) $\operatorname{Re} x^*(x) \geq s, \quad \forall x \in C_1,$

(b) $\operatorname{Re} x^*(x) \leq s, \quad \forall x \in C_2,$

(c) $\operatorname{Re} x^*(x) < s, \quad \forall x \in \operatorname{Int} C_2.$

Teorem 2.21. *Normirani prostor X je strogo konveksan ako i samo ako svaka potporna hiperploha od $\overline{K}(0,1)$ podupire $\overline{K}(0,1)$ u točno jednoj točki.*

Dokaz. Neka je X strogo konveksan normiran prostor i neka je H potporna hiperploha od $\overline{K}(0,1)$. Kako je $H \cap \operatorname{Int} \overline{K}(0,1) = \emptyset$, mora biti $H \cap \overline{K}(0,1) \subseteq S(0,1)$. Zbog konveksnosti od H i $\overline{K}(0,1)$ je skup $H \cap \overline{K}(0,1)$ također konveksan pa ne može sadržavati dvije različite točke bez da sadrži cijeli segment koji ih spaja. Međutim, zbog stroge konveksnosti, sfera $S(0,1)$ ne sadrži netrivijalne segmente pa skup $H \cap \overline{K}(0,1)$ sadrži točno jednu točku u kojoj H podupire $\overline{K}(0,1)$.

Pretpostavimo sada da normiran prostor X nije strogo konveksan i neka su $x_1, x_2 \in S(0,1)$ različite točke takve da je segment $[x_1, x_2]$ cijeli sadržan u $S(0,1)$. Po Teoremu 2.20, postoji $x^* \in X'$ takav da je $\operatorname{Re} x^*(x) \geq 1$ za sve $x \in [x_1, x_2]$ i $\operatorname{Re} x^*(x) \leq 1$ za sve $x \in \overline{K}(0,1)$. Nadalje, uočimo da je $\operatorname{Re} x^*(x_1) = \operatorname{Re} x^*(x_2) = 1$. Dakle, $\{x \in X : \operatorname{Re} x^*(x) = 1\}$ je potporna hiperploha od $\overline{K}(0,1)$ i ona podupire $\overline{K}(0,1)$ u x_1 i x_2. □

Neka je $x^* \in S_{X'}(0,1)$ element jedinične sfere u dualnom prostoru prostora X. Tada x^* podupire $\overline{K}(0,1)$ u nekoj točki $x \in S(0,1)$ ako i samo ako je $\operatorname{Re} x^*(x) = x^*(x) = 1$. Dakle, imamo sljedeći rezultat:

Korolar 2.22. *Neka je X normiran prostor. Ekvivalentno je:*

(a) *X je strogo konveksan.*

(b) *Svaki* $x^* \in S_{X'}(0,1)$ *podupire* $\overline{K}(0,1)$ *u najviše jednoj točki.*

(c) *Za svaki* $x^* \in S_{X'}(0,1)$ *postoji najviše jedna točka* $x \in S(0,1)$ *takva da je* $\operatorname{Re} x^*(x) = 1$.

(d) *Za svaki* $x^* \in S_{X'}(0,1)$ *postoji najviše jedna točka* $x \in S(0,1)$ *takva da je* $x^*(x) = 1$.

Iduća karakterizacija strogo konveksnih prostora bitna je u teoriji aproksimacija. Definiciju dajemo u općenitijem obliku za *metričke prostore*. Uz

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad x,y \in X,$$

svaki normiran prostor postaje metrički prostor. Navedimo još da je sa

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}$$

definirana udaljenost točke x od skupa $A \subseteq X$.

Definicija 2.23. *Neka je X metrički prostor i neka je* $A \subseteq X$ *neprazan. Skup A zovemo:*

(a) *skup jedinstvenosti ako za svaki* $x \in X$ *postoji najviše jedan* $y \in A$ *takav da je* $d(x,y) = d(x,A)$*;*

(b) *skup egzistencije ako za svaki* $x \in X$ *postoji barem jedan* $y \in A$ *takav da je* $d(x,y) = d(x,A)$*;*

(c) *Čebiševljev skup ako za svaki* $x \in X$ *postoji točno jedan* $y \in A$ *takav da je* $d(x,y) = d(x,A)$.

Teorem 2.24. *Neka je X normiran prostor. Ekvivalentno je:*

(a) *X je strogo konveksan.*

(b) *Svaki neprazan konveksan podskup od X je skup jedinstvenosti.*

(c) *Svaki neprazan, konveksan i zatvoren poskup od X je skup jedinstvenosti.*

Dokaz. Pokažimo prvo (a) $\Rightarrow$ (b). Neka je X strogo konveksan i $C \subseteq X$ neprazan i konveksan i neka je $x_0 \in X$. Želimo pokazati da ne postoje dvije ili više točaka skupa C koje su najbliže točki x_0. Kako je $y \in C$ najbliža točki x_0 ako i samo je točka $y - x_0 \in -x_0 + C$ najbliža 0, možemo pretpostaviti da je $x_0 = 0$. Također, možemo pretpostaviti da je $d(0,C) > 0$

pa reskaliranjem možemo postići da je $d(0, C) = 1$. Neka su $c_1, c_2 \in C$ najbliže točki 0. Tada je $\|c_1\| = \|c_2\| = 1$ pa imamo

$$[c_1, c_2] \subseteq C \cap \overline{K}(0, 1) \subseteq S(0, 1).$$

Zbog stroge konveksnosti prostora X vrijedi $c_1 = c_2$ što pokazuje (a).

Implikacija (b) $\Rightarrow$ (c) je trivijalno zadovoljena pa je preostalo pokazati (c) $\Rightarrow$ (a). Pretpostavimo da X nije strogo konveksan. Tada postoje različite točke $x_1, x_2 \in S(0, 1)$ takve da je segment $[x_1, x_2]$ cijeli sadržan u $S(0, 1)$. Segment je neprazan, konveksan i zatvoren podskup u X i kako je cijeli sadržan u $S(0, 1)$, beskonačno mnogo njegovih točaka je jednako udaljeno od 0. Dakle, ne vrijedi (c) pa obratom po kontrapoziciji slijedi tvrdnja. □

Iz Teorema 2.24 slijedi da je svaki zatvoren konveksan podskup strogo konveksnog prostora skup jedinstvenosti, što znači da ako postoji minimizator udaljenosti, onda je on jedinstven. Postavlja se pitanje za koje neprazne, zatvorene i konveksne skupove skupove imamo minimizator, a za koje nemamo. U Hilbertovim prostorima vrijedi *Rieszov teorem o projekciji* kojega možemo iskazati na sljedeći način: U Hilbertovim prostorima svaki neprazan, zatvoren i konveksan podskup je Čebiševljev. Sada ćemo pokazati da tvrdnja vrijedi i u refleksivnim strogo konveksnim prostorima.

Korolar 2.25. *Ako je normiran prostor strogo konveksan i refleksivan, tada je svaki neprazan, zatvoren i konveksan podskup Čebiševljev skup.*

Dokaz. Neka je X strogo konveksan refleksivan prostor, $C \subseteq X$ neprazan, zatvoren i konveksan skup,te neka je $x_0 \in X$. Tada postoji niz $(y_n)_n$ u C takav da je $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_0\| = d(x_0, C)$. Kako je niz $(y_n)_n$ ograničen i X je refleksivan prostor, po Korolaru 1.24 postoji podniz $(y_{n_j})_j$ koji slabo konvergira prema y_0. Tada je $y_0 \in C$ jer je C slabo zatvoren. Sada imamo

$$d(x_0, C) \leq \|y_0 - x_0\| \leq \liminf_j \|y_{n_j} - x_0\| = d(x_0, C).$$

Dakle, C je skup egzistencije. Po Teoremu 2.24 je C skup jedinstvenosti pa je Čebiševljev skup. □

Pogledajmo neke primjere Čebiševljevih skupova.

Primjer 2.26. a) *U normiranom prostoru* $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ *je* $\overline{K}(0, 1)$ *Čebiševljev skup i vrijedi* $d\left(x, \overline{K}(0, 1)\right) = d\left(x, \frac{x}{\|x\|_2}\right)$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) *U normiranom prostoru* $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\right)$ *je* $C = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ *skup egzistencije, ali nije Čebiševljev jer su za npr.* $(1, 0)$ *sve točke* $x = (0, y) \in C, |y| \leq 1$ *minimizatori udaljenosti. To lako vidimo ako na Slici 1(c) sferu translatiramo tako da joj je centralna točka (1,0).*

Primjer 2.27. *Neka je X strogo konveksan te neka $f \in X' \setminus \{0\}$ postiže svoju normu u $x_0 \in S(0,1)$, tj. $f(x_0) = \|f\|$. Pokažimo da je* $\operatorname{Ker} f$ *Čebiševljev skup. Za početak uočimo da je* $\operatorname{Ker} f$ *zatvoren skup jer je f ograničen. Nadalje, iz linearnosti lako slijedi da je* $\operatorname{Ker} f$ *konveksan skup. Po Teoremu 2.24 je sada dovoljno pokazati da je* $\operatorname{Ker} f$ *skup egzistencije kako bi zaključili da je Čebiševljev. Neka je $x \in \operatorname{Ker} f$. Tada je*

$$1 = \frac{f(x_0)}{\|f\|} = \frac{f(x_0 - x)}{\|f\|} \leq \frac{\|f\| \cdot \|x_0 - x\|}{\|f\|} = \|x_0 - x\|,$$

pa vrijedi $1 \leq d(x_0, \operatorname{Ker} f)$. S druge strane, kako je $0 \in \operatorname{Ker} f$, imamo $d(x_0, \operatorname{Ker} f) \leq \|x_0 - 0\| = \|x_0\| = 1$. Dakle, $d(x_0, \operatorname{Ker} f) = d(x_0, 0)$. Neka je sada $y \in X$ proizvoljan. Tada je $y - f(y)\frac{x_0}{\|f\|} \in \operatorname{Ker} f$ i vrijedi

$$\left\| y - \left(y - f(y)\frac{x_0}{\|f\|} \right) \right\| = \frac{|f(y)| \cdot \|x_0\|}{\|f\|} = \frac{|f(y-x)|}{\|f\|} \leq \frac{\|f\| \cdot \|y - x\|}{\|f\|} = \|y - x\|, \quad x \in \operatorname{Ker} f.$$

Dakle, $d(y, \operatorname{Ker} f) = d\left(y, y - f(y)\frac{x_0}{\|f\|}\right)$ pa je $\operatorname{Ker} f$ *skup egzistencije.*

Posljednja karakterizacija koju ćemo dati karakterizira strogo konveksne prostore preko njihovih potprostora. Za početak navedimo jedan očigledan rezultat.

Propozicija 2.28. *Ako je normiran prostor strogo konveksan, tada su i svi njegovi potprostori strogo konveksni.*

Kako je svaki normiran prostor potprostor samoga sebe, možemo reći da je normiran prostor strogo konveksan ako i samo ako je svaki od njegovih potprostora strogo konveksan. Zapravo vrijedi i više.

Propozicija 2.29. *Normiran prostor je strogo konveksan ako i samo ako je svaki od njegovih dvodimenzionalnih potprostora strogo konveksan.*

Dokaz. Neka normiran prostor X nije strogo konveksan. Dovoljno je pronaći dvodimenzionalan potprostor od X koji nije strogo konveksan. Neka su $x_1, x_2 \in S(0,1)$ različite točke takve da je $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in S(0,1)$. Želimo pokazati da je $[\{x_1, x_2\}]$ traženi dvodimenzionalan potprostor. Kako je $1 = \frac{1}{2}\|x_1 + x_2\|$, $[\{x_1, x_2\}]$ nije strogo konveksan pa je preostalo pokazati da je dvodimenzionalan. Zaista, ako je $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da vrijedi $x_1 = \alpha x_2$, tada je

$$1 = \frac{1}{2}\|x_1 + x_2\| = \frac{1}{2}|1 + \alpha| \|x_1\| = \frac{1}{2}|1 + \alpha|.$$

Međutim, kako su x_1 i x_2 različite točke, α i 1 su različiti skalari pa dobivamo kontradikciju sa strogom konveksnosti polja $\mathbb{F}$. □

2.1 Uniformna konveksnost

Po Propoziciji 2.3 je normiran prostor strogo konveksan ako i samo ako polovište segmenta koji spaja dvije različite točke jedinične sfere pripada unutrašnjosti zatvorene jedinične kugle. Ako odaberemo točke $x, y \in S(0,1)$ takve da segment $[x, y]$ ima "malu", ali pozitivnu duljinu, prirodno se pitati koliko "duboko" je potrebno ići u unutrašnjost kugle da bi se zadržalo spomenuto svojstvo. To nas navodi na promatranje tzv. *uniformno konveksnih* normiranih prostora pa počnimo s definicijom.

Definicija 2.30. *Neka je X normiran prostor te neka je funkcija $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ dana s*

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in S(0,1), \|x-y\| \geq \epsilon \right\}.$$

Tada δ_X zovemo modul konveksnosti od X. Prostor X je uniformno konveksan ako za $0 < \epsilon \leq 2$ vrijedi $\delta_X(\epsilon) > 0$.

Izostavljajući pojam modula konveksnosti, unifomno konveksne prostore možemo definirati na sljedeći način (vidi [4]): za svaki $\epsilon \in \langle 0, 2]$, postoji $\delta > 0$ takav da za $x, y \in S(0,1)$, $\|x-y\| \geq \epsilon$ povlači $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leq 1 - \delta$.

Ako je $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq 2$, tada iz $\|x-y\| \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_1$ slijedi

$$\left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in S(0,1), \|x-y\| \geq \epsilon_2 \right\} \subseteq \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in S(0,1), \|x-y\| \geq \epsilon_1 \right\},$$

pa je $\delta_X(\epsilon_1) \leq \delta_X(\epsilon_2)$, tj. δ_X je nepadajuća funkcija. Nadalje, očigledno je $\delta_X(0) = 0$. Sljedeći rezultat daje razne ekvivalentne načine za definiciju modula konveksnosti i navodimo ga bez dokaza (vidi [8]).

Teorem 2.31. *Neka je X normiran prostor s modulom konveksnosti δ_X, te neka je* $\dim X \geq 1$ *ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ i* $\dim X > 1$ *ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Tada je*

$$\begin{aligned} \delta_X(\epsilon) &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in \overline{K}(0,1), \|x-y\| \geq \epsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in S(0,1), \|x-y\| = \epsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in \overline{K}(0,1), \|x-y\| = \epsilon \right\}, \end{aligned}$$

za $0 \leq \epsilon \leq 2$, te

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in S(0,1), \|x-y\| > \epsilon \right\}$$

$$= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \ x, y \in \overline{K}(0,1), \|x-y\| > \epsilon \right\},$$

za $0 \leq \epsilon < 2$.

Primjer 2.32. *Ako je X normiran prostor, tada je X strogo konveksan ako i samo ako je $\delta_X(2) = 1$. Zaista, neka je X strogo konveksan prostor i neka su $x, y \in S(0,1)$ takve da vrijedi $\|x-y\| = 2$. Tada je $2 = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = 2$, tj. $\|x + (-y)\| = \|x\| + \|-y\|$. Po Propoziciji 2.13 je sada $x = -y$ iz čega slijedi $\delta_X(2) = 1$. Obratno, neka je $\delta_X(2) = 1$ i neka X nije strogo konveksan prostor. Tada postoje različite točke $x, y \in S(0,1)$ takve da je $\|x+y\| = 2$. Kako je $\|x - (-y)\| = 2$, slijedi $\left\|\frac{1}{2}(x + (-y))\right\| = 0$, tj. $x = y$ što je kontradikcija. Dakle, X je strogo konveksan.*

Ako je X uniformno konveksan normiran prostor s modulom konveksnosti δ_X, tada za različite $x, y \in S(0,1)$ vrijedi $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leq 1 - \delta_X(\|x-y\|) < 1$ što dokazuje sljedeći rezultat.

Propozicija 2.33. *Svaki uniformno konveksan normiran prostor je strogo konveksan.*

Kao i za strogo konveksne prostore, vrijedi sljedeći očigledan rezultat.

Propozicija 2.34. *Svaki normiran prostor koji je izometrički izomorfan uniformno konveksnom prostoru je i sam uniformno konveksan.*

Iako je definicija uniformno konveksnih prostora intuitivno jasna, sljedeća karakterizacija je pogodnija za primjenu.

Propozicija 2.35. *Neka je X normiran prostor. Ekvivalentno je:*

(a) *X je uniformno konveksan.*

(b) *Ako su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u $S(0,1)$ takvi da $\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$, tada $\|x_n - y_n\| \to 0$.*

(c) *Ako su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u $\overline{K}(0,1)$ takvi da $\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$, tada $\|x_n - y_n\| \to 0$.*

(d) *Ako su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u X takvi da $\|x_n\|, \|y_n\|, \left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$, tada $\|x_n - y_n\| \to 0$.*

Dokaz. Neka vrijedi (b) i neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u X takvi da $\|x_n\| \to 1, \|y_n\| \to 1$ i $\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \to 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $x_n, y_n \neq 0$. Tada je

$$1 \geq \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{2}\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{\|y_n\|} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}y_n \right\|$$

$$\geq \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| - \left\| \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\|x_n\|}\right) x_n \right\| - \left\| \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\|y_n\|}\right) y_n \right\|.$$

Kako $\|x_n\|, \|y_n\| \to 1$, vrijedi $\left\| \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\|x_n\|}\right) x_n \right\|, \left\| \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\|y_n\|}\right) y_n \right\| \to 0$ pa dobivamo $\left\| \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|}\right) \right\| \to 1$ i iz (b) slijedi $\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| \to 0$. Sada je

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_n - y_n\| &= \left\| x_n - y_n + \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| + \left\| \left(1 - \frac{1}{\|x_n\|}\right) x_n \right\| + \left\| \left(1 - \frac{1}{\|y_n\|}\right) y_n \right\| \to 0, \end{aligned}$$

pa $\|x_n - y_n\| \to 0$ što dokazuje implikaciju (b) $\Rightarrow$ (d).

Neka sada vrijedi (d) i neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u $\overline{K}(0,1)$ takvi da $\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| \to 1$. Kako je $\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x_n\| + \|y_n\|\right) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vrijedi $\|x_n\| \to 1$ i $\|y_n\| \to 1$ pa iz (d) dobivamo $\|x_n - y_n\| \to 0$, tj. vrijedi (c). Implikacija (c) $\Rightarrow$ (b) je trivijalno zadovoljena pa smo pokazali (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d).

Neka je X uniformno konveksan normiran prostor s modulom konveksnosti δ_X, te neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ nizovi u $S(0,1)$ takvi da $\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| \to 1$, ali $\|x_n - y_n\| \not\to 0$. Tada postoji podniz $(x_{n_j})_j$ niza (x_n) takav da je $\|x_{n_j} - y_{n_j}\| \geq \epsilon$ za neki $\epsilon > 0$ i sve $j \in \mathbb{N}$. Sada je $\left\| \frac{1}{2}(x_{n_j} + y_{n_j}) \right\| \leq 1 - \delta_X(\epsilon) < 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$, što je kontradikcija s činjenicom da podniz konvergentnog niza ima isti limes kao niz, tj. $\left\| \frac{1}{2}(x_{n_j} + y_{n_j}) \right\| \to 1$. Dakle, $\|x_n - y_n\| \to 0$ što pokazuje implikaciju (a) $\Rightarrow$ (b).

Neka X nije uniformno konveksan prostor. Tada postoji $\epsilon \in \langle 0, 2]$ takav da je $\delta_X(\epsilon) = 0$. Dakle, postoje nizovi (x_n) i (y_n) u $S(0,1)$ takvi da je $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $\left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| \to 1$ pa ne vrijedi (b). Obratom po kontrapoziciji dobivamo posljednju implikaciju (b) $\Rightarrow$ (a). □

Navedimo sada neke primjere.

Primjer 2.36. *Neka je X unitaran prostor, $\epsilon \in \langle 0, 2]$ proizvoljan, te neka su $x, y \in S(0,1)$ takvi da je $\|x - y\| \geq \epsilon$. Tada iz (1.1) slijedi*

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2 \leq 4 - \epsilon^2,$$

tj. $\|x + y\| \leq \sqrt{4 - \epsilon^2}$. Sada je

$$1 - \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \geq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - \epsilon^2} > 0,$$

iz čega slijedi $\delta_X(\epsilon) > 0$. Dakle, X je uniformno konveksan prostor.

Primjer 2.37. *Po Propoziciji 2.33 su uniformno konveksni prostori nužno strogo konveksni, pa prostori* $L^1, L^\infty, \ell^1, \ell^\infty, c_0$ *i* $C(K)$ *nisu uniformno konveksni.*

Važan primjer uniformno konveksnih prostora su prostori $L^p(X)$, $1 < p < \infty$. Da bismo to pokazali, potreban nam je sljedeći tehnički rezultat kojeg navodimo bez dokaza (vidi [8]).

Lema 2.38. *Neka je* $1 < p < \infty$. *Tada postoji funkcija* $\gamma_p : \langle 0, 2] \to \langle 0, 1]$ *takva da je*

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p \leq (1-\gamma_p(t))\left(\frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}\right),$$

za $0 < t \leq 2$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *takve da vrijedi* $|\alpha - \beta| \geq t \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Teorem 2.39 (Clarkson)**.** *Neka je* (X, M, μ) *prostor mjere. Tada je, za* $1 < p < \infty$, *prostor* $L^p(X)$ *uniformno konveksan.*

Dokaz. Neka je $1 < p < \infty$, te neka su $f_1, f_2 \in S_{L^p}(0, 1)$ takvi da je $\|f_1 - f_2\| \geq \epsilon > 0$. Nadalje, neka je skup A dan s

$$A = \left\{x \in X : \ |f_1(x) - f_2(x)|^p \geq \frac{\epsilon^p}{4}\left(|f_1(x)|^p + |f_2(x)|^p\right)\right\}.$$

Uočimo da je za $x \in A$ zadovoljeno $|f_1(x) - f_2(x)| \geq \frac{\epsilon}{4^{1/p}} \max\{|f_1(x)|, |f_2(x)|\}$, pa po Lemi 2.38 postoji funkcija γ_p takva da je

$$\left|\frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}\right|^p \leq \left(1 - \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right)\right)\left(\frac{|f_1(x)|^p + |f_2(x)|^p}{2}\right), \quad x \in A.$$

Također, za $x \in X$ vrijedi

$$\left|\frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|f_1(x)|^p + |f_2(x)|^p}{2}\right).$$

Sada je

$$\begin{aligned} 1 - \left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\|_p^p &= \int_X \left(\frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} - \left|\frac{f_1 + f_2}{2}\right|^p\right) d\mu \\ &\geq \int_A \left(\frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2} - \left|\frac{f_1 + f_2}{2}\right|^p\right) d\mu \\ &\geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right) \int_A \frac{|f_1|^p + |f_2|^p}{2}\, d\mu. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}
2^p \max\{\|f_1\mathbb{1}_A\|_p, \|f_2\mathbb{1}_A\|_p\}^p &\geq \|f_1\mathbb{1}_A - f_2\mathbb{1}_A\|_p^p = \|f_1 - f_2\|_p^p - \int_{X\setminus A} |f_1 - f_2|^p \, d\mu \\
&\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4} \int_{X\setminus A} (|f_1|^p + |f_2|^p) \, d\mu \\
&\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4} \left(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p\right) = \frac{\epsilon^p}{2},
\end{aligned}$$

iz čega slijedi $\max\{\|f_1\mathbb{1}_A\|_p, \|f_2\mathbb{1}_A\|_p\} \geq \frac{\epsilon}{2 \cdot 2^{1/p}}$. Za $\epsilon \leq 2$ je sada

$$1 - \left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\|_p^p \geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right) \frac{\|f_1\mathbb{1}_A\|_p^p + \|f_2\mathbb{1}_A\|_p^p}{2} \geq \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{1/p}}\right) \frac{\epsilon^p}{2^{p+2}},$$

iz čega slijedi $\left\|\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right\|_p < 1$, tj. prostor L^p je uniformno konveksan. □

Tvrdnju prethodnog teorema mogli smo dobiti i iz *Hannerovih nejednakosti* (vidi [5]) koje za $p > 2$ glase:

$$(\|x\| + \|y\|)^p + |\,\|x\| - \|y\|\,|^p \overset{\text{(i)}}{\geq} \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \overset{\text{(ii)}}{\geq} 2\|x\|^p + 2\|y\|^p, \ x, y \in L^p(X). \quad (2.2)$$

Za $1 < p < 2$ vrijede obratne nejednakosti u (2.2). Pritom, u (i) vrijedi jednakost ako i samo ako je $x = 0$ ili $y = 0$, ili ako postoji $\alpha > 0$ takav da je

$$(x(t) - \alpha y(t))\,(x(t) + \alpha y(t)) = 0, \qquad \text{s.s. } t \in X.$$

Nadalje, u (ii) vrijedi jednakost ako i samo ako je $x(t)y(t) = 0$, s.s. $t \in X$.

Ako je $p = 2$, tada u (2.2) vrijede jednakosti za svaki $x, y \in L^2(X)$ i dobivamo relaciju paralelograma (1.1) za koju već znamo da vrijedi općenito za unitarne prostore.

Korolar 2.40. *Neka je $1 < p < \infty$. Tada je prostor ℓ^p uniformno konveksan. Također, prostori $\left(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_p\right) =: \ell_p^n$, $n \in \mathbb{N}$ su uniformno konveksni.*

U Primjeru 2.17 smo vidjeli da strogo konveksan Banachov prostor ne mora nužno biti refleksivan, no uniformno konveksni Banachovi prostori moraju. To je ujedno i primjer strogo konveksnog prostora koji nije uniformno konveksan.

Teorem 2.41 (Milman - Pettis)**.** *Svaki uniformno konveksan Banachov prostor je refleksivan.*

Dokaz. Neka je X uniformno konveksan Banachov prostor, $x^{**} \in S_{X''}(0,1)$, te neka je φ kao u Definiciji 1.17. Po Teoremu 1.25, postoji hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ u $\overline{K}(0,1)$ takav da je $\varphi(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Uz relaciju $(\alpha_1,\beta_1) \leq (\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2$ i $\beta_1 \leq \beta_2$ je $(I\times I, \leq)$ usmjeren skup i $\left(\varphi\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right)\right)_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$ je hiperniz. Tada (vidi [8]) $\varphi\left(\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right) \xrightarrow{w^*} x^{**}$ i koristeći definiciju preslikavanja φ te činjenicu da je norma dualnog prostora slabo* poluneprekidna odozdo dobivamo $\left\|\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta)\right\| \to 1$. Po Propoziciji 2.35 vrijedi $\left\|x_\alpha - x_\beta\right\| \to 0$. Dakle $(x_\alpha)_\alpha$ je Cauchyjev hiperniz u X i po Propoziciji 1.21 on konvergira prema $x_0 \in X$. Sada je $\varphi(x_\alpha) \to \varphi(x_0)$ i zbog jedinstvenosti w^* limesa imamo $x^{**} = \varphi(x_0)$. Dakle, X je refleksivan. □

Direktna posljedica prethodnog teorema je da je svaki neprazan, zatvoren i konveksan podskup uniformno konveksnog Banachovog prostora Čebiševljev.

Jasno je da je prostor iz Primjera 2.17 beskonačnodimenzionalan, sljedeći rezultat kaže da je to nužno svojstvo prostora koji su strogo konveksni i nisu uniformno konveksni.

Propozicija 2.42. *Konačnodimenzionalan normiran prostor je uniformno konveksan ako i samo ako je strogo konveksan.*

Dokaz. Neka je X konačnodimenzionalan strogo konveksan normiran prostor, te neka su $(x_n)_n, (y_n)_n$ nizovi u $S(0,1)$ takvi da $\|x_n - y_n\| \not\to 0$. Dovoljno je pokazati da tada $\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \not\to 1$. Iz $\|x_n - y_n\| \not\to 0$ dobivamo da postoji $\epsilon > 0$ takav da $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Kako je u konačnodimenzionalnim prostorima $S(0,1)$ kompaktan skup, postoje podnizi $(x_{n_j})_j$ i $(y_{n_j})_j$ takvi da $x_{n_j} \to x \in S(0,1)$ i $y_{n_j} \to y \in S(0,1)$. Također, vrijedi $\|x - y\| \geq \epsilon$ pa su x i y različite točke na $S(0,1)$. Dakle, $\left\|\frac{1}{2}(x_{n_j} + y_{n_j})\right\| \to \left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| < 1$ iz čega slijedi tvrdnja. □

Ako je M potprostor normiranog prostora X, tada je za $0 \leq \epsilon \leq 2$ očito zadovoljeno $\delta_M(\epsilon) \geq \delta_X(\epsilon)$. Posebno, ako je $\delta_X(\epsilon) > 0,\ \forall \epsilon \in \langle 0,2]$, tada je i $\delta_M(\epsilon) > 0,\ \forall \epsilon \in \langle 0,2]$. Time smo pokazali sljedeći rezultat.

Propozicija 2.43. *Svaki potprostor uniformno konveksnog prostora je uniformno konveksan.*

Navedimo za kraj još jedno korisno svojstvo uniformno konveksnih prostora. Kažemo da normiran prostor X ima *Radon - Rieszovo svojstvo* ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X takav da $x_n \xrightarrow{w} x$ i $\|x_n\| \to \|x\|$ vrijedi $x_n \to x$.

Teorem 2.44. *Svaki uniformno konveksan normiran prostor ima Radon - Rieszovo svojstvo.*

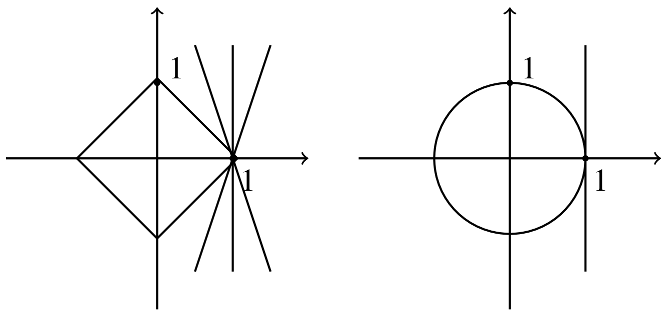
Dokaz. Neka je X uniformno konveksan prostor, te neka je $(x_n)_n$ niz u X takav da vrijedi $x_n \xrightarrow{w} x$ i $\|x_n\| \to \|x\|$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \neq 0$ kao i

$x_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$. Tada $\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} \frac{x}{\|x\|}$ pa je dovoljno pokazati $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to \frac{x}{\|x\|}$. Sada možemo dodatno pretpostaviti $x, x_n \in S(0,1),\ n \in \mathbb{N}$. Iz $\frac{1}{2}(x_n + x) \xrightarrow{w} x$, koristeći slabu poluneprekidnost odozdo norme, dobivamo $\left\|\frac{1}{2}(x_n + x)\right\| \to 1$ pa uniformna konveksnost povlači $\|x_n - x\| \to 0$ što je trebalo i dokazati. $\square$

Poglavlje 3

Glatki normirani prostori

Kao u prethodnom poglavlju, za uvođenje pojma glatkoće nas motiviraju kugle i sfere normiranih prostora. Na Slici 2 (a) vidimo da kroz točku $(1, 0)$ možemo provući više pravaca koji ne prolaze kroz unutrašnjost sfere, dok na Slici 2 (b) to nije slučaj jer sfera nema "oštrih" rubova - možemo reći da je glatka u tom smislu.



(a) $p = 1$ (b) $p = 2$

Slika 2: Jedinične sfere u $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p), \quad p = 1, 2.$

Definicija 3.1. *Neka je X normiran prostor i $x_0 \in S(0, 1)$. Kažemo da je x_0 točka glatkoće za $\overline{K}(0, 1)$ ako ne postoji više od jedne hiperplohe koja podupire $\overline{K}(0, 1)$ u x_0. Prostor X je gladak ako je svaka točka na $S(0, 1)$ točka glatkoće za $\overline{K}(0, 1)$.*

Jedna od posljedica Hahn - Banachovog teorema dana je u Korolaru 1.29 koji garantira postojanje barem jednog potpornog funkcionala za $\overline{K}(0, 1)$ u točki $x_0 \in S(0, 1)$. U Definiciji 3.1 možemo sada reći da je x_0 točka glatkoće ako postoji jedinstvena hiperploha koja podupire $\overline{K}(0, 1)$ u x_0. Analogno, možemo reći da je $x_0 \in S(0, 1)$ točka glatkoće za $\overline{K}(0, 1)$ ako postoji jedinstveni funkcional $x^* \in S_{X'}(0, 1)$ takav da je $x^*(x_0) = \|x_0\| = \operatorname{Re} x^*(x_0)$.

Ako $x_1^* \in S_{X'}(0,1)$ i $x_2^* \in S_{X'}(0,1)$ podupiru $\overline{K}(0,1)$ u istoj točki $x_0 \in S(0,1)$, te ako induciraju istu hiperplohu, tada je

$$H = \{x \in X : \operatorname{Re} x_1^*(x) = 1\} = \{x \in X : \operatorname{Re} x_2^*(x) = 1\}. \tag{3.1}$$

Znamo da je $x_0 \in H$, tj. $\operatorname{Re} x_1^*(x_0) = \operatorname{Re} x_2^*(x_0) = 1$. Neka je $x \in \operatorname{Ker} \operatorname{Re} x_1^*$. Tada je $\operatorname{Re} x_1^*(x + x_0) = 1$ pa iz (3.1) dobivamo $\operatorname{Re} x_2^*(x + x_0) = 1$, tj. $\operatorname{Re} x_2^*(x) = 0$. Uzmimo sada $x \in X \setminus \operatorname{Ker} \operatorname{Re} x_1^*$. Tada je

$$\operatorname{Re} x_1^* \left(\frac{x}{\operatorname{Re} x_1^*(x)} \right) = 1 = \operatorname{Re} x_2^* \left(\frac{x}{\operatorname{Re} x_1^*(x)} \right),$$

iz čega slijedi $\operatorname{Re} x_1^*(x) = \operatorname{Re} x_2^*(x)$. Dakle, pokazali smo da je $\operatorname{Re} x_1^*(x) = \operatorname{Re} x_2^*(x), x \in X$. Funkcionali x_1^* i x_2^* su jedinstveno određeni svojim realnim dijelovima pa vrijedi

$$x_1^*(x) = \operatorname{Re} x_1^*(x) - i \operatorname{Re} x_1^*(ix) = \operatorname{Re} x_2^*(x) - i \operatorname{Re} x_2^*(ix) = x_2^*(x), \quad x \in X.$$

Koristeći gornju diskusiju, lako dobivamo sljedeće rezultate.

Propozicija 3.2. *Neka je X normiran prostor i $x_0 \in S(0,1)$. Ekvivalentno je:*

(a) *x_0 je točka glatkoće za $\overline{K}(0,1)$.*

(b) *Postoji točno jedan $x_0^* \in S_{X'}(0,1)$ koji podupire $\overline{K}(0,1)$ u x_0.*

(c) *Postoji točno jedan $x_0^* \in S_{X'}(0,1)$ takav da je $\operatorname{Re} x_0^*(x_0) = 1$.*

(d) *Postoji točno jedan $x_0^* \in S_{X'}(0,1)$ takav da je $x_0^*(x_0) = 1$.*

Korolar 3.3. *Neka je X normiran prostor. Ekvivalentno je:*

(a) *X je gladak prostor.*

(b) *Za svaki $x \in S(0,1)$ postoji jedinstveni $x^* \in S_{X'}(0,1)$ koji podupire $\overline{K}(0,1)$ u x.*

(c) *Za svaki $x \in S(0,1)$ postoji jedinstveni $x^* \in S_{X'}(0,1)$ takav da je $\operatorname{Re} x^*(x) = 1$.*

(d) *Za svaki $x \in S(0,1)$ postoji jedinstveni $x^* \in S_{X'}(0,1)$ takav da je $x^*(x) = 1$.*

Kao za strogo konveksne prostore, vrijedi sljedeći očigledan rezultat.

Propozicija 3.4. *Svaki normirani prostor koji je izometrički izomorfan glatkom prostoru je i sam gladak.*

Prije samih primjera, pogledajmo vezu strogo konveksnih i glatkih normiranih prostora.

Propozicija 3.5. *Normiran prostor X je gladak ako je njegov dualni prostor X' strogo konveksan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka normiran prostor X nije gladak. Tada za $x \in S(0,1)$ postoje različiti funkcionali $x_1^*, x_2^* \in S_{X'}(0,1)$ takvi da je $x_1^*(x) = x_2^*(x) = 1$. Sada iz $\frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)(x) = 1$ slijedi $1 \leq \left\|\frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)\right\| \leq 1$ pa je $\left\|\frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)\right\| = 1$. Dakle, po Propoziciji 2.3, X' nije strogo konveksan prostor. □

Propozicija 3.6. *Normiran prostor X je strogo konveksan ako je njegov dualni prostor X' gladak.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka normiran prostor X nije strogo konveksan i neka je $\varphi : X \to X''$ definirana kao u Definiciji 1.17 Tada postoje različiti $x_1, x_2 \in S(0,1)$ i $x^* \in S_{X'}(0,1)$ takvi da je

$$1 = x^* \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right) = x^*(x_1) = x^*(x_2) = \varphi(x_1)(x^*) = \varphi(x_2)(x^*).$$

Dakle, X' nije gladak. □

Korolar 3.7. *Refleksivan normiran prostor je strogo konveksan ako i samo ako mu je dualni prostor gladak, te je gladak ako i samo ako mu je dualni prostor strogo konveksan.*

Navedimo sada neke primjere.

Primjer 3.8. *Skalarno polje $\mathbb{F}$, gledano kao normirani prostor nad $\mathbb{F}$ je očigledno gladak prostor. Zapravo je svaki jednodimenzionalni prostor gladak.*

Primjer 3.9. *Za $1 < p < \infty$ i $1 < q < \infty$ takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ su prostori $(L^p)'$ i L^q izometrički izomorfni (vidi [6]). Kako su L^q strogo konveksni prostori, iz Propozicije 3.5 slijedi glatkoća prostora L^p. Slično dobivamo da su prostori ℓ^p, $1 < p < \infty$, glatki.*

Primjer 3.10. *Ako je x^* ograničen linearan funkcional na $L^1(X)$, te y^* ograničen funkcional na $L^\infty(X)$, tada postoje $g \in L^\infty(X)$ i $f \in L^1(X)$ takvi da je (vidi [8])*

$$x^*(x) = \int_X gx, \quad x \in L^1(X), \qquad y^*(y) = \int_X fy, \quad y \in L^\infty(X)$$

i vrijedi $\|x^*\| = \|g\|_\infty$, $\|y^*\| = \|f\|_1$. Neka su sada funkcionali f_1, f_2, g_1 i g_2 definirani kao u Primjeru 2.16. Funkcionale g_1 i g_2 možemo promatrati kao različite ograničene funkcionale na $L^1(X)$ na gore opisan način. Analogno, funkcionale f_1 i f_2 možemo identificirati s različitim funkcionalima na $L^\infty(X)$. Sada je

$$\int_X f_1 g_2 = \int_X f_1 g_1 = \int_X f_2 g_2 = 1,$$

što je u suprotnosti s definicijom glatkih prostora jer smo pronašli dva različita potporna funkcionala u istim točkama iz $S_{L^1}(0,1)$, odnosno $S_{L^\infty}(0,1)$. Dakle, L^1 i L^∞ nisu glatki prostori.

Primjer 3.11. *Neka su $x_1^*, x_2^* \in S_{c_0'}(0,1)$ identificirani s vektorima e_1 i e_2 kanonske baze prostora ℓ^1. Uočimo da je to moguće napraviti jer su prostori c_0' i ℓ^1 izometrički izomorfni (vidi [6]). Nadalje, neka je $x = (1,1,0,0,...) \in S_{c_0}(0,1)$. Sada je $x_1^*(x) = x_2^*(x) = 1$ pa prostor c_0 nije gladak. Također, ℓ^∞ nije gladak.*

Kao i u slučaju strogo konveksnih prostora, glatki prostori nisu nužno refleksivni.

Primjer 3.12. *Neka je $I : \ell^2 \to c_0$ zadan s $I(x) = x$. Nadalje, neka je $I^* : (c_0)' \to (\ell^2)'$ zadan formulom $I^*(x^*) = x^*(I)$. Kako je I ograničen, lako vidimo da je i I^* ograničen. Također, ako je $I^*(x^*) = 0$, tada je $x^*(I(x)) = x^*(x) = 0$, $\forall x \in c_0$, pa je $x^* = 0$, tj. I^* je injektivan operator. Kako je $(\ell^2)'$ izometrički izomorfan strogo konveksnom prostoru ℓ^2 (vidi [1]), i sam je strogo konveksan. Po Primjeru 2.15 je $|||x^*||| = \|x^*\|_{(c_0)'} + \|I^*(x^*)\|_{(\ell^2)'}$ strogo konveksna norma ekvivalentna normi prostora $(c_0)'$. Može se pokazati (vidi [8]) da je $|||\cdot|||$ dualna norma norme*

$$\|x\|' = \sup\{|x^*(x)| : \ x^* \in (c_0)', |||x^*||| \leq 1\}.$$

Dakle, $(c_0, \|\cdot\|')'$ je strogo konveksan prostor pa iz Propozicije 3.5 slijedi da je $(c_0, \|\cdot\|')$ gladak prostor. Kako su norme $|||\cdot|||$ i $\|\cdot\|_{(c_0)'}$ ekvivalentne, postoje $s, t > 0$ takvi da je $s\|x^*\|_{(c_0)'} \leq |||x^*||| \leq t\|x^*\|_{(c_0)'}$, $x^* \in (c_0)'$. Sada je

$$\begin{aligned}\|x\|' &= \sup\{|x^*(x)| : \ x^* \in (c_0)', |||x^*||| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|x^*(x)| : \ x^* \in (c_0)', s\|x^*\|_{(c_0)'} \leq 1\} \overset{(1.2)}{=} \frac{1}{s}\|x\|_{c_0}.\end{aligned}$$

S druge strane,

$$\begin{aligned}\|x\|_{c_0} &\overset{(1.2)}{=} \sup\{|x^*(x)| : \ x^* \in (c_0)', \|x^*\|_{(c_0)'} \leq 1\} \\ &\leq \sup\left\{|x^*(x)| : \ x^* \in (c_0)', \frac{1}{t}|||x^*||| \leq 1\right\} = t\|x\|'.\end{aligned}$$

Dakle, norme $\|\cdot\|_{c_0}$ i $\|\cdot\|'$ su ekvivalentne. Kako je prostor c_0 Banachov i nije refleksivan (vidi [8]), $(c_0, \|\cdot\|')$ je gladak nerefleksivan Banachov prostor.

U nastavku ćemo dati nekoliko karakterizacija glatkih prostora. Kao što je kod realnih funkcija realne varijable pojam glatkoće povezan s diferencijabilnosti, tako je i glatkoća jediničnih sfera u normiranom prostoru povezana s *Gâteauxovom derivacijom norme*. Prije same definicije, dokažimo jednu tehničku lemu.

Lema 3.13. *Neka je X normiran prostor i $x_0 \in S(0,1)$. Tada je za svaki $y \in X$ funkcija*

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni t \mapsto \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t} \in \mathbb{R}$$

nepadajuća, pa limesi

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}, \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}$$

postoje i vrijedi

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t} \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}.$$

Nadalje,

$$y \mapsto \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}$$

je sublinearan funkcional na X.

Dokaz. Neka je $y \in X$ fiksan i označimo

$$f(t) := \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Za $0 < t_1 < t_2$ imamo

$$\begin{aligned}
\|x_0 + t_1 y\| - \|x_0\| &= \left\| \frac{t_1}{t_2}(x_0 + t_2 y) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) x_0 \right\| - \|x_0\| \\
&\leq \frac{t_1}{t_2} \|x_0 + t_2 y\| + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \|x_0\| - \|x_0\| \\
&= \frac{t_1}{t_2} \left(\|x_0 + t_2 y\| - \|x_0\| \right),
\end{aligned}$$

pa je $f(t_1) \leq f(t_2)$. Slično, uzimajući $-y$ umjesto y u gornjem raspisu, dobivamo $f(-t_2) \leq f(-t_1)$. Također, jer je $\|x_0\| \leq \frac{1}{2} (\|x_0 - t_1 y\| + \|x_0 + t_1 y\|)$, imamo $f(-t_1) \leq f(t_1)$. Dakle, f je nepadajuća pa postoje limesi $\lim_{t \to 0^-} f(t)$ i $\lim_{t \to 0^+} f(t)$, te vrijedi $\lim_{t \to 0^-} f(t) \leq \lim_{t \to 0^+} f(t)$. Neka je sada

$$g(y) := \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}, \qquad y \in X,$$

te neka su $s > 0$ i $y_1, y_2 \in X$. Tada je

$$g(sy_1) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x_0 + tsy_1\| - \|x_0\|}{t} \overset{\lambda = st}{=} s \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\|x_0 + \lambda y_1\| - \|x_0\|}{\lambda} = sg(y_1),$$

pa je g pozitivno homogen funkcional. Ako je $t > 0$, tada je

$$\frac{\|x_0 + t(y_1 + y_2)\| - \|x_0\|}{t} \leq \frac{\|x_0 + 2ty_1\| - \|x_0\|}{2t} + \frac{\|x_0 + 2ty_2\| - \|x_0\|}{2t},$$

pa kada $t \to 0^+$ dobivamo $g(y_1 + y_2) \leq g(y_1) + g(y_2)$, tj. g je subaditivan pa je sublinearan. □

Definicija 3.14. *Neka je X normiran prostor i neka su $x_0 \in S(0,1)$, $y_0 \in X$. Neka je*

$$G_-(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x_0 + ty_0\| - \|x_0\|}{t}, \qquad i \qquad G_+(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x_0 + ty_0\| - \|x_0\|}{t}.$$

Tada $G_-(x_0, y_0)$ i $G_+(x_0, y_0)$ zovemo redom lijeva i desna Gâteauxova derivacija norme točke x_0 u smjeru y_0. Norma je Gâteaux derivabilna u x_0 u smjeru y_0 ako je $G_-(x_0, y_0) = G_+(x_0, y_0)$ i u tom slučaju pišemo $G_-(x_0, y_0) = G(x_0, y_0)$ i $G(x_0, y_0)$ zovemo Gâteauxova derivacije norme u x_0 u smjeru y_0. Ako je norma Gâteaux derivabilna u x_0 u svim smjerovima y, kažemo da je norma Gâteaux derivabilna u x_0. Ako je norma Gâteaux derivabilna u svakoj točki $x_0 \in S(0,1)$, kažemo da je norma Gâteaux derivabilna.

Uočimo da je norma Gâteaux derivabilna u x_0 u smjeru y_0 ako i samo ako limes

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x_0 + ty_0\| - \|x_0\|}{t} \tag{3.2}$$

postoji i u tom slučaju je limes jednak $G(x_0, y_0)$. Sada možemo reći da je norma Gâteaux derivabilna ako i samo ako limes (3.2) postoji za svaki $x_0 \in S(0,1)$ i svaki $y_0 \in X$. Nadalje, za $x_0 \in S(0,1)$ vrijedi

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x_0 + tx_0\| - \|x_0\|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|1+t|\,\|x_0\| - \|x_0\|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|1+t| - 1}{t},$$

i za dovoljno mali t je $\frac{|1+t|-1}{t} = 1$. Dakle, norma je uvijek Gâteaux derivabilna u x_0 u smjeru x_0 i vrijedi $G(x_0, x_0) = 1$.

Po Lemi 3.13 je $G_+(x_0, \cdot)$ sublinearan funkcional na X. Također, iz

$$G_-(x_0, y) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t} \overset{\lambda=-t}{=} \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\|x_0 - \lambda y\| - \|x_0\|}{-\lambda} = -G_+(x_0, -y), \; y \in X \tag{3.3}$$

koristeći pozitivnu homogenost funkcionala $G_+(x_0, \cdot)$, dobivamo da je $G_-(x_0, \cdot)$ pozitivno homogen.

Lema 3.15. *Neka je X normiran prostor i neka su $x_0 \in S(0,1)$, $x_0^* \in S_{X'}(0,1)$. Tada x_0^* podupire $\overline{K}(0,1)$ u x_0 ako i samo ako je*

$$G_-(x_0, y) \le \operatorname{Re} x_0^*(y) \le G_+(x_0, y), \quad y \in X.$$

Dokaz. Neka x_0^* podupire $\overline{K}(0,1)$ u $x_0 \in S(0,1)$. Za $y \in X$ i $t > 0$ imamo

$$\begin{aligned} t \operatorname{Re} x_0^*(y) &= \operatorname{Re} x_0^*(ty) = \operatorname{Re} x_0^*(x_0 + ty) - \operatorname{Re} x_0^*(x_0) = \operatorname{Re} x_0^*(x_0 + ty) - \|x_0\| \\ &\le \|\operatorname{Re} x_0^*\|\,\|x_0 + ty\| - \|x_0\| = \|x_0 + ty\| - \|x_0\|. \end{aligned}$$

Ovdje smo u posljednjoj jednakosti koristili $\|\operatorname{Re} x_0^*\| = \|x_0^*\| = 1$. Sada je

$$\begin{aligned}\frac{\|x_0 - ty\| - \|x_0\|}{-t} &= -\frac{\|x_0 + t(-y)\| - \|x_0\|}{t} \leq -\operatorname{Re} x_0^*(-y) = \operatorname{Re} x_0^*(y) \\ &\leq \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}\end{aligned}$$

iz čega, uz (3.3), slijedi $G_-(x_0, y) \leq \operatorname{Re} x_0^*(y) \leq G_+(x_0, y)$.

Obratno, neka je $G_-(x_0, y) \leq \operatorname{Re} x_0^*(y) \leq G_+(x_0, y),\ y \in X$. Kako je $G(x_0, x_0) = 1$, vrijedi $\operatorname{Re} x_0^*(x_0) = 1$ pa x_0^* podupire $\overline{K}(0, 1)$ u x_0. □

Teorem 3.16 (Banach)**.** *Neka je X normiran prostor i neka je $x_0 \in S(0, 1)$. Tada je x_0 točka glatkoće za $\overline{K}(0, 1)$ ako i samo ako je norma prostora X Gâteaux derivabilna u x_0. Nadalje, ako je x_0 točka glatkoće za $\overline{K}(0, 1)$ te ako je $x_0^* \in S_{X'}(0, 1)$ pripadni jedinstveni potporni funkcional, tada je Gâteauxova derivacija norme u x_0 dana s $G(x_0, y) = \operatorname{Re} x_0^*(y),\ y \in X$.*

Dokaz. Neka norma prostora X nije Gâteaux derivabilna u $x_0 \in S(0, 1)$. Tada postoji $y_0 \in X$ takav da je $G_-(x_0, y_0) < G_+(x_0, y_0)$. Neka je sada $s \in \mathbb{R}$ takav da je $G_-(x_0, y_0) \leq s \leq G_+(x_0, y_0)$ fiksan te neka je $f_s(ry_0) = rs,\ r \in \mathbb{R}$. Ako je $r > 0$, tada iz pozitivne homogenosti funkcionala $G_+(x_0, y)$ slijedi $f_s(ry_0) \leq G_+(x_0, ry_0)$. Nadalje, za $r < 0$ je

$$rs \leq rG_-(x_0, y_0) \overset{(3.3)}{=} -rG_+(x_0, -y_0) = G_+(x_0, ry_0),$$

pa, uz $G_+(x_0, 0) = 0$, vrijedi $f_s(ry_0) \leq G_+(x_0, ry_0),\ r \in \mathbb{R}$. Funkcional f_s je realan i linearan na vektorskom prostoru $V := [\{y_0\}]$. Sada po Hahn-Banachovom teoremu (Teorem 1.26), postoji linearan funkcional x_s^* na X takav da je $\operatorname{Re} x_s^*\big|_V = f_s$ i vrijedi $\operatorname{Re} x_s^*(y) \leq G_+(x_0, y),\ y \in X$. Sada je

$$\operatorname{Re} x_s^*(y) = -\operatorname{Re} x_s^*(-y) \geq -G_+(x_0, -y) = G_-(x_0, y), \quad y \in X.$$

Također,

$$\operatorname{Re} x_s^*(y) \leq G_+(x_0, y) \leq \frac{\|x_0 + 1y\| - \|x_0\|}{1} \leq \|y\|, \quad y \in X,$$

pa je $x_s^* \in X'$ i vrijedi $\|x_s^*\| \leq 1$. Uz $\operatorname{Re} x_s^*(x_0) = G(x_0, x_0) = 1$ je $x_s^* \in S_{X'}(0, 1)$ potporni funkcional za $\overline{K}(0, 1)$ u x_0. Kako je $s \in [G_-(x_0, y_0), G_+(x_0, y_0)]$ bio proizvoljan, postoji beskonačno mnogo potpornih funkcionala $x_s^* \in S_{X'}(0, 1)$ za $\overline{K}(0, 1)$ u x_0. Dakle, x_0 nije točka glatkoće za $\overline{K}(0, 1)$.

Obratno, neka je norma prostora X Gâteaux derivabilna u $x_0 \in S(0, 1)$ te neka je $x_0^* \in S_{X'}(0, 1)$ pripadni potporni funkcional. Po Lemi 3.15 je sada $\operatorname{Re} x_0^*(y) = G(x_0, y),\ y \in X$ iz čega, uz činjenicu da je funkcional potpuno određen svojim realnim dijelom, slijedi jedinstvenost funkcionala x_0^*. Iz Propozicije 3.2 sada slijedi da je x_0 točka glatkoće za $\overline{K}(0, 1)$. □

Koristeći sve dokazano, dobivamo sljedeću karakterizaciju glatkih prostora.

Korolar 3.17. *Normiran prostor je gladak ako i samo ako je njegova norma Gâteaux derivabilna.*

Kao u slučaju strogo konveksnih, glatke prostore možemo karakterizirati preko njihovih dvodimenzionalnih potprostora. Pokažimo prvo da se glatkoća prenosi na potprostore.

Propozicija 3.18. *Ako je X gladak normiran prostor, tada su glatki i svi njegovi potprostori.*

Dokaz. Neka je X gladak normiran prostor, $M \leq X$, $x \in S_M(0,1)$ i $y \in M$. Tada su lijeva Gâteauxova derivacija norme prostora X i M točke x_0 u smjeru y jednake i isto vrijedi za desnu Gâteauxovu derivaciju. Dakle, svaka točka $x \in S_M(0,1)$ je točka glatkoće za $\overline{K}_M(0,1)$ pa je M gladak. □

Propozicija 3.19. *Normiran prostor je gladak ako i samo ako je svaki od njegovih dvodimenzionalnih potprostora gladak.*

Dokaz. Neka normiran prostor X nije gladak. Dovoljno je pronaći dvodimenzionalan potprostor od X koji nije gladak. Neka su $x \in S(0,1)$ i $y \in X$ takve da norma prostora X nije Gâteaux derivabilna u x u smjeru y. Kako je $\dim X > 1$, postoji dvodimenzionalan potprostor M koji sadrži točke x i y. Tada M nije gladak jer su lijeva i desna Gâteauxova derivacija norme prostora X i M u x u smjeru y jednake. □

Za kraj razmatranja glatkih prostora, definirat ćemo preslikavanje koje povezuje točke $x \in S(0,1)$ s pripadnim potpornim funkcionalima $x^* \in S_{X'}(0,1)$ koji podupiru $\overline{K}(0,1)$ u x.

Definicija 3.20. *Neka je X normiran prostor. Za $x \in S(0,1)$ neka je skup $\nu(x)$ dan s*

$$\nu(x) = \{x^* \in S_{X'}(0,1) : \ x^*(x) = 1\},$$

tj. $\nu(x)$ je skup svih potpornih funkcionala koji podupiru $\overline{K}(0,1)$ u točki x i zovemo ga preslikavanje sferne slike.

U terminima preslikavanja sferne slike sada možemo iskazati već dokazane rezultate za glatke, kao i za strogo konveksne normirane prostore. Ako je za $x \in S(0,1)$ skup $\nu(x)$ jednočlan, tada je x točka glatkoće za $\overline{K}(0,1)$ pa možemo reći da je prostor X gladak ako i samo ako je za svaku točku $x \in S(0,1)$ skup $\nu(x)$ jednočlan. Nadalje, ako su $x_1, x_2 \in S(0,1)$ različite točke, tada je $\nu(x_1) \cap \nu(x_2)$ skup svih zajedničkih potpornih funkcionala za $\overline{K}(0,1)$ točaka x_1 i x_2. Po Korolaru 2.22 sada dobivamo da je normiran prostor strogo konveksan ako i samo ako su skupovi $\nu(x_1)$ i $\nu(x_2)$ disjunktni za različite točke $x_1, x_2 \in S(0,1)$. Sljedeći rezultat sumira sve dokazano i daje karakterizaciju prostora koji su glatki i strogo konveksni.

Korolar 3.21. *Normiran prostor je strogo konveksan i gladak ako i samo ako je preslikavanje sferne slike injektivno, te je za svaku točku jedinične sfere skup $\nu(x)$ jednočlan.*

3.1 Uniformna glatkoća

Normiran prostor je gladak ako mu je dualni prostor strogo konveksan, te je strogo konveksan ako mu je dualni prostor gladak. U ovome poglavlju dajemo sličnu vezu za uniformno konveksne i *uniformno glatke* prostore. Pri tome će nam glavni alat biti osnažena Gâteauxova derivacija. Počnimo s jednim uvodnim rezultatom koji daje smjer u kojem trebamo ići.

Propozicija 3.22. *Neka je X normiran prostor. Ekvivalentno je:*

(a) *Prostor X je gladak.*

(b) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$ *postoji za sve* $x \in S(0,1)$, *te sve* $y \in X$.

(c) $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{2}(\|x+ty\| + \|x-ty\|) - 1}{t} = 0$ *za sve* $x \in S(0,1)$, *te sve* $y \in X$.

Neka je sada X gladak prostor. Tada izraz u (b) konvergira prema svom limesu uniformno za $(x, y) \in S(0,1) \times S(0,1)$ *ako i samo ako izraz u (c) konvergira uniformno prema svom limesu za* $(x, y) \in S(0,1) \times S(0,1)$.

Dokaz. Ekvivalencija (a) $\Leftrightarrow$ (b) slijedi iz činjenice da je X gladak ako i samo ako mu je norma Gâteaux derivabilna. Neka su $x \in S(0,1), y \in X$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{G_+(x,y) - G_-(x,y)}{2} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} - \frac{\|x-ty\| - \|x\|}{-t}\right)\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}(\|x+ty\| + \|x-ty\|) - 1}{t},\end{aligned}$$

iz čega slijedi da limes u (c) postoji i jednak je 0 ako i samo ako je norma prostora X Gâteaux derivabilna u x u smjeru y. Time je dokazana ekvivalencija (b) $\Leftrightarrow$ (c).

Neka je X gladak prostor i neka su $x, y \in S(0,1)$. Tada je $G_-(x,y) = G_+(x,y) = G(x,y)$. Nadalje, u dokazu Leme 3.13 smo pokazali da je funkcija $f(t) = \dfrac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}$ nepadajuća pa vrijedi $f(-t) \le G(x,y) \le f(t),\ t > 0$. Sada je

$$\left|\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} - G(x,y)\right| + \left|\frac{\|x-ty\| - \|x\|}{-t} - G(x,y)\right|$$

$$= \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} - G(x,y) + G(x,y) - \frac{\|x-ty\|-\|x\|}{-t}$$
$$= 2\frac{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1}{t} = 2\left|\frac{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1}{t} - 0\right|,$$

iz čega slijedi tvrdnja o uniformnoj konvergenciji. □

Koristeći prethodnu propoziciju, možemo reći da je prostor *uniformno gladak* ako izraz u (c) dijelu konvergira uniformno prema 0 za $(x,y) \in S(0,1)\times S(0,1)$, tj. ako za svaki $\epsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\epsilon)$ takav da $0 < t < \delta$ povlači

$$\left|\frac{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1}{t}\right| < \epsilon, \qquad x,y \in S(0,1). \tag{3.4}$$

Kako je

$$\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1 \geq \frac{1}{2}\|x+ty+x-ty\|-1 = \frac{1}{2}\|2x\|-1 = 0, \tag{3.5}$$

u (3.4) možemo izostaviti apsolutnu vrijednost. Mi ćemo koristiti nešto drugačiju, ali ekvivalentnu, definiciju uniformno glatkih prostora.

Definicija 3.23. *Neka je X normiran prostor te neka je funkcija* $\rho_X : \langle 0,+\infty\rangle \to [0,+\infty\rangle$ *dana s*

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1 :\ x,y \in S(0,1)\right\}.$$

Tada ρ_X *zovemo modul glatkoće od X. Prostor X je uniformno gladak ako je* $\lim_{t\to 0^+}\rho_X(t)/t = 0$.

Dakle, normiran prostor je uniformno gladak ako za svaki $\epsilon > 0$ i $x,y \in S(0,1)$, postoji $\delta = \delta(\epsilon)$ takav da $0 < t < \delta$ povlači $\rho(t)/t < \epsilon$. Odmah vidimo da je Definicija 3.23 ekvivalentna s (3.4). Nadalje, ρ_X također možemo definirati s

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)-1 :\ x \in \overline{K}(0,1), y \in X, \|y\| \leq t\right\}, \quad t > 0.$$

Pokažimo sada neka svojstva modula glatkoće.

Propozicija 3.24. *Neka je* ρ_X *modul glatkoće normiranog prostora X. Tada je funkcija* $\rho_X(t)/t$ *nepadajuća i vrijedi* $\max\{0, t-1\} \leq \rho_X(t) \leq t,\ t > 0$.

Dokaz. Neka je $0 < t_1 < t_2$ i $x, y \in S(0,1)$. Koristeći argumente iz dokaza Leme 3.13 dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}(\|x_1 + t_1 y\| + \|x_1 - t_1 y\|) - 1}{t_1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\|x + t_1 y\| - \|x\|}{t_1} - \frac{\|x - t_1 y\| - \|x\|}{-t_1}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\|x + t_2 y\| - \|x\|}{t_2} - \frac{\|x - t_2 y\| - \|x\|}{-t_2}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\|x_1 + t_2 y\| + \|x_1 - t_2 y\|) - 1}{t_2}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $\rho_X(t_1)/t_1 \leq \rho_X(t_2)/t_2$. Neka je sada $t > 0$ fiksan. Iz (3.5) dobivamo $\rho_X(t) \geq 0$. Nadalje, za $x, y \in S(0,1)$ vrijedi

$$\frac{1}{2}(\|x + ty\| + \|x - ty\|) - 1 \leq \frac{1}{2}(\|x\| + t\|y\| + \|x\| + t\|y\|) - 1 = t,$$

pa vrijedi $\rho_X(t) \leq t$. Također, vrijedi

$$\frac{1}{2}(\|x + ty\| + \|x - ty\|) - 1 \geq \frac{1}{2}(\|x + ty - x + ty\|) - 1 = \frac{1}{2}\|2ty\| - 1 = t - 1,$$

tj. $\rho_X(t) \geq t - 1$. □

Iz prethodne propozicije slijedi da za svaki prostor X, $\frac{\rho_X(t)}{t}$ konvergira prema nekom nenegativnom realnom broju kada $t \to 0^+$. Da bi prostor X bio uniformno gladak, taj realni broj nužno mora biti 0.

Vratimo se sada na vezu diferencijabilnosti i glatkoće. Sljedeća definicija daje tri nova koncepta diferencijabilnosti norme, mi ćemo koristiti jedan od njih i za njega pokazati vezu s uniformnom glatkoćom prostora.

Definicija 3.25. *Neka je X normiran prostor. Norma prostora X je*

(a) *uniformno Gâteaux derivabilna ako* $\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$ *postoji za sve* $x \in S(0,1)$ *i* $y \in X$*, te je konvergencija uniformna za* $x \in S(0,1)$ *kada je* $y \in S(0,1)$ *fiksan;*

(b) *Fréchet derivabilna ako limes u (a) postoji za svaki* $x \in S(0,1)$ *i* $y \in X$*, te je konvergencija uniformna za* $y \in X$ *kada je* $x \in S(0,1)$ *fiksan;*

(c) *uniformno Fréchet derivabilna ako limes u (a) postoji za sve* $x \in S(0,1)$ *i* $y \in X$*, te je konvergencija uniformna za* $(x, y) \in S(0,1) \times S(0,1)$.

Definicija 3.26. *Normiran prostor je uniformno Fréchet gladak ako mu je norma uniformno Fréchet derivabilna.*

Ako je norma prostora X uniformno Fréchet derivabilna, tada iz ekvivalencije (b) $\Leftrightarrow$ (c) u Propoziciji 3.22 slijedi $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{2}(\|x+ty\|+\|x-ty\|)-1}{t} = 0$, te je konvergencija uniformna za $(x,y)\in S(0,1)\times S(0,1)$. Sada iz ekvivalencije (3.4) s Definicijom 3.23 slijedi da je X uniformno gladak prostor. Kako diskusiju možemo ponoviti i unatrag, dobivamo sljedeću karakterizaciju uniformno glatkih prostora.

Propozicija 3.27. *Normiran prostor je uniformno gladak ako i samo ako je uniformno Fréchet gladak.*

Svaka uniformno Fréchet derivabilna norma je očigledno i Gâteaux derivabilna pa imamo sljedeći očekivani rezultat.

Propozicija 3.28. *Svaki uniformno gladak normiran prostor je gladak.*

Dakle, glatkoća je nužno svojstvo uniformno glatkih prostora pa prostori $L^\infty, L^1, \ell^\infty$ i c_0 nisu uniformno glatki.

Kao i za glatke prostore vrijedi sljedeći očigledan rezultat.

Propozicija 3.29. *Svaki normiran prostor koji je izometrički izomorfan uniformno glatkom prostoru je i sam uniformno gladak.*

Kao što smo već spomenuli, želimo dati vezu uniformno konveksnih i uniformno glatkih prostora. Sljedeći rezultat govori o vezi pripadnih modula glatkoće, odnosno modula konveksnosti i koristit ćemo ga u dokazu Teorema 3.31.

Lema 3.30 (Lindenstrauss)**.** *Neka su δ_X i ρ_X moduli konveksnosti, odnosno glatkoće, normiranog prostora X, te neka su $\delta_{X'}$ i $\rho_{X'}$ moduli prostora X'. Tada je, za $t > 0$,*

$$\rho_{X'}(t) = \sup\left\{\frac{t\epsilon}{2} - \delta_X(\epsilon) :\ 0 \le \epsilon \le 2\right\}, \qquad \rho_X(t) = \sup\left\{\frac{t\epsilon}{2} - \delta_{X'}(\epsilon) :\ 0 \le \epsilon \le 2\right\}.$$

Dokaz. Neka je $t > 0$. Koristeći Propoziciju 1.15, Propoziciju 1.16 i činjenicu da je norma funkcionala jednaka normi njegovog realnog dijela dobivamo

$$\begin{aligned}
2\rho_{X'}(t) &= \sup\{\|x^*+ty^*\|+\|x^*-ty^*\|-2 :\ x^*,y^*\in S_{X'}(0,1)\} \\
&= \sup\{\operatorname{Re} x^*x + t\operatorname{Re} y^*x + \operatorname{Re} x^*y - t\operatorname{Re} y^*y - 2 :\ x^*,y^*\in S_{X'}(0,1), x,y\in S(0,1)\} \\
&= \sup\{\|x+y\|+t\|x-y\|-2 :\ x,y\in S(0,1)\} \\
&= \sup\{\|x+y\|+t\epsilon-2 :\ x,y\in S(0,1), \|x-y\|\ge\epsilon, 0\le\epsilon\le 2\} \\
&= \sup\left\{t\epsilon - 2\inf\left\{1-\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| :\ x,y\in S(0,1), \|x-y\|\ge\epsilon\right\} :\ 0\le\epsilon\le 2\right\} \\
&= \sup\{t\epsilon - 2\delta_X(\epsilon) :\ 0\le\epsilon\le 2\}.
\end{aligned}$$

Dijeljenjem s 2 dobivamo prvu formulu. Ako zamijenimo uloge prostora X i X' dobivamo i drugu formulu. □

Teorem 3.31 (Šmulian)**.** *Normiran prostor je uniformno konveksan ako i samo ako mu je dualni prostor uniformno gladak, te je uniformno gladak ako i samo ako mu je dualni prostor uniformno konveksan.*

Dokaz. Neka je X normiran prostor, te neka je δ_X modul konveksnosti od X i $\rho_{X'}$ modul glatkoće prostora X'. Iz Leme 3.30 slijedi

$$\frac{\rho_{X'}(t)}{t} = \sup\left\{\frac{\epsilon}{2} - \frac{\delta_X(\epsilon)}{t} \,:\, 0 \le \epsilon \le 2\right\}.$$

Neka je X uniformno konveksan, te neka je $s > 0$. Kako je $\rho_{X'}(t)/t$ nepadajuća, da bismo pokazali da je X' uniformno gladak, dovoljno je pronaći $t_s > 0$ takav da vrijedi $\rho_{X'}(t_s)/t_s \le s$. Neka je $\epsilon_s = \min\{2, 2s\}$, te neka je $t_s = \delta_X(\epsilon_s)$. Sada, za $0 \le \epsilon \le \epsilon_s$ imamo

$$\frac{\epsilon}{2} - \frac{\delta_X(\epsilon)}{t_s} \le \frac{\epsilon}{2} \le \frac{\epsilon_s}{2} \le s.$$

Nadalje, za $\epsilon_s < \epsilon \le 2$, iz činjenice da je δ_X nepadajuća funkcija slijedi

$$\frac{\epsilon}{2} - \frac{\delta_X(\epsilon)}{t_s} \le 1 - \frac{\delta_X(\epsilon_s)}{t_s} = 1 - 1 = 0 < s.$$

Dakle, $\rho_{X'}(t_s)/t_s \le s$, pa je X' uniformno gladak prostor. Ako zamijenimo uloge prostora X i X', dobivamo da je prostor X uniformno gladak ako je X' uniformno konveksan.

Neka je sada X' uniformno gladak prostor, $0 < \epsilon \le 2$, te neka je $t_\epsilon > 0$ takav da je $\rho_{X'}(t_\epsilon)/t_\epsilon \le \epsilon/4$. Sada je

$$\frac{\epsilon}{2} - \frac{\delta_X(\epsilon)}{t_\epsilon} \le \frac{\rho_{X'}(t_\epsilon)}{t_\epsilon} \le \frac{\epsilon}{4},$$

iz čega slijedi $\delta_X(\epsilon) \ge \frac{\epsilon t_\epsilon}{4} > 0$. Dakle, X je uniformno konveksan prostor. Ako zamijenimo uloge prostora X i X', dobivamo da je X' uniformno konveksan ako je X uniformno gladak. □

Ako je X uniformno gladak Banachov prostor, tada je po prethodnom teoremu X' uniformno konveksan. Iz Teorema 2.41 sada slijedi da je X' refleksivan pa je po Teoremu 1.18 i X refleksivan. Time smo pokazali sljedeći rezultat.

Teorem 3.32 (Šmulian)**.** *Svaki uniformno gladak normiran prostor je refleksivan.*

U Primjeru 3.12 smo pokazali da refleksivnost nije nužna za glatke prostore, dok za uniformno glatke jest. To je ujedno i primjer glatkog prostora koji nije uniformno gladak. Uočimo da je spomenuti primjer beskonačnodimenzionalan što je, kao i u slučaju strogo konveksnih prostora, nužno svojstvo prostora koji su glatki i nisu uniformno glatki.

Propozicija 3.33. *Konačnodimenzionalan normiran prostor je uniformno gladak ako i samo ako je gladak.*

Dokaz. Neka je X konačnodimenzionalan gladak normiran prostor. Tada je X' konačnodimenzionalan i strogo konveksan, pa je i uniformno konveksan iz čega slijedi da je X uniformno gladak. $\square$

Ako je M potprostor normiranog prostora X, tada je $\rho_M(t) \leq \rho_X(t),\ t > 0$ i lako dobivamo sljedeći rezultat.

Lema 3.34. *Svaki potprostor uniformno glatkog normiranog prostora je uniformno gladak.*

Sada smo napokon spremni dati primjer uniformno glatkih prostora.

Primjer 3.35. *Neka je (X, M, μ) prostor mjere i neka je $1 < p < \infty$. Tada je prostor $L^p(X)$ uniformno gladak. Zaista, neka je q takav da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je $(L^p(X))'$ izometrički izomorfan uniformno konveksnom prostoru $L^q(X)$ pa je i sam uniformno konveksan. Sada iz Teorema 3.31 slijedi da je $L^p(X)$ uniformno gladak prostor.*

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, Skripta PMF-MO, 2017.

[2] J. Baumeister, *Approximation problem*, 2016, https://www.math.uni-frankfurt.de/~baumeist/Nonex-Kap2.pdf.

[3] T. Berić i M. Tomašević, *Zbirka riješenih zadataka iz normiranih prostora*, Skripta PMF-MO, 2020.

[4] J.A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 396-414 (1936).

[5] O. Hanner, *On the uniform convexity of L^p and ℓ^p*, Ark. Mat. 3(3): 239-244 (1956).

[6] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska Knjiga, 1981.

[7] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru - 1.dio - Brojevi, konvergencija, neprekidnost*, Školska knjiga, 1991.

[8] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.

Sažetak

U ovome radu smo uveli strogo konveksne i glatke normirane prostore, te izveli brojne karakterizacije i svojstva. Prvo smo promatrali strogo konveksne prostore i vidjeli njihovu vezu s Hahn - Banachovim teoremom, kao i s potpornim funkcionalima te ekstremalnim skupovima. Vidjeli smo da na refleksivnim strogo konveksnim prostorima vrijedi analogon Rieszovog teorema o projekciji. Međutim, pokazali smo da refleksivnost nije nužno svojstvo strogo konveksnih prostora, te smo uveli uniformno konveksne prostore koji su nužno refleksivni. Potom smo promatrali glatke prostore i uveli pojam Gâteauxove derivacije norme. Pokazali smo da je normiran prostor strogo konveksan ako mu je dualni prostor gladak, te je gladak ako mu je dualni prostor strogo konveksan. Nadalje, vidjeli smo da refleksivnost nije nužno svojstvo ni glatkih prostora, ali je uniformno glatkih. Također, pokazali smo da je normiran prostor uniformno gladak ako i samo ako mu je dualni prostor uniformno konveksan, te je uniformno konveksan ako i samo ako mu je dualni prostor uniformno gladak.

Summary

In this thesis, we have introduced strictly convex and smooth normed spaces, and performed numerous characterizations and properties. We first observed strictly convex spaces and saw their connection with the Hahn - Banach theorem, as well as with support functionals and extreme sets. We have seen that an analogue of Riesz's projection theorem holds on reflexive strictly convex spaces. However, we have shown that reflexivity is not necessarily a property of strictly convex spaces, and we have introduced uniformly convex spaces that are necessarily reflexive. We then observed smooth spaces and introduced the notion of Gâteaux derivation of the norm. We have shown that a normed space is strictly convex if its dual space is smooth, and it is smooth if its dual space is strictly convex. Furthermore, we have seen that reflexivity is not necessarily a property of smooth spaces either, but it holds for uniformly smooth spaces. Also, we have shown that a normed space is uniformly smooth if and only if its dual space is uniformly convex, and it is uniformly convex if and only if its dual space is uniformly smooth.

Životopis

Rođena sam 20. studenog 1995. godine u Zagrebu gdje sam i započela školovanje u Osnovnoj školi Gornje Vrapče. Nakon završetka upisujem X. gimnaziju "Ivan Supek", matematički smjer, te 2014. godine upisujem preddiplomski studij Matematike, inženjerski smjer, na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tijekom studiranja sam mentorirala učenike osnovnih škola za natjecanja iz matematike. Titulu univ. bacc. math. stekla sam 2019. godine, iste godine upisujem studij Primijenjene matematike na istom fakultetu.