Harmoniteti

Jambrošić, Martina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Jambrošić

HARMONITETI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, srpanj, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem dragoj mentorici doc. dr. sc. Ani Prlić na pomoći i strpljenju pri pisanju ovog rada. Hvala mojoj obitelji na strpljenju i beskrajnoj podršci koju su mi pružili tijekom studiranja. Posebno hvala mojim prijateljima na svim divnim uspomenama koje smo zajedno stvorili u proteklih pet godina.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu obradit ćemo osnovne rezultate koji omogućuju primjenu harmoniteta u rješavanju geometrijskih zadataka. Rad je podijeljen na četiri dijela i to su: Transformacije ravnine, Harmoniteti, Primjena harmoniteta u rješavanju problema i Harmoniteti u glazbi. Kako je za razumijevanje harmoniteta važno poznavati transformacije ravnine, u prvom dijelu definiramo i iznosimo važna svojstva afine i projektivne transformacije. Također definiramo dvoomjere i ukratko spominjemo inverziju. U drugom dijelu definiramo harmonitete i harmoničke četverokute te iznosimo i dokazujemo osnovna svojstva i rezultate. U trećem dijelu primjenjujemo koncept harmoniteta kako bismo riješili neke od geometrijskih zadataka koji se pojavljuju na matematičkim natjecanjima.
U zadnjem dijelu ovog rada objasnit ćemo što je to harmonija i ispričat ćemo kratku priču o Pitagori, jednom od prvih matematičara koji je otkrio povezanost glazbe i harmoniteta. Za kraj ćemo objasniti na koji način se harmoniteti pojavljuju u glazbi.

Poglavlje 1

Transformacije ravnine

U ovom dijelu ukratko ćemo reći nešto o transformacijama ravnine kako bismo lakše shvatili koncept harmoniteta.
Svako bijektivno preslikavanje ravnine na samu sebe nazivamo **transformacijom ravnine**. Dakle za svaku točku te ravnine vrijedi da joj je preslikavanjem pridružena točno jedna točka te iste ravnine i obratno, svaka točka ravnine slika je točno jedne točke te iste ravnine.

1.1 Afine transformacije

U sljedećem dijelu ćemo reći nešto o afinim transformacijama u ravnini.

Definicija 1.1.1. *Neprekidnu transformaciju ravnine koja svaki pravac preslikava u pravac nazivamo **afinom transformacijom**.*

Može se pokazati da afinu transformaciju možemo zapisati u obliku

$$(x, y) \mapsto (ax + by + e, cx + dy + f), \tag{1.1}$$

gdje su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ te vrijedi uvjet $ad - bc \neq 0$. Primjeri afinih transformacija su translacije, rotacije i homotetije.

Navest ćemo neke od važnijih rezultata koji nam omogućavaju primjenu afinih transformacija u rješavanju zadataka. Sljedeća lema pokazuje da je $L(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{L(A)L(B)}$, gdje je L afina transformacija.

Lema 1.1.2. *Neka je L afina transformacija. Tada vrijedi $L(\overrightarrow{AB}) = L(\vec{A})L(\vec{B})$.*

Dokaz. Dokaz leme slijedi direktno iz (1.1.). □

Teorem 1.1.3. *Ako je L afina transformacija, tada vrijedi:*

(1) $L(\vec{0}) = \vec{0}$
(2) $L(\vec{a} + \vec{b}) = L(\vec{a}) + L(\vec{b})$ *za proizvoljne* $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$
(3) $L(k\vec{a}) = kL(\vec{a})$ *za proizvoljni* $\vec{a} \in V^2$ *i za* $k \in \mathbb{R}$.

Dokaz. (1) Imamo $L(\vec{0}) = L(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{L(A)L(A)} = \vec{0}$.
(2) Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Po definiciji zbrajanja vektora i primjenom leme 1.1.2. na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ slijedi da je $L(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = L(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{L(A)L(C)} = \overrightarrow{L(A)L(B)} + \overrightarrow{L(B)L(C)} = L(\overrightarrow{AB}) + L(\overrightarrow{BC})$.
(3) Za $k \in \mathbb{N}$, tada vrijedi $L(k\vec{a}) = L(\vec{a} + \vec{a} + ... + \vec{a}) = L(\vec{a}) + L(\vec{a}) + ... + L(\vec{a}) = kL(\vec{a})$. Iz tvrdnje (1) i (2) slijedi da je $\vec{0} = L(\vec{0}) = L(\vec{a} - \vec{a}) = L(\vec{a}) + L(-\vec{a})$. Odavde slijedi da je $L(-\vec{a}) = -L(\vec{a})$ za svaki $\vec{a} \in V^2$. Za negativne k vrijedi $L(k\vec{a}) = L((-k)(-\vec{a})) = (-k)L(-\vec{a}) = kL(\vec{a})$. Stavimo sada da je $k \in \mathbb{Q}$, tj. $k = \frac{m}{n}$, za neke $m, n \in \mathbf{Z}$. Vrijedi $nL(k\vec{a}) = L(nk\vec{a}) = L(m\vec{a}) = mL(\vec{a})$ pa je $L(k\vec{a}) = \frac{m}{n}L(\vec{a}) = kL(\vec{a})$. Ako je k iracionalan, tada postoji niz k_n racionalnih brojeva koji teži ka k. Budući da je L neprekidna funkcija, tada je $L(k\vec{a}) = L(\lim_{n\to+\infty} k_n\vec{a}) = \lim_{n\to+\infty} k_n(\vec{a}) = kL(\vec{a})$. □

Teorem 1.1.4. *Afine transformacije čuvaju:*

(1) kolinearnost točaka
(2) konkurentnost pravaca
(3) paralelnost pravaca
(4) omjer dužina na pravcu.

Dokaz. (1) Slijedi iz činjenice da se afinom transformacijom pravac preslikava u pravac.
(2) Slijedi iz činjenice da se pravac prelikava u pravac te da je preslikavanje bijektivno. Naime, slika točke presjeka konkurentnih pravaca se nalazi u presjeku slika svakog od tih pravaca.
(3) Tvrdnja slijedi iz činjenice da je preslikavanje bijektivno te da se pravci preslikavaju u pravce. Ako se pravci ne sijeku, tada se ni njihove slike ne sijeku.
(4) Neka je L afina transformacija i neka točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $p : q$. Neka je $L(A) = A', L(B) = B', L(C) = C'$. Želimo pokazati da tada točka C' dijeli dužinu $\overline{A'B'}$ u istom omjeru. Kako je $q\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{CB}$, iz teorema 1.1.2. slijedi $q\overrightarrow{A'C'} = qL(\overrightarrow{AC}) = L(q\overrightarrow{AC}) = L(p\overrightarrow{CB}) = pL(\overrightarrow{CB}) = p\overrightarrow{C'B'}$.

□

Može se pokazati da afine transformacije čuvaju omjere površina poligona. Važno je napomenuti da afine transformacije ne čuvaju kutove i udaljenost među točkama.

Teorem 1.1.5. *Neka su dane dvije točke u ravnini, O i O' te dvije baze vektorskog prostora V^2, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ i $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}\}$. Tada postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava O u O' i $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ u $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}\}$.*

Dokaz. Dokažimo najprije egzistenciju preslikavanja L. Neka je X proizvoljna točka. Kako je $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ baza vektorskog prostora, tada postoje jedinstveni brojevi x_1, x_2 takvi da vrijedi $\overrightarrow{OX} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$. Neka je točka X' takva da je $\overrightarrow{O'X'} = x_1\overrightarrow{e_1'} + x_2\overrightarrow{e_2'}$. Definirajmo $L(X) = X'$. Konstruirajmo inverzno preslikavanje. Neka je X' proizvoljna točka. Kako je $\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}\}$ baza vektorskog prostora, tada postoje jedinstveni brojevi y_1, y_2 takvi da vrijedi $\overrightarrow{O'X'} = y_1\overrightarrow{e_1'} + y_2\overrightarrow{e_2'}$. Neka je točka X takva da vrijedi $\overrightarrow{OX} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}$. Stavimo $K(X') = X$. Očito je K inverzno preslikavanje preslikavanja L. Dakle preslikavanje L je bijekcija. Može se dokazati da je preslikavanje L neprekidno koristeći (1.1). Pokažimo sada da je slika bilo kojeg pravca AB po preslikavanju L također pravac. Neka je $L(A) = A', L(B) = B'$ te neka su redom $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ koordinate točaka A i B u bazi $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Uzmimo proizvoljnu točku C na pravcu AB. Vrijedi da je $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ za neki $k \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \\
&= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \\
&= (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} = ((1-k)a_1 + kb_1)\overrightarrow{e_1} + ((1-k)a_2 + kb_2)\overrightarrow{e_2}.
\end{aligned}$$

Prema definiciji prelikavanja L, za sliku $C' = L(C)$ vrijedi $\overrightarrow{O'C'} = ((1-k)a_1 + kb_1)\overrightarrow{e_1'} + ((1-k)a_2+kb_2)\overrightarrow{e_2'} = (1-k)\overrightarrow{O'A'}+k\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'A'}+k(\overrightarrow{O'B'}-\overrightarrow{O'A'}) = (1-k)\overrightarrow{O'A'}+k\overrightarrow{A'B'}$. Dakle točka C' leži na pravcu $A'B'$. Jedinstvenost prelikavanja L slijedi iz teorema 1.1.3. □

Teorem 1.1.6. *Za dva trokuta ABC i $A'B'C'$ postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava jedan u drugi.*

Dokaz. Dovoljno je u teoremu 1.1.5. uzeti $O = A, \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AC}, O' = A', \overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{A'C'}$. □

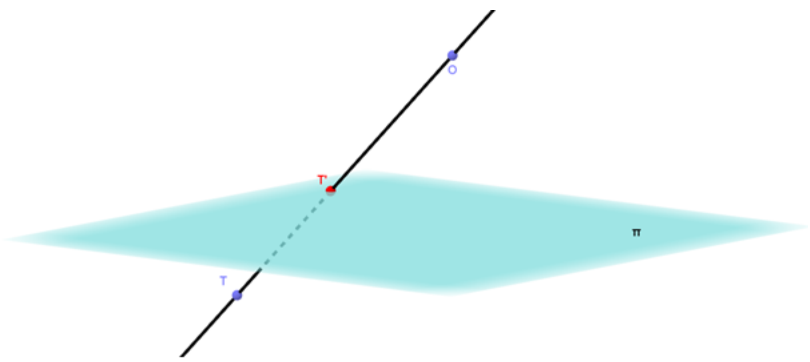
Teorem 1.1.7. *Za dva dana paralelograma postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava jedan u drugi.*

Dokaz. Tvrdnja teorema slijedi iz teorema 1.1.4. i teorema 1.1.6. Neka su dani paralelogrami $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Po teoremu 1.1.6. postoji jedinstvena afina transformacija L koja preslikava trokut ABC u trokut $A'B'C'$. Iz teorema 1.1.4. slijedi da je $L(D) = D'$ jer L čuva paralelnost pravaca. Sada iz teorema 1.1.6. slijedi da je $L(BCD) = L(B'C'D')$, a onda je $L(ABCD) = L(A'B'C'D')$. □

1.2 Projektivne transformacije

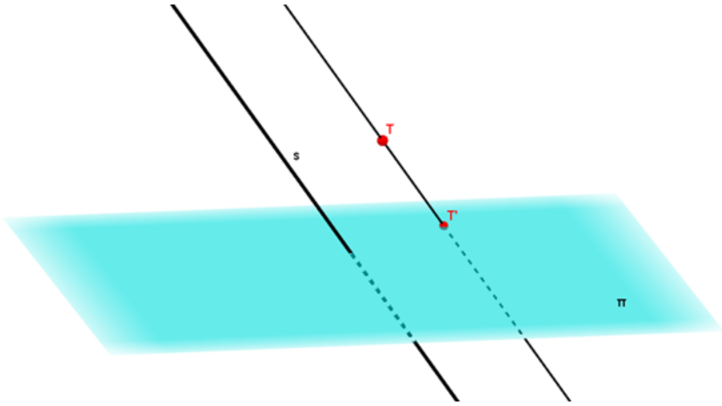
Projektivnu geometriju možemo opisati kao proučavanje geometrijskih svojstava koja se pri centralnom projiciranju ne mijenjaju, a projektivnu transformaciju kao kompoziciju centralnih projekcija. **Projektivna ravnina** je unija euklidske ravnine i pravca u beskonačnosti (apsolutnog pravca). Dakle u projektivnoj ravnini vrijedi da se svaka dva paralelna pravca sijeku u nekoj točki na pravcu u beskonačnosti, odnosno svaka dva različita pravca, uključujući i pravac u bekonačnosti, sijeku se u jednoj točki.
U nastavku ćemo definirati projektivne transformacije te navesti dokazati svojstva projektivnih transformacija.

Definicija 1.2.1. *Neka su u prostoru dane ravnina π i točka O takva da $O \notin \pi$. Preslikavanje koje svakoj točki $T \neq O$ pridružuje točku T' koja je probodište pravca OT i ravnine π nazivamo **centralna projekcija** na ravninu π. Ravninu π nazivamo ravninom projekcije.*



Slika 1.1: Prikaz centralne projekcije na ravninu π

Definicija 1.2.2. *Neka su u prostoru dani ravnina π i pravac s koji nije paralelan s tom ravninom. Preslikavanje koje svakoj točki T pridružuje točku T' koja je probodište ravnine π i pravca koji sadrži T, a paralelan je s pravcem s, nazivamo **paralelna projekcija** na ravninu π u smjeru pravca s.*



Slika 1.2: Prikaz paralelne projekcije na ravninu π u smjeru pravca s

Definicija 1.2.3. *Za preslikavanje P ravnine α u ravninu β kažemo da je **projektivna transformacija** ako je kompozicija centralnih i paralelnih projekcija, odnosno ako postoje ravnine $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n = \beta$ i preslikavanja P_i ravnine α_i na α_{i+1} koja su centralne ili paralelne projekcije tako da je $P = P_{n-1} \circ ... \circ P_1 \circ P_0$. Praslika pravca u beskonačnosti naziva se singularni pravac dane projektivne transformacije.*

Sada ćemo navesti neka svojstva projektivnih transformacija:

Propozicija 1. Svaka afina transformacija ravnine ujedno je i projektivna transformacija.

Skica dokaza: Afina transformacija je jednoznačno određena slikama triju nekolinearnih točaka. Kako paralelna projekcija među proizvoljnim ravninama čuva omjere paralelnih dužina, dovoljno je pokazati da postoji kompozicija takvih projekcija koja jednu proizvoljnu trojku nekolineranih točaka preslikava u drugu proizvoljnu trojku nekolinarnih točaka. Označimo redom trojke s A, B, C i A', B', C'. Jedna od mogućih kompozicija je :
Pomoću jedne (ako su ravnine A, B, C i A', B', C' različite) ili dvije (ako se ravnine podudaraju) paralelne projekcije preslikamo A, B, C u ravninu određenu s A', B', C' tako da se A preslika u A'. Nove točke također označavamo s A, B, C.
Pomoću dvije paralelne projekcije, jedne na, a druge s ravnine koja prolazi kroz AC preslikamo B u B'. Pri tome su A i C nepromjenjene.
Pomoću dvije paralelne projekcije, jedne na i druge s ravnine koja prolazi kroz AB preslikamo C u C'. Pri tome su A i B nepromjenjene. □

Propozicija 2. Projektivna transformacija koja preslikava pravac u beskonačnosti u pravac u beskonačnosti je afina transformacija.

Dokaz. Kako je projektivna transformacija bijekcija (kao kompozicija bijekcija), zaključujemo da se točke u konačnosti bijektivno preslikavaju u točke u konačnosti, a kako su slike pravaca pravci, tada je dana transformacija afina. □

Teorem 1.2.4. *(Fundamentalni teorem projektivnih preslikavanja ravnine)*
Ako su dane dvije četvorke točaka A, B, C, D i A', B', C', D' pri čemu nikoje 3 točke iz iste četvorke nisu kolinearne i sve točke iz četvorke leže u istoj ravnini, tada postoji jedinstvena projektivna transformacija koja točke A, B, C, D redom preslikava u točke A', B', C', D'.

Dokaz. Dokaz teorema može se pronaći u [4]. □

1.3 Dvoomjeri

Definicija 1.3.1. ***Dvoomjer*** *četvorke točaka A, B, C, D koje leže na istom pravcu je broj*

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \tag{1.2}$$

pri čemu su dužine usmjerene.

Uočimo da će kvocijent $\frac{AC}{BC}$ biti pozitivan broj ako su vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ jednako orijentirani, a negativan broj ako su ti vektori suprotne orijentacije. Analogno bismo zaključili za kvocijent $\frac{AD}{BD}$.

Definicija 1.3.2. *Dvoomjer četvorke pravaca a, b, c, d koji prolaze istom točkom O je broj*

$$(abcd) = \frac{\sin\measuredangle(a,c)}{\sin\measuredangle(b,c)} : \frac{\sin\measuredangle(a,d)}{\sin\measuredangle(b,d)}, \tag{1.3}$$

pri čemu su kutovi orijentirani.

Definicija 1.3.3. *Neka su A, B, C tri točke koje leže na pravcu l te neka je ∞ beskonačno daleka točka pravca l. Tada je dvoomjer četvorke točaka A, B, C, ∞ jednak*

$$(ABC\infty) = \frac{AC}{BC}. \tag{1.4}$$

Vrijednost $(ABC\infty)$ je jednaka limesu dvoomjera kojemu teži $(ABCP)$ kada P duž pravca l teži u beskonačnost. Vidimo da kvocijent $\frac{AP}{BP}$ u izrazu $(ABCP) = \frac{AC}{BC} : \frac{AP}{BP}$ teži k 1 kada P teži u beskonačnost te uočavamo da gornja definicija ima smisla. Ako je, na primjer, $(ABC\infty) = -1$, tada je točka C polovište dužine $\overline{AB}$.

Sljedeći teorem prikazuje povezanost dvoomjera točaka i pravaca.

Teorem 1.3.4. *Dani su pravci a, b, c, d koji prolaze istom točkom i pravac l koji tom točkom ne prolazi. Neka su A, B, C, D redom sjecišta pravca l s pravcima a, b, c, d. Tada je $(abcd) = (ABCD)$.*

Dokaz. Neka je točka O sjecište pravaca a, b, c, d, točka H nožište okomice iz točke O na pravac l te neka je $h = OH$. Tada je :

$$2P(OAC) = OA \cdot OC \cdot \sin\measuredangle(a, c) = h \cdot AC, \tag{1.5}$$

$$2P(OBC) = OB \cdot OC \cdot \sin\measuredangle(b, c) = h \cdot BC, \tag{1.6}$$

$$2P(OAD) = OA \cdot OD \cdot \sin\measuredangle(a, d) = h \cdot AD, \tag{1.7}$$

$$2P(OBD) = OB \cdot OD \cdot \sin\measuredangle(b, d) = h \cdot BD. \tag{1.8}$$

Podijelimo li prvu jednakost s drugom i treću s četvrtom, dobivamo

$$\frac{OA \cdot \sin\measuredangle(a, c)}{OB \cdot \sin\measuredangle(b, c)} = \frac{AC}{BC}, \tag{1.9}$$

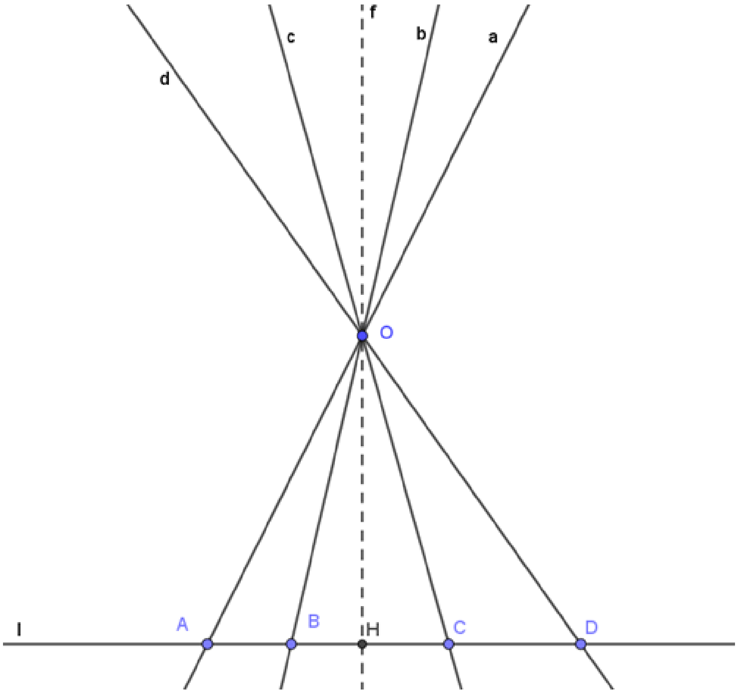
$$\frac{OA \cdot \sin\measuredangle(a, d)}{OB \cdot \sin\measuredangle(b, d)} = \frac{AD}{BD}. \tag{1.10}$$

Podijelimo li sada prvu jednakost s drugom dobivamo $|(ABCD)| = |(abcd)|$. Da bismo dokazali da su brojevi $(ABCD)$ i $(abcd)$ istog predznaka, dovoljno je ispisati sve moguće poretke točaka A, B, C, D na pravcu l (ukupno $4! = 24$ mogućnosti) i provjeriti da je $(ABCD)$ pozitivan broj ako i samo ako par pravaca a, b ne razdvaja par pravaca c, d. □

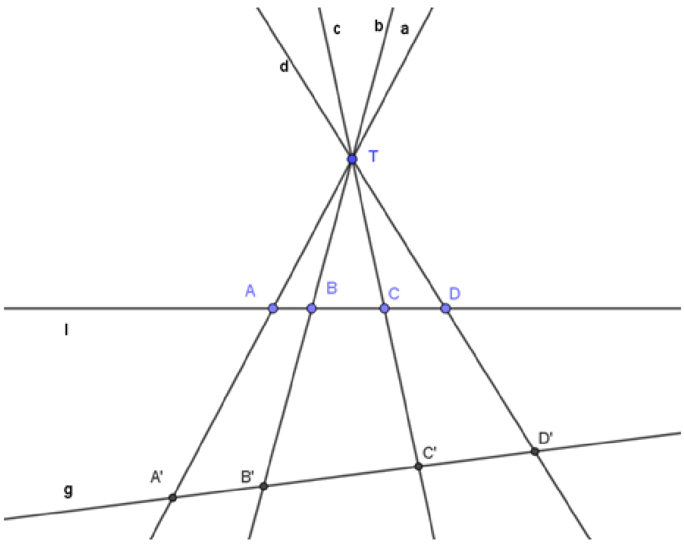
Uočimo ako su pravac d i pravac l međusobno paralelni, možemo pretpostaviti da se sijeku u beskonačno dalekoj točki ∞. Tada je $(abcd) = (ABC\infty) = \frac{AC}{BC}$. Također, ako je pravac c paralelan s l, tada slijedi da je $(abcd) = (AB\infty D) = \frac{AD}{BD}$.

Direktna posljedica prethodnog teorema je sljedeći korolar:

Korolar 1.3.5. *Dane su točke A, B, C, D na pravcu l i A', B', C', D' na pravcu g tako da se pravci AA', BB', CC' i DD' sijeku u točki T. Tada je $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*



Slika 1.3: Skica dokaza teorema 1.3.4.



Slika 1.4: Skica korolara 1.3.5.

Permutacije dvoomjera

Lema 1.3.6. *Za dvoomjere s obzirom na permutacije točaka vrijede sljedeće jednakosti:*

$$(ABCD) = (BACD)^{-1} = (ABDC)^{-1}, \tag{1.11}$$

$$(ABCD) + (ACBD) = 1. \tag{1.12}$$

Dokaz. Dokazat ćemo da (1.11) i (1.12) slijede iz definicije dvoomjera. Imamo $(BACD)^{-1} = \frac{1}{(BACD)} = \frac{1}{\frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{BD}} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$, a to je upravo $(ABCD)$. Na analogan način dobivamo $(ABDC)^{-1} = \frac{1}{(ABDC)} = \frac{1}{\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = (ABCD)$. Time smo dokazali (1.11).
Na sličan način možemo dokazati (1.12). Po definiciji računamo $(ABCD) + (ACBD) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} + \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{AD}$. Prethodni izraz ekvivalentan je $\frac{AC \cdot BD - AB \cdot CD}{BC \cdot AD} = \frac{(AB+BC) \cdot BD - AB \cdot CD}{BC \cdot AD}$, odakle dobivamo $\frac{BC \cdot (AB+BD)}{BC \cdot AD} = \frac{BC \cdot AD}{BC \cdot AD} = 1$, što smo i htjeli dokazati.

□

Lema 1.3.7. *Projektivna transformacija čuva dvoomjere. Dakle neka točke A, B, C, D leže na pravcu paralelnom singularnom pravcu projektivne transformacije P ravnine α, onda je $P(A)P(B) : P(C)P(D) = AB : CD$.*

Dokaz. Dokaz leme može se pronaći u [4]. □

Lema 1.3.8. *Projektivna transformacija čuva dvoomjere pravaca.*

Dokaz. Neka su a, b, c, d dani pravci te uzmimo pravac p koji redom siječe te pravce u točkama A, B, C, D. Neka su a', b', c', d' i A', B', C', D' slike pravaca i točaka koje dobivamo projektivnom transformacijom. Tada, kako projektivna transformacija čuva dvoomjere točaka, vrijedi

$$(abcd) = (ABCD) = (A'B'C'D') = (a'b'c'd'). \tag{1.13}$$

□

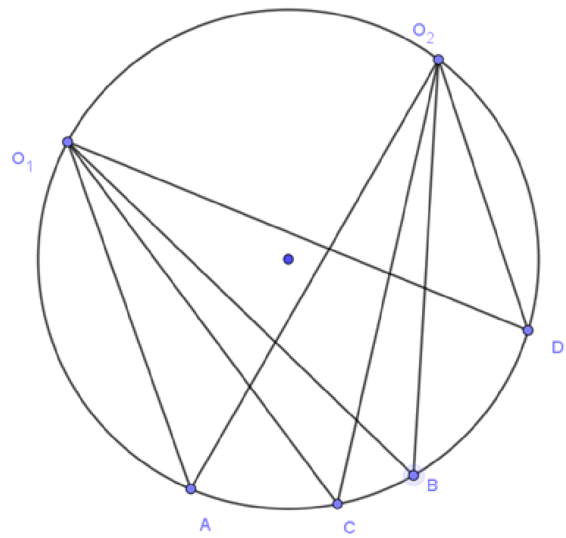
Lema 1.3.9. *Za konciklične točke A, B, C, D, O_1, O_2 vrijedi*

$$(O_1A, O_1B, O_1C, O_1D) = (O_2A, O_2B, O_2C, O_2D). \tag{1.14}$$

Dokaz. Tvrdnja leme slijedi iz jednakosti obodnih kuteva. (Slika 1. 5.) □

U nastavku ćemo navesti još neka svojstva dvoomjera.

Lema 1.3.10. *Dane su kolinearne točke A, B, C, D, E tako da vrijedi $(ABCD) = (ABCE)$. Tada je $D \equiv E$.*



Slika 1.5: Skica dokaza leme 1. 3. 9.

Dokaz. Kako je $(ABCD) = (ABCE)$, tada iz definicije dvoomjera slijedi $\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BE}{AE}$. Nakon sređivanja dobivamo $\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{AE}$ te zaključujemo da $D \equiv E$. □

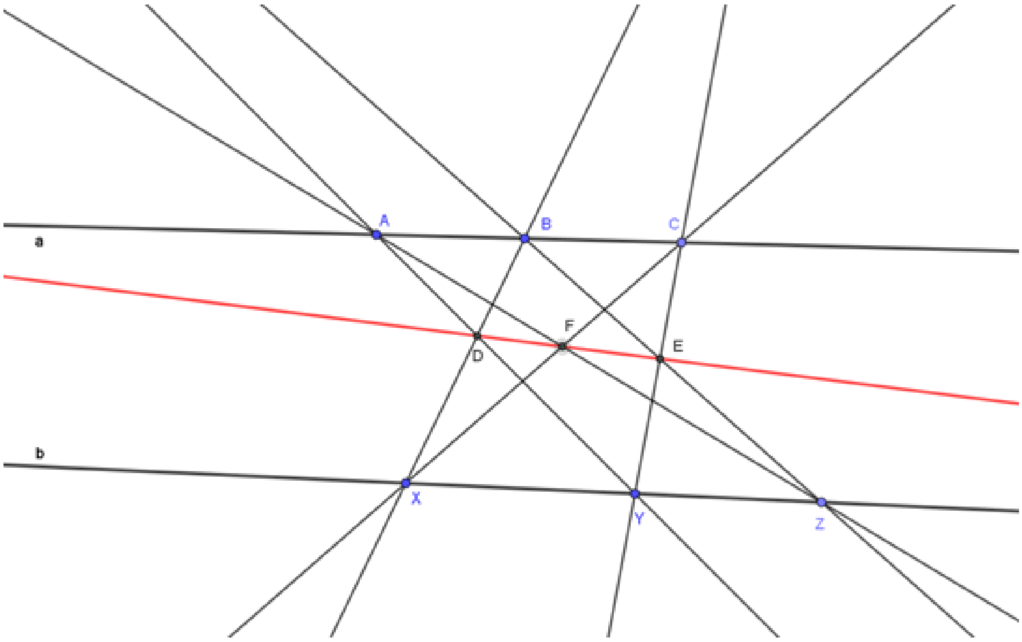
Definicija 1.3.11. *Četvorku pravaca koji prolaze kroz istu točku nazivamo* ***pramenom****.*

U nastavku slijede važni teoremi koje ćemo koristiti u rješavanju zadataka vezanih uz harmonitete.

Teorem 1.3.12. *(Papusov teorem)*
Neka su A, B, C tri točke na nekom pravcu a i neka su X, Y, Z tri točke na nekom pravcu b. Ako pravci AY, BZ, CX redom sijeku pravce BX, CY, AZ u točkama D, E i F, onda su tri točke D, E i F kolinearne.

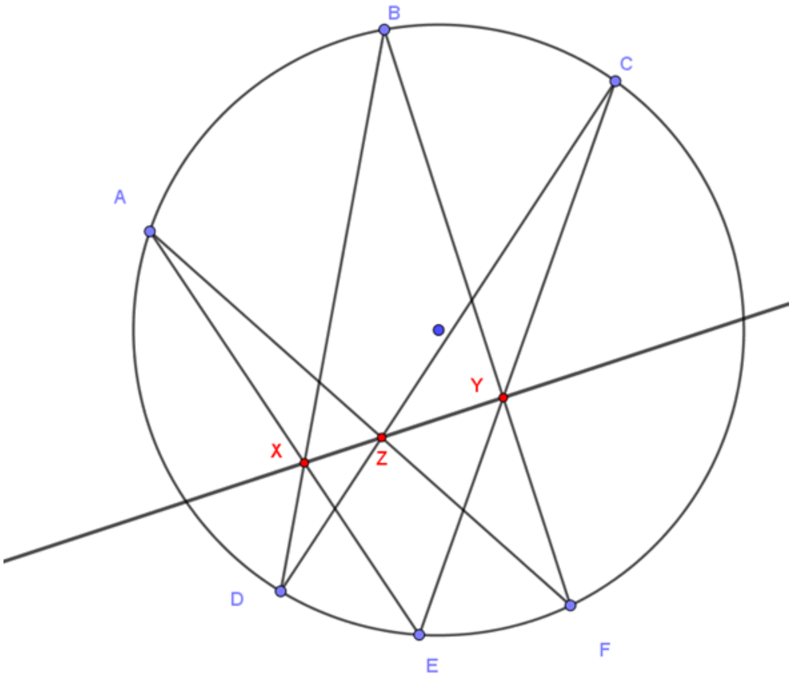
Dokaz. Kako bismo dokazali teorem, koristit ćemo dvoomjere točaka. Definiramo točke $F' = CX \cap DE, T = a \cap b, G = CX \cap AY$ i $H = BX \cap CY$. Pramen iz točke D nam daje $(XGF'C) = (HYEC)$, zatim pramen iz točke B nam daje $(HYEC) = (XYZT)$. Prema korolaru 1.3.5. pramen iz točke A nam daje $(XYZT) = (XGFC)$. Dakle slijedi da je $(XGF'C) = (XGFC)$, pa je prema lemi 1.3.9. $F' \equiv F$. □

Teorem 1.3.13. *(Pascalov teorem)*
Neka su A, B, C, D, E, F točke na kružnici. Neka su točke X, Y, Z redom sjecišta dužina $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$, $\overline{BF}$ i $\overline{CE}$, $\overline{AF}$ i $\overline{CD}$. Tada su točke X, Y, Z kolinearne.



Slika 1.6: Prikaz Papusovog teorema

Dokaz. Dana je kružnica k i točke A, B, C, D, E, F na toj kružnici. Neka je $AE \cap BD = \{X\}, BF \cap CE = \{Y\}$ i $CD \cap AF = \{Z\}$. Želimo pokazati da su točke X, Y, Z kolinearne. Neka je $CD \cap XY = \{Z'\}, CD \cap AE = \{G\}$ i $BD \cap CE = \{H\}$. Pramen iz točke X nam daje $(DGZ'C) = (HEYC)$. Iz teorema 1.3.4. slijedi da je $(HEYC) = (BD, BE, BF, BC)$ te iz leme 1.3.8. slijedi da je $(BD, BE, BF, BC) = (AD, AE, AF, AC) = (DGZC)$. Dakle vrijedi da je $(DGZ'C) = (DGZC)$, odnosno $Z' \equiv Z$. $\square$



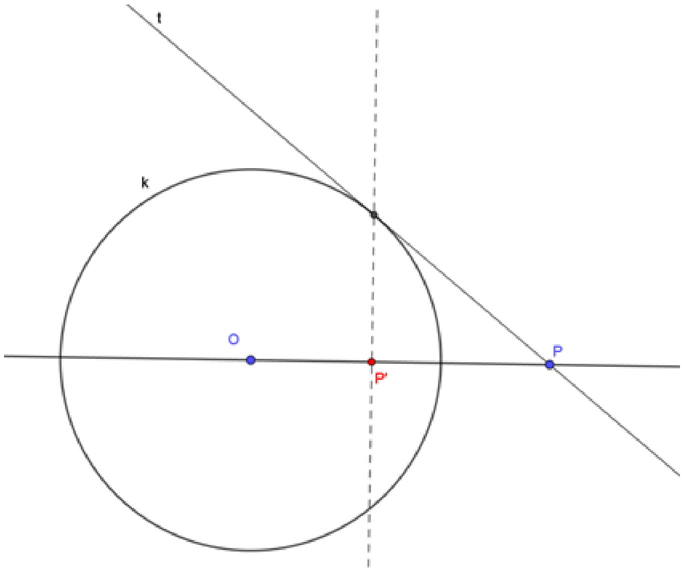
Slika 1.7: Prikaz Pascalovog teorema

1.4 Inverzija

Definicija 1.4.1. *Neka je točka O čvrsta točka ravnine M i neka je r pozitivan realan broj. Neka je P točka te ravnine, različita od točke O. Preslikavanje ravnine $I_O : M \setminus \{O\} \longrightarrow M \setminus \{O\}$ koje točki P pridružuje točku P', zove se* ***inverzija*** *s centrom O i radijusom r ako vrijedi:*

1. *) O, P, P' su kolinearne točke,*
2. *) P i P' leže s iste strane točke O,*
3. *) Vrijedi $|OP| \cdot |OP'| = r^2$.*

Točku O nazivamo središtem inverzije, a r^2 konstantom inverzije. Kružnicu $k(O, r)$ nazivamo kružnicom inverzije. Iz same definicije inverzije slijedi činjenica da je inverzija involutorna transformacija, odnosno sama je sebi invez. Također, lako se može pokazati da



Slika 1.8: Prikaz inverznog preslikavanja

je inverzija bijektivno preslikavanje.
Svaka točka kružnice inverzije je fiksna točka, dakle djelovanjem inverzije svaka točka kružnice preslikava se u samu sebe i to su jedine fiksne točke. Zaista, ako je točka P na kružnici inverzije, tada je $|OP| = r$ i iz $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ slijedi da je $|OP'| = r$. Iz definicije znamo da točke P, P' leže s iste strane točke O, pa je $P = P'$. Također, centar inverzije, točka O, preslikava se u beskonačno daleku točku.

U nastavku ćemo navesti neka od važnijih svojstava inverzije koje ćemo koristiti u proučavanju harmoniteta.

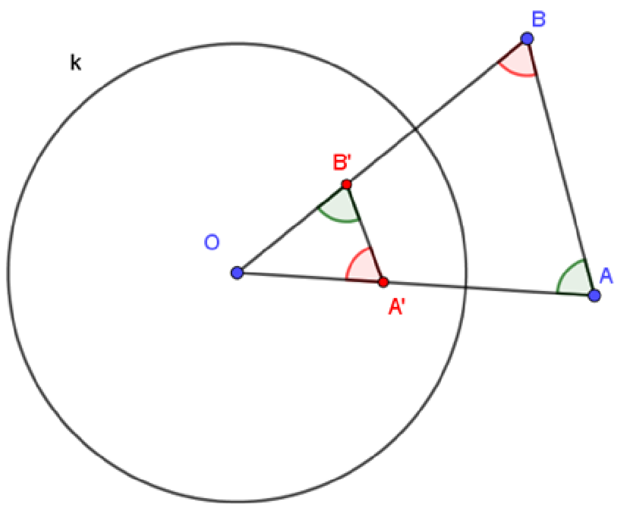
Teorem 1.4.2. *Neka pravac p prolazi središtem inverzije O. Tada je $I_O(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$, odnosno pravac p slika se sam u sebe.*

Dokaz. Tvrdnja teorema slijedi iz činjenice da su točke $O, P, P' = I_O(P)$ kolinearne točke i da je inverzija bijektivno preslikavanje. $\square$

Teorem 1.4.3. *Neka su A, A' i B, B' parovi pridruženih točaka inverzije I_O s kružnicom inverzije $k(O, r)$. Tada je $\angle OAB = \angle OB'A'$ i $\angle OBA = \angle OA'B'$.*

Dokaz. Kako su točke A i A' pridružene inverzijom I_O, tada po definiciji vrijedi $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ te $|OB| \cdot |OB'| = r^2$. Tada slijedi $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} \implies \frac{|OA|}{|OB'|} = \frac{|OB|}{|OA'|}$. Kako je

$\angle AOB = \angle B'OA'$ tada su trokuti OAB i $OB'A'$ slični, odakle slijedi $\angle OAB = \angle OB'A'$ i $\angle OBA = \angle OA'B'$. □



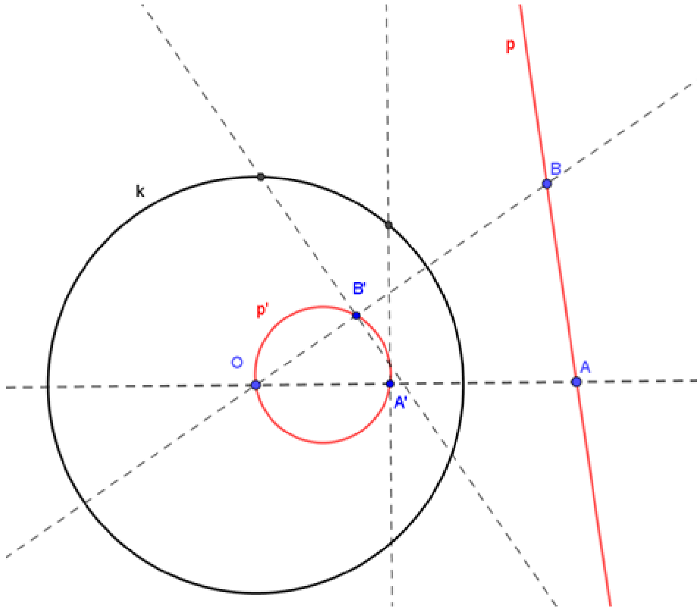
Slika 1.9: Skica dokaza teorema 1.4.3.

Teorem 1.4.4. *Neka je p pravac koji ne prolazi središtem inverzije O. Inverzna slika pravca p je kružnica koja prolazi središtem O inverzije I_O.*

Dokaz. Neka je pravac p koji ne prolazi središtem inverzije O te neka je točka N nožište okomice supuštene iz točke O na pravac p, a točka $N' = I_O(N)$. Neka je točka T proizvoljna točka pravca p i neka je $T' = I_O(T)$. Tada je prema teoremu 1.4.3. $\angle ONT = \angle OT'N' = 90°$, pa iz obrata Talesovog teorema slijedi da je T' na kružnici p' promjera $\overline{ON'}$. Dakle, svaka točka pravca koji ne prolazi kroz središte inverzije preslikava se u točku na kružnici koja prolazi kroz središte inverzije. □

Teorem 1.4.5. *Neka je k_1 kružnica u ravnini E.*

1.) *Ako k_1 prolazi središtem O inverzije I_O, onda je slika kružnice k_1 pravac p koji ne prolazi središtem inverzije O.*
2.) *Ako k_1 ne prolazi središtem O inverzije I_O, onda je slika kružnice k_1 kružnica k_1' koja ne prolazi središtem inverzije O.*



Slika 1.10: Inverzna slika pravca p koji ne prolazi kroz središte inverzije O

Dokaz. Dokažimo najprije tvdnju 1.) Neka je $\overline{OT}$ promjer kružnice k_1. Neka je X proizvoljna točka kružnice k_1 i neka je $X' = I_O(X)$ i $T' = I_O(T)$. Neka pravac p prolazi točkom T' i okomit je na OT. Tvrdimo da je $p = I_O(k_1)$.
Iz Talesovom teorema slijedi da je $\angle OXT = 90°$, a iz teorema 1.4.3. slijedi da je $\angle OT'X' = 90°$, pa je $X' \in p$. Kako je X proizvoljna točka kružnice k_1 i kako je inverzija bijekcija, tada slijedi $p = I_O(k_1)$. Dokažimo sada 2. tvrdnju teorema. Dakle neka je k_1 kružnica koja ne prolazi kroz središte inverzije O i neka je točka T proizvoljna točka te kružnice. Neka je točka $T' = I_O(T)$. Ako s r označimo koeficijent inverzije, tada iz definicije inverzije slijedi

$$|OT| \cdot |OT'| = r^2. \tag{1.15}$$

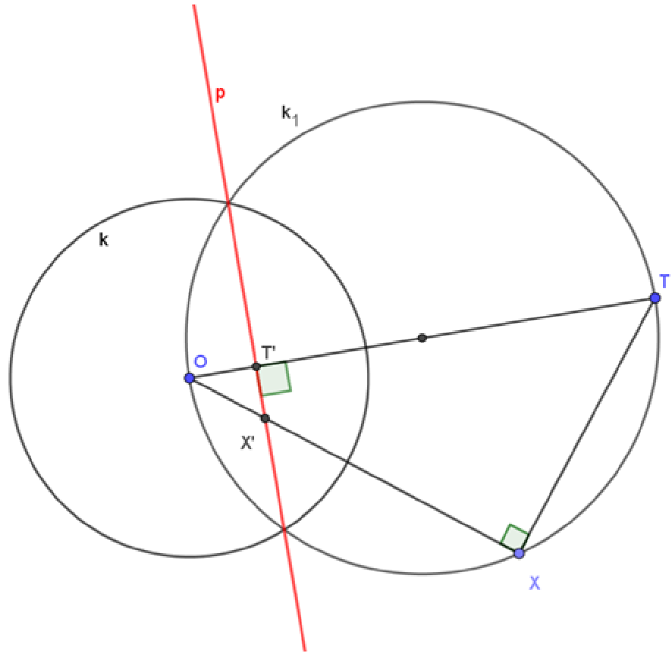
Neka je $T_1 = OT \cap k_1$ drugo sjecište pravca OT i kružnice k_1. Iz potencije točke tada slijedi

$$|OT| \cdot |OT_1| = |OD|^2, \tag{1.16}$$

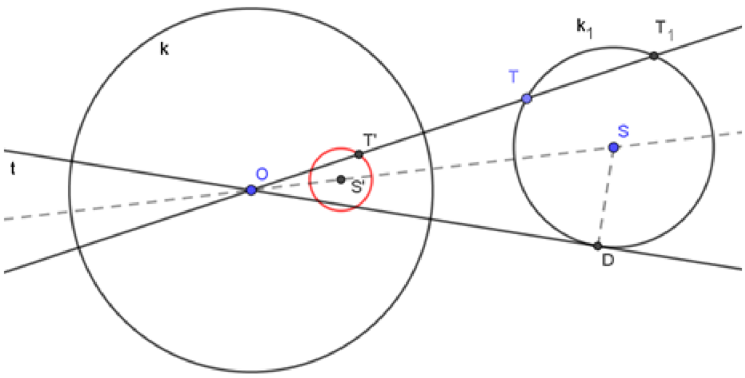
pri čemu je točka D dirالište tangente iz točke O na kružnicu k_1. Tada iz prethodna dva izraza slijedi

$$|OT'| = \frac{r^2}{|OT|} = \frac{r^2}{|OD|^2} \cdot |OT_1| = \left(\frac{r}{|OD|}\right)^2 \cdot |OT_1|. \tag{1.17}$$

Dakle zaključujemo da je točka T' slika točke T pri homotetiji $h(O, \left(\frac{r}{|OD|}\right)^2)$ te kako je homotetična slika kružnice kružnica, slijedi tvrdnja. □



Slika 1.11: Prikaz kružnice koja prolazi kroz središte inverzije O



Slika 1.12: Prikaz kružnice koja ne prolazi kroz središte inverzije O

Još jedno od vrlo važno svojstvo inverzije je da čuva kutove između pravaca, između dvaju kružnica te između pravca i kružnice. Inverzija se u rješavanju zadataka vezanih uz harmonitete najčešće pojavljuje u obliku pola i polare.

Poglavlje 2

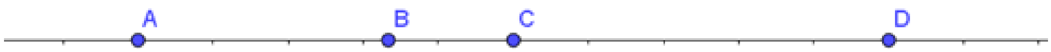
Harmoniteti

U ovom ćemo dijelu objasniti što su to harmoniteti te ćemo iskazati i dokazati nekoliko lema i teorema kako bismo pojasnili koncept harmoniteta u projektivnoj ravnini.

Definicija 2.0.1. *Neka je d pravac na kojem redom leže točke A, B, C, D. Kažemo da te točke čine **harmonijsku četvorku** ako je*

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = (ACBD) = -1, \tag{2.1}$$

*pri čemu su dužine usmjerene. Također kažemo da su dane točke u **harmonitetu**.*



Slika 2.1: Harmonijska četvorka točaka A, B, C, D

Definicija 2.0.2. *Neka su na pravcu d redom dane točke A, B, C i D koje su u harmonitetu te je dana točka X koja ne leži na pravcu d. Neka su s a, b, c i d redom označeni pravci AX, BX, CX i DX. Kažemo da pravci a, b, c, d čine **harmonijski pramen** i pišemo $(a, c, b, d) = -1$.*

Harmonitete definiramo za orijentirane dužine, ali se često u rješavanju zadataka s natjecanja koriste neorjentirane dužine i kutovi radi jednostavnosti. Također harmonitete definiramo pomoću dvoomjera, ali se dvoomjeri u praksi vrlo rijetko koriste. U nastavku ćemo iskazati i dokazati osnovne leme vezane uz harmonitete koje ćemo koristiti u rješavanju problema.

2.1 Osnovni rezultati

Lema 2.1.1. *Neka je dan pramen pravaca a, b, c, d u točki X. Neka pravac q redom siječe pravce a, b, c u točkama A, B, C. Ako vrijede dvije od tri slijedeće tvrdnje, tada vrijedi i treća:*

(1) Dani pramen je harmonijski, tj. $(a, c, b, d) = -1$.
(2) Točka B polovište je dužine $\overline{AC}$.
(3) Pravac d paralelan je s pravcem q.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (1) i (2). Kako bismo dokazali da je $d \parallel q$, pretpostavimo suprotno, $d \nparallel q$. Tada d siječe q i označimo s $D = d \cap q$, iz teorema 1.3.4. slijedi da je $(ACBD) = -1$, odnosno

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = -1. \tag{2.2}$$

Kako je B polovište dužine $\overline{AC}$, tada je $AB = BC$ pa iz (2.2) slijedi

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC = AD \cdot AB, \tag{2.3}$$

odakle slijedi da je $AB(CD + DA) = 0 \implies AB \cdot CA = 0$, odnosno $A = B$ ili $C = A$, dakle dobili smo kontradikciju pa je $d \parallel q$.
Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (1) i (3). Iz (1) slijedi da je $(a, c, b, d) = -1$, tada iz teorema 1.3.4. slijedi da je $(ACB\infty) = -1$, odnosno točka B je polovište dužine $\overline{AC}$.
Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (2) i (3). Kako je $(ACB\infty) = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{-AB} = -1$, iz teorema 1.3.4. slijedi da je $(a, c, b, d) = -1$.

□

Lema 2.1.2. *Neka točke A, B, C, D leže na pravcu p u tom poretku te neka i točka M pripada tom pravcu. Ako vrijede dvije od sljedeće tri tvrdnje, tada vrijedi i treća:*

(1) Točke A, B, C, D čine harmonijsku četvorku.
(2) Točka M je polovište dužine $\overline{BD}$.
(3) Vrijedi $AB \cdot AD = AC \cdot AM$ ili $AM \cdot CM = (BM)^2$ ili $AM \cdot CM = (DM)^2$.

Dokaz. Radi lakšeg računa označimo AB s x, BC s y i CD sa z. Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (1) i (2). Kako su točke A, B, C, D harmonijska četvorka, iz definicije slijedi da je

$\frac{x}{(x+y+z)} \cdot \frac{z}{-y} = -1$, odnosno $xz = y(x + y + z)$. Sada je

$$\begin{aligned}
AM &= AB + BM = x + \frac{y+z}{2},\\
BM &= \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}(y + z),\\
DM &= \frac{1}{2}DB = -\frac{1}{2}(y + z),\\
CM &= CB + BM = -y + \frac{1}{2}(y + z) = \frac{1}{2}(-y + z)
\end{aligned}$$

Imamo

AB$\cdot AD - AC \cdot AM = x(x + y + z) - (x + y) \cdot (x + \frac{y+z}{2}) =$
$= x^2 + xy + xz - x^2 - \frac{xy}{2} - \frac{xz}{2} - yx - \frac{y^2}{2} - \frac{yz}{2}$
$= \frac{1}{2}(xz - y(x + y + z))$.

Kako je $xz = y(x + y + z)$, to je $AB \cdot AD = AC \cdot AM$. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
AM \cdot CM - (BM)^2 &= (x + \frac{y+z}{2}) \cdot (\frac{-y+z}{2}) - \frac{1}{4}(y+z)^2 =\\
&= \frac{-xy + xz}{2} + \frac{z^2 - y^2}{4} - \frac{1}{4}(y^2 + z^2 + 2yz) =\\
&= \frac{1}{2}(xz - y(x + y + z)).
\end{aligned}$$

Napokon $AM \cdot CM - (DM)^2 = AM \cdot CM - (BM)^2 = \frac{1}{2}(xz - y(x + y + z)$.
Kako je $xz = y(x + y + z)$, to je $AM \cdot CM = (DM)^2$ i $AM \cdot CM = (BM)^2$.

Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (2) i (3). Ako vrijedi $AB\cdot AD = AC\cdot AM$ ili $AM\cdot CM = (BM)^2$ ili $AM \cdot CM = (DM)^2$, onda iz prethodno dokazanog slijedi $xz = y(x + y + z)$, tj. $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = -1$, odnosno vrijedi tvrdnja (1).

Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (1) i (3). Ako je $AB \cdot AD = AC \cdot AM$, onda je $x(x+y+z) = (x + y) \cdot (x + BM)$. Dakle, vrijedi $x^2 + xy + xz = x^2 + yx + (x + y) \cdot BM$, odakle slijedi

$$xz = (x + y) \cdot BM \qquad (2.4)$$

Kako je $xz = y(x + y + z)$, to je $2xz = xy + y^2 + yz + xz$ pa je $xz = \frac{1}{2}(xy + xz + y^2 + yz)$, pa je

$$xz = (x + y)\frac{1}{2}(y + z). \tag{2.5}$$

Sada iz prethodno dokazanog slijedi da je $BM = \frac{1}{2}(y + z) = \frac{1}{2}BD$, odnosno točka M je polovište dužine $\overline{BD}$.
Ako je $AM \cdot CM = (BM)^2$, onda je $(AB + BM) \cdot (CB + BM) = (BM)^2$. Stoga je $(x + BM) \cdot (-y + BM) = (BM)^2$, odnosno $(x - y)BM - xy = 0$, odakle sređivanjem dobivamo

$$xy = (x - y)BM \tag{2.6}$$

Kako je iz $xz = y(x + y + z)$, to je $xy = xz - y^2 - yz$, odnosno $2xy = xy + xz - y^2 - yz$, tj. $xy = \frac{1}{2}x(y + z) - \frac{1}{2}y(y + z)$, odakle dobivamo

$$xy = \frac{1}{2}(x - y)(y + z). \tag{2.7}$$

Sada iz prethodnog slijedi da je $BM = \frac{1}{2}(y + z) = \frac{1}{2}BD$, odakle slijedi da je točka M polovište dužine $\overline{BD}$.
Ako je $AM \cdot CM = (DM)^2$, onda je $(AD + DM) \cdot (CD + DM) = (DM)^2$. Slijedi da je $(x + y + z + DM)(z + DM) = (DM)^2$, odnosno $(x + y + z)z + (x + y + 2z)DM = 0$, odakle dobivamo

$$(x + y + z)z = (x + y + 2z)MD. \tag{2.8}$$

Iz $xz = y(x + y + z)$ slijedi $xz + (y + z)z = y(x + y + z) + (y + z)z$, odnosno $(x + y + z)z = y(x + y + z) + (y + z)z$. Pribrajanjem izraza $(x + y + z)z$ dobivamo

$$2(x + y + z)z = (x + y + z)(y + z) + (y + z)z \implies$$
$$2(x + y + z)z = (x + y + 2z)(y + z) \implies (x + y + z)z = (x + y + 2z)\frac{y + z}{2}.$$

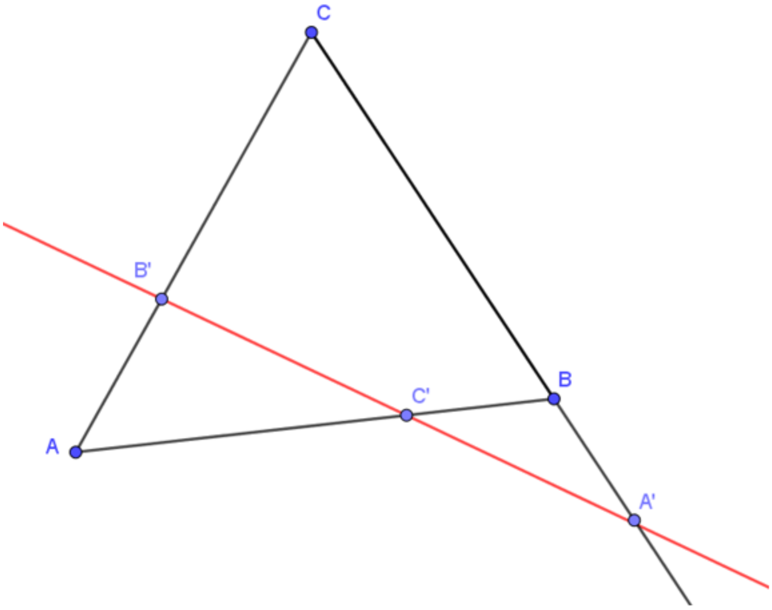
Sada iz prethodno dokazanog slijedi upravo $MD = \frac{y+z}{2} = \frac{1}{2}BD$, dakle točka M je polovište dužine $\overline{BD}$.

□

Teorem 2.1.3. *(Menelajev teorem)*
Neka su točke B', C' na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a A' na produžetku stranice $\overline{BC}$, trokuta ABC. Točke A', B', C' su kolinearne ako i samo ako vrijedi

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \tag{2.9}$$

Dokaz. Dokaz teorema možemo naći u [2]. □



Slika 2.2: Prikaz Menelajevog teorema

Teorem 2.1.4. *(Cevin teorem)*
Neka su A', B', C' redom točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pravci AA', BB', CC' prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi

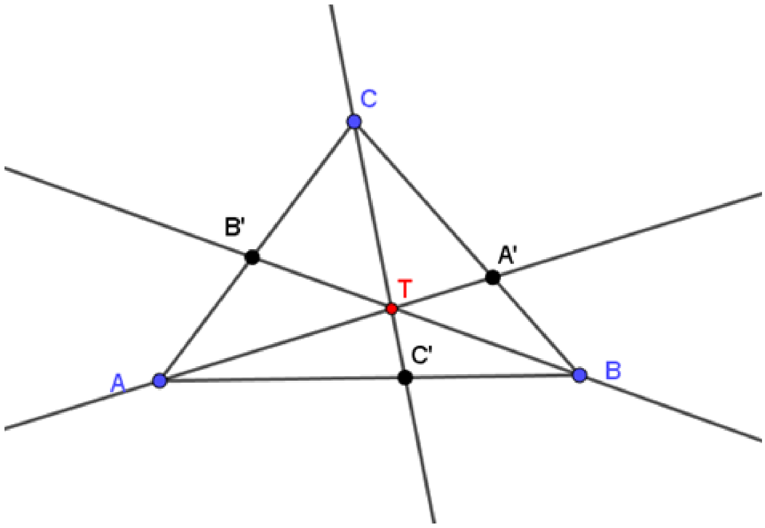
$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1. \tag{2.10}$$

Dokaz. Dokaz teorema možemo naći u [2]. □

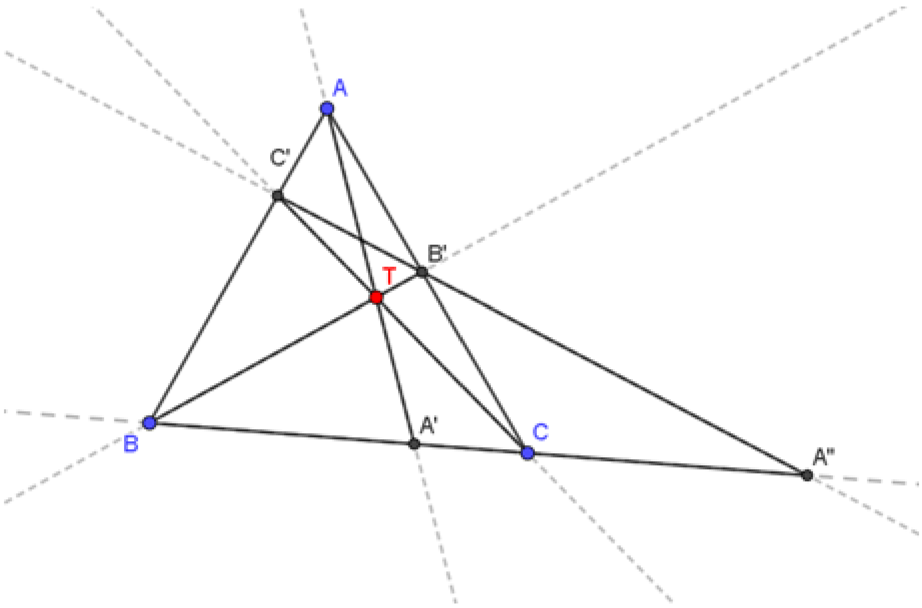
Lema 2.1.5. *Neka je dan trokut ABC i točka T unutar tog trokuta. Pravac AT siječe pravac BC u točki A'. Analogno dobivamo točke B' i C'. Neka je točka A'' sjecište pravaca BC i $B'C'$ te pretpostavimo da se točka C nalazi između točaka B i A''. Tada točke A'', C, A', B čine harmonijsku četvorku.*

Dokaz. Kako bismo dokazali lemu, koristit ćemo Menelajev i Cevin teorem. Primjenom Menelajevog teorema na trokut ABC i pravac $B'C'$ dobivamo

$$\frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA''}{A''C} = -1. \tag{2.11}$$



Slika 2.3: Prikaz Cevinog teorema



Slika 2.4: Skica trokuta iz leme 2. 1. 5.

Primjenom Cevinog teorema na trokut ABC i točku T dobivamo

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1. \tag{2.12}$$

Iz jednakosti (2. 4) i (2. 5) dobivamo

$$\frac{A''C}{A'C} \cdot \frac{BA'}{BA''} = -1, \tag{2.13}$$

odnosno

$$(A'', A', C, B) = \frac{A''C}{A'C} \cdot \frac{A'B}{A''B} = -1. \tag{2.14}$$

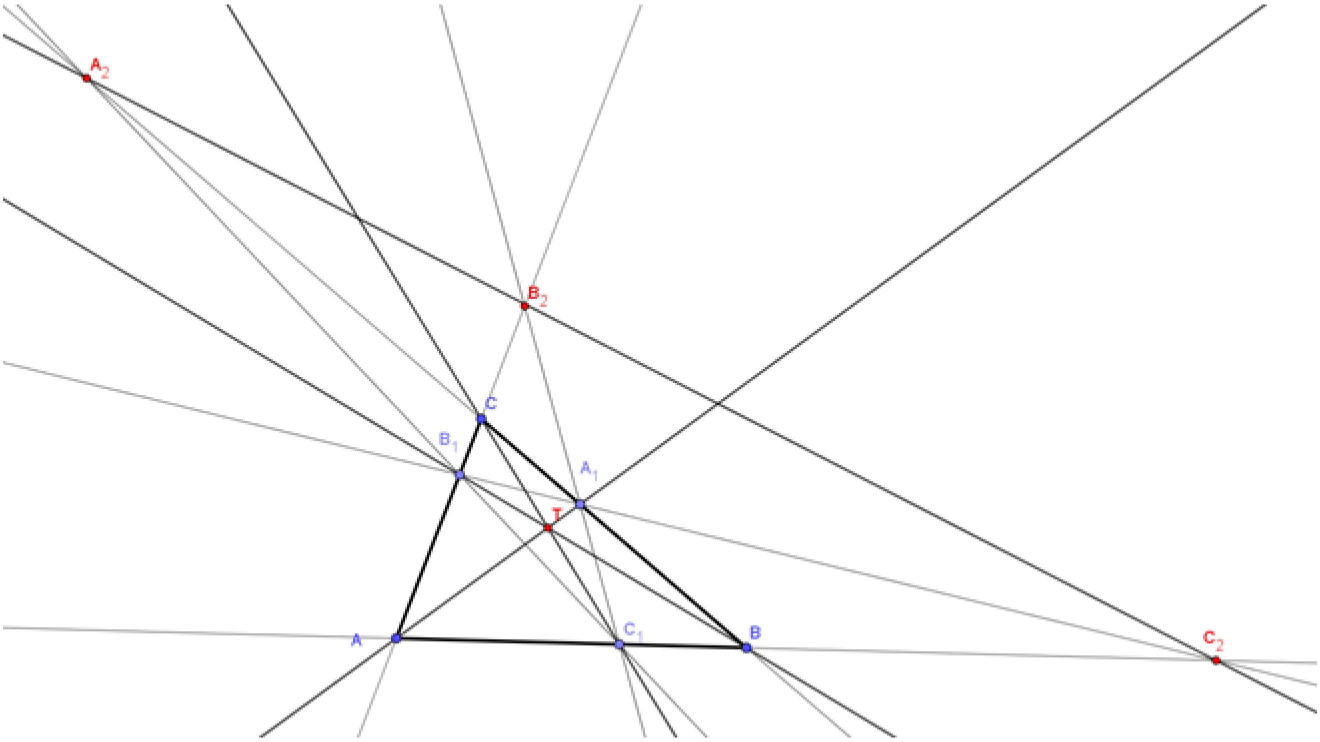
Iz definicije 2.0.1. slijedi da točke A'', C, A', B čine harmonijsku četvorku. □

Teorem 2.1.6. *(Desarguesov teorem)*
Neka je dan trokut ABC i redom točke A_1, B_1, C_1 na stranicama BC, CA i AB. Neka je točka A_2 sjecište pravaca BC i B_1C_1 te analogno definiramo točke B_2 i C_2. Vrijedi da se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u jednoj točki T ako i samo ako su A_2, B_2 i C_2 kolinearne točke.

Dokaz. Dokazat ćemo samo jedan smjer koristeći harmonitete. Pretpostavimo da se pravci AA_1, BB_1, CC_1 sijeku u točki T. Pokazat ćemo da su tada točke A_2, B_2 i C_2 kolinearne. Neka je točka A_2' sjecište pravaca BC i B_2C_2. Dovoljno je dokazati da je $A_2 \equiv A_2'$. Točka T nalazi se unutar trokuta ABC i pravac AT siječe BC u A_1. Točku A_2 dobivamo kao presjek pravaca B_1C_1 i BC i pretpostavimo da se točka C nalazi između točaka A_2 i B. Iz leme 2.1.5. slijedi da je $(A_2, A_1, C, B) = -1$. Analogno možemo zaključiti da je $(C_2, C_1, B, A) = -1$. Dakle točke A_2, C, A_1, B i C_2, B, C_1, A čine harmonijske četvorke. Primjenom teorema 1.3.4 na pravce $B_2C_2, B_2C_1, B_2A, B_2B$ presječene pravcem BC, dobivamo da je $(A_2', A_1, C, B) = (C_2, C_1, B, A) = -1 = (A_2, A_1, C, B)$. Dakle iz leme 1.3.9. slijedi da je $A_2' \equiv A_2$, što smo i htjeli dokazati.
Dokaz drugog smjera Desarguesovog teorema može se pronaći u [7]. □

Lema 2.1.7. *Na pravcu p dane su redom točke A, B, C i D te je dana točka O koja ne leži na pravcu p. Ako vrijede dvije od tri sljedeće tvrdnje, tada vrijedi i treća:*
(1) Točke D, C, B, A čine harmonijsku četvorku.
(2) Pravac OB je simetrala (unutrašnjeg) kuta $\angle AOC$
(3) Pravci OB i OD su okomiti.

Dokaz. Kroz točku B povucimo paralelu s pravcem OA te neka su redom točke C' i D' sjecište te paralele s pravcima OC i OD.
Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (1) i (2). Tada je prema lemi 2.1.1. OD, OC, OB, OA harmonijski pramen i točka C' polovište dužine $\overline{BD'}$ jer je OA paralelno s BC'. Pravac OB je simetrala kuta $\angle AOC$ pa je $\angle C'OB = \angle BOA = \angle OBC'$, odnosno vrijedi $|OC'| = |BC'|$. Dakle, $|C'B| = |C'D| = |C'O|$ pa je točka O na kružnici promjera BD'. Dakle $OB \perp OD$.
Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (2) i (3). Prema lemi 2.1.1. dovoljno je dokazati da je C'



Slika 2.5: Prikaz Desarguesovog teorema

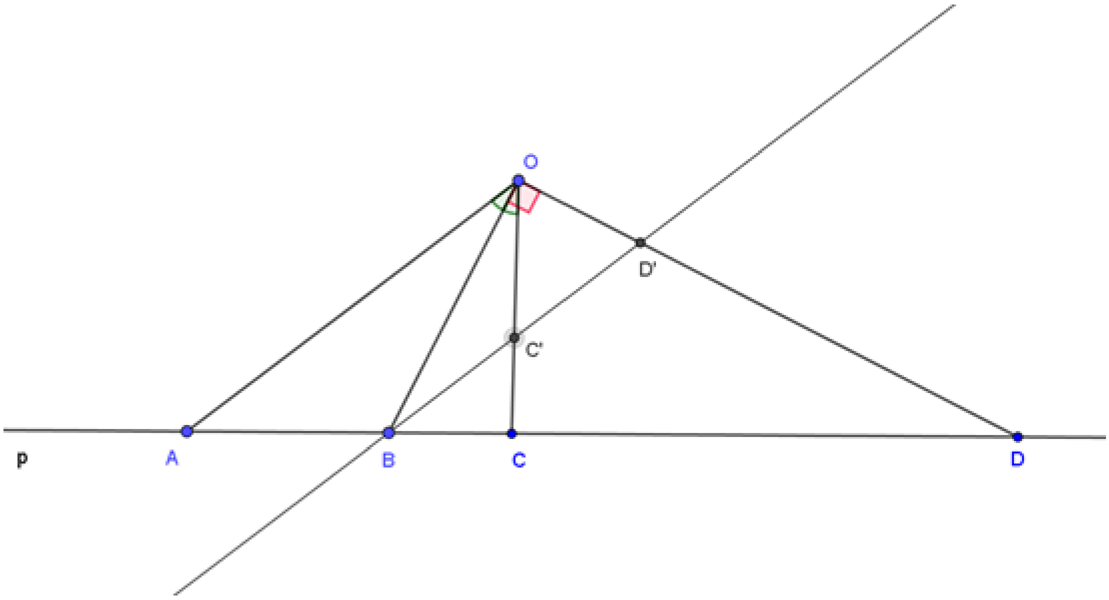
polovište $\overline{BD'}$. Kako je kut $\angle BOD'$ pravi te je $|OC'| = |BC'|$, slijedi da je točka C' polovište BD'. Iz leme 2.1.1. slijedi da je $(OD, OC, OB, OA) = -1$ pa po teoremu 1.3.4. slijedi da je $(DCBA) = -1$.
Pretpostavimo da vrijede tvrdnje (1) i (3). Kako je tada po lemi 2.1.1. točka C' polovište dužine $\overline{BD'}$ te je kut $\angle BOD'$ pravi i vrijedi $|OC'| = |BC'|$, slijedi da je OB simetrala kuta $\angle AOC$. Naime, pravac OA je paralelan s pravcem BD' pa su kutevi uz presječnicu OB jednaki, odnosno $\angle AOB = \angle OBD' = BOC$. $\square$

Primjer 1.

Dan je konveksni četverokut $ABCD$. Točka E sjecište je dijagonala AC i BD te neka je točka F sjecište pravaca AD i BC. Točku T definiramo kao sjecište pravaca EF i AB. Ako se kružnica promjera EF i pravac CD sijeku u dvije točke, X, Y, dokažite da je pravac EF simetrala kuta $\angle XTY$.

Rješenje:

Točku Z definiramo kao presjek pravaca EF i CD. Neka pravac BZ siječe redom pravce



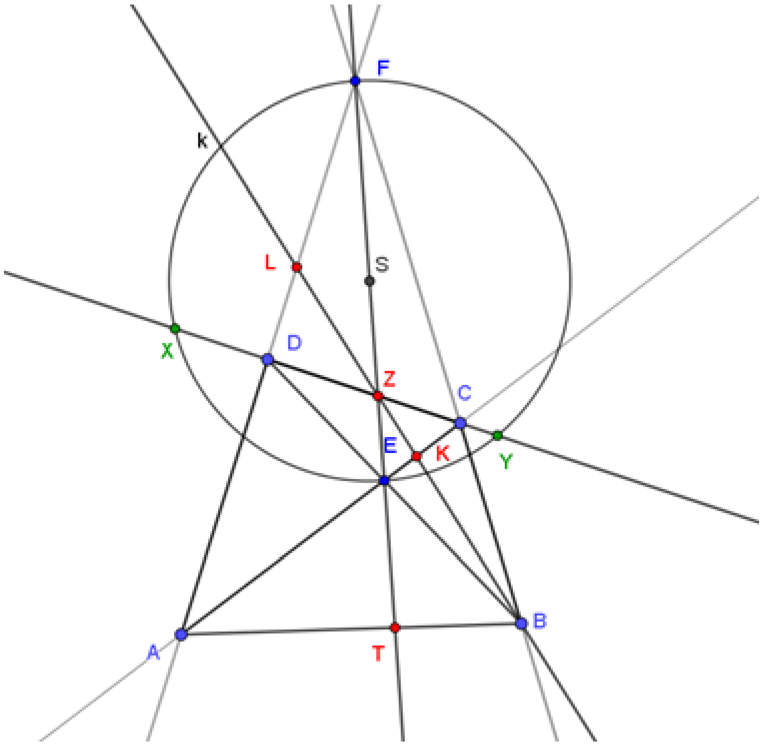
Slika 2.6: Skica dokaza leme 2.1.7.

AC i AD u točkama K i L. Na trokut CDF i točku E primjenimo lemu 2.1.3. te dobivamo da točke B, K, Z, L čine harmonijsku četvorku. Pramen iz točke A nam daje da točke T, E, Z, F također čine harmonijsku četvorku. Kako je $\overline{EF}$ promjer kružnice k, tada je kut $\angle EXF$ pravi. Sada prema prethodnoj lemi 2.1.5. slijedi da je pravac XE simetrala kuta $\angle TXZ$. Analogno dobivamo da je pravac YE simetrala kuta $\angle TYZ$, dakle točka E je središte upisane kružnice trokuta XTY pa je pravac EF simetrala kuta $\angle XTY$ što smo i htjeli pokazati.

Definicija 2.1.8. *Neka je dana kružnica $k(O, r)$. Definiramo polaritet s obzirom na kružnicu k kao bijekciju između skupa točaka i skupa pravaca tako da za pridružene elemente A, a vrijedi $|OA| \cdot |OA|' = r^2$ i $OA \perp a$, gdje je točka $A' = OA \cap a$, tj. A, A' su inverzne točke za inverziju s centrom O radijusa r. Točki O pridružujemo beskonačno daleki pravac, a pravcu a kroz točku O pridružujemo beskonačno daleku točku pravca okomitog na a. Pridružene elemente A, a nazivamo* ***pol****, odnosno* ***polara*** *s obzirom na kružnicu k.*

Lema 2.1.9. *Ako je točka B na polari a točke A s obzirom na kružnicu k, tada je točka A na polari b točke B s obzirom na kružnicu k.*

Dokaz. Tvrdnja se lako dokaže ako je $A = O$ ili $B = O$ pa pretpostavimo da su točke A, B različite od središta kružnice O. Također pretpostavimo da točka A ne leži na beskonačno dalekom pravcu.



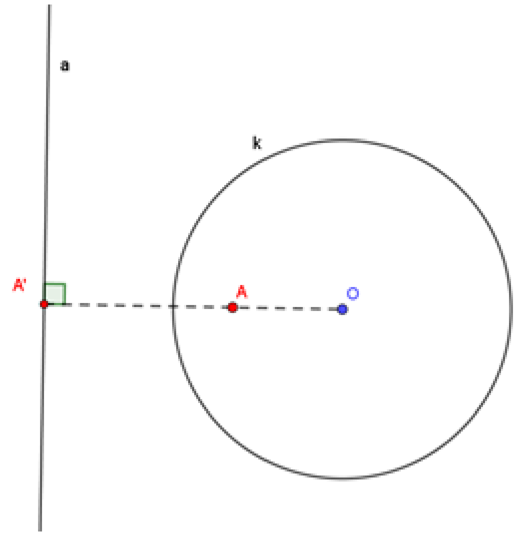
Slika 2.7: Primjer 1. skica

Neka je $A' \in OA \cap a$ i B' nožište okomice iz O na b. Tada su pravokutni trokuti $OB'A$ i $OA'B$ slični te je $\frac{|OA|}{|OB'|} = \frac{|OB|}{|OA'|}$, odnosno $|OB| \cdot |OB'| = |OA| \cdot |OA'| = r^2$. Dakle AB' je polara od B s obzirom na kružnicu k, tj. $AB' = b$. □

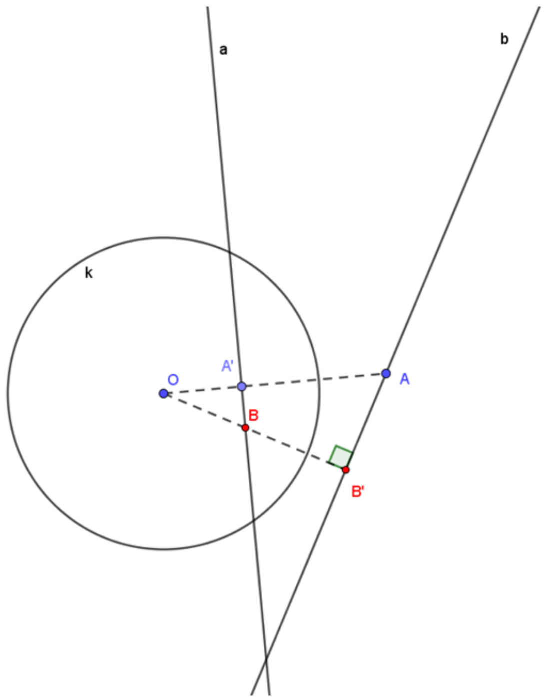
Lema 2.1.10. *(Pol i polara)*
Dana je kružnica k i točka P. Točka X je na polari od P s obzirom na kružnicu k ako i samo ako točke P, Y, X, Z čine harmonijsku četvorku, gdje su točke Y, Z sjecišta kružnice k i pravca PX.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se točka P nalazi izvan kružnice k. Neka je točka S središte kružnice k te neka su točke A i B točke sjecišta dane kružnice k i pravca PS. Točku P' definiramo kao sjecište polare p i pravca PS. Neka je točka O' polovište dužine $\overline{ZY}$ te neka je točka X' sjecište polare p i pravca XP. Iz definicije polare slijedi

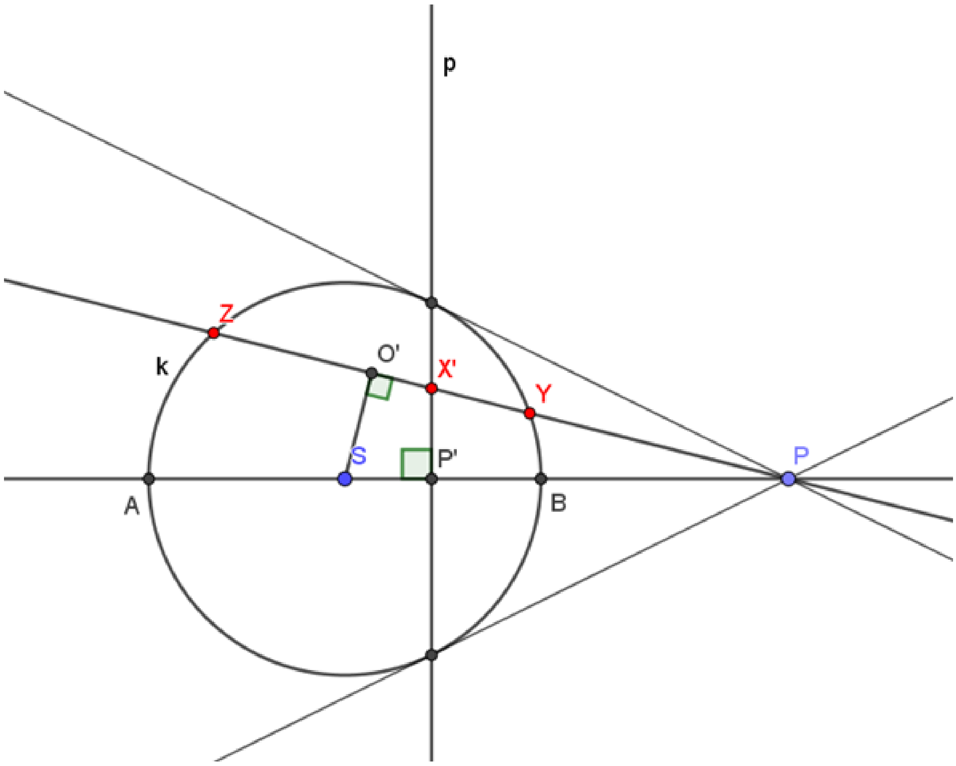
$$|SP| \cdot |SP'| = |SB|^2. \tag{2.15}$$



Slika 2.8: Točka A je pol pravca a, a pravac a je polara točke A



Slika 2.9: Skica leme 2.1.9.



Slika 2.10: Skica dokaza leme 2.1.10.

Iz prethodnog slijedi da je točka S polovište dužine $\overline{AB}$. Prema lemi 2.1.2. slijedi da točke P, B, P', A čine harmonijsku četvorku. Ponovo primijenimo istu lemu na tu harmonijsku četvorku te dobivamo

$$|PB| \cdot |PA| = |PP'| \cdot |PS|. \tag{2.16}$$

Potencija točke s obzirom na kružnicu k nam daje

$$|PB| \cdot |PA| = |PZ| \cdot |PY|. \tag{2.17}$$

Uočimo da je četverokut $SP'XO'$ tetivan jer mu je zbroj dva nasuprotna kuta jednak 180°. Tada nam potencija točke s obzirom na kružnicu opisanu tom četverokutu daje

$$|PX'| \cdot |PO'| = |PP'| \cdot |PS|. \tag{2.18}$$

Tada iz prethodnih jednakosti slijedi $|PZ| \cdot |PY| = |PX'| \cdot |PO'|$. Prema lemi 2.1.2. točke P, Y, X', Z čine harmoničku četvorku. Dakle X je na polari od P s obzirom na kružnicu k ako i samo ako točke P, Y, X, Z čine harmonijsku četvorku.
Ako se točka P nalazi unutar kružnice k, zamijenimo točke P i X pomoću leme 2.1.7. te je nakon toga postupak analogan prethodnom. □

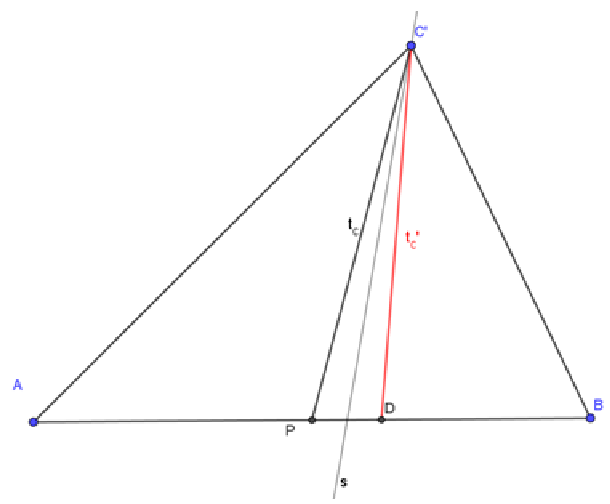
Definicija 2.1.11. *Za trokut XYZ kažemo da je **autopolaran** u odnosu na kružnicu k ako je XY polara od Z, YZ polara od X i XZ polara od Y.*

2.2 Harmonički četverokuti

U ovom ćemo dijelu objasniti što su to harmonijski četverokuti te na koji način povezuju harmonitete i kružnice.

Definicija 2.2.1. *Za tetivni četverokut $ABCD$ kažemo da je **harmonijski** ako vrijedi da je umnožak nasuprotnih stranica jednak.*

Definicija 2.2.2. *Osnosimetričnu sliku težišnice trokuta u odnosu na simetralu unutarnjeg kuta nazivamo **simedijana**.*



Slika 2.11: Simedijana trokuta ABC

Lema 2.2.3. *U kružnicu k upisan je tetivni četverokut $ABCD$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $ABCD$ je harmonijski četverokut
(2) Za proizvoljnu točku $P \in k$, pramen PA, PB, PC, PD je harmonijski
(3) Tangente na kružnicu k u točkama A i C sijeku se na pravcu BD
(4) AC je simedijana trokuta ABD
(5) Simetrale unutarnjih kutova $\angle DAB$ i $\angle BCD$ sijeku se na pravcu BD.

Dokaz. Dokažimo ekvivalentnost prethodnih tvrdnji.

(1) $\iff$ (2) Bez smanjenja općenitosti, neka je točka P na luku AD koji ne sadrži točke B i C. Tada koristeći definiciju dvoomjera i sinusov poučak dobivamo

$$(PA, PC, PB, PD) = \frac{\sin\angle(PA, PB)\cdot\sin\angle(PC, PD)}{\sin\angle(PA, PD)\cdot\sin\angle(PC, PB)} = \frac{AB}{AD}\cdot\frac{CD}{CB}. \tag{2.19}$$

Tada možemo zaključiti da je $(PA, PC, PB, PD) = -1$ ako i samo ako je $ABCD$ harmonijski četverokut.

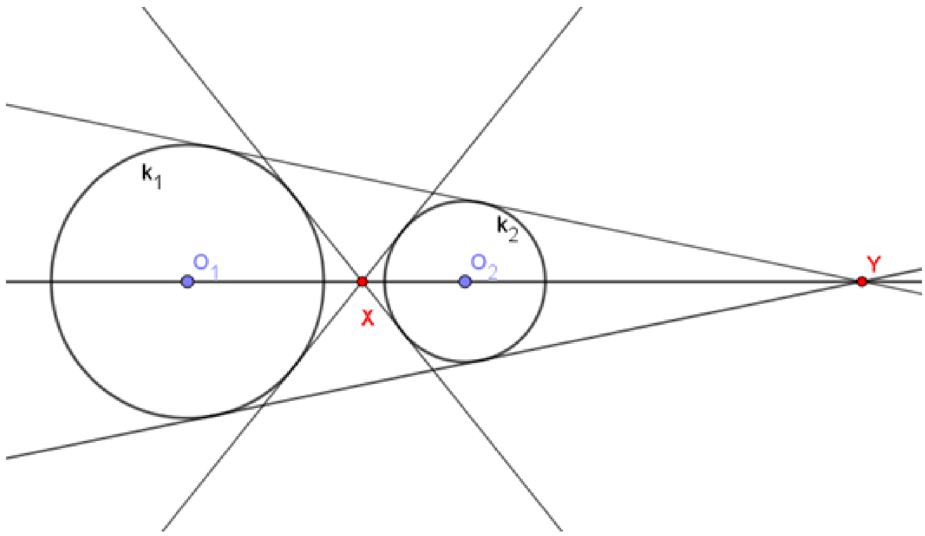
(1) $\iff$ (3) Neka su točke T i T' redom sjecišta pravca BD i tangenti na kružnicu k u točkama C i A. Kako su trokuti TDC i TCB slični, slijedi $\frac{TD}{TC} = \frac{CD}{BC}$ i $\frac{TC}{TB} = \frac{CD}{BC}$. Sada je $(\frac{CD}{BC})^2 = \frac{TD}{TC}\cdot\frac{TC}{TB} = \frac{TD}{TB}$ pa je $1 - \frac{BD}{TB} = \frac{TD}{TB} = (\frac{CD}{BC})^2$. Analogim postupkom dobivamo $1 - \frac{BD}{T'B} = (\frac{AD}{BA})^2$. Dakle, zaključujemo da je $T \equiv T'$ ako i samo ako je $\frac{AD}{BA} = \frac{CD}{BC}$.

(1) $\iff$ (4) Neka je točka M polovište dijagonale BD četverokuta $ABCD$. Dužina AC je simedijana ako i samo ako vrijedi da je $\angle DAC = \angle MAB$ te iz jednakosti obodnih kutova dobivamo da je $\angle MBA = \angle DCA$. Dakle AC je simedijana ako i samo ako su trokuti ADC i AMB slični. Iz jednakosti kutova $\angle MBA$ i $\angle DCA$ dobivamo da su trokuti ADC i AMB slični ako i samo ako je $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CD}$. Primjenom Ptolomejevog teorema o dijagonalama tetivnog četverokuta dobivamo da je $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD = 2AC\cdot BM$. Dakle, $AC\cdot BM = AB\cdot CD$ ako i samo ako je $ABCD$ harmonijski četverokut.

(2) $\iff$ (5) Neka su točke R i R' redom sjecišta simetrala kutova DAB i BCD s pravcem BD. Tada vrijedi $\frac{BR}{DR} = \frac{AB}{AD}$ i $\frac{BR'}{DR'} = \frac{CB}{CD}$. Vrijedi da je $R \equiv R'$ ako i samo ako je $\frac{BR}{DR} = \frac{BR'}{DR'}$, pa je $ABCD$ harmonijski četverokut ako i samo ako je $R \equiv R'$. □

Lema 2.2.4. *Dane su dvije kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, gdje su točke O_1, O_2 središta, a r_1, r_2 pripadni radijusi kružnica. Neka je točka X sjecište unutarnjih tangenata kružnica, a točka Y sjecište vanjskih tangenata. Tada točke O_1, X, O_2, Y čine harmonijsku četvorku.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da su točke O_1, X, O_2, Y upravo u tom poretku. Točke X i Y su središta homotetija koje preslikavaju kružnicu k_1 u k_2 i obratno. Tada vrijedi $\frac{O_1X}{XO_2}\cdot\frac{O_2Y}{O_1Y} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_1} = 1$. Dakle, točke O_1, X, O_2, Y čine harmonijsku četvorku. □



Slika 2.12: Prikaz kružnica k_1 i k_2 iz leme 2. 2. 4

Poglavlje 3

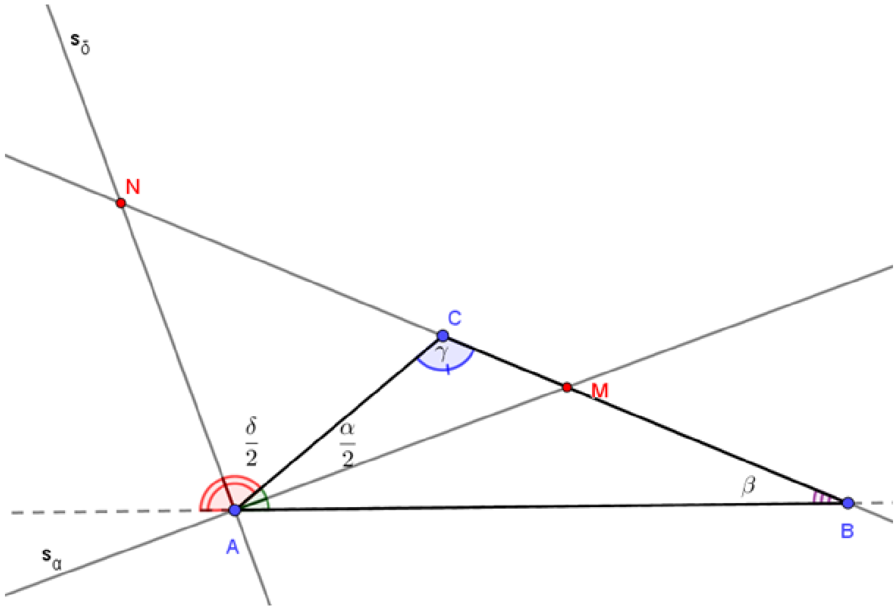
Primjena harmoniteta u rješavanju problema

U ovom ćemo poglavlju riješiti odabrane zadatke vezane uz harmonitete koji se pojavljuju na matematičkim natjecanjima.

1. zadatak: Dan je trokut ABC i neka točke M i N leže na pravcu BC. Dokažite da su AM i AN redom simetrale unutrašnjeg i vanjskog kuta $\angle BAC$ ako i samo ako je kut $\angle MAN = 90°$ i $(NCMB)$ je harmonijska četvorka.

Rješenje:
Pretpostavimo da su AM i AN redom simetrale unutrašnjeg i vanjskog kuta $\angle BAC$. Tada želimo dokazati da je kut $\angle MAN = 90°$ i da je $(BCMN)$ harmonijska četvorka. Označimo redom unutrašnje kutove trokuta $\angle CAB, \angle ABC$ i $\angle BCA$ s α, β i γ te označimo vanjski kut kuta $\angle BAC$ s δ. Kako bismo dokazali da je kut $\angle MAN = 90°$, dovoljno je pokazati da su pravci AN i AM okomiti. Kako su AM i AN simetrale unutrašjeg kuta α i vanjskog kuta $\delta = 180 - \alpha$ te kako znamo da je zbroj mjera unutrašnjh kutova u trokutu jednak $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, slijedi da je $\delta = \beta + \gamma$. Tada je $\frac{\alpha}{2} = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ i $\frac{\delta}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Uočimo da je $\angle MAN = \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90°$. Dakle, dokazali smo da je kut $\angle MAN$ pravi. Sada koristimo lemu 2.1.7. Kako je AM simetrala (unutarnjeg) kuta i kako su pravci AM i AN okomiti, tada točke $(NCMB)$ čine harmonijsku četvorku.

Pretpostavimo sada da točke $(NCMB)$ čine harmonijsku četvorku te da je $\angle MAN = 90°$. Želimo dokazati da su pravci AM i AN redom simetrale unutrašnjeg i vanjskog kuta $\angle BAC$ trokuta ABC. Iz pretpostavke pravci AM i AN su okomiti i točke $(NCMB)$ čine harmonijsku četvorku, tada po lemi 2.1.7. slijedi da je pravac AM simetrala unutrašnjeg kuta BAC. Tada je kut $\angle CAN = 90° - \frac{\alpha}{2}$ i želimo pokazati da je kut $\delta - \angle CAN = 90° - \frac{\alpha}{2}$, što je ekvivalentno tome da $\delta = 180° - \alpha$, a to vrijedi. Dokazali smo da je AN simetrala pripadnog vanjskog kuta $\angle BAC$. □

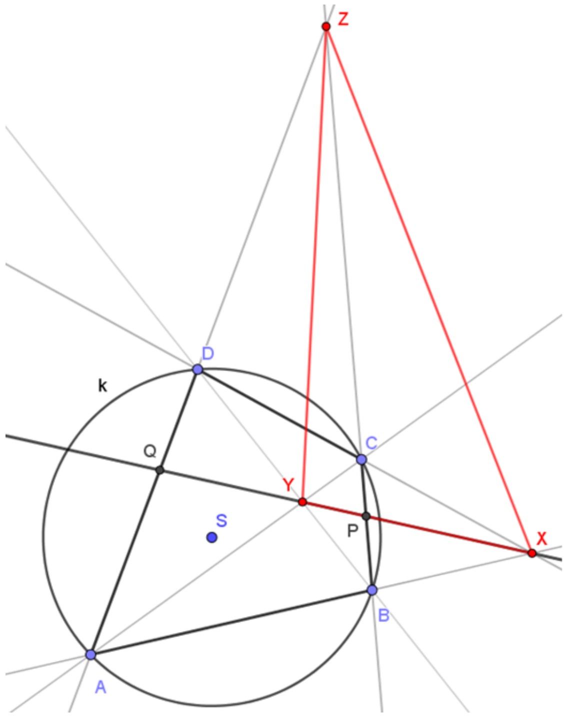


Slika 3.1: Skica trokuta ABC iz 1. zadatka

2. zadatak (Brocardov teorem): Neka je četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu k. Neka je $X \equiv AB \cap CD$, $Y \equiv AC \cap BD$ i $Z \equiv AD \cap BC$. Dokažite da je tada trokut XYZ autopolaran s obzirom na kružnicu k.

Rješenje:
Neka su točke P, Q redom sjecišta pravca XY s BC i AD. Primjenom leme 2.1.5. na trokut AXD i točku Y, dobivamo da točke Z, D, Q, A čine harmonijsku četvorku. Stoga je XZ, XD, XQ, XA harmonijski pramen pa je i Z, C, P, B harmonijska četvorka.

Tada točke P, Q pripadaju polari točke Z, odnosno polara od Z je pravac PQ koji se podudara s pravcem XY. Analogno slijedi da je pravac YZ polara od X i točka Y pol pravca XZ prema lemi 2.1.10. □

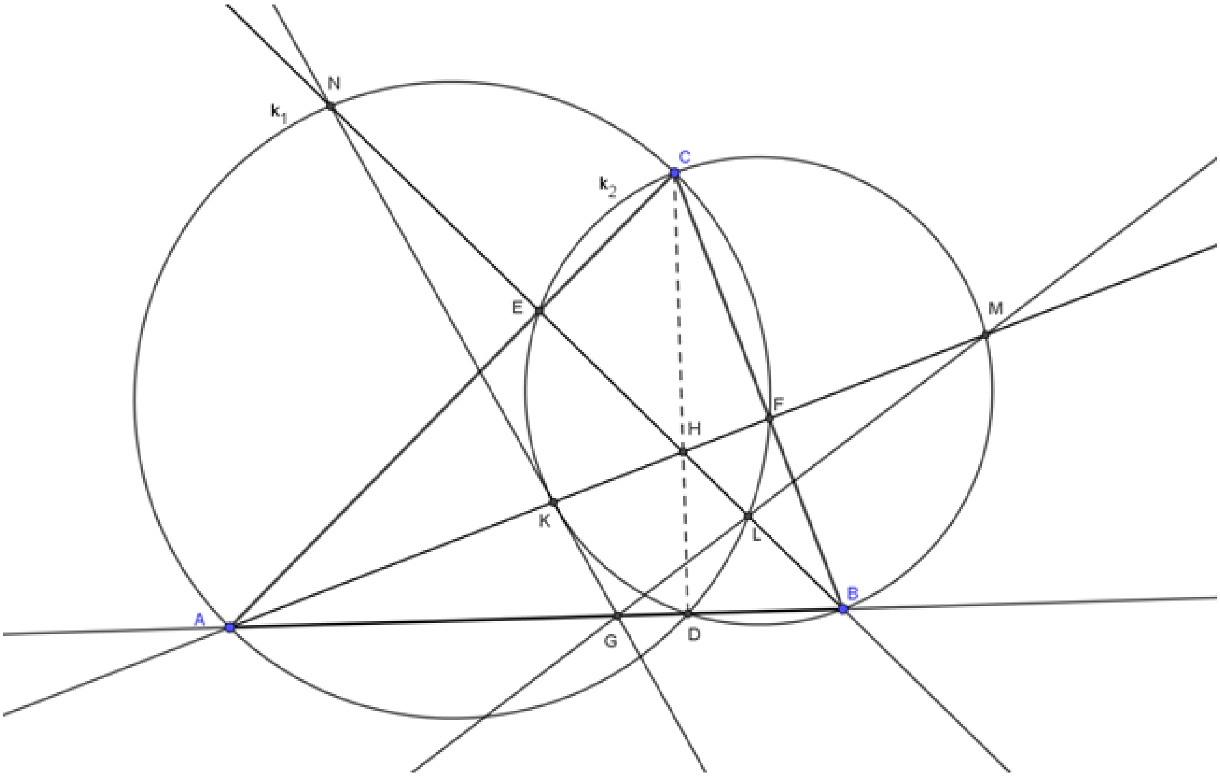


Slika 3.2: Prikaz Brocardovog teorema

3. zadatak: Neka je trokut ABC šiljastokutan. Kružnica k_1 promjera AC siječe BC u točkama C i F. Kružnica k_2 promjera BC siječe AC u točkama C i E. Polupravac AF siječe kružnicu k_2 u točkama K i M tako da je $AK < AM$. Polupravac BE presjeca kružnicu k_1 u točkama L i N tako da je $BL < BN$. Dokažite da se pravci AB, ML, NK sijeku u jednoj točki.

Rješenje:
Neka je točka H ortocentar trokuta ABC i točka D nožište visine iz vrha C. Točka D se nalazi na kružnicama k_1 i k_2 prema obratu Talesovog teorema. Tada se ortocentar H nalazi na radikalnoj osi kružnica k_1 i k_2 i vrijedi $LH \cdot HN = CH \cdot HD = KH \cdot HM$. Stoga su trokuti KHN i LHM slični pa je $KLMN$ tetivni četverokut. Neka je k opisana kružnica tog četverokuta. Iz sličnosti trokuta AHD i CHF slijedi $AH \cdot HF = CH \cdot HD = KH \cdot HM$. Primjetimo da je točka F polovište dužine KM s obzirom da je $AF \perp BC$ te da je BC promjer kružnice na kojoj se nalaze točke M i K. Točke H, K, A, M su u harmonitetu prema lemi 2.1.2. i tada je točka A na polari od H u odnosu na kružnicu k. Naime, vrijedi $-1 = (HKAM)$ i sada primjenom leme 2.1.10. dobivamo da je A na polari od H u odnosu na k. Analogno slijedi da je B na polari od H u odnosu na k. Dakle AB je polara od H u

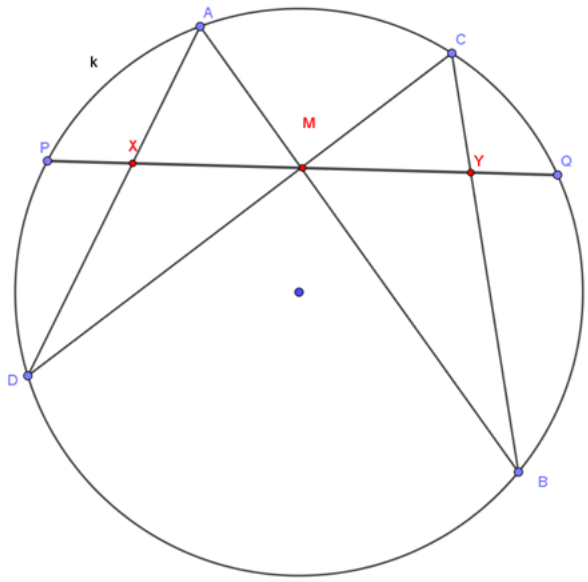
odnosu na kružnicu k.
Neka je $G = NK \cap LM$ i $KL \cap MN = J$. Po Brocardovom teoremu primjenjenom na četverokut $KLMN$ trokut GHJ je autopolaran s obzirom na k, a to znači da je $AB = GJ$, tj. točka G leži na AB, što je i trebalo dokazati. □



Slika 3.3: Skica trokuta iz zadatka 3.

4. zadatak (Leptirov teorem): Neka je dana tetiva $\overline{PQ}$ kružnice k i neka je točka M njezino polovište. Točkom M nacrtane su dvije proizvoljne tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Tetive $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ tada sijeku pravac PQ redom u točkama X i Y. Tada je točka M ujedno i polovište dužine $\overline{XY}$, odnosno $|MX| = |MY|$.

Rješenje: Iz leme 1.3.8. slijedi $(DP, DC, DA, DQ) = (BP, BC, BA, BQ)$. Zatim iz leme 1.3.4. slijedi $(PMXQ) = (DP, DC, DA, DQ) = (BP, BC, BA, BQ) = (P, Y, M, Q)$. Neka je točka X' centralnosimetrična slika točke X s obzirom na točku M. Tada je $(PYMQ) = (PMXQ) = \frac{PX}{MX} : \frac{PQ}{MQ} = \frac{PX}{X'M} : \frac{PQ}{MQ} = \frac{X'Q}{X'M} : \frac{PQ}{MQ} = \frac{X'Q \cdot MQ}{X'M \cdot PQ} = \frac{X'Q \cdot PM}{X'M \cdot PQ} = \frac{PM}{X'M} : \frac{PQ}{X'Q} = (PX'MQ)$ pa je nužno $X' = Y$. □



Slika 3.4: Prikaz teorema o leptiru

Poglavlje 4

Harmoniteti u glazbi

Kroz povijesti su mnogi matematičari povezivali glazbu i matematiku. Danas koristimo mnoge matematičke koncepte u poučavanju glazbene teorije. U ovom dijelu ćemo prikazati kako su povezani harmoniteti i glazba.

4.1 Harmonija

Zvuk najčešće definiramo kao longitudinalni val koji nastaje periodičnim titranjem izvora zvuka. Ljudsko uho čuje zvuk ako je zvuk u rasponu 16 Hz do 20 kHZ. U glazbi, zvuk se sastoji od dvije komponente, horizontalne i vertikalne. Ritam i melodija ubrajaju se u horizontalnu komponentu, a akordi u vertikalnu komponentu. Akord je skup triju ili više tonova različite visine koji zvuče istodobno te ostavljaju dojam suzvučnosti. Harmonija je dio glazbene teorije koji se bavi proučavanjem akorda.
Glazbena ljestvica je niz tonova koji su razvrstani u oktave, nazivaju se prema slovnom označavanju. Glazbena se abeceda sastoji od tonova: a, b, c, d, e, f, g, h te pomoćnih znakova, povisilice i snizilice pomoću kojih se označava poluton. Tonovi su raspoređeni u deset oktava: praduboka, duboka, velika, mala, prva, druga, treća, četvrta, peta i šesta. Svaki ton ima svoju frekvenciju, što je ton „viši", veća je i njegova frekvencija i obratno.
Neki od osnovnih pojmova vezanih uz harmoniju su konsonanca i disonanca. Jednostavno rečeno, konsonantni tonovi su tonovi „ugodni" ljudskom uhu, dok disonantni tonovi stvaraju napetost kod slušača. Za dva tona koja su konsonantna kažemo da su u harmoniji, odnosno da su harmonični. Pitagorinim zakonom malih brojeva određeno je kada su dva tona konsonantna, a kada disonantna:

Pitagorin zakon malih brojeva
Dva tona su konsonantna ako su im frekvencije u odnosu malih prirodnih brojeva.

4.2 Pitagora sa Samosa

Pitagora je filozof sa otoka Samosa te je jedan od najpoznatijih starogrčkih matematičara. Začetnik je teorijske matematike te je imao veliki utjecaj u filozofiji i religijskim učenjima. Veliki dio života proveo je putujući i usvajajući znanja različitih kultura. Dio života proveo je i u Egiptu gdje je usvojio ideje koje će kasnije zagovarati u svojoj školi u Italiji. U Italiji, u gradu Krotonu osnovao je pitagorejsku školu. Polaznici pitagorejske škole, Pitagorejci, proučavali su matematiku, astronomiju, filozofiju, umjetnost i glazbu.
Glazba je u pitagorejskom nauku imala ključnu ulogu te su proučavali kako glazba utječe

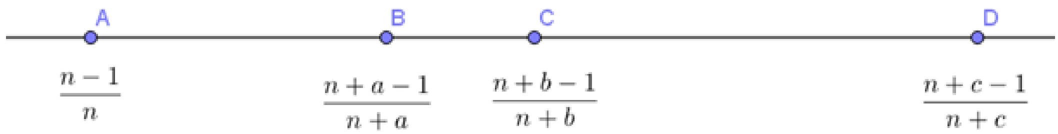
Slika 4.1: Pitagora

na čovjeka. Pitagora je vjerovao da se sve pojave i odnosi u prirodi mogu svesti na operacije s brojevima te je smatrao da je svemir uređen po matematičkim principima. Pitagorejci smatraju da se matematička pravilnost ili harmonija, koja je prisutna u prirodi, može najbolje osjetiti i spoznati u glazbi jer je glazba neposredno dostupna ljudskim osjetilima. Temeljna ideja pitagorejaca je da je harmonija koju čujemo ili vidimo u prirodi povezana s matermatičkom harmonijom.
Pitagora je jedan od prvih matematičara koji je otkrio vezu između glazbe i harmoniteta. Prema srednjovjekovnoj narodnoj priči „glazbena konačnica", Pitagora je prolazeći pored kovačnice čuo zvuk udaranja dvaju čekića. Ušavši u kovačnicu vidio je da kovači koriste različite težine čekića te da ovisno o omjerima težina čekića koje kovači koriste, prilikom udaranja dobiva se ugodan ili manje ugodan zvuk. Uspoređujući težine čekića u kovačnici, otkrio je da se dobiva određena tonska skladnost ako se koriste čekići čije su težine u omjerima $2 : 1, 3 : 2$, i $4 : 3$. Dobivene brojevne odnose Pitagora je nazvao intervalima. Nakon

svojeg saznanja u kovačnici, Pitagora eksperimentira s monokordom, jednožičanim glazbenim instrumentom. Otkrio je da dvije žice proizvode skladnu harmoniju kada je odnos njihovih duljina u određenom aritmetičkom omjeru. Otkrio je da se interval oktave postiže titranjem žica kojima su duljine u omjeru $2 : 1$, interval kvinte se dobiva ako su duljine žica u omjeru $3 : 2$ i interval kvarte ako su u omjeru $4 : 3$. Dakle, Pitagora je proučavao visinske razlike između tonova i intervala te odnose između zvučnih pojava, što je ujedno i osnova glazbene teorije. Iz proučavanih odnosa proizašla je pitagorejska ili dijatonska glazbena ljestvica koja čini osnovu za sve kasnije glazbene ljestvice.

4.3 Harmoniteti i alikvotni tonovi

Alikvotne tonove čini niz tihih, popratnih tonova koji se javljaju uz glasni ton istog izvora dajući mu karakterističnu boju i punoću. Također se nazivaju parcijalni, harmonijski ili gornji tonovi. Dakle alikvotni tonovi nisu samostalni tonovi, već ih čujemo kao prizvuk osnovnog tona.
Povezat ćemo alikvotne tonove, odnosno harmonijske tonove s harmonitetima. Veza između ta dva pojma leži već i u samom imenu. Poznato nam je da četiri točke A, B, C, D na brojevnom pravcu čine harmonijsku četvorku ako vrijedi da je $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = -1$. Ako žicu instrumenta poistovjetimo s brojevim pravcem i ako četiri alikvotna tona prikažemo kao četiri točke na tom brojevnom pravcu, zanima nas mogu li bilo koja četiri alikvotna tona činiti harmonijsku četvorku (Slika 3.2).
Označimo redom apscise točaka A, B, C, D s $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n+a-1}{n+a}$, $\frac{n+b-1}{n+b}$, $\frac{n+c-1}{n+c}$, gdje je broj n označava



Slika 4.2: Četiri alikvotna tona

redoslijed alikvotnog tona od kojeg počinjemo formirati četvorke. Pri tome su a, b, c nepoznati prirodni brojevi za koje vrijedi $a < b < c$. Primjenom definicije harmonijske četvorke na točke A, B, C, D dobivamo

$$\frac{(\frac{n+a-1}{n+a} - \frac{n-1}{n})}{(\frac{n+c-1}{n+c} - \frac{n-1}{n})} \cdot \frac{(\frac{n+c-1}{n+c} - \frac{n+b-1}{n+b})}{(\frac{n+a-1}{n+a} - \frac{n+b-1}{n+b})} = -1. \tag{4.1}$$

Sređivanjem izraza dobivamo

$$\frac{a(n+c)}{c(n+a)} \cdot \frac{(c-b)(n+a)}{(n+c)(a-b)} = -1, \tag{4.2}$$

što je ekvivalentno izrazu

$$a(c-b) = c(b-a). \tag{4.3}$$

Dakle vidimo da se n pokratio, što znači da je svejedno od kojeg alikvotnog tona počnemo formirati harmonijske četvorke. Sada dobivenu relaciju (3.3) možemo svhatiti kao diofantsku jednadžbu.

1. slučaj: Neka je $a = 2, b = 3, c = 6$,
tada za $n = 2$ dobivamo alikvotne tonove $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}$, odnosno dobili smo prvu oktavu, drugu oktavu, veliku tercu i treću oktavu.
2. slučaj: Neka je $a = 3, b = 4, c = 6$,
tada za $n = 1$ dobivamo alikvotne tonove $0, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{15}{16}$, odnosno dobili smo osnovni ton, drugu oktavu, kvintu i četvrtu oktavu.
Postupak možemo nastaviti, dakle početni problem ima beskonačno rješenja jer svaka uređena trojka brojeva (a, b, c) koja je rješenje, generira još rješenja oblika (aa, ab, ac), gdje je a proizvoljan.
Veza alikvotnh tonova i harmonijskih četvorki još je jasnija ako se alikvotni tonovi izraze preko svojih frekvencija. Pitagorejska četvorka $6, 8, 9, 12$, poznata pod nazivom *Harmonia perfecta* koja odgovara tonovima c, f, g, c', može se smatrati osnovnom harmonijskom četvorkom u okviru oktave.

Bibliografija

[1] M. Bucić, D. Cević, Harmoniteti, dostupno na https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2016/12/G-Harmoniteti-Bucic-Cevid.pdf

[2] D. Ilišević, M. Bombardelli, Elementarna geometrija, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ ilisevic/Slike/EGskripta.pdf

[3] D. Palman, Projektivna geometrija, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[4] T. Pejković, Afine i projektivne transformacije, dostupno na https://dokumen.tips/documents/pejkovic-afine-i-projektivne-transformacije.html

[5] M. Sošić, Perspektiviteti i perspektivne figure. Desarguesov teorem, dostupno na http://www.math.uniri.hr/ msosic/Projektivna%20geometrija/Predavanja/str$_2 2 - 28.pdf$

[6] H. Šiljak, Afine transformacije ravnine, Hrvatski matematički elektronički časopis, dostupno na http://e.math.hr/old/afine/index.html

[7] Z. Topić, Menelajev teorem i neke primjene, Matematičko - fizički list, dostupno na https://hrcak.srce.hr/file/353845

[8] V. Volenec, Konstruktivne metode u geometriji, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/kmg$_p redavanja.pdf$

Sažetak

U ovom radu objasnili smo povezanost harmoniteta s transformacijama ravnine te iznijeli glavna svojstva i rezultate afine i projektivne transformacije, dvoomjera i inverzije. Zatim smo definirali harmonitete i harmoničke četverokute te naveli i dokazali osnovne teoreme i leme. Nakon toga smo primjenili koncept harmoniteta u rješavanju nekih geometrijkih zadataka s matamatičkih natjecanja. Na kraju smo objasnili na koji način se harmoniteti primjenjuju u glazbi.

Summary

In this paper we explained the connection between harmonic sets of points and plane transformations. Also we presented the main results and properties of affine and projective transformations, as well as ratios and inversion. We defined harmonic set of points and harmonic quadrilaterals, then we stated and proved the basic theorems and lemmas. We applied the concept of harmonic sets in solving some of the geometric problems which are often found in mathematical competitions. Finally, we explained application of harmonic sets in music.

Životopis

Rođena sam 19.08.1997. u Zagrebu. Od 2004. do 2012. godine pohađala sam osnovnu školu Retkovec u Zagrebu. Nakon osnovne škole, 2012. upisala sam Klasičnu gimnaziju u Zagrebu koju sam završila 2016. godine. Nakon srednje škole upisala sam sveučilišni diplomski studij matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno- matematičkom fakultetu u Zagrebu te sam 2019. godine završila studij te na istom fakultetu upisala diplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički. Stručnu praksu obavljala sam u osnovnoj školi Marina Držića u Zagrebu te u XV. gimnaziji u Zagrebu.