Kombinatorika u zadacima s natjecanja

Kajinić, Monika

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Monika Kajinić

KOMBINATORIKA U ZADACIMA S NATJECANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, srpanj, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Bogu hvala na neizmjernoj ljubavi s kojom me je stvarao i s kojom je u mene utkao ljubav prema djeci i izlio na mene dar poučavanja. Neizmjerno sam zahvalna Njemu koji mi je u svim ovim danima bio najveća utjeha i izvor radosti i koji me svojom Očinskom rukom vodio kroz svijetle i malo manje svijetle trenutke života. Zahvalna sam mu na obitelji i prijateljima koje je stavio u moj život i bez kojih ovo studiranje ne bi bilo ni blizu onoga što je s njima. Hvala mojim roditeljima, Juri i Mirjani, koji su svoje financijske blagoslove usmjerili na obrazovanje djece i koji su podnijeli puno žrtve i odricanja kako bi postala ovo što sam danas. Hvala mojim sestrama, Maji i Marini, koje su mi uvijek bile potpora i koje su me, svaka na svoj način, podržavale na ovom putu. Hvala mojoj mentorici i svim profesorima koji su s ljubavlju prenosili svoje znanje i živjeli svoj poziv. Hvala svim mojim prijatejima koji su plakali i smijali se sa mnom i bili uvijek uz mene. Hvala svim mladima koji su mi pokazali da se za njih vrijedi boriti i da za njih vrijedi dati vrijeme i ostaviti u svakom od njih komadić svoga srca. Hvala salezijancima i salezijanskoj mladeži koji su mi pomogli razvijati talente u poticajnoj okolini i koji su me naučili da je odgoj stvar srca.

Sadržaj

Uvod

Kombinatorika je grana matematike koja se bavi razmještanjem objekata po određenim pravilima. Konkretnije, zanima nas je li određeni razmještaj objekata moguć te ako jest, na koliko se načina može postići. Riječ kombinatorika dolazi od latinske riječi *combinare* što znači *kombinirati, spojiti, spajati.*
Kombinatorika na osnovnoškolskom i srednjoškolskom nivou karakterizirana je malim brojem novih pojmova i često teškim zadatcima. Gradivo koje se obrađuje u sklopu Kombinatorike mnogim učenicima predstavlja problem i to su zadatci koji učenici rado zaobilaze i koji se često pojavljuju na natjecanjima zbog svoje težine. Učenicima takvi zadatci predstavljaju problem jer ih ne mogu riješiti po već viđenom postupku nego svaki zadatak zahtijeva koncentraciju i razmišljanje o danim podatcima. U osnovnoj školi iz Kombinatorike se obrađuju skupovi i osnovni pojmovi vezani za skupove kao što su presjek, unija i podskup. Spominju se i Vennovi dijagrami (uglavnom za 2 skupa). Na dodatnoj nastavi se obrađuju logičko-kombinatorni zadatci, Formula uključivanja-isključivanja za tri skupa te Dirichletov princip. U jačim srednjim školama obrađuju se osnovni principi prebrojavanja koji se pojavljuju i na natjecanjima.
U ovom diplomskom radu obradit ćemo tri kombinatorne teme. U prvom poglavlju obradit ćemo zadatke s Dirichletovim principom, počevši od osnovne škole i lakših zadataka do težih srednjoškolskih zadataka. Zadatci su prikupljeni s raznih razina natjecanja od školske do državne razine. U drugom poglavlju obradit ćemo formulu uključivanja-isključivanja, dok ćemo u trećem poglavlju navesti osnovne principe prebrojavanja i zadatke koji se pojavljuju na natjecanjima.

Poglavlje 1

Dirichletov princip

Dirichletov princip ili Dirichletovo pravilo jedno je od najjednostavnijih elementarnih kombinatornih pravila. Prvi koji ga je formulirao i koristio bio je njemački matematičar G. Lejeune - Dirichlet po kojem je i dobio ime.
U školskoj matematici Dirichletov princip ne spada u redoviti program nego u program natjecanja iz matematike u kojemu piše da učenici osnovnih škola koji sudjeluju na županijskom, regionalnom ili državnom natjecanju mogu očekivati zadatke iz raznih područja, a među njima i Dirichletovog principa. Dakle, Dirichletov princip je dodatni matematički sadržaj kojeg bi nadareni učenici osnovne škole trebali poznavati kako bi bili što bolje pripremljeni za natjecanje. Osim što je njegova važnost velika, princip je sam po sebi jednostavan, pa ga mogu primjenjivati i učenici nižih razreda osnovne škole.
Dirichletovo načelo u literaturi je još poznato pod sljedećim nazivima: princip kutija, princip pretinaca, princip golubinjaka, problem zečeva i kaveza itd. Sada ćemo navesti slabu i jaku formu Dirichletovog principa.

Teorem 1.0.1. ***Dirichletov princip (slaba forma)**: Ako $n + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, onda postoji barem jedna kutija koja sadrži bar dva od tih predmeta.*

Prije nego što zapišemo dokaz, navest ćemo kako to slikovito objasniti učenicima (pogotovo onima nižih razreda) bez da uopće spominjemo samo pravilo.
Učenicima možemo dati zadatak da razmjeste 4 kuglice u 3 posude. Zaključit ćemo da sigurno postoji bar jedna posuda u kojoj će se nalaziti bar dvije kuglice. Nakon nekoliko takvih konkretnih primjera, učenici mogu zaključiti da će to uvijek vrijediti.

Dokaz. Navedenu tvrdnju dokazat ćemo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, tj. da svaka od n kutija sadrži najviše jedan predmet. Tada bi bilo najviše n predmeta što je kontradikcija jer ih imamo $n + 1$. Dakle, vrijedi početna tvrdnja. $\square$

Ovu tvrdnju možemo poopćiti. Počnimo s primjerom i pokušajmo smjestiti 8 kuglica u 3 posude. Zaključujemo da postoji bar jedna posuda u kojoj će se nalaziti bar 3 kuglice. Ako 101 predmet treba rasporediti u 50 kutija, tada će bar jedna kutija sadržavati bar 3 predmeta. Na taj način dolazimo do jake forme Dirichletovog principa.

Teorem 1.0.2. ***Dirichletov princip (jaka forma)****: Ako $kn + 1$ predmeta rasporedimo u n kutija, onda postoji barem jedna kutija koja sadrži bar $k + 1$ tih predmeta.*

Dokaz. Ovu tvrdnju također dokazujemo kontradikcijom.
Pretpostavimo suprotno, tj. da svaka od n kutija sadrži najviše k predmeta. Tada bi bilo najviše kn predmeta što je kontradikcija jer ih imamo $kn+1$. Dakle, vrijedi početna tvrdnja. □

Ovaj jednostavni princip primjenjuje se u brojnim područjima matematike: kombinatorici, teoriji brojeva, nizovima, geometriji itd. No, kako znati kada koristiti Dirichletov princip? Vrlo često se odmah iz formulacije zadatka može zaključiti da se može riješiti primjenom Dirichletovog principa. To nam kazuju riječi poput: **barem, najmanje, postoji**. Međutim, kada i zaključimo da se radi o Dirichletovom principu, trebamo napraviti još nekoliko važnih koraka: raščlanjivanje (analiza) zadatka, određivanje i otkrivanje kutija i predmeta, poopćavanje itd. Svatko od nas se susreo s brojnim kombinatornim problemima. Primjerice, mogu li među trinaestero ljudi naći dvoje koji su rođeni u istom mjesecu. Odgovor na takvo i slična pitanja daje Dirichletov princip. Ovo pravilo se može direktno primijeniti i na one zadatke koji na prvi pogled nemaju neke veze s predmetima i kutijama, ali to je dodatni izazov onomu tko rješava, a s takvim zadatcima ćemo se i baviti u ovom poglavlju.

Zadatak 1. (Državno 2013., 8. razred) Unutar kvadrata čija je stranica duljine 1 dm nalazi se 110 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{1}{8}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane točke.

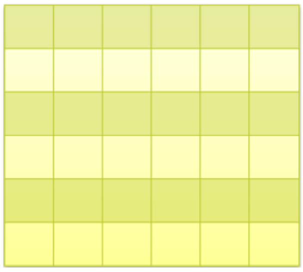
Najprije se možemo zapitati kako uopće znamo da ovaj zadatak možemo riješiti pomoću Dirichletovog principa. Učenicima osmog razreda to možda nije intuitivno jasno osim ako nisu prije vidjeli mnoštvo ovakvih primjera. Postoje dijelovi teksta zadatka koji nas mogu uputiti na to da koristimo upravo ovaj princip:

- „Dokaži da postoji" ,
- „barem 4 točke"

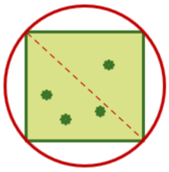
Nakon što zaključimo da bismo mogli korisiti Dirichletov princip, trebali bismo imati neku ideju rješavanja zadatka, a zatim pristupiti i samom rješavanju. Ideja rješenja ovog zadatka bi bila:

- U traženom krugu moraju biti barem 4 točke pa bismo stoga broj 110 trebali podijeliti s 3.
- $110 = 3 \cdot 36 + 2$
- Ako zadani kvadrat podijelimo na 36 jednakih kvadratića, među njima će postojati barem jedan u kojem su barem 4 točke.

Rješenje. Zadani kvadrat duljine stranice 1 dm podijelimo na 36 jednakih kvadratića duljine stranice $\frac{1}{6}$ dm.



S obzirom na to da je $110 = 3 \cdot 36 + 2$, među kvadratićima će sigurno postojati barem jedan u kojem su barem 4 točke. Sada moramo pokazati da postoji krug polumjera $\frac{1}{8}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane točke. Nađenom kvadratiću u kojem se nalaze barem 4 točke opišemo krug.



Znamo da je duljina stranice a istaknutog kvadrata jednaka $\frac{1}{6}$ dm. Uvrstimo to u formulu koja se vrlo lako dobije primjenom Pitagorinog poučka i pronađimo polumjer.

$$2r = a\sqrt{2}$$
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{72}} < \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

Time smo dokazali da postoji krug polumjera (i manjeg) od $\frac{1}{8}$ u kojem su barem 4 točke.

Zadatak 2. (Državno 2014., 6. razred): Dokaži da među bilo kojih 6 prirodnih brojeva postoje dva broja čija je razlika djeljiva s 5.

Rješenje. Ovaj zadatak je vrlo jednostavan, ali za učenike 6. razreda može predstavljati problem. Učenici su do tada naučili dijeljenje s ostatkom i naučili su formulirati to pravilo. Oni se samo trebaju prisjetiti da ostatak može biti prirodan broj manji od djelitelja, odnosno, ako neki broj dijelimo s 3, ostatci mogu biti 0, 1 ili 2, ako broj dijelimo s 5, ostatci pri dijeljenju mogu biti 0,1,2,3 ili 4 itd.
Konkretno, u ovom zadatku, kada neki prirodan broj dijelimo s 5, on može dati ostatke 0, 1, 2, 3 ili 4, dakle, postoji 5 mogućnosti. U zadatku imamo 6 prirodnih brojeva pa prema Dirichletovom principu sigurno postoje dva broja a i b s istim ostatkom pri dijeljenju s 5. Označimo taj ostatak slovom m. Imamo:

$$a = 5k + m$$

i

$$b = 5l + m$$

U zadatku se od nas traži razlika brojeva pa stoga promotrimo razliku ova dva nađena broja:

$$a - b = 5k + m - 5l - m = 5(k - l).$$

Njihova je razlika višekratnik broja 5, što je i trebalo pokazati.

Zadatak 3. (Državno 2013., 7.razred) Dokaži da među bilo koja 502 prirodna broja postoje dva čiji su ili zbroj ili razlika djeljivi s 1000.

Rješenje.
1. način. U prethodnom zadatku smo se prisjetili djeljenja prirodnih brojeva s ostatkom. Kada broj dijelimo s 1000, tada su mogući ostatci 0, 1, 2, ..., 999. Dakle, imamao 1000 mogućnosti.
Ako postoje dva prirodna broja koja imaju iste ostatke pri dijeljenju s 1000, tada će njihova razlika biti djeljiva s 1000 (što smo pokazali u prethodnom zadatku). Ako svih 502 brojeva imaju različite ostatke, tada moramo pokazati da će postojati barem dva broja čiji će zbroj biti djeljiv s 1000.
Formirajmo neke parove brojeva čiji bi zbroj bio djeljiv s 1000:

$$\begin{array}{c} 1 \text{ i } 999 \\ 2 \text{ i } 998 \\ \vdots \\ 499 \text{ i } 501 \end{array}$$

Imamo 499 parova i dva broja koji nemaju par, a to su 0 i 500. Mi biramo 502 broja i ako, u najgorem slučaju, izaberemo dva broja bez para, preostaje nam izbor 500 brojeva među 499 parova.
Prema Dirichletovom principu moramo izabrati bar dva broja koja čine par i čija je suma djeljiva s 1000.

2. način. Sjetimo se da je broj djeljiv s 1000 ako je njegov troznamenkasti završetak 000. Opet imamo dvije mogućnosti kao i u prvom načinu.
U prvom slučaju među ova 502 broja postoje dva broja s jednakim troznamenkastim završetkom i tada je njihova razlika djeljiva s 1000. Ovime smo utvrdili postojanje traženih brojeva.
U drugom slučaju među ovim brojevima ne postoje ona dva koja imaju isti troznamenkasti završetak. Stoga nam preostaje promatrati one parove brojeva čiji nam troznamenkasti završetci u zbroju daju 1000:

$$\begin{array}{c} (001, 999) \\ (002, 998) \\ (003, 997) \\ \vdots \\ (498, 502) \\ (499, 501) \end{array}$$

Dakle, primjetimo da ima 499 parova troznamenkastih završetaka čiji je zbroj jednak 1000 i još dva troznamenkasta završetka 000 i 500. Ako su među ova 502 broja ti brojevi s troznamenkstim završetkom 000 i 500, preostaje nam i dalje 500 brojeva s nekim drugim završetkom. Tada zasigurno postoje dva broja koja pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 i time smo utvrdili postojanje traženih brojeva.

Ako među ova 502 broja samo jedan broj ima završetak 000 ili 500 ili niti jedan, opet možemo zaključiti da postoje dva broja koja pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 te smo ponovno utvrdili postojanje traženih brojeva.

Zadatak 4. (Školsko 2020., 1. razred) ([1], str.100) Dino, Pino i Tino idu u isti razred. Za igru svaki dječak treba dvije kockice iste boje, ali nije nužno da kockice koje imaju različiti dječaci budu različite boje. Odgojiteljica u jednoj ladici ima crvene, plave i zelene kockice. Ako izvlači bez gledanja, koliko najmanje kockica treba izvući iz ladice da bi bila sigurna da će od tih kockica svaki dječak moći uzeti dvije istobojne kockice?

Rješenje.

1. način. Svake dvije kockice iste boje čine par. Stoga u svakoj boji odgojiteljica izvlači neki broj parova i najviše još jednu kockicu. Ako bi odgojiteljica izvukla kockice među kojima nema tri para, onda bi broj parova mogao biti najviše dva, te bi uz ta dva para mogla biti najviše po jedna kockica u svakoj boji. Dakle, najveći mogući broj kockica među kojima nema tri para je 7. To znači da ako odgojiteljica izvuče 8 kockica, među njima će sigurno biti tri para.
Također, ako odgojiteljica izvuče 7 ili manje kockica, moguće je da neće imati tri para. Na primjer, mogla bi izvući 3 crvene, 3 plave i 1 zelenu kockicu. Dakle, odgovor je 8.

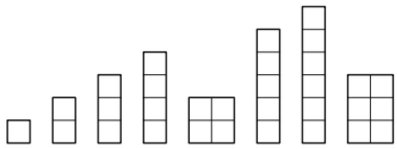
2. način. Ako odgojiteljica izvuče sedam kockica, one mogu biti raspoređene tako da su po tri kockice u prvoj i drugoj boji, a jedna kockica u trećoj. U tom slučaju odgojiteljica može spojiti samo dva istobojna para kockica, ali ne i tri. Pretpostavimo da je odgojiteljica izvukla osam kockica i dokažimo da tada sigurno postoje tri istobojna para. Označimo s n broj kockica u najzastupljenijoj boji (pri čemu je moguće da su dvije boje jednako zastupljene). Razlikujemo slučajeve:

- Ako je $n = 3$, onda je jedini mogući raspored kockica po bojama $3 + 3 + 2$ pa postoji po jedan par svake boje.
- Ako je $n = 4$ ili $n = 5$, onda postoje dva para u toj boji. Prema Dirichletovom principu, od preostale četiri ili tri kockice u dvije boje sigurno postoji barem jedan istobojni par.
- Ako je $n = 6$ ili više, onda postoje tri para kockica u toj boji. U svakom slučaju, vidimo da za osam ili više kockica sigurno postoje tri istobojna para.

Zadatak 5. (Županijsko 2013., 1. razred)([1], str.101) Pravokutnik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravokutnika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravokutnika, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Dokaži da su barem dva od tih osam pravokutnika međusobno sukladna.

Rješenje. Dimenzije osam pravokutnika s najmanjom površinom s cjelobrojnim duljinama stranica su:

1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6, 2×2, 2×3. Zbroj njihovih površina iz-



nosi: $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 4 + 6 = 31$. Dani pravokutnik ima površinu 30. Prema Dirichletovom principu nemoguće je podijeliti dani pravokutnik na osam nesukladnih pravokutnika s cjelobrojnim duljina stranica.

Zadatak 6. (Državno 1994., 3. razred) U koordinatnoj ravnini dano je pet točaka P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 s cjelobrojnim koordinatama. Pokažite da postoje barem dvije točke P_i, P_j za $i \neq j$ tako da pravac P_iP_j sadrži neku točku s cjelobrojnim koordinatama koja leži između P_j i P_i.

Rješenje. Neka su dane točke $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Podijelimo ove točke u grupe prema parnosti njihovih koordinata. Imamo ukupno četiri grupe: (parna, parna), (parna, neparna), (neparna, parna) i (neparna, neparna). Dakle, postoje četiri mogućnosti za parnost koordinata pet danih točaka pa prema Dirichletovom principu postoje barem dvije točke P_i, P_j kojima su prve i druge koordinate iste parnosti. Tada polovište P dužine $\overline{P_iP_j}$, $P\left(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2}\right)$, ima cjelobrojne koordinate jer su $x_i + x_j$ i $y_i + y_j$ parni brojevi.

Zadatak 7. (Školsko 2017., 3. razred) U koordinatnoj ravnini označeno je 20 točaka s cjelobrojnim koordinatama, pri čemu nikoje tri točke ne leže na istom pravcu. Dokaži da postoji trokut čiji vrhovi su označene točke i čije težište je također točka s cjelobrojnim koordinatama. (Kažemo da je $T(x, y)$ točka s cjelobrojnim koordinatama ako su x i y cijeli brojevi.)

Rješenje. U trokutu s vrhovima $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$ koordinate težišta su $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.
Prema ostatcima koordinata pri dijeljenju s 3, točke u ravnini možemo podijeliti u 9 tipova (ostatci mogu biti $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$). Budući da je označeno 20 točaka, a vrijedi $20 = 2 \cdot 9 + 2$ prema Dirichletovom principu postoje barem 3

označene točke istog tipa. Upravo su te tri točke vrhovi trokuta čije težište ima cjelobrojne koordinate.

Zadatak 8. (Općinsko 1998., 1. razred) U konveksnom mnogokutu s 1998 stranica duljine stranica su prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je 199700. Dokažite da barem dvije stranice tog mnogokuta moraju biti jednake duljine.

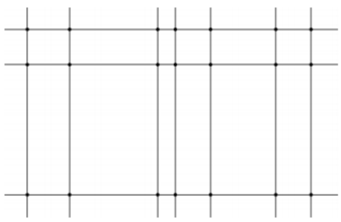
Rješenje. Ako bi stranice promatranog 1998-terokuta bile različitih cjelobrojnih duljina, tada bi najmanji opseg tog 1998-terokuta bio ako su mu stranice duljina $1, 2, 3, \ldots, 1997, 1998$. Taj opseg bio bi jednak $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 1997 + 1998$. Koristeći Gaussovu dosjetku lako računamo navedeni zbroj:

$$\frac{1998 \cdot (1998 + 1)}{2} = 1997001.$$

Budući da je opseg promatranog mnogokuta 1997000 manji od najmanjeg mogućeg (kada promatramo onaj 1998-terokut koji ima različite cjelobrojne duljine stranica), prema Dirichletovom principu moraju barem dvije stranice biti jednake duljine.

Zadatak 9. (Državno 2019., 7. razred) Tri međusobno paralelna pravca sijeku se sa sedam na njih okomitih pravaca u 21 točki. Sjecišta tih pravaca nalaze se u tri reda i sedam stupaca. Neke od tih točaka su obojane crveno, a neka plavo. Dokaži da se uvijek mogu odabrati četiri točke iste boje koje su vrhovi pravokutnika.

Rješenje. Situacija s neobojanim točkama izgleda ovako:

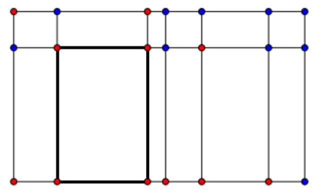


Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je više crvenih točaka. Dakle, među 21 točkom, barem je 11 crvenih. Tada razlikujemo dva slučaja:

1) Postoji stupac s 3 crvene točke.

Preostalih 8 crvenih točaka trebamo rasporediti u 6 stupaca. Prema Dirichletovom principu postoji barem jedan stupac s dvije crvene točke. Te dvije crvene točke zajedno s tri crvene točke iz odgovaraćujeg stupca čine pravokutnik tj. vrhovi su pravokutnika.

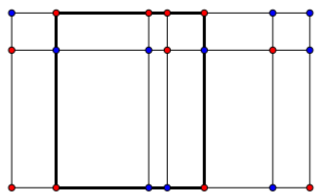
Pogledajmo jedan takav primjer:



2) Ne postoji stupac s 3 crvene točke.

To znači da 11 crvenih točaka trebamo rasporediti u 7 stupaca s maksimalno dvije crvene točke. Prema Dirichletovom principu zaključujemo da postoje barem četiri stupca s po dvije crvene točke. U svakom od ta 4 stupca dvije crvene točke mogu zauzeti 3 različite pozicije: prvi i drugi redak, prvi i treći redak ili drugi i treći redak.

Zaključujemo da postoji barem jedan raspored s odgovarajućim pozicijama crvenih točaka koje su vrhovi pravokutnika. Evo jednog takvog primjera:



Poglavlje 2

Formula uključivanja - isključivanja

Učenici se u osnovnoj školi u 5. razredu prvi puta susreću s pojmom skupa. Upoznaju se s pojmovima kao što su: element skupa, podskup skupa, unija i presjek dvaju skupova. Pokažu im se i Vennovi dijagrami koji su uglavnom ograničeni na 2 skupa. Ukoliko ima želje i motivacije učenici nauče prikazivati i 3 skupa pomoću Vennovih dijagrama te rješavati malo složenije zadatke. Na dodatnoj nastavi se preporuča obraditi Vennove dijagrame s 3 skupa i Formulu uključivanja i isključivanja jer im to uvelike olakšava rješavanje zadataka koji se pojavljaju pa čak i na onoj osnovnoj školskoj razini. Sada ćemo navesti Formulu uključivanja i isključivanja za 2 skupa i njen dokaz, a zatim ćemo to poopćiti na n skupova.

Teorem 2.0.1. ***Formula uključivanja - isključivanja za dva skupa**: Ako su A i B konačni skupovi tada je $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$, pri čemu oznaka $k(S)$ predstavlja broj elemenata nekog skupa S.*

Dokaz. Za početak skup $A \cup B$ možemo zapisati kao uniju tri međusobno disjunktna skupa: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Iz principa zbroja slijedi:

$$k(A \cup B) = k((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) = k(A \setminus B) + k(B \setminus A) + k(A \cap B). \ (1)$$

Skupove A i B također zapišemo kao unije dva disjunktna skupa tako da je

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \setminus A) \cup (A \cup B).$$

Iz principa zbroja slijedi da je $k(A) = k(A \setminus B) + k(A \cap B)$, odnosno $k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B)$.

Analogno slijedi $k(B \setminus A) = k(B) - k(A \cap B)$. Sada uvrštavanjem u (1) dobivamo:

$$\begin{aligned} k(A \cup B) &= k(A \setminus B) + k(B \setminus A) + k(A \cap B) \\ &= k(A) - k(A \cap B) + k(B) - k(A \cap B) + k(A \cap B) \\ &= k(A) + k(B) - k(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Ova se formula može generalizirati i na konačan broj konačnih skupova.

Teorem 2.0.2. ***Formula uključivanja - isključivanja.*** *Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, konačni skupovi tada vrijedi*

$$k\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} k(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: za $n = 2$ tvrnju smo već dokazali kod principa uključenja i isključenja za dva skupa.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $k(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} k(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} k(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{m+1} k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$.

Korak indukcije:

$$
\begin{aligned}
k\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) &= k\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cup A_{m+1}\right) \\
&= \{\text{baza indukcije}\} \\
&= k\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + k(A_{m+1}) - k\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap A_{m+1}\right) \\
&= \{\text{pretpostavka indukcije}\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} k(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq m} k(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq m} k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + \\
&\quad (-1)^{m+1} k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) + k(A_{m+1}) - k\left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap A_{m+1}\right) \\
&= \{\text{svojstva skupovnih operacije}\} \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} k(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq m+1} k(A_i \cap A_j) + \\
&\quad \sum_{1\leq i<j<k\leq m+1} k(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{(m+1)+1} k(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m+1}).
\end{aligned}
$$

Kako tvrdnja vrijedi za $n = 2$ te iz pretpostavke da vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$ slijedi da vrijedi i za $m + 1$, prema principu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. $\square$

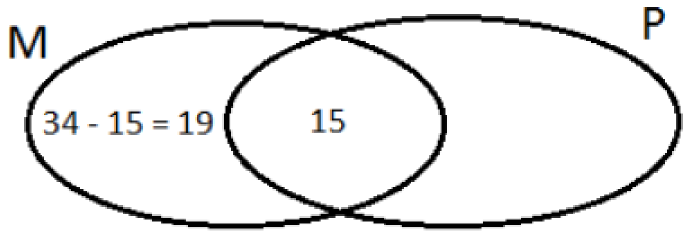
Počinjemo sa zadatakom iz 4.razreda osnovne škole u kojem učenici nisu ni svjesni da koriste formulu uključivanja i isključivanja.

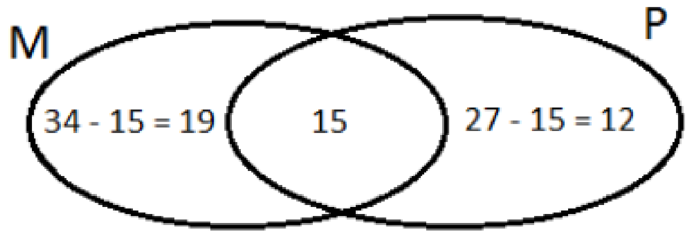
Zadatak 1. (Školsko 2019., 4. razred OŠ) [3] Braća Marko i Petar sakupljaju stripove. U svojoj kolekciji trenutačno imaju 67 stripova, od kojih je Marko pročitao 34, a Petar 27. Koliko je nepročitanih stripova ako su oba brata pročitala 15 istih stripova?

Rješenje.
1. način. Učenici se do četvrtog razreda nisu susreli sa skupovima pa oni ovaj zadatak rješavaju na sljedeći način.
Ako su oba brata pročitala 15 istih stripova, onda je Marko pročitao $34 - 15 = 19$ stripova koje nije pročitao Petar, a Petar je pročitao $27 - 15 = 12$ stripova koje nije pročitao Marko.

Kada zbrojimo broj stripova koje je pročitao samo Marko, broj stripova koje je pročitao samo Petar te broj stripova koje su pročitali oba zajedno, dobije se $19 + 12 + 15 = 46$ stripova. Dakle, nepročitan je $67 - 46 = 21$ strip.

2. način. Prikažimo dijagramom broj stripova koje imaju Marko i Petar.





$$19 + 12 + 15 = 46$$

Ukupno je pročitano 46 stripova. To znači da je broj nepročitanih stripova

$$67 - 46 = 21$$

3. način. U trećem načinu definirat ćemo skupove i primijeniti formulu uključivanja i isključivanja. Neka je:

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{broj stripova koje je pročitao Marko}\}\\
B &= \{\text{broj stripova koje je pročitao Petar}\}\\
A \cap B &= \{\text{broj stripova koje su pročitali i Petar i Marko}\}\\
A \cup B &= \{\text{broj pročitanih stripova}\}
\end{aligned}
$$

Znamo da je $k(A) = 34$, $k(B) = 27$ i $k(A \cap B) = 15$.
Sada ćemo poznate vrijednosti uvrstiti u formulu uključivanja i isključivanja:

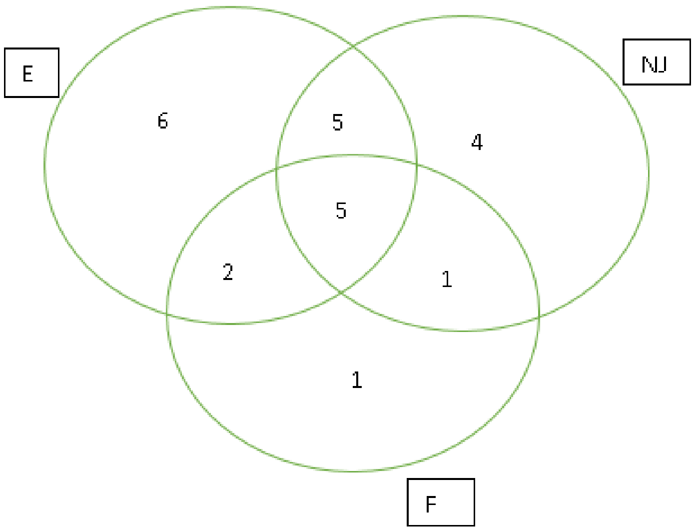
$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B) = 34 + 27 - 15 = 46.$$

Dakle, ukupno je pročitano 46 stripova. Ako taj broj oduzmemo od ukupnog broja stripova dobit ćemo broj stripova koji nisu pročitani, tj. $67 - 46 = 21$ strip.

Zadatak 2. (Regionalno 2002., 5. razred) Svaki učenik 5.b razreda neke škole uči barem jedan od sljedeća 3 strana jezika: engleski, njemački i francuski. Ukupno 18 učenika tog razreda uči engleski, 15 njemački, a 9 francuski jezik. Pri tome 10 učenika uči i engleski i njemački jezik, 7 učenika engleski i francuski, a 6 učenika francuski i njemački. Pet učenika tog razreda uči sva tri navedena strana jezika. Koliko učenika ima u tom razredu? Koliko ih uči samo njemački jezik, a koliko engleski i francuski jezik, ali ne i njemački?

Rješenje.
1. način. Ovaj način naveden je u službenim rješenjima na stranicama školskog natjecanja iz matematike. Ovako razmišljaju učenici koji ne poznaju formulu uključivanja i isključivanja iako je ona cijelo vrijeme u pozadini. Uočimo i koliko je ovakav način dug i koliko ga je teško pratiti bez oznaka i slika.
Promotrimo najprije skupinu od 18 učenika 5.b razreda koji uče engleski jezik. Uočimo da među njima ima onih koji uče samo engleski jezik, onih koji uče engleski i još točno jedan od dva preostala navedena strana jezika, ali i onih koji uče sva tri jezika. Isti zaključak vrijedi i za 15 učenika tog razreda koji uče njemački jezik, te za 9 učenika koji uče francuski jezik. Zbrojimo li broj učenika koji uče engleski, broj učenika koji uče njemački i broj učenika koji uče francuski, dobit ćemo $18 + 15 + 9 = 42$, no pri tom smo one koji uče točno dva jezika brojali dvaput, a one koji uče sva tri jezika tri puta, po jednom za svaki jezik. Prema tome, da bismo odredili točan broj učenika u 5.b razredu, od dobivenog broja moramo oduzeti brojeve učenika koji uče po bar dva strana jezika. Novi rezultat je $42-10-7-6 = 19$, što još uvijek nije točan broj učenika u razredu, budući da smo učenike

koji uče sva tri jezika oduzeli jedan put previše. To znači da ih moramo ponovno pribrojiti, odakle slijedi da u 5.b razredu ima točno $19 + 5 = 24$ učenika.
Nadalje, broj učenika koji uče samo njemački jezik dobit ćemo tako da od broja svih učenika koji uče njemački jezik oduzmemo one koji uče bar još jedan dodatni strani jezik, a dobivenoj razlici opet pribrojimo one koje smo oduzeli dva puta (to su učenici koji uče sva tri strana jezika). Dakle, traženi broj je $15 - 10 - 6 + 5 = 4$. Konačno, broj učenika 5.b razreda koji uče engleski i francuski jezik, ali ne i njemački jezik dobit ćemo tako da od broja onih koji uče engleski i francuski oduzmemo one koji uče sva tri strana jezika. Taj je broj $7 - 5 = 2$. Dakle, u 5.b razredu imamo ukupno 24 učenika, od kojih 4 učenika uče samo njemački jezik, a 2 učenika engleki i francuski jezik, ali ne i njemački.
U napomeni stoji da je prilikom analize zadatka korisno poslužiti se Vennovim dijagramom, kao na slici:



2. način. U drugom ćemo načinu definirati skupove i zadatak riješiti direktnim uvrštavanjem u formulu uključivanja i isključivanja. Neka je:

$$\begin{aligned} E &= \{\text{broj učenika koji uče engleski jezik}\}, \\ NJ &= \{\text{broj učenika koji uče njemački jezik}\} \text{ i} \\ F &= \{\text{broj učenika koji uče francuski jezik}\}. \end{aligned}$$

U zadatku su nam dani sljedeći podatci:
$k(E) = 18$, $k(NJ) = 15$, $k(E) = 9$, $k(E \cap NJ) = 10$, $k(E \cap F) = 7$, $k(NJ \cap F) = 6$ i $k(E \cap NJ \cap F) = 5$.
Direktnim uvrštavanjem u formulu uključivanja i isključivanja dobivamo ukupan broj učenika navedenog razreda:

$$k(A \cup B \cup C) = 18 + 15 + 9 - 10 - 7 - 6 + 5 = 24.$$

Dakle, u razredu su 24 učenika.
Broj učenika koji uče samo njemački je

$$k(NJ) - k(E \cap NJ) - k(F \cap NJ) + k(E \cap NJ \cap F) = 15 - 10 - 6 + 5 = 4$$

Trebamo još izračunati koliko učenika uče engleski i francuski, ali ne i njemački:

$$k(F \cap E) - k(E \cap NJ \cap F) = 7 - 5 = 2.$$

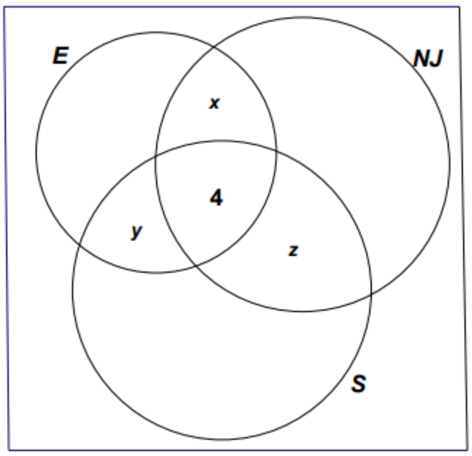
Zadatak 3. (Županijsko 2017., 6. razred) U nekoj osnovnoj školi 94 učenika polaze šesti razred. Neki su učenici uključeni u izvanškolske aktivnosti: engleski i njemački jezik te sportske klubove. Izvanškolski engleski jezik pohađa 40 učenika, njemački jezik pohađa 27 učenika, a sportskim se aktivnostima bavi 60 učenika. Od učenika uključenih u sportske aktivnosti njih 24 ide i na engleski jezik. Deset učenika koji idu na engleski jezik ide i na njemački jezik. Dvanaest učenika koji idu na njemački jezik bavi se i sportskim aktivnostima. U sve tri izvanškolske aktivnosti uključena su 4 učenika. Koliko se učenika bavi samo jednom od ovih izvanškolskih aktivnosti, a koliko ih se ne bavi niti jednom od njih?

Rješenje.
1. način. Na engleski jezik ide ukupno 40 učenika. Od njih 40, 24 učenika se bavi i nekom sportskom aktivnošću, 10 učenika ide i na njemački jezik, a 4 učenika su uključena u sve tri aktivnosti.

Samo engleskim jezikom se bavi 40–24–10 + 4 = 10 učenika.
Analognim zaključivanjem dolazimo do broja učenika koji su uključeni:
- samo na njemački jezik: 27–12–10 + 4 = 9,
- samo u sportske aktivnosti: 60–24–12 + 4 = 28.

Samo jednom aktivnosti se bavi 10 + 9 + 28 = 47 učenika.
Nekom od ovih aktivnosti bavi se 40 + 28 + 9 + (12–4) = 40 + 28 + 9 + 8 = 85 učenika.
Nijednom od ovih aktivnosti ne bavi se 94–85 = 9 učenika.

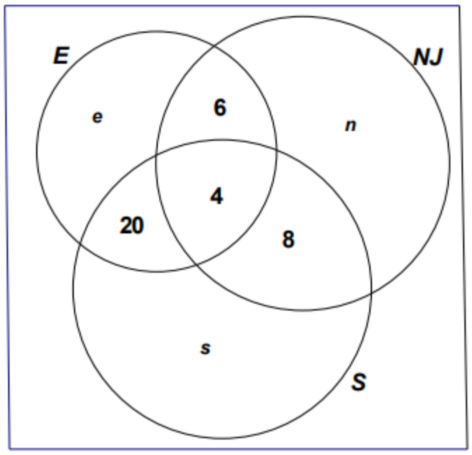
2. način. Učenike šestog razreda dijelimo u tri skupine (koje imaju zajedničkih članova) pri čemu postoje i učenici koji ne pripadaju ni jednoj od tih skupina. Prikažimo te skupine grafički, krugovima koji imaju zajedničke dijelove. U središnji dio, zajednički svim trima krugovima, upisujemo broj 4 jer se toliko učenika bavi sa sve tri aktivnosti.

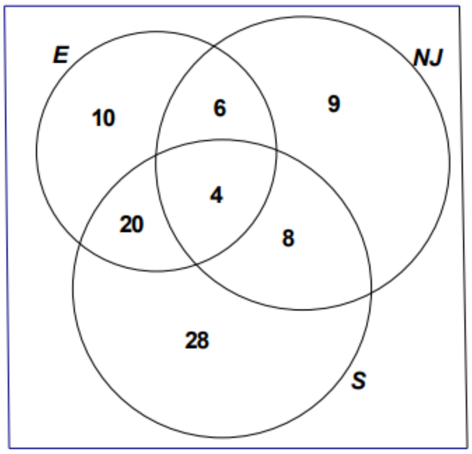


Uz oznake kao na slici i uz uvjete zadatka redom vrijedi:
$x + 4 = 10$, tj. $x = 6$
$y + 4 = 24$, tj. $y = 20$
$z + 4 = 12$, tj. $z = 8$.

Uz oznake kao na slici i uz uvjete zadatka dalje vrijedi:
$e + 6 + 4 + 20 = 40$, tj. $e = 10$
$n + 6 + 4 + 8 = 27$, tj. $n = 9$
$s + 20 + 4 + 8 = 60$, tj. $s = 28$

Samo jednom aktivnošću bavi se: 10 + 9 + 28 = 47 učenika.





Nekom od ovih aktivnosti bavi se 10 + 20 + 4 + 6 + 9 + 8 + 28 = 85 učenika.
Niti jednom od ovih aktivnosti ne bavi se 94 − 85 = 9 učenika.

3. način. (Formula uključivanja i isključivanja) Neka je E skup svih učenika koji uče engleski jezik, N skup svih učenika koji uče njemački jezik, a S skup svih učenika koji se bave sportom.
Pri tome vrijedi: $k(E) = 40, k(N) = 27, k(S) = 60, k(E \cap S) = 24, k(E \cap N) = 10, k(S \cap N) = 12, k(E \cap N \cap S) = 4$.
Tada vrijedi formula uključivanja i isključivanja:

$$k(E \cup N \cup S) = k(E) + k(N) + k(S) - k(E \cap S) - k(E \cap N) - k(S \cap N) + k(E \cap N \cap S)$$

Uvrštavanjem i računanjem redom dobivamo:

$$k(E \cup N \cup S) = 40 + 27 + 60 - 24 - 10 - 12 + 4 = 85.$$

Nekom od ovih aktivnosti bavi se 85 učenika, a niti jednom se ne bavi $94 - 85 = 9$ učenika.
Samo engleski uči $40 - (24 + 10) + 4 = 10$ učenika,
samo njemački uči $27 - (10 + 12) + 4 = 9$ učenika,
samo sportom bavi se $60 - (24 + 12) + 4 = 28$ učenika.
Dakle, samo jednom od aktivnosti bavi se $10 + 9 + 28 = 47$ učenika.

Zadatak 4. (Općinsko 2011., 4. razred SŠ) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi barem jednim od brojeva 2 i 7, a nisu djeljivi brojem 5?

Rješenje.
1. način. Brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi s 2 ima $\lfloor\frac{2010}{2}\rfloor = 1005$. Među njima je $\lfloor\frac{1005}{5}\rfloor = 201$ brojeva djeljivih s 5 pa ima $1005 - 201 = 804$ broja manja od 2011 djeljivih s 2 koji nisu djeljivi s 5.
Slično, sa 7 je djeljivo $\lfloor\frac{2010}{7}\rfloor = 287$ brojeva manjih od 2011, a među njima je $\lfloor\frac{287}{5}\rfloor = 57$ brojeva djeljivih s 5 pa ima $287 - 57 = 230$ brojeva djeljivih sa 7 koji nisu djeljivi s 5. S 14 su djeljiva $\lfloor\frac{2010}{14}\rfloor = 143$ broja, od njih je $\lfloor\frac{143}{5}\rfloor = 28$ djeljivo s 5 pa ima $143 - 28 = 115$ brojeva djeljivih s 14, ali ne i s 5. Konačno, traženi broj je $804 + 230 - 115 = 919$.

2. način. Prirodnih brojeva manjih od 2011 djeljivih s 2 ima $\lfloor\frac{2010}{2}\rfloor = 1005$, djeljivih sa 7 ima $\lfloor\frac{2010}{7}\rfloor = 287$, a djeljivih s 14 ima $\lfloor\frac{2010}{14}\rfloor = 143$. Uvrštavanjem u formulu uključivanja i isključivanja slijedi da ima $1005 + 287 - 143 = 1149$ prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi s 2 ili sa 7. Od tih brojeva preostaje oduzeti one djeljive s 5, odnosno višekratnike brojeva 10 i 35. Kako je među njima $\lfloor\frac{2010}{10}\rfloor = 201$ višekratnika broja 10, $\lfloor\frac{2010}{35}\rfloor = 57$ višekratnika broja 5 te $\lfloor\frac{2010}{70}\rfloor = 28$ višekratnika broja 70, slijedi (direktnim uvrštavanjem u formulu uključivanja i isključivanja) da je među gornjih 1149 brojeva $201 + 57 - 28 = 230$ višekratnika broja 5.
Konačno, ima $1149 - 230 = 919$ prirodnih brojeva manjih od 2011 koji su djeljivi s 2 ili sa 7, a nisu djeljivi s 5.

Zadatak 5. (Županijsko 2016., 4. razred SŠ) Za broj kažemo da je naizgled - prost broj ako je složen, ali nije djeljiv s 2, 3 ili 5. Tri najmanja naizgled - prosta broja su 49, 77 i 91. Postoji 168 prostih brojeva koji su manji od 1000. Koliko je naizgled - prostih brojeva koji su manji od 1000?

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti definiranjem skupova i direktnim uvrštavanjem u Formulu uključivanja i isključivanja. Neka je:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{skup brojeva djeljivih s } 2\}, \\ B &= \{\text{skup brojeva djeljivih s } 3\} \text{ i} \\ C &= \{\text{skup brojeva djeljivih s } 5\}. \end{aligned}$$

Tada je:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\text{skup brojeva djeljivih i s 2 i s 3, tj. skup brojeva djeljivih sa } 6\}, \\ A \cap C &= \{\text{skup brojeva djeljivih i s 2 i s 5, tj. skup brojeva djeljivih s } 10\}, \\ B \cap C &= \{\text{skup brojeva djeljivih i s 3 i s 5, tj. skup brojeva djeljivih s } 15\} \text{ i} \\ A \cap B \cap C &= \{\text{skup brojeva djeljivih i s 2 i s 3 i s 5, tj. skup brojeva djeljivih s } 30\} \end{aligned}$$

Sada ćemo izračunati kardinalni broj svakog od tih skupova.

- $k(A) = \lfloor \frac{999}{2} \rfloor = 499$
- $k(B) = \lfloor \frac{999}{3} \rfloor = 333$,
- $k(C) = \lfloor \frac{999}{5} \rfloor = 199$,
- $k(A \cap B) = \lfloor \frac{999}{6} \rfloor = 166$,
- $k(A \cap C) = \lfloor \frac{999}{10} \rfloor = 99$,
- $k(B \cap C) = \lfloor \frac{999}{15} \rfloor = 66$,
- $k(A \cap B \cap C) = \lfloor \frac{999}{30} \rfloor = 33$.

Prema formuli uključivanja i isključivanja ukupan broj brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi ili s 2 ili s 3 ili s 5 je: $499+333+199-166-99-66+33 = 733$, tj. $k(A \cup B \cup C) = 733$. Ostalih brojeva ima $999-733 = 266$. Imamo ukupno $168-3 = 165$ prostih brojeva manjih od 1000 koji su različiti od 2, 3 i 5. Među preostalim brojevima je i broj 1 koji nije ni prost ni složen. Stoga je ukupan broj naizgled - prostih brojeva koji su manji od 1000 jednak $266 - 165 - 1 = 100$.

Zadatak 6. (Županijsko 1999., 4. razred) Šest četvrtih razreda, IVa, IVb, IVc, IVd, IVe

i IVf trebaju ići na maturalno putovanje, a moguća odredišta su Kopački rit, Plitvička jezera, Trakošćan i Kornati. Na koliko načina oni to mogu učiniti, ako svaki razred može otići na samo jedno od tih mjesta, a svako od njih mora posjetiti barem jedan razred?

Rješenje.
1. način. Za traženi raspored postoje dvije mogućnosti.
1.) Na jedno odredište će otputovati tri razreda, a na preostala tri odredišta po jedan razred. U ovom slučaju imamo 4 mogućnosti za izbor odredišta na koji će otići tri razreda, a za svaki od tih izbora postoji $\frac{6!}{3!}$ rasporeda po razredima.
2.) Na dva odredišta će otputovati po dva razreda, te na preostala dva po jedan razred. U ovom slučaju imamo $\binom{4}{2} = 6$ mogućnosti izbora idredišta na koji će otići dva razreda (odnosno jedan razred), a za svaki od tih izbora postoji $\frac{6!}{2!\cdot 2!}$ rasporeda po razredima.

Ukupno imamo:$4 \cdot \frac{6!}{3!} + 6 \cdot \frac{6!}{2!\cdot 2!} = 480 + 1080 = 1560$ mogućnosti.
2. način. Šest razreda može putoviti na četiri odredišta (svaki na jedno, ali ukupno, ne nužno na sva) na 4^6 načina, na tri odredišta na 3^6 načina, na dva odredišta na 2^6 načina, a na jedno odredište na jedan način. Sada, prema formuli uključivanja i isključivanja imamo da je broj traženih mogućnosti: $4^6 - 4 \cdot 3^6 + 6 \cdot 2^6 - 4 = 1560$.

Zadatak 7. (Školsko 2017., 4. razred SŠ) Koliko ima deveteroznamenkastih brojeva čije su znamenke $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ i 9, a nikoje tri uzastopne znamenke nisu ni 123, ni 246, ni 678 ?

Rješenje. Ukupno ima 9! deveteroznamenkastih brojeva koji imaju znamenke od 1 do 9. Od toga broja moramo oduzeti broj brojeva koji imaju tri uzastopne znamenke 123, 246 ili 678. Brojeva koji imaju uzastopne znamenke 123 ima 7! (permutiramo taj blok i preostalih 6 znamenaka). Analogno, brojeva koji sadrže 246 ima 7! i brojeva koji sadrže 678 ima 7!. Uočimo da rješenje nije $9! - 3 \cdot 7!$, jer smo više puta oduzeli brojeve koji sadrže 123 i 678, odnosno one koji sadrže 246 i 678. Ne postoji broj kojemu su i 123 i 246 uzastopne znamenke. Brojeva koji sadrže 123 i 678 ima 5!, a koji sadrže 246 i 678, tj. 24678, ima također 5!. Konačno rješenje je $9! - 3 \cdot 7! + 2 \cdot 5! = 34752$. Princip koji smo koristili zove se formula uključivanja-isključivanja.

Zadatak 8. (Županijsko 2019., 4. razred SŠ)([1]) Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

Rješenje. Promatrajmo standardnu (dakle, onu kojoj nisu odstranjena kutna polja) ploču dimenzija $n \times n$. Dva nasuprotna kutna polja koja bi trebala biti odstranjena obojimo crnom, a sva ostala polja bijelom bojom. Dobar *raspored* je raspored n figura na standardnoj ploči u kojem nikoje dvije figure nisu u istom retku ili stupcu. Trebamo odrediti broj različitih dobrih rasporeda takvih da nikoja figura nije na crnom polju. Najprije, svih dobrih rasporeda ima $n!$ jer u svakom od n redaka moramo izabrati jedinstven stupac u kojem se nalazi figura. Dobrih rasporeda u kojem je jedna figura na jednom crnom polju je naprosto $(n-1)!$ jer je ta figura u kutu, a sve ostale razmještamo na ostatak ploče, što je standardna ploča dimenzija $(n-1)\times(n-1)$. Broj dobrih rasporeda u kojima su oba crna polja zauzeta je (istom logikom kao u prethodnom slučaju) $(n-2)!$ Konačno, formula uključivanja i isključivanja nam daje rezultat:

$$n! - 2 \cdot (n-1)! + (n-2)! = (n^2 - 3n + 2)(n-2)!$$

Poglavlje 3

Princip uzastopnog prebrojavanja

U ovom poglavlju navest ćemo i riješiti zadatke koje se rješavaju pomoću dva osnovna principa prebrojavanja. To su princip zbroja i princip umnoška. Najprije ćemo navesti i dokazati te principe za dva skupa, a zatim ćemo ih poopćiti na n skupova.

Teorem 3.0.1. ***Princip zbroja za dva skupa:*** *Ako su A i B konačni skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata, tada je broj elemenata unije $A \cup B$ jednak zbroju broja elemenata skupa A i skupa B, tj.*

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B).$$

Dokaz. Neka su $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$, $k, l \in \mathbb{N}$, konačni disjunktni skupovi. Kako su A i B disjunktni, to je $a_i \neq b_j, \forall i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, l$ pa je $A \cup B = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l\}$. Dakle, $\mathrm{k}(A \cup B) = k + l = \mathrm{k}(A) + \mathrm{k}(B)$, čime smo dokazali tvrdnju. □

Sada ćemo princip zbroja za dva skupa generalizirati i na uniju n međusobno disjunktnih skupova.

Teorem 3.0.2. ***Princip zbroja:*** *Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, konačni međusobno disjunktni skupovi, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$, tada vrijedi*

$$k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = k(A_1) + k(A_2) + \ldots + k(A_n).$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: za $n = 2$ smo tvrdnju već dokazali kod principa zbroja za dva skupa.

Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = k(A_1) + k(A_2) + \ldots + k(A_m).$$

Korak indukcije:

$$\begin{aligned}
k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{m+1}) &= k((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \cup A_{m+1}) \\
&= \{\text{baza indukcije}\} \\
&= k(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) + k(A_{m+1}) \\
&= \{\text{pretpostavka indukcije}\} \\
&= k(A_1) + k(A_2) + \ldots + k(A_m) + k(A_{m+1}).
\end{aligned}$$

Kako tvrdnja vrijedi za $n = 2$ te iz pretpostavke da vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$ slijedi da vrijedi i za $m + 1$, prema principu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. □

Drugi princip koji ćemo koristiti je princip umnoška kojeg još nazivamo princip uzastopnog prebrojavanja.

Teorem 3.0.3. ***Princip umnoška za dva skupa:*** *Ako su A i B konačni skupovi, tada je i njihov Kartezijev produkt $A \times B$ konačan skup te vrijedi $k\,(A \times B) = k\,(A) \cdot k\,(B)$.*
Princip umnoška za dva skupa možemo iskazati i na sljedeći način:
Ako se prvi element uređenog para može odabrati na n načina, a drugi na m načina, tada je ukupan broj uređenih parova $n \cdot m$.

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Zanima nas $\mathrm{k}\,(A \times B)$, tj. koliko uređenih parova ima u $A \times B$. Poredajmo uređene parove na sljedeći način: prvo ispisujemo uređene parove kojima je prvi element a_1, a na drugom mjestu redom imamo $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Zatim ispisujemo uređene parove kojima je prvi element a_2, a na drugom mjestu redom imamo $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Analogno nastavimo ispisivati i ostale uređene parove. Dakle, promatramo broj elemenata skupa

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m), (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_m), (a_3, b_1), \ldots, (a_3, b_m), \ldots,$$

$$(a_n, b_1), \ldots, (a_n, b_m)\}.$$

Očito su svi poredani uređeni parovi međusobno različiti. Za svaki $a_i \in A, i \in \mathbb{N}$, imamo točno m uređenih parova kojima je a_i prvi element. Budući da i ide od 1 do n, slijedi da je ukupan broj uređenih parova $n \cdot m$, tj. $\mathrm{k}\,(A \times B) = \mathrm{k}\,(A) \cdot \mathrm{k}\,(B)$. □

Ovo se također može generalizirati i na n konačnih skupova.

Teorem 3.0.4. ***Princip umnoška:*** *Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n, n \in \mathbb{N}$, konačni skupovi, tada je i njihov Kartezijev produkt $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ konačan skup te vrijedi*

$$k(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = k(A_1) \cdot k(A_2) \cdot \ldots \cdot k(A_n).$$

Princip umnoška za n konačnih skupova možemo zapisati i na sljedeći način: Ako se prvi element uređene n-torke može odabrati na k_1 načina, drugi na k_2 načina, ..., n-ti element na k_n načina, tada je ukupan broj odabira svih elemenata $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: za $n = 2$ tvrdnju smo već dokazali kod principa umnoška za dva skupa.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da za neki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$k(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m) = k(A_1) \cdot k(A_2) \cdot \ldots \cdot k(A_m).$$

Korak indukcije:

$$\begin{aligned} k(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{m+1}) &= k((A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m) \times A_{m+1}) \\ &= \{\text{baza indukcije}\} \\ &= k(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m) \cdot k(A_{m+1}) \\ &= \{\text{pretpostavka indukcije}\} \\ &= (k(A_1) \cdot k(A_2) \cdot \ldots \cdot k(A_m)) \cdot k(A_{m+1}) \\ &= k(A_1) \cdot k(A_2) \cdot \ldots \cdot k(A_m) \cdot k(A_{m+1}). \end{aligned}$$

Kako tvrdnja vrijedi za $n = 2$ te iz pretpostavke da vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$ slijedi da vrijedi i za $m + 1$, prema principu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. □

Uz ova dva osnovna principa prebrojavanja navest ćemo još princip razlike i kvocijenta koji su jednostavne posljedice osnovnih svojstava skupova.

Princip razlike (komplement): Neka je A podskup skupa X, a $X \backslash A$ komplement skupa A unutar X, tj. podskup koji se sastoji od svih elemenata u X koji nisu u A. Tada je

$$k(X \backslash A) = k(X) - k(A).$$

Princip kvocijenta: Neka su $A_1,..., A_n$ u parovima disjunktni neprazni skupovi takvi da je $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Ako svi ti skupovi imaju isti broj elemenata, tj. $k(A_1) = ... = k(A_n) = k$, onda je broj tih skupova jednak kvocijentu ukupnog broja elemenata skupa A s brojem k:

$$n = \frac{k(A)}{k}.$$

U zadatcima se često traži da odredimo na koliko načina možemo izabrati, recimo, 2 zadatka od mogućih 5 ili na koliko načina možemo nešto rasporediti. Da bismo mogli rješavati takve zadatke potrebno je poznavati pojam permutacije i neke teoreme koje ćemo u narednom tekstu navesti.
Permutacije dijelimo na dvije vrste: permutacije bez ponavljanja i permutacije s ponavljanjem.
Permutacije bez ponavljanja: Neka je dan skup $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Svaku uređenu n-torku različitih elemenata iz S zovemo permutacija bez ponavljanja skupa od n elemenata.

Propozicija 3.0.5. *Broj permutacija bez ponavljanja na skupu od n elemenata je $n!$.*

Dokaz. Na prvo mjesto možemo staviti bilo koji od n elemenata, zatim na drugo mjesto možemo staviti neki od preostalih $n - 1$ elemanata, na treće mjesto možemo staviti neki od preostalih $n - 2$ elemenata i tako analogno do posljednjeg mjesta na koje možemo staviti jedan element koji nam je preostao. Prema principu produkta dobivamo da je broj permutacija bez ponavljanja na skupu od n elemenata jednak

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1 = n!.$$

□

Permutacije s ponavljanjem: Neka je S skup koji se sastoji od k disjunktnih podskupova, od kojih prvi ima n_1 jednakih elemenata, drugi n_2 jednakih elemenata,..., k-ti n_k jednakih elemenata, gdje je $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, tada svaku permutaciju tog skupa zovemo permutacija s ponavljanjem.

Propozicija 3.0.6. *Broj permutacija s ponavljenjem u n-članom skupu među kojima je n_1 jednakih elemenata prve vrste, n_2 jednakih elemenata druge vrste te n_k broj jednakih elemenata k-te vrste jednak je:* $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}$.

Dokaz. Pretpostavimo da su svi elementi u permutaciji s ponavljanjem različiti i da imamo permutaciju bez ponavljanja od $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ elemenata. Ukupan broj tih permutacija je $(n_1+n_2+\ldots n_k)!$. U permutaciji s ponavljanjem možemo zamijeniti mjesta na kojima su elementi prve vrste na $n_1!$ načina i pri tom se permutacija neće promijeniti. Slično zaključujemo i za elemente druge, treće, ..., k-te vrste. Za svaku permutaciju s ponavljanjem postoji $n_1!n_2!\ldots n_k!$ permutacija bez ponavljanja u kojima se ne mijenja poredak različitih elemenata skupa S. Mijenjajući poredak različitih elemenata dobili bismo ukupan broj permutacija bez ponavljanja od $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ elemenata. Stoga je ukupan broj permutacija bez ponavljanja jednak $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!$. Otuda slijedi da je broj permutacija s ponavljanjem dan formulom $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$. □

Teorem 3.0.7. *Neka je S skup koji ima n elemenata. Broj podskupova s k $(0 \leq k \leq n)$ elemenata od S je*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz. Pitamo se, na koliko načina možemo iz skupa S odabrati k elemenata. Očito postoji n mogućih izbora za „prvi“ element, $(n-1)$ za „drugi“ element,..., $(n-k+1)$ za „k-ti“element, tj. prema principu produkta imamo $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n\text{-}k)!}$ mogućnosti. Ali mi smo riječi prvi, drugi itd. stavili u navodnike zbog toga što u podskupu elementi nisu uređeni, tj. ne razlikujemo koji je element prvi, drugi itd. Stoga dobiveni broj moramo podijeliti s brojem različitih redoslijeda k elemenata koje smo izabrali. Zaključujući kao gore, vidimo da imamo k izbora za „prvi“ element, $k-1$ izbora za „drugi“ element, itd. Dakle, ukupno imamo $k!$ izbora za redoslijed, što znači da je broj k - članih podskupova skupa S jednak $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. □

Propozicija 3.0.8. *Broj k permutacija n-članog skupa je*

$$\frac{n!}{(n\text{-}k)!}.$$

Dokaz. Na prvo mjesto uređene k-torke možemo staviti bilo koji od n elemenata, zatim na drugo mjesto neki od preostalih $n-1$ elemanta itd. analogno sve do k-tog mjesta na koje možemo staviti bilo koji element od njih n osim onih $k-1$ već iskorištenih. Dakle, na posljednje mjesto uređene k-torke možemo staviti neki od $n-(k-1)$ elemenata. Prema principu produkta dobivamo da je broj k - permutacija n - članog skupa jednak:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n\text{-}k)!}.$$

□

Zadatak 1. (Županijsko 2017., 8. razred):
a) Koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 1, 2, 3, 4 i 5, pri čemu se ne mora koristiti svaka znamenka?
b) Koliko ima šesteroznamenakstih brojeva koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 1, 2, 3, 4 i 5, takvih da se svaka znamenka koristi bar jednom?

Rješenje.
1. način.
a) U ovom dijelu zadatka nemamo nikakav poseban uvjet na znamenke i nijedna od danih znamenki nije 0 (koja ne može nikad biti prva znamenka). Svaku znamenku možemo birati na 5 načina (možemo izabrati bilo koju od 5 ponuđenih znamenki). Prema principu uzastopnog prebrojavanja ukupno imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625$ takvih brojeva.

b) U ovom dijelu zadatka imamo uvjet da se svaka znamenka mora koristiti barem jednom. Imamo na izbor 5 znamenki za 6 mjesta u šesteroznamenkastom broju. Ako se svaka znamenka koristi barem jednom tada se jedna znamenka mora koristiti 2 puta, a ostale po jednom. Dvaput se može pojaviti bilo koja od znamenki pa za njezin izbor postoji 5 načina. Ta znamenka se može pojaviti na bilo kojem mjestu šesteroznamenkastog broja pa ju možemo rasporediti, prema principu uzastopnog prebrojavanja, na $6 \cdot 5 = 30$ mogućnosti. Taj broj još moramo podijeliti s 2 jer nam je znamenka ista, pa nam nije važan poredak. Dakle, znamenku koja se pojavljuje 2 puta možemo rasporediti na $30 : 2 = 15$ načina. Preostale znamenke možemo rasporediti na preostala 4 mjesta. Za prvu znamenku biramo neku od preostale 4 znamenke, za drugu neku od preostale 3 itd. Prema principu uzastopnog prebrojavanja to možemo napraviti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. Kada uz taj uvjet pridružimo uvjet na znamenku koja se pojavljuje dva puta, dobijemo ukupno $15 \cdot 24 = 360$ načina. Taj broj još trebamo pomnožiti s brojem 5, jer imamo 5 mogućnosti za izbor znamenke koja se pojavljuje dvaput. Dakle, takvih brojeva imamo $360 \cdot 5 = 1800$.

2. način. Razlikuje se samo u b) dijelu zadatka. Nakon što odaberemo znamenku koja se može koristiti 2 puta (to možemo učiniti na 5 načina) te znamenke možemo rasporediti, prema principu uzastopnog prebrojavanja, na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ načina. Taj broj moramo podijeliti brojem 2 jer ćemo ovakvim raspoređivanjem dobiti dvaput više željenih brojeva, jer za svaki raspored dvije iste znamenke na dva fiksna mjesta, imamo još jedan takav raspored. Konačno imamo $720 : 2 = 360$ načina. Na kraju, taj broj množimo s 5. Ukupno imamo $5 \cdot 360 = 1800$ traženih brojeva.

Zadatak 2. (Školsko 2021., 8. razred): Kažemo da je prirodni broj palindrom ako se jednako čita slijeva nadesno i zdesna nalijevo.
a) Koliko ima peteroznamenkastih palindroma djeljivih s 5?

b) Koliko ima peteroznamenkastih palindroma djeljivih s 3?

Rješenje.
a) Sjetimo se da je broj djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 5 ili 0. Ako uz to želimo da broj bude palindrom, tada znamo da mu posljednja znamenka ne može biti 0 jer bi onda i prva znamenka trebala biti 0, a to ne može biti. Dakle, ostaje nam mogućnost da je zadnja znamenka 5, a onda je i prva znamenka 5. Sada biramo drugu znamenku. Druga znamenka može biti bilo koji broj od 0 do 9 tako da nju onda možemo izabrati na 10 načina. Izborom druge znamenke četvrta znamenka je jednoznačno određena jer je broj palindrom i nju biramo na jedan način. Treću znamenku, također, možemo izabrati na 10 načina. Prema principu uzastopnog prebrojavanja ukupan broj peteroznamenkastih palindroma je $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 100$.

b) Sjetimo se da je broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Krenimo redom birati znamenke. Prva znamenka ne može biti 0. Dakle, preostaje nam ostalih 9 znamenaka koje možemo izabrati. Izborom prve znamenke zadnja znamenka je jednoznačno određena. Druga znamenka može biti bilo koja pa je biramo na 10 načina i time je četvrta znamenka jednoznačno određena. Dakle, prve dvije znamenke prema principu uzastopnog prebrojavanja možemo izabrati na $9 \cdot 10 = 90$ načina. Preostaje nam izabrati treću znamenku. Nju biramo na način da nam cijeli broj bude djeljiv s 3. Promatramo li prve dvije znamenke kao cjelinu možemo zamisliti da se na tim mjestima izmjenjuju svi dvoznamenkasti brojevi (njih 90). Među 90 dvoznamenkastih brojeva imamo točno 30 brojeva koji su djeljivi s 3 jer je $\lfloor \frac{90}{3} \rfloor = 30$. Ako broj nije djeljiv s 3, onda pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1 ili 2. Među 90 mogućih brojeva imamo 30 brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1 i 30 brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2.
Zato imamo 3 mogućnosti:
1. mogućnost: U 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim treće znamenke, djeljiv je s 3. Palindrom će biti djeljiv s 3 ako je srednja znamenka djeljiva s 3. Dakle, treća znamenka može biti 0, 3, 6 ili 9 i nju onda biramo na 4 načina. Takvih je palindroma $30 \cdot 4 = 120$.
2. mogućnost: U 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim treće znamenke, daje ostatak jedan pri dijeljenju s 3. Palindrom će biti djeljiv s 3 ako treća znamenka daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Dakle, treća znamenka može biti jednaka 2, 5 ili 8 i nju onda biramo na 3 načina. Takvih je palindroma $3 \cdot 30 = 90$.
3. mogućnost: U 30 slučajeva zbroj svih znamenki, osim treće znamenke, daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. Palindrom će biti djeljiv s 3 ako treća znamenka daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3. Dakle, treća znamenka može biti 1, 4, ili 7 i nju onda odabiremo na 3 načina. Takvih je palindroma $3 \cdot 30 = 90$.
Ove tri mogućnosti su disjunktne pa prema principu zbroja peteroznamenkastih palindroma ima $120 + 90 + 90 = 300$.

Zadatak 3. (Državno 2018., 7. razred): U uži izbor natjecanja iz matematike Povjerenstvo je predložilo 7 računskih i 5 geometrijskih zadataka. Na koliko se načina od tih predloženih zadataka može izabrati 5 zadataka za natjecanje, tako da među njima moraju biti 3 računska i 2 geometrijska zadatka? (Napomena: Poredak izabranih zadataka nije bitan.)

Rješenje. Najprije izaberimo računske zadatke. Od 7 računskih zadataka biramo tri. Prvi zadatak može biti bilo koji od tih 7 pa njega biramo na 7 načina. Drugi zadatak može biti bilo koji od preostalih 6 zadataka pa ga biramo na 6 načina. Treći zadatak može biti bilo koji od preostalih 5 pa ga biramo na 5 načina. Prema principu uzastopnog prebrojavanja ukupno je $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ načina na koje možemo izabrati 3 računska zadatka. No, ovdje nas ne zanima poredak izabranih zadataka nego nam je važno samo koji su zadatci izabrani, pa dobiveni broj treba podijeliti s brojem različitih rasporeda triju zadatka. Tri zadatka se mogu rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina (prvi zadatak biramo na 3 načina, drugi na 2 načina, a treći je onda jednoznačno određen). Dakle, tri računska zadatka mogu se izabrati na $210 : 6 = 35$ načina.
Na isti način doći ćemo do mogućih odabira dvaju geometrijskih zadataka od mogućih 5. Prvi zadatak možemo izabrati na 5 načina, a drugi na 4. Prema principu uzastopnog prebrojavanja geometrijske zadatke možemo izabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina. Ovdje, također, taj broj trebamo podijeliti s brojem rasporeda dvaju zadataka, jer nam njihov poredak nije važan. Dva geometrijska zadataka odabiremo na $20 : 2 = 10$ načina.
Odabiri geometrijskih i računskih zadataka su neovisni, tj. bilo koji odabir geometrijskih zadataka možemo kombinirati s bilo kojim odabirom računskih zadataka, stoga je, prema principu uzastopnog prebrojavanja, broj načina na koje možemo izabrati zadatke za natjecanje $35 \cdot 10 = 350$.

Zadatak 4. (Školsko 2020., 2. razred): Svaki od četiri zida sobe potrebno je obojiti jednom bojom tako da susjedni zidovi ne budu iste boje. Ako na raspolaganju imamo 3 različite boje, na koliko je načina moguće obojiti sobu? Nije nužno upotrijebiti sve boje.

Rješenje. Označimo zidove redom slovima B, O, J i A u kružnom poretku tako da je zid B susjedan zidu 0 itd. Bojanje možemo napraviti na dva načina.
1. način: koristimo dvije boje.
Možemo odabrati jednu od tri boje kojom ćemo obojati zid B (3 mogućnosti), a zatim jednu od preostale dvije boje kojom ćemo obojati zid 0 (2 mogućnosti). Boje zidova J i A su onda jednoznačno određene jer susjedni zidovi ne smiju biti iste boje. Zid J moramo obojiti isto kao zid B, a zid A moramo obojiti kao zid O. Dakle, prema principu uzastopnog prebrojavanja, postoji $3 \cdot 2 = 6$ načina na koje možemo obojiti četiri zida u dvije boje uz dani uvjet.

2. način: koristimo tri boje. Analogno, odabiremo jednu boju od 3 moguće boje kojom ćemo obojati zid B i to možemo napraviti na 3 načina, a zatim odabiremo jednu od preostale dvije boje kojom ćemo obojiti zid O. U ovom trenutku razlikujemo dva slučaja:
- zid J može biti iste boje kao zid B, a onda treću boju koristimo za zid A
- zid A može biti iste boje kao zid O, a onda treću boju koristimo za zid J.

Dakle, prema principu uzastopnog prebrojavanja, postoji $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ načina na koje možemo obojiti zidove u tri boje.
Kako su bojanje u dvije boje i bojanje u 3 boje disjunktni skupovi, tako prema principu zbroja, imamo ukupno $6 + 12 = 18$ načina za bojanje zidova prema danim uvjetima.

Zadatak 5. (Županijsko 2020., 2. razred): Do vrha stepeništa ima 8 stuba. Na koliko načina možemo stići na vrh ako se možemo penjati samo po jednu stubu ili po dvije stube?

Rješenje. Na i - tu stubu, pri čemu je $i \geq 3$, možemo u jednom koraku doći sa $(i-1)$-ve ili $(i-2)$.-ge stube. Stoga je broj načina da dođemo na i-tu stubu jednak zbroju brojeva načina na koje možemo doći na $(k-1)$-vu stubu i na $(k-2)$-gu stubu. Ukupno imamo 8 stuba. Na 1. stubu možemo doći na 1 način. Na 2. stubu možemo doći na 2 načina (penjemo se dva puta po jednu stubu ili dvije stube odjednom). Na 3. stubu možemo doći na 3 načina jer za doći do 2. stube imamo 2 načina, a za doći na treću s prve stube imamo jedan način. Dalje nastavljamo po principu zbroja. Na 4. stubu možemo doći na $2 + 3 = 5$ načina; na 5. stubu na $3 + 5 = 8$ načina; na 6. stubu na $5 + 8 = 13$ načina; na 7. stubu na $8 + 13 = 21$ način; na 8. stubu na $13 + 21 = 34$ načina i tu se zaustavljamo. Dakle, do vrha stubišta pod danim uvjetima možemo doći na 34 načina.

Zadatak 6. (Županijsko 2020., 4. razred SŠ): Dana su tri paralelna pravca a, b i c. Na pravcu a istaknute su točke A, B i C, na pravcu b točke D, E, F i G, a na pravcu c točke H, I, J, K i L. Koliko je najviše trokuta određeno točkama iz skupa $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$?

Rješenje.
1. način. Razlikujemo četiri slučaja.
(i) Na svakom od danih pravaca nalazi se po jedan vrh trokuta. S obzirom na to da tražimo najveći broj trokuta, možemo pretpostaviti da odabrane trojke točaka nisu kolinearne (jer tada nećemo imati trokut). Vrh koji je na pravcu a možemo izabrati na 3 načina - vrh A, vrh B ili vrh C. Vrh koji je na pravcu b biramo na 4 načina, a vrh na pravcu c na 5 načina. Prema principu uzastopnog prebrojavanja ukupno postoji $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ takvih trokuta.

(ii) Dva vrha trokuta su na pravcu a, a treći vrh se nalazi na jednom od preostalih pravaca. Takvih trokuta ima $\binom{3}{2} \cdot (4+5) = 27$. Pri tome je $\binom{3}{2}$ je broj načina na koji od tri točke biramo dvije koje će se nalaziti na pravcu a. Nakon toga imamo dva disjunktna slučaja: ili biramo točke koje se nalaze na pravcu b (to možemo na 4 načina) ili one koji će se nalaziti na pravcu c (to možemo na 5 načina). Prema principu zbroja dobijemo navedeni rezultat.

(iii) Dva vrha su na pravcu b, a treći vrh je na jednom od ostala dva pravca. Takvih trokuta ima $\binom{4}{2} \cdot (3+5) = 48$. Objašnjenje je isto kao u (ii). Na $\binom{4}{2}$ načina biramo od četiri točke dvije koje će se nalaziti na pravcu b te onda razlikujemo disjunktne slučajeve. Imamo 3 načina za odabrati točku na pravcu a ili 5 načina za odabrati točku na pravcu c.

(iv) Dva vrha su na pravcu c, a treći vrh je na jednom od preostala dva pravca. Takvih trokuta, analogno, ima $\binom{5}{2} \cdot (3+4) = 70$.

Konačno, prema principu zbroja, takvih trokuta ima $60 + 27 + 48 + 70 = 205$.

2. način. Biramo tri točke od danih dvanaest točaka. U ovom trenutku ne razmišljamo o tome jesu li one kolinearne ili ne. Te tri točke možemo odabrati na $\binom{12}{3} = 220$ načina. Od tog broja trebamo oduzeti broj načina za odabir tri kolinearne točke, tj. točke koje leže na istom pravcu a, b ili c. Promotrimo pravac a. Broj načina da od 3 točke koje možemo izabrati na pravu a mi odaberemo 3 kolinearne jest $\binom{3}{3}$. Promotrimo pravac b. Broj načina da na njemu odaberemo neke 3 kolinearne točke od moguće 4 je $\binom{4}{3}$. I na kraju, promotrimo pravac c. Broj načina da na njemu odaberemo 3 kolinearne točke od mogućih 5 je $\binom{5}{3}$. Ti svi slučajevi su disjunktni, pa prema principu zbroja, traženi broj je $\binom{12}{3} - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}\right) = 220 - (1 + 4 + 10) = 205$.

Zadatak 7. (Županijsko 2019., 3. razred SŠ): Četiri su prijateljice odlučile provesti vikend u malom obiteljskom hotelu koji ima pet soba, stilski uređenih različitim bojama. One su jedine gošće u hotelu. Prepustile su vlasniku hotela da ih rasporedi u sobe, ali tako da ne budu više od dvije prijateljice u jednoj sobi. Na koliko ih načina vlasnik hotela može rasporediti u sobe?

Rješenje. Imamo tri disjunktna slučaja.
(i) Svaka prijateljica je u svojoj sobi.
Tada je, prema principu uzastopnog prebrojavanja, broj mogućih rasporeda $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. (Prvu prijateljicu može smjestiti u bilo koju od pet soba, drugu prijateljicu u bilo koju od preostale četiri sobe itd.).

(ii) Dvije prijateljice su u jednoj sobi, a preostale dvije su svaka u svojoj sobi.
Dvije prijateljice koje će biti zajedno u sobi možemo izabrati na $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ načina.

Dakle, prvu prijateljicu za tu sobu možemo izabrati na 4 načina, drugu na 3 načina. To je, prema principu uzastopnog prebrojavanja, $4 \cdot 3 = 12$ načina. Nije nam važan poredak (isto nam je jesu li u sobi Mia i Ana ili Ana i Mia) pa još moramo podijeliti s 2. Za svaki od tih odabira moramo još odabrati 3 sobe (za njih dvije i preostale dvije prijateljice), a to ćemo učiniti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (prvu sobu na 5, drugu sobu na 4, a treću na 3 načina). Konačno, ukupan broj rasporeda u navedenom slučaju je $6 \cdot 60 = 360$.

(iii) Po dvije prijateljice su zajedno u sobi.
Primjetimo da je dovoljno odrediti broj načina da jedna od prijateljica odabere s kim će biti u sobi jer je tada i preostali par određen. Pri tom nam nije bitan poredak, tj. koji je par prvi, a koji drugi. Jedna prijateljica može odabrati na 3 načina s kim će biti u sobi, dakle, postoje 3 načina za odabir dva para prijateljica. Za svaki od tih odabira dvije sobe u kojima će biti prijateljice možemo odabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina. Dakle, prema principu uzastopnog prebrojavanja, ukupan broj raspreda u ovom slučaju je $3 \cdot 20 = 60$.

Konačno, broj svih mogućih rasporeda, prema principu zbroja, iznosi $120+360+60 = 540$.

Bibliografija

[1] Bašić, M.: *Aha! Putovanje u središte problema*. Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2020.

[2] Cvitković, M.: *Kombinatorika*. zbirka zadataka, Element, Zagreb, 2007.

[3] Horvatek, A.: *Natjecanja iz matematike*. dostupno na `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm`.

[4] Nakić, I.: *Diskretna matematika (skripta)*. dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf.

[5] Veljan, D.: *Kombinatorna i diskretna matematika*. Algoritam, Zagreb, 2001.

Sažetak

U ovom diplomskom radu obrazložene su neke metode koje se koriste pri rješavajnu kombinatornih zadataka s natjecanja u osnovnim i srednjim školama. U prvom poglavlju obrađeni su zadatci koji se rješavaju pomoću Dirichletovog principa, u drugom poglavlju zadatci koji se rješavaju pomoću Formule uključivanja-isključivanja, a u trećem poglavlju zadatci koji se rješavaju pomoću osnonovnih prinicpa prebrojavanja.

Summary

This graduate thesis explains certain techniques used in solving combinatorial problems in elementary and high school competitions. In the first chapter we study the use of Dirichlet's principle, in the second the use of the inclusion-exclusion principle, and in the third chapter we study the use of basic counting methods in problems in mathematical competitions.

Životopis

Rođena sam 4. svibnja 1996. godine. Osnovnu školu i opću gimnaziju pohađala sam u Mostaru gdje sam i stanovala. Nakon gimnazije, 2015. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2018. godine, na istom sam upisala nastavnički smjer na Diplomskom sveučilišnom studiju. Od 2020. godine radim u OŠ Lotrščak kao učiteljica matematike.