

Modeliranje širenja epidemija SIR modelom

Marijan, Branimir

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:914289>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Branimir Marijan

MODELIRANJE ŠIRENJA EPIDEMIJE
SIR MODELOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, srpanj, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

*Posvećeno roditeljima Zvonimiru i Goranki te braći Krešimiru i Hrvoji Marijan
Posebna zahvala mentoru Josipu Tambači na ukazanom strpljenju*

Sadržaj

Sadržaj	iv
1 Uvod	1
2 Osnovni SIR model	2
2.1 Osnovno o modelu	2
2.2 Kemrack MacKendrickova aproksimacija jednačbi i egzaktnog rješenja .	17
2.3 Rješenja KMK jednačbi za male vremenske trenutke	21
2.4 Određivanje parametara za SIR model	22
2.5 Kako bi se epidemija COVID-19 širila na osnovu podataka s početka epi- demije	24
2.6 Kako će se epidemija COVID-19 širiti na osnovu koeficijenta strogosti mjera	32
3 A-SIR model	37
3.1 Osnovno o modelu	37
3.2 Dinamika A-SIR modela	42
3.3 Rana dinamika epidemije	44
3.4 Određivanje parametara za A-SIR model	44
3.5 Kako će se epidemija COVID-19 širiti na osnovu koeficijenta strogosti mjera	46
4 Ostale varijacije SIR modela	53
4.1 SIRS model	53
4.2 SIRWS model	61
4.3 SIR model uz konstantno cijepljenje	73
Bibliografija	80

Poglavlje 1

Uvod

Motivacija za pisanje ovog diplomskog rada je proučavanje dinamike širenja virusne bolesti COVID-19 uzrokovane koronavirusom SARS-CoV-2.

Prema referenci [1] virus se prvi puta pojavio u gradu Wuhanu, pokrajine Hubei, Kina. Prvi poznati slučaj zaraze zabilježen je 17. studenog 2019. godine. Virus se primarno širi bliskim kontaktom, najčešće kapljičnim putem kao posljedica kašljanja, kihanja ili razgovora. Kapljice češće padaju na pod ili površinu no što putuju zrakom, međutim mogu ostati lebjeti u zraku određeni vremenski period. Nešto rjeđe, uzročnika zaraze moguće je unijeti i dodirivanjem kontaminiranih površina te potom lica. Rizik za prijenos bolesti najveći je prva tri dana od pojave simptoma. Važno je naglasiti da je specifičnost virusa i u tome što se zaraza može prenijeti i putem pacijenata koji nemaju vidljivih simptoma. Ukoliko se simptomi pojave, period inkubacije virusa uobičajeno iznosi 5 dana, ali može trajati između 2 i 14 dana. Nakon što osoba preboli COVID-19 u njegovom organizmu se, određeni vremenski period, nalaze antitijela koja sprečavaju infekciju virusom SARS-CoV-2, nakon čega osoba ponovno postaje podložna zarazi.

Upravo zbog prethodno navedenih svojstava virusa trebamo prilagoditi postojeće matematičke modele kako bi smo što preciznije imali uvid u dinamiku širenja bolesti. Plan je na osnovu SIR (Suspected-Infected-Removed) modela napraviti što precizniji model širenja zaraze.

Poglavlje 2

Osnovni SIR model

2.1 Osnovno o modelu

U prvom poglavlju predstaviti ćemo osnovni SIR model iz reference [2] kojeg su izvorno konstruirali William Ogilvy Kemrack i Anderson Grey MacKendrick 1927. godine. Model opisuje širenje zarazne infekcije uz pretpostavku trajnog imuniteta pojedinaca koji su se nakon zaraze oporavili. Uzmimo homogenu i izoliranu populaciju koja broji N članova te ih podijelimo na tri klase:

- Susceptible (S), podložne zarazi
- Infected and infective (I), zaražene i zarazne
- Removed (R), oporavljene, umrle ili izolirane

Pojasnimo još pojam homogene populacije. To znači da će pojedinac imati homogenu socijalnu interakciju. Drugim riječima, sve osobine pojedinca bit će uklonjene i stvarni pojedinac bit će zamijenjen "idealnim" koji posjeduje osobinu prosjeka populacije. Ove pretpostavke nisu realistične, ali su nužne za formiranje matematičkog modela.

Napomenimo još da će promatrana populacija biti konstantna što znači da ćemo zanemariti dolaske novih pojedinaca (npr. rođenja, imigracije) i odlaske pojedinaca koji se već nalaze u populaciji (npr. smrti, emigracije). Vrijednostima $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ označavamo brojnost populacije u svakoj klasi u vremenu t .

Prema pretpostavci za svako $t \in \mathbb{R}_+$ vrijedi:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (2.1)$$

Model je opisan jednažbama:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Pojasnimo jednažbe u sustavu (2.2) :

- Prva jednažba

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI,$$

govori nam kako promjena broja pojedinaca podložnih zarazi S u vremenu t , odnosno $\frac{dS}{dt}$ ovisi o broju pojedinaca koji su podložni zarazi S i broju već zaraženih pojedinaca I te koeficijentu α . Koeficijent α predstavlja *stopu incidencije*, odnosno udio ljudi u populaciji koje jedan zaraženi pojedinac zarazi u jednom danu. Također uočimo minus na desnoj strani jednažbe koji predstavlja smanjenje brojnosti populacije podložne zarazi.

- Druga jednažba

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I,$$

govori nam kako se mijenja broj zaraženih pojedinaca I u vremenu t , odnosno $\frac{dI}{dt}$. αSI je broj onih pojedinaca koji su prešli iz skupine S u skupinu I . Uočimo da je ovaj član s pozitivnim predznakom jer brojnost zaražene populacije I raste priljevom pojedinaca iz skupine S . Član $-\beta I$ javlja se zbog toga što pojedinac može napustiti populaciju I (putem ozdravljenja ili smrti) i to uz koeficijent β .

Koeficijent β zovemo *stopa uklanjanja* i računamo ga po formuli:

$$\beta = \frac{1}{\text{prosječno vrijeme oporavka od bolesti u danima}}.$$

Primjerice ako je prosječno vrijeme oporavka pojedinca od neke bolesti 14 dana tada će vrijediti $\beta = \frac{1}{14}$.

- Treća jednađžba

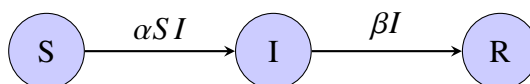
$$\frac{dR}{dt} = \beta I,$$

govori nam kako promjena brojnosti populacije R (oporavljenih ili umrlih) u vremenu t ovisi o izrazu βI koji predstavlja pojedince koji napuštaju populaciju zaraženih I "brzinom" β . Ovdje izraz brzina možemo opravdati samom formulom za koeficijent β čija je jedinica:

$$\frac{\text{pojedinaac}}{\text{vrijeme (oporavka od bolesti) u danima}}$$

Također uočimo i pozitivan predznak izraza βI koji nam govori da brojnost populacije R može samo rasti.

- Shematski prikaz SIR modela



Ako zbrojimo sve tri jednađžbe iz sustava (2.2):

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = \frac{dN}{dt} = 0,$$

dobijemo da je brojnost populacije N konstantna što smo i pretpostavili u modelu.

- Normalizirani sustav (2.2)

Uvodimo nove nepoznanice s, i, r :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}.$$

Uvrštavanjem prethodnih nepoznanica u sustav (2.2) dobivamo normalizirani sustav:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\alpha N s i, \\ \frac{di}{dt} &= \alpha N s i - \beta i, \\ \frac{dr}{dt} &= \beta i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Normalizirani sustav ćemo koristiti kod simulacija modela. Uočimo da je normalizirani sustav (2.3) sličan sustavu (2.2) s jednom bitnom razlikom: koeficijent αN predstavlja broj ljudi koje jedan zaraženi pojedinac zarazi u jednom danu.

Komentar o koeficijentima α i β

Ova dva koeficijenta ovise o karakteristikama virusa i učestalosti socijalne interakcije. Primjerice, pravovremenim izoliranjem zaraženih pojedinca koeficijent β se povećava, dok se ograničavanjem socijalne interakcije koeficijent α smanjuje.

Uočimo da je u jednadžbi (2.2) zaraženi pojedinac istog trenutka zarazan, što u stvarnosti nije istina. Ako je razlika vremena između trenutka zaraze i zaraznosti značajno manja od prosječnog vremena oporavka od bolesti β^{-1} , odnosno vremena prelaska pojedinca iz populacije I u populaciju R i dalje dobivamo dobru aproksimaciju.

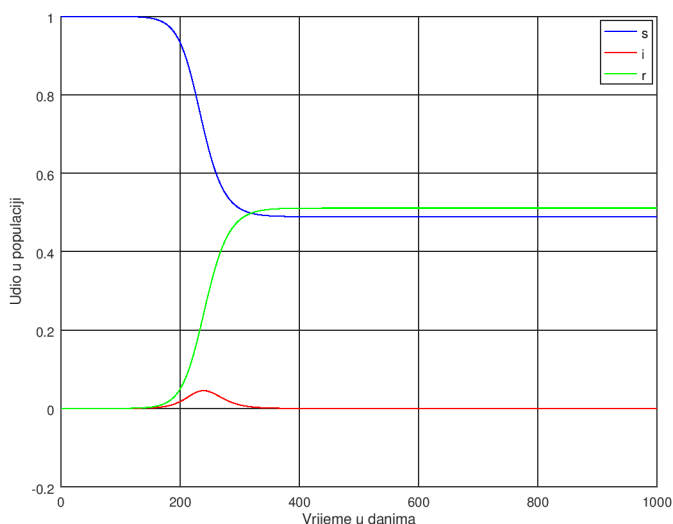
Primjeri različitih koeficijenata α i β

U ovom poglavlju pogledati ćemo par primjera kako se SIR model ponaša u ovisnosti o različitim koeficijentima α i β . Uzmimo konstantnu populaciju $N = 4000000$.

- Primjer kada je koeficijent α konstantan

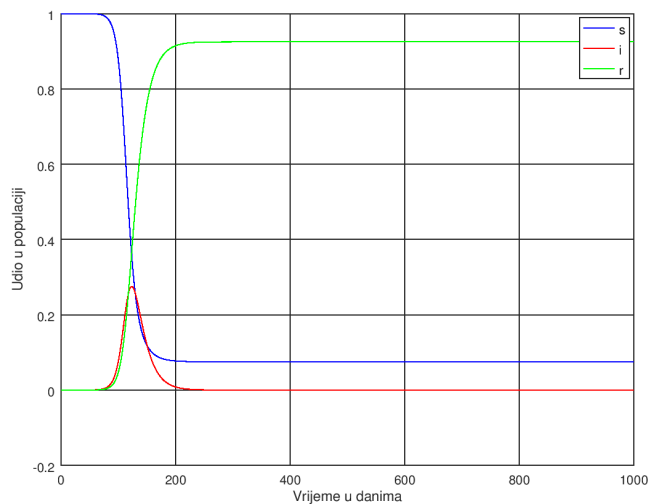
Neka je $\alpha N = 0.2$. To znači da svaki pojedinac prosječno zarazi 0.2 ljudi u jednom danu. Pošto se, prema medicinskim podacima, pojedinac od virusne bolesti COVID-19 oporavi u periodu 7-21 dan za koeficijent β uzimamo sljedeće vrijednosti:

- $\beta = \frac{1}{7}$, odnosno bolest traje 7 dana.



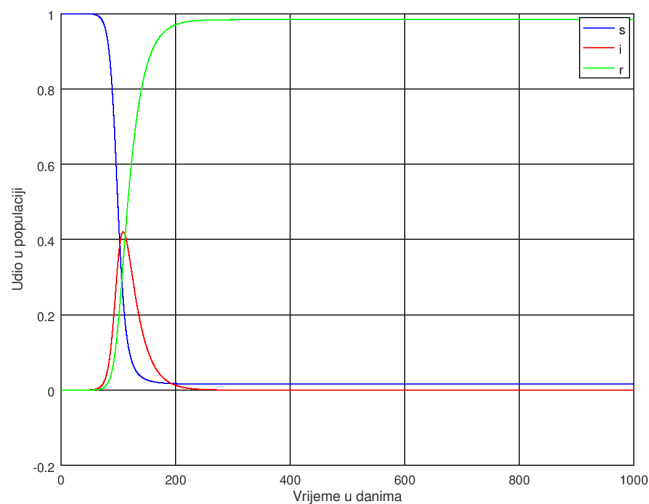
Slika 2.1: $\alpha N = 0.2$, $\beta = \frac{1}{7}$.

- $\beta = \frac{1}{14}$, odnosno bolest traje 14 dana.



Slika 2.2: $\alpha N = 0.2, \beta = \frac{1}{14}$.

- $\beta = \frac{1}{21}$, odnosno bolest traje 21 dan.



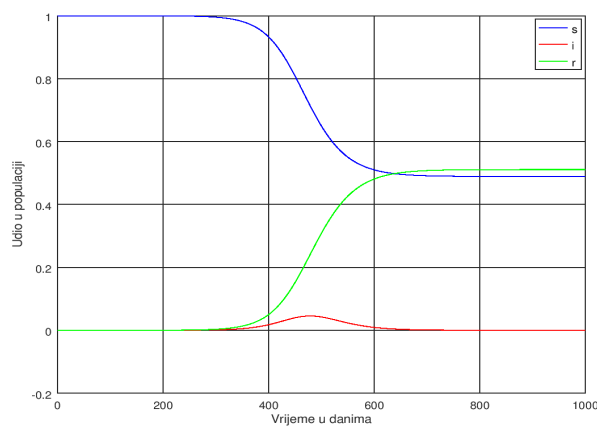
Slika 2.3: $\alpha N = 0.2, \beta = \frac{1}{21}$.

Uočimo da je smanjenjem koeficijenta β udio zaraženih u ukupnoj populaciji N sve veći na vrhuncu epidemije.

- Primjer kada je koeficijent β konstantan

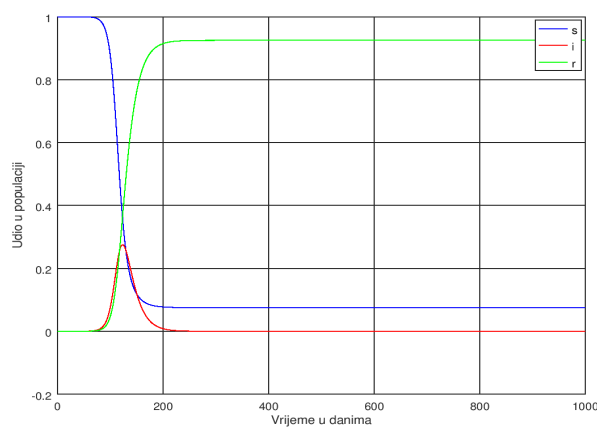
Neka je $\beta = \frac{1}{14}$. Pošto se koeficijent α mijenja tokom trajanja epidemije, za αN ćemo uzeti sljedeće vrijednosti:

- $\alpha N = 0.1$, odnosno svaki zaraženi prosječno zarazi 0.1 osobu u danu.



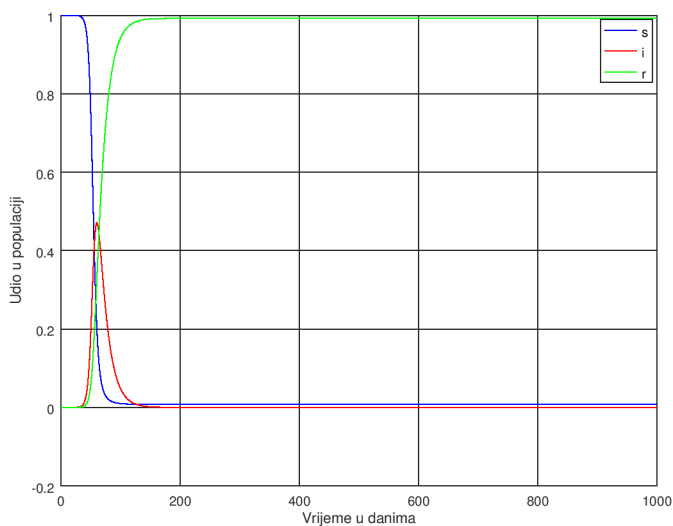
Slika 2.4: $\alpha N = 0.1, \beta = \frac{1}{14}$.

- $\alpha N = 0.2$, odnosno svaki zaraženi prosječno zarazi 0.2 osobe u danu.



Slika 2.5: $\alpha N = 0.2, \beta = \frac{1}{14}$.

- $\alpha N = 0.35$, odnosno svaki zaraženi prosječno zarazi 0.35 osoba u danu.



Slika 2.6: $\alpha N = 0.35, \beta = \frac{1}{14}$.

Uočimo da povećavanjem koeficijenta α epidemija traje sve kraće i da na početku epidemije sve brže raste funkcija zaraženih i .

U daljnjem ćemo promatrati parametar γ :

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.4)$$

Pogledajmo drugu jednadžbu sustava (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I, \\ I' &= (\alpha S - \beta) I. \end{aligned}$$

Znamo da je $I = I(t) \geq 0$, stoga je promjena broja zaraženih rastuća funkcija ukoliko je:

$$\alpha S - \beta \geq 0,$$

odnosno,

$$S \geq \gamma. \quad (2.5)$$

Koeficijent γ zovemo *pragom epidemije*. Dakle, epidemija se može razvijati samo ako je brojnost populacije podložne zarazi veća od *praga epidemije*.

Neka je $S_0 = S(0) \approx N$ početni broj pojedinaca podložnih zarazi. Tada se omjer:

$$R_0 = \frac{S_0}{\gamma} = \frac{N\alpha}{\beta}, \quad (2.6)$$

naziva *stopa širenja*. Iz (2.5) slijedi da ukoliko je $R_0 > 1$ zaraza se širi dok za $R_0 < 1$ zaraza odumire. Pogledajmo koeficijente R_0 za prethodne primjere koeficijenata αN i β .

αN	β	R_0
0.2	1/7	1.4
0.2	1/14	2.8
0.2	1/21	4.2
0.1	1/14	1.4
0.2	1/14	2.8
0.35	1/14	4.9

Tablica 2.1: R_0 za Slika 2.1 - Slika 2.6.

Očito je da će se u svim prethodno navedenim primjerima zaraza širiti jer su svi $R_0 > 1$.

Neka je $I_0 = I(0)$ početni broj zaraženih pojedinaca. Iz prve i druge jednadžbe sustava (2.2) izrazimo funkciju $I(t)$:

$$I'(t) = \frac{I'(t)}{\alpha S(t) - \beta}, \quad I(t) = \frac{-S'(t)}{\alpha S(t)}.$$

Izjednačavanjem funkcija $I(t)$ i sređivanjem izraza dolazimo do:

$$I'(t) = -S'(t) + \gamma \frac{S'(t)}{S(t)}.$$

Epidemija kreće u trenutku $t_0 = 0$, stoga elementarnom integracijom prethodne jednadžbe integralom $\int_{t_0=0}^t dt$ dobivamo funkciju broja zaraženih pojedinaca u bilo kojem trenutku t :

$$I(t) = I_0 + (S_0 - S(t)) + \gamma \ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right). \quad (2.7)$$

Završetak epidemije

Iz jednadžbe (2.7) dobivamo jedan bitan opis epidemije. Naime, epidemija je završila u vremenu t_∞ ako je $I = 0$:

$$I_0 + (S_0 - S(t_\infty)) + \gamma \ln\left(\frac{S(t_\infty)}{S_0}\right) = 0. \quad (2.8)$$

U početku epidemije će vrijediti da je $I_0 \approx 0$ te $S_0 \approx N$. Iz toga slijedi:

$$(N - S(t_\infty)) + \gamma \ln\left(\frac{S(t_\infty)}{N}\right) = 0, \quad (2.9)$$

gdje $S(t_\infty)$ označava ukupan broj pojedinaca podložnih zarazi tokom cijelog trajanja epidemije. Tada će ukupan broj oporavljenih tokom trajanja epidemije biti:

$$R(t_\infty) = N - S(t_\infty). \quad (2.10)$$

Vratimo se na jednadžbu (2.9). Znamo da je $R_0 = \frac{N\alpha}{\beta}$. Pošto je $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ vrijedi:

$$R_0 = \frac{N}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{N}{R_0}.$$

Uvrštavajući ovaj γ u jednadžbu (2.9) imamo:

$$(N - S(t_\infty)) + \frac{N}{R_0} \ln\left(\frac{S(t_\infty)}{N}\right) = 0. \quad (2.11)$$

Dijeljenjem jednadžbe (2.11) sa N dobivamo:

$$\left(1 - \frac{S(t_\infty)}{N}\right) + \frac{1}{R_0} \ln\left(\frac{S(t_\infty)}{N}\right) = 0. \quad (2.12)$$

Pošto je $s(t) = \frac{S(t)}{N}$ sada jednadžba (2.12) izgleda:

$$(1 - s(t_\infty)) + \frac{1}{R_0} \ln(s(t_\infty)) = 0. \quad (2.13)$$

Očito za sve $t_\infty \in \mathbb{R}_+$ vrijedi $s(t_\infty) \in [0, 1]$. Recimo nešto o rješivosti jednadžbe (2.13) u ovisnosti o parametru $R_0 \in [0, 5]$.

- $R_0 = 0$

Za $R_0 = 0$ jedinstveno rješenje je $s(t_\infty) = 1$. To znači da je:

$$0 = R_0 = \frac{N\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = 0,$$

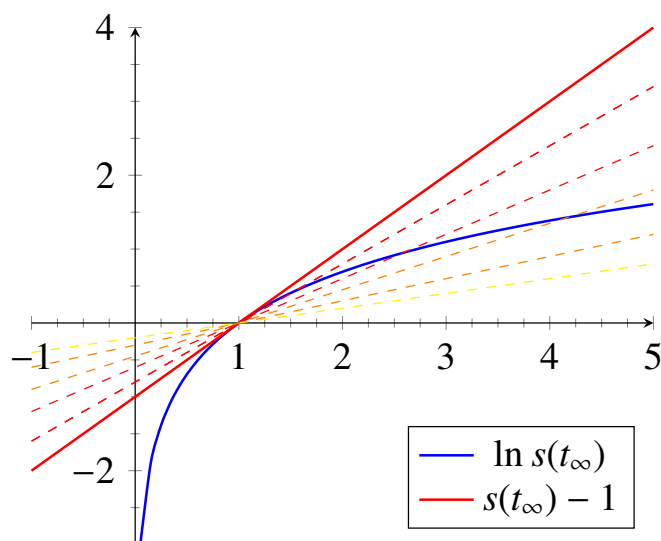
odnosno epidemija se neće ni proširiti, a to znači da će cijela populacija na kraju epidemije (koja se nije ni dogodila) i dalje biti podložna zarazi.

- Za $R_0 \in \langle 0, 1 \rangle$

Množimo jednađbu (2.13) sa R_0 . Tada imamo:

$$R_0(s(t_\infty) - 1) = \ln s(t_\infty). \quad (2.14)$$

Pogledajmo kako izgledaju grafovi funkcija $R_0(s(t_\infty) - 1)$ i $\ln s(t_\infty)$:

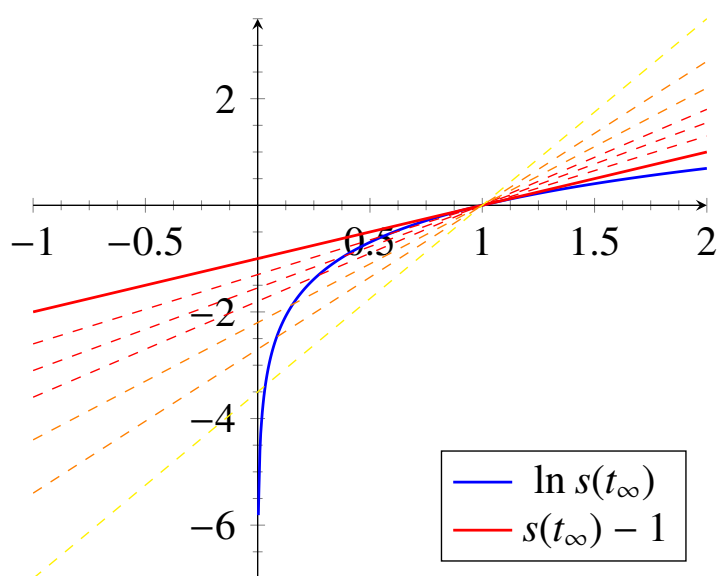


Slika 2.7: Funkcije $R_0(s(t_\infty) - 1)$ i $\ln s(t_\infty)$ za $R_0 \in \langle 0, 1 \rangle$.

Pravac $R_0(1 - s(t_\infty))$ nema "dovoljno veliki" nagib da siječe funkciju $\ln s(t_\infty)$ na segmentu $[0, 1]$ osim u točki $s(t_\infty) = 1$. Kako je ovo aproksimativni rezultat to znači da će, nakon epidemije, gotovo cijela populacija biti nezaražena (epidemija će odumrijeti).

- Za $R_0 \in [1, 5]$

Iz (2.14) očito je jedno rješenje $s(t_\infty) = 1$, međutim imamo još jedno rješenje jer će u ovom slučaju presjek pravca $R_0(s(t_\infty) - 1)$ i krivulje $\ln s(t_\infty)$ biti skup od dvije točke. To možemo uočiti i grafički:

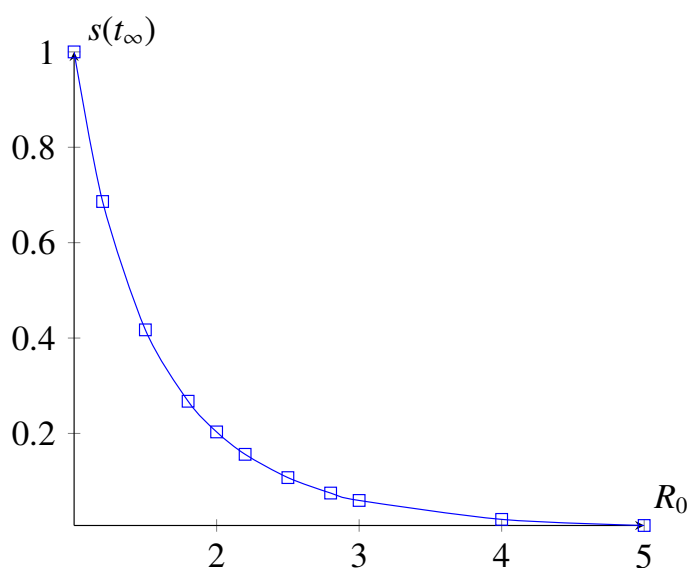
Slika 2.8: Funkcije $R_0(s(t_\infty) - 1)$ i $\ln s(t_\infty)$ za $R_0 \geq 1$.

Pogledajmo tablicu drugog rješenja jednadžbe (2.14) za različite R_0 .

R_0	$s(t_\infty)$
1	1
1.2	0.6863
1.5	0.4172
1.8	0.2675
2	0.2032
2.2	0.1562
2.5	0.1074
2.8	0.0750
3	0.0595
4	0.0198
5	0.0070

Tablica 2.2: $s(t_\infty)$ za različite R_0 .

Uočimo da vrijedi: Što je R_0 veći to će biti manji udio ljudi $s(t_\infty)$ (u ukupnoj populaciji) koji su na kraju epidemije ostali podložni zarazi, odnosno koji se tokom epidemije nisu zarazili. Pogledajmo kako izgledaju podaci iz tablice na grafu:



Slika 2.9: Grafički prikaz Tablice 2.2.

Brzina širenja epidemije

Još jedno bitno kvantitativno svojstvo epidemije je brzina širenja. Iz jednadžbe vrijedi (2.2) $\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$, pa točka maksimuma t_* funkcije I zadovoljava $I'(t_*) = 0$ iz čega slijedi da je $S(t_*) = \gamma$. Naime, tada će druga jednadžba sustava (2.2) imati oblik:

$$I'(t_*) = \left(\alpha \frac{\beta}{\alpha} - \beta \right) I(t_*) = 0.$$

Sada maksimum inficiranih dobivamo iz (2.7) uz oznaku $\gamma = \frac{N}{R_0}$, gdje je $\frac{1}{R_0} < 1$:

$$I(t_*) = \left[1 - \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0} \ln R_0 \right] N. \quad (2.15)$$

Podijelimo jednadžbu (2.15) sa N . Tada uz $i(t) = \frac{I(t)}{N}$ imamo:

$$i(t_*) = 1 - \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0} \ln R_0. \quad (2.16)$$

Pogledajmo kako izgledaju maksimumi prethodno navedenih primjera za koeficijente αN i β .

αN	β	R_0	$i(t_*)$ iz numerike	$i(t_*)$ iz formule (2.16)
0.2	1/7	1.4	0.04538	0.04537
0.2	1/14	2.8	0.27511	0.27514
0.2	1/21	4.2	0.42008	0.42022
0.1	1/14	1.4	0.04538	0.04537
0.2	1/14	2.8	0.27511	0.27514
0.35	1/14	4.9	0.47157	0.47158

Tablica 2.3: Maksimumi $i(t_*)$ za primjere Slika 2.1 - Slika 2.6.

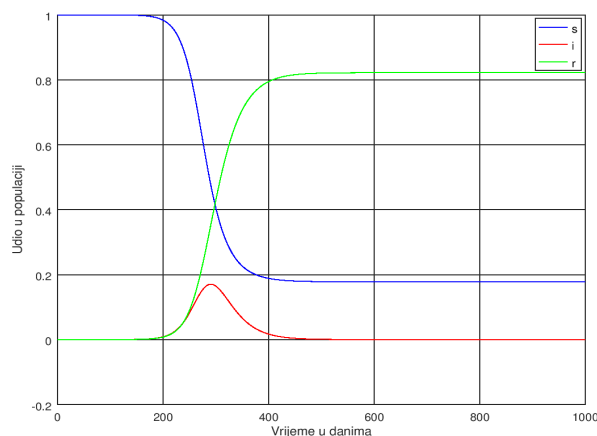
Uočimo da nemamo analitičku ocjenu vremena potrebnog za postizanje maksimuma. Ne možemo analitički doći do podataka:

- t_* koji označava vrijeme u kojem funkcija $I(t)$ dostiže maksimum
- t_∞ koji označava vrijeme prestanka epidemije

Međutim možemo opisati kako se prethodno traženi podaci ponašaju u ovisnosti o vrijednostima α , β , N .

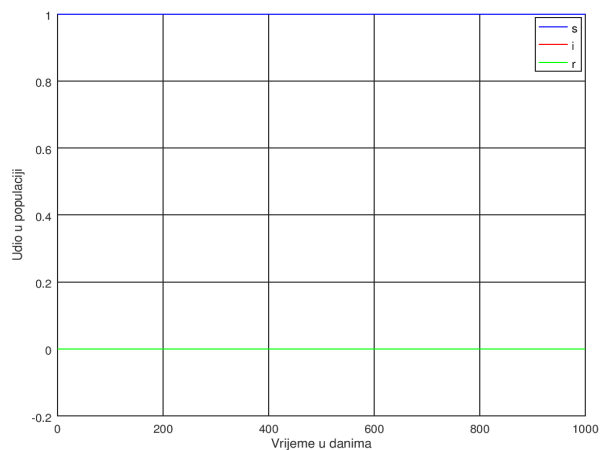
Ranije smo za fiksne α i β promatrali kako se ponašaju funkcije $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$. Pogledajmo sada kako te funkcije izgledaju za:

- Nisku stopu incidencije α i nisku stopu uklanjanja β

Slika 2.10: Graf za $\alpha N = 0.1$, $\beta = \frac{1}{21}$.

Tada su $R_0 = 2.1$, $i(t_*) = 0.17050$.

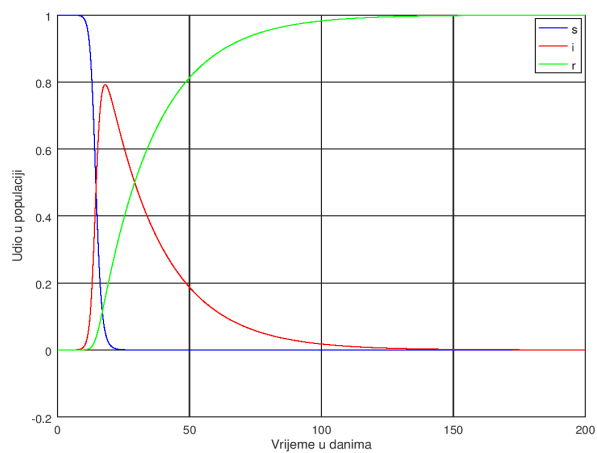
- Nisku stopu incidencije α i visoku stopu uklanjanja β



Slika 2.11: Graf za $\alpha N = 0.1, \beta = \frac{1}{7}$.

Tada su $R_0 = 0.7, i(t_*) = 2.5 \cdot 10^{-7}$. Ovdje možemo primijetiti da se epidemija neće razviti jer je $R_0 < 1$.

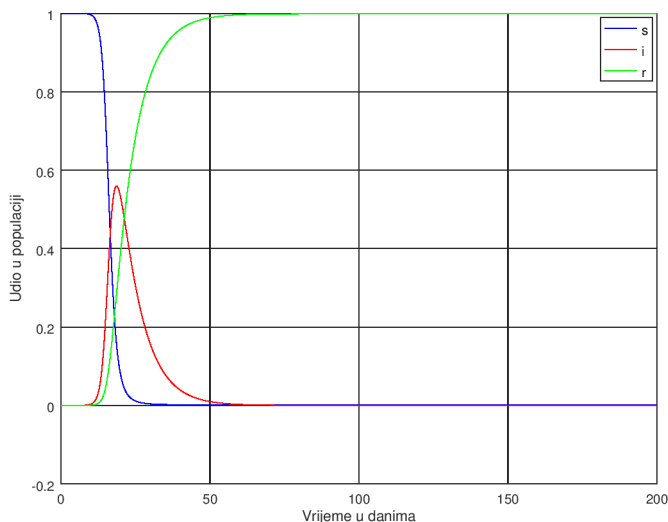
- Visoku stopu incidencije α i nisku stopu uklanjanja β



Slika 2.12: Graf za $\alpha N = 1, \beta = \frac{1}{21}$.

Tada su $R_0 = 21, i(t_*) = 0.79196$.

- Visoku stopu incidencije α i visoku stopu uklanjanja β



Slika 2.13: Graf za $\alpha N = 1, \beta = \frac{1}{7}$.

Tada su $R_0 = 7, i(t_*) = 0.55976$.

Uočimo da što je koeficijent β manji, trajanje epidemije se povećava. Što je koeficijent α veći to funkcija zaraženih i brže raste.

Procijepljenost populacije

Prema referenci [4] do završetka epidemije može doći ukoliko je određeni udio populacije procijepljen. Neka je p udio cijepljene populacije te $1 - p$ udio populacije koja nije cijepljena. Stopa širenja R_0 će se mijenjati ovisno o populaciji koja nije cijepljena, odnosno $N(1 - p)$, na sljedeći način:

$$R'_0 = (1 - p)R_0$$

Sada nas zanima koliki udio cijepljene populacije p mora biti da $R'_0 < 1$, odnosno da epidemija odumire.

$$R'_0 < 1 \Rightarrow (1 - p)R_0 < 1 \Rightarrow p > 1 - \frac{1}{R_0}$$

Dakle udio procijepljene populacije p mora biti veći od $1 - \frac{1}{R_0}$ da bi se epidemija suzbila.

2.2 Kemrack MacKendrickova aproksimacija jednadžbi i egzaktnog rješenja

Vratimo se na sustav jednadžbi (2.2). Uzmimo prvu i treću jednadžbu te iz njih izrazimo funkciju $I(t)$:

$$I(t) = -\frac{S'(t)}{\alpha S(t)}, \quad I(t) = \frac{R'(t)}{\beta}.$$

Izjednačavanjem funkcija $I(t)$ i sređivanjem izraza dolazimo do:

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{R'(t)}{\gamma},$$

iz čega elementarnom integracijom sa $\int_0^t dt$ slijedi:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{S'(t)}{S(t)} dt &= - \int_0^t \frac{R'(t)}{\gamma} dt, \\ \ln(S(t)) \Big|_0^t &= -\frac{R(t) - R(0)}{\gamma}, \\ \ln(S(t)) - \ln(S(0)) &= -\frac{R(t) - R(0)}{\gamma}, \\ \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) &= -\frac{R(t) - R(0)}{\gamma}, \\ \frac{S(t)}{S(0)} &= e^{-\frac{R(t)-R(0)}{\gamma}}, \end{aligned}$$

odnosno uz $S(0) = S_0$ imamo:

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{R(t)-R(0)}{\gamma}}. \quad (2.17)$$

Analogno napravimo za drugu i treću jednadžbu iz sustava (2.2):

$$I(t) = \frac{I'(t)}{\alpha S(t) - \beta}, \quad I(t) = \frac{R'(t)}{\beta}.$$

Izjednačavanjem funkcija $I(t)$ i sređivanjem izraza dolazimo do:

$$I'(t) = -R'(t) + \frac{\alpha S(t)R'(t)}{\beta} = -R'(t) + \frac{S(t)R'(t)}{\gamma},$$

iz čega elementarnom integracijom sa $\int_0^t dt$ slijedi:

$$\begin{aligned} \int_0^t I'(t)dt &= - \int_0^t R'(t) + \int_0^t \frac{S(t)R'(t)}{\gamma} dt, \\ I(t) - I(0) &= -(R(t) - R(0)) - \int_0^t \frac{S(t)}{\gamma} \left(\frac{\gamma S'(t)}{S(t)} \right) dt, \\ I(t) - I(0) &= -(R(t) - R(0)) - \int_0^t S'(t)dt, \\ I(t) - I(0) &= -(R(t) - R(0)) - S(t) + S(0). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem (2.17), $S(0) = S_0$ i $I(0) = I_0$ u prethodnu jednakost imamo:

$$I(t) = I_0 + S_0(1 - e^{-\frac{R(t)-R(0)}{\gamma}}) - (R(t) - R(0)). \quad (2.18)$$

Definiramo novu varijablu:

$$P(t) = R(t) - R(0). \quad (2.19)$$

Vrijedi da je $P(0) = 0$ i $\frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt}$. Vraćanjem na jednažbu (2.18) imamo:

$$I(t) = I_0 + S_0(1 - e^{-\frac{P(t)}{\gamma}}) - P(t). \quad (2.20)$$

Pošto je $\frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt}$, a prema trećoj jednažbi sustava (2.2) je $\frac{dR}{dt} = \beta I$. Uvrštavanjem jednažbe (2.20) u $\frac{dR}{dt} = \beta I$ imamo transcidentalnu jednažbu:

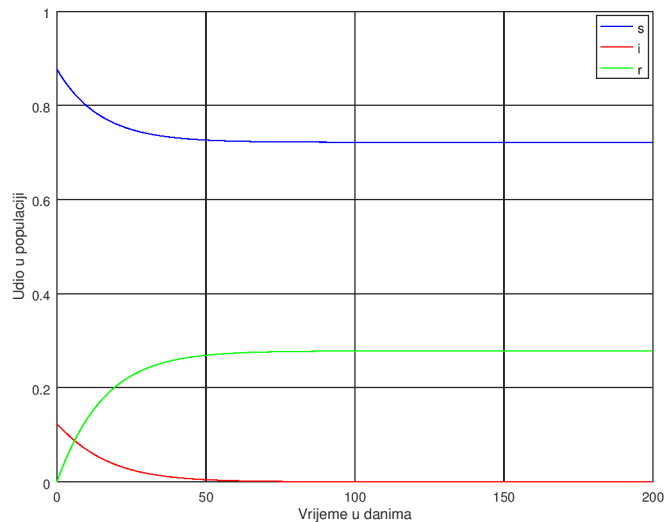
$$\frac{dP}{dt} = \beta \left[I_0 + S_0(1 - e^{-\frac{P(t)}{\gamma}}) - P(t) \right], \quad (2.21)$$

koja se ne može riješiti egzaktno. Međutim sve dok je $\frac{P}{\gamma} \ll 1$ tj. dok je $R(t)$ značajno ispod *praga epidemije* ($R(t) \ll \gamma$), eksponencijalnu funkciju možemo zamijeniti prikladnim Taylorovim redom.

Pogledajmo sada nekoliko primjera za koeficijent R_0 .

- Uzmimo $\alpha N = 0.1$, $\beta = \frac{1}{7}$

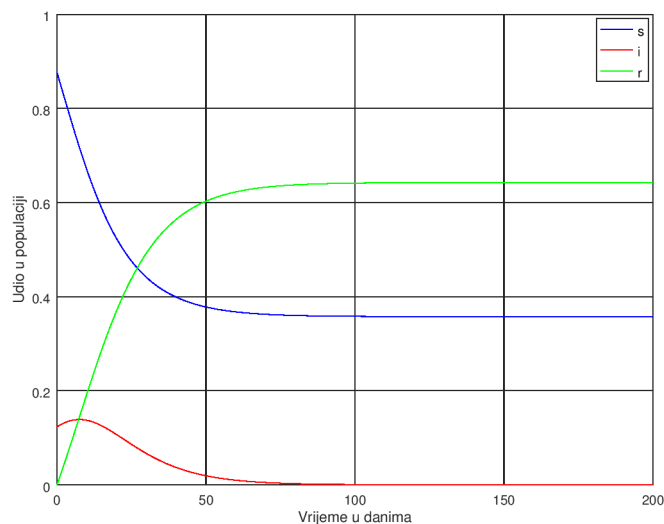
Tada je $R_0 = 0.7 < 1$ pa će epidemija odumirati. Za razliku od ostalih primjera gdje je početni broj zaraženih bio $I_0 = 1$, u ovom primjeru ćemo uzeti $I_0 = 500000$ radi bolje ilustracije odumiranja epidemije.



Slika 2.14: Graf za $I_0 = 500000$, $R_0 = 0.7$.

- Uzmimo $\alpha N = 0.2$, $\beta = \frac{1}{7}$

Tada je $R_0 = 1.4 > 1$ pa će se epidemija razviti. Pogledajmo kako se epidemija razvija za početni broj zaraženih $I_0 = 500000$.



Slika 2.15: Graf za $I_0 = 500000$, $R_0 = 1.4$.

Vratimo se sada na jednadžbu (2.21). Razvijmo eksponencijalnu funkciju $e^{-\frac{P}{\gamma}}$ u Taylorov red drugog stupnja:

$$e^{-\frac{P}{\gamma}} \approx 1 - \frac{P}{\gamma} + \frac{P^2}{2\gamma^2}.$$

Uvrstimo prethodni izraz u (2.21):

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \beta \left[I_0 + S_0 \left(1 - 1 + \frac{P}{\gamma} - \frac{P^2}{2\gamma^2} \right) - P \right], \\ &= \beta \left[I_0 + S_0 \frac{P}{\gamma} - S_0 \frac{P^2}{2\gamma^2} - P \right], \\ &= \beta \left[I_0 + P \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) - S_0 \frac{P^2}{2\gamma^2} \right], \\ &= \beta I_0 + \beta \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) P - \beta S_0 \frac{P^2}{2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Uvrstimo $\frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt}$ i $P(t) = R(t) - R(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \beta I_0 + \beta \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) (R(t) - R(0)) - \beta S_0 \frac{(R(t) - R(0))^2}{2\gamma^2}, \\ &= \beta \left(I_0 - R(0) \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) - S_0 \frac{R(0)^2}{2\gamma^2} \right) + \beta \left(\left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) + S_0 \frac{R(0)}{\gamma^2} \right) R(t) - \frac{\beta S_0}{2\gamma^2} R(t)^2. \end{aligned}$$

Odnosno dobili smo običnu diferencijalnu jednadžbu odlika:

$$R' = a + bR + cR^2, \quad (2.22)$$

gdje koeficijenti a , b i c imaju sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned} a &= \beta \left(I_0 - R(0) \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) - S_0 \frac{R(0)^2}{2\gamma^2} \right), \\ b &= \beta \left(\left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) + S_0 \frac{R(0)}{\gamma^2} \right), \\ c &= -\frac{\beta S_0}{2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Rješavanjem diferencijalne jednadžbe (2.22) u programskom paketu *Mathematica* dolazimo do općenite formule za rješenje:

$$R(t) = \frac{-b + \sqrt{-b^2 + 4ac} \cdot \text{th} \left(\sqrt{-b^2 + 4ac} t + C \sqrt{-b^2 + 4ac} \right)}{2c}, \quad (2.23)$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Uvrštavajući a , b i c u (2.23) prema istom programskom paketu *Mathematica* dolazimo do rezultata:

$$R(t) = \frac{\alpha^2}{S_0} \left[\left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) + k_1 \operatorname{th} \left(\frac{k_1 \beta}{2} t - k_2 \right) \right]. \quad (2.24)$$

Gdje su:

$$k_1 = \sqrt{\left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0}{\gamma^2} (N - S_0)}, \quad k_2 = k_1^{-1} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right).$$

Kao što smo i prije pretpostavili ne postoji pojedinac s prirodnim imunitetom stoga je $S_0 \approx N$, te $k_1 \approx \frac{S_0}{\gamma} - 1$, odnosno $k_1 \approx R_0 - 1$ jer je $\frac{S_0}{\gamma} = R_0$.

U slučaju da funkcija $R(t)$ ima oblik kao u (2.24), prema trećoj jednadžbi sustava (2.2) maksimum funkcije R' , a samim tim i funkcije I se postiže u t_* :

$$t_* = \frac{2 \operatorname{th}^{-1}(R_0 - 1)}{\beta(R_0 - 1)^2} \quad (2.25)$$

2.3 Rješenja KMK jednadžbi za male vremenske trenutke

U ovom poglavlju nas zanima inicijalna faza epidemije. U toj fazi dolazi do eksponencijalnog rasta funkcije $R(t)$, a dok smo na samom početku epidemije možemo razviti u red funkciju $e^{-\frac{P}{\gamma}}$ i to samo do prvog stupnja, odnosno:

$$e^{-\frac{P}{\gamma}} \approx 1 - \frac{P}{\gamma}.$$

Uvrštavajući prethodni izraz u jednadžbu (2.21) dobivamo:

$$\frac{dP}{dt} = \beta \left[I_0 + \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) P \right]. \quad (2.26)$$

Integracijom izraza sa $\int_0^t dt$ uz početni uvjet $P(0) = 0$ dolazimo do rješenja:

$$P(t) = I_0 \frac{e^{\beta \left(\frac{S_0}{\gamma} - 1 \right) t} - 1}{\frac{S_0}{\gamma} - 1}. \quad (2.27)$$

Prisjetimo se $\frac{S_0}{\gamma} - 1 = R_0 - 1$ pa iz prethodne jednadžbe dobivamo:

$$P(t) = \frac{I_0}{(R_0 - 1)} \left[e^{\beta(R_0 - 1)t} - 1 \right], \quad (2.28)$$

uz supstituciju (2.19) imamo:

$$R(t) = R(0) + \frac{I_0}{(R_0 - 1)} \left[e^{\beta(R_0 - 1)t} - 1 \right]. \quad (2.29)$$

Ovakva aproksimacija je dobra samo za dovoljno male t upravo zbog razvoja funkcije u red.

Do istog rezultata smo mogli doći i koristeći činjenicu da u početnoj fazi epidemije (za dovoljno male t) vrijedi $S(t) \approx S_0$. Sustav (2.2) SIR jednažbi se svodi na:

$$\frac{dI}{dt} = \beta(R_0 - 1)I, \quad (2.30)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I. \quad (2.31)$$

Rješavajući ovaj sustav dobivamo rješenje kao u (2.29).

2.4 Određivanje parametara za SIR model

Uočimo da u jednažbi (2.29) nijedan od parametara $\{\beta, R_0, I_0\}$ nije poznat. Parametar β može se direktno ocijeniti na temelju medicinskih podataka. Jednom kad fiksiramo vrijeme $t = 0$ podatak I_0 se može dobiti *a posteriori* promatrajući epidemiološke podatke sljedećih nekoliko dana koji ovise o β . Parametar R_0 ovisi o poznatom broju $S_0 \approx N$ te koeficijentu γ koji ovisi o β i α jer je $R_0 = \frac{S_0}{\gamma} = \frac{\alpha N}{\beta}$.

Da bi procijenili nepoznate parametre na temelju funkcije $R(t)$ možemo promatrati samo funkciju R ili njen logaritam.

- *Promatramo razvoj u red funkcije $R(t)$:*

Taylorov red drugog stupnja oko točke $t_0 = 0$ općenito ima oblik:

$$R(t) = r_0 + r_1 t + \frac{1}{2} r_2 t^2. \quad (2.32)$$

Razvojem u Taylorov red drugog stupnja funkcije $R(t)$ oko točke $t_0 = 0$ dobivamo:

$$R(t) \approx R(0) + R'(0)t + \frac{1}{2} R''(0)t^2.$$

Prema trećoj jednažbi sustava (2.2) očito je $R'(0) = \beta I(0) = \beta I_0$. Derivirajmo treću jednažbu sustava (2.2):

$$R''(t) = \beta I'(t).$$

Uvrštavanjem formule (2.30) za $t = 0$ imamo:

$$R''(0) = \beta^2 I_0 (R_0 - 1). \quad (2.33)$$

Sada Taylorov red drugog stupnja funkcije $R(t)$ oko točke $t_0 = 0$ izgleda:

$$R(t) \approx R(0) + (\beta I_0)t + \frac{1}{2}(\beta^2 I_0 (R_0 - 1))t^2. \quad (2.34)$$

Uspoređujemo razvoj (2.32) sa razvojem funkcije $R(t)$ iz jednadžbe (2.34). Izjednačavanjem jednadžbi (2.32) i (2.34) dobivamo:

$$R(0) = r_0, \quad I_0 = \frac{r_1}{\beta}, \quad R_0 = \frac{r_2}{r_1 \beta} + 1, \quad \gamma = \frac{\beta S_0 r_1}{\beta r_1 + r_2}. \quad (2.35)$$

- *Promatramo razvoj u red funkcije $\ln[R(t)]$:*

Taylorov red drugog stupnja oko točke $t_0 = 0$ općenito ima oblik:

$$\ln R(t) = A + Bt + \frac{C}{2}t^2. \quad (2.36)$$

Deriviranjem funkcije $\ln[R(t)]$ i uvrštavanjem treće jednadžbe sustava (2.2) u rezultat imamo:

$$(\ln[R(t)])' = \frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{\beta I(t)}{R(t)}.$$

Uvrštavanjem $t = 0$ u prethodni izraz dobijemo drugi član Taylorovog razvoja.

Dvostrukom derivacijom funkcije $\ln[R(t)]$ imamo:

$$(\ln[R(t)])'' = \left(\frac{R'(t)}{R(t)} \right)' = \frac{R''(t)R(t) - R'(t)R'(t)}{R(t)^2}. \quad (2.37)$$

Uvrštavanjem $t = 0$, jednadžbe (2.33) i $R'(0) = \beta I_0$ dobijemo i treći član Taylorovog razvoja u red.

Taylorov red drugog stupnja funkcije $\ln[R(t)]$ oko točke $t_0 = 0$ sada glasi:

$$\ln R(t) \approx \ln R(0) + \beta \frac{I_0}{R(0)}t - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta I_0}{R(0)} \right)^2 \left(1 - (R_0 - 1) \frac{R(0)}{I_0} \right) t^2. \quad (2.38)$$

Izjednačavanjem jednadžbi (2.36) i (2.38) dobivamo:

$$R(0) = e^A, \quad I_0 = \frac{B}{\beta} e^A, \quad R_0 = \frac{B^2 + 2C}{B\beta} + 1, \quad \gamma = \frac{\beta S_0 B}{\beta B + B^2 + 2C}. \quad (2.39)$$

Formule u (2.35) i (2.39) govore nam kako bi koeficijenti $R(0)$, I_0 , R_0 , γ trebali izgledati zavisno od naše procjene parametra β .

2.5 Kako bi se epidemija COVID-19 širila na osnovu podataka s početka epidemije

U ovom poglavlju ćemo opisati kako bi se širila virusna bolest COVID-19 u Republici Hrvatskoj. Za opis epidemije bitno je znati da je ukupna procijenjena populacija u Republici Hrvatskoj $N = 4058000$. Na osnovu formula (2.35) i (2.39) procijenimo koeficijente $R(0)$, I_0 , R_0 . Poznati su nam podaci da je cijela populacija u početku epidemije podložna zarazi, odnosno $S_0 = 4058000$ i da je period trajanja bolesti 14 dana, odnosno koeficijent $\beta = \frac{1}{14}$.

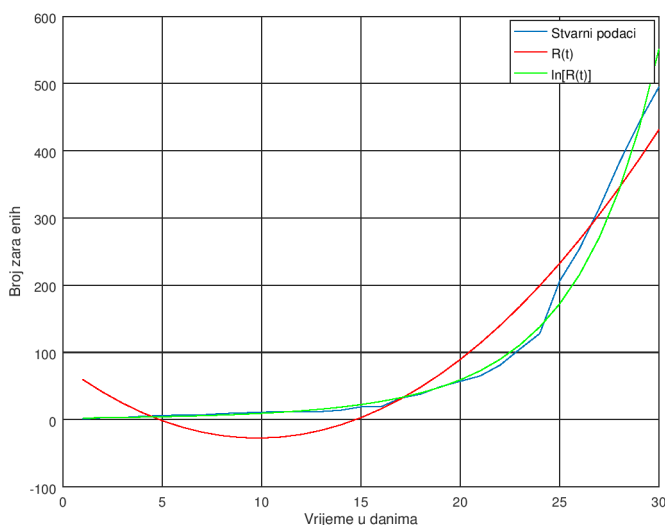
Prvi val epidemije

Prije svega trebamo aproksimirati funkciju ukupnog broja zaraženih R s kvadratnom funkcijom po vremenu t , kako nam sugerira jednačina (2.32). Funkciju R aproksimiramo na način da gledamo podatke o zaraženim osobama *a posteriori*. Pošto bolest traje 14 dana, tada će broj oporavljenih $R(t) = 0$ za $t \in \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ jer se u prvih 14 dana od izbijanja epidemije nitko neće oporaviti. Tek 15. dana od izbijanja epidemije ukupan broj ljudi koji će se oporaviti $R(15)$ jednak broju ljudi koji su zaraženi prvog dana, odnosno $I(1)$. Nadalje, 16. dana epidemije ukupan broj ljudi koji će se oporaviti od bolesti $R(16)$ jednak je ukupnom broju ljudi zaraženih u prva dva dana, odnosno $I(2)$ itd. Podaci o ukupnom broju oboljelih od početka epidemije dani su tablicom:

t	$R(t)$	$\ln[R(t)]$
1	1	0
2	3	1.099
3	3	1.099
4	5	1.609
5	6	1.792
6	7	1.946
7	7	1.946
8	9	2.197
9	10	2.303
10	11	2.398
11	12	2.485
12	12	2.485
13	12	2.485
14	14	2.639
15	19	2.945

Tablica 2.4: Novozaraženi u prvih 15 dana epidemije.

Sada imamo 15 točaka u kojima moramo aproksimirati kvadratni polinom $R(t)$, odnosno $\ln[R(t)]$ iz jednadžbe (2.32), odnosno iz jednadžbe (2.36). To ćemo uraditi metodom najmanjih kvadrata. Pogledajmo kako se metoda najmanjih kvadrata ponaša za funkcije $R(t)$ i $\ln[R(t)]$ u prvih 30 dana od izbijanja epidemije. Uzimamo period od 30 dana radi lakšeg uočavanja bolje aproksimacije za funkciju $R(t)$. Svi navedeni epidemiološki podaci o broju zaraženih po danima nalaze se na stranici u referenci [3].



Slika 2.16: Metoda najmanjih kvadrata za $R(t)$ i $\ln[R(t)]$ za prvih 30 dana epidemije

Možemo uočiti da će stvarne podatke o zaraženima bolje aproksimirati razvoj u red funkcije $\ln[R(t)]$, stoga ćemo izostaviti analizu razvoja funkcije $R(t)$.

- $\ln[R(t)] = A + Bt + \frac{1}{2}Ct^2$

U trećem stupcu Tablice 2.4 nalaze se podaci koje koristimo u metodi najmanjih kvadrata kako bi aproksimirali kvadratni polinom $\ln[R(t)]$ iz (2.35). Primjenom metode najmanjih kvadrata dobivamo:

$$A = 0.13876,$$

$$B = 0.35721,$$

$$\frac{C}{2} = -0.01268 \Rightarrow C = -0.02536.$$

Dakle imamo kvadratnu funkciju:

$$\ln[R(t)] = 0.13876 + 0.35721t - 0.01268t^2.$$

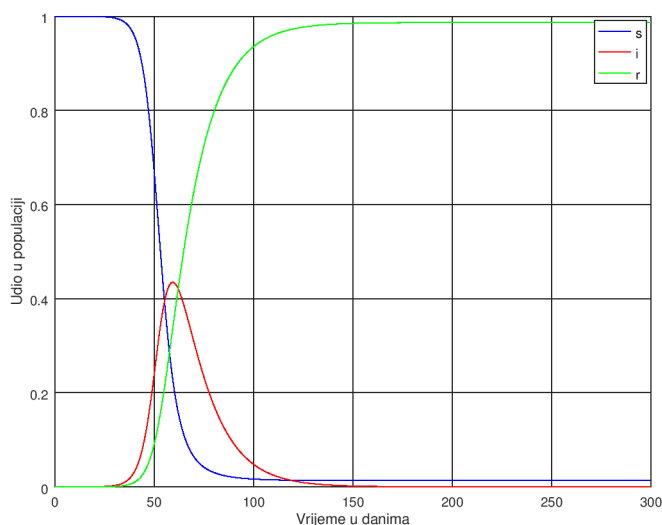
Prema jednadžbi (2.39) imamo:

$$\begin{aligned} R(0) &= e^A = 1.1478, \\ I_0 &= \frac{B}{\beta} e^A = 5.7402, \\ R_0 &= \frac{B^2 + 2C}{B\beta} + 1 = 4.4387, \end{aligned}$$

Uočimo da je $R_0 > 1$ pa će se epidemija razvijati. Kako bi smo došli do koeficijenta αN koji nam treba za grafički prikaz modela pogledajmo formulu $R_0 = \frac{\alpha N}{\beta}$. Iz te formule slijedi da je $\alpha N = 0.317$. Sada imamo početne podatke za normalizirani model.

$$r(0) = \frac{R(0)}{N} \approx 2.82 \cdot 10^{-7}, \quad i(0) = \frac{I(0)}{N} \approx 1.41 \cdot 10^{-6}, \quad s(0) = \frac{S(0)}{N} = 1$$

Te koeficijente $\alpha N = 0.317$ i $\beta = \frac{1}{14}$. Pogledajmo kako izgleda graf epidemije za prethodno navedene podatke:



Slika 2.17: Graf SIR modela na osnovu prvih 15 dana prvog vala epidemije za $\ln[R(t)]$.

Uočimo da epidemija završava 150 dana nakon pojave prvog slučaja. Prema jednadžbi (2.13) vrijedi $s(t_\infty) = 1.2484 \cdot 10^{-2}$. Numerički dobivamo rezultat $s(t_\infty) = 1.2493 \cdot 10^{-2}$ za $t_\infty \in [0, 300]$, dakle prema ovako dobivenim podacima epidemija je

završila unutar 150 dana i gotovo cijela populacija je bila zaražena $r(t_\infty) = 0.98751$, što se očito ne slaže sa stvarnim podacima. Prema (2.16) maksimalan udio zaražene populacije na vrhuncu epidemije je $i(t_*) = 0.43894$, dok je numerički $i(t_*) = 0.43842$. To znači da je na vrhuncu epidemije bilo zaraženo preko 43% populacije, što se također ne slaže sa stvarnim podacima.

Drugi val epidemije

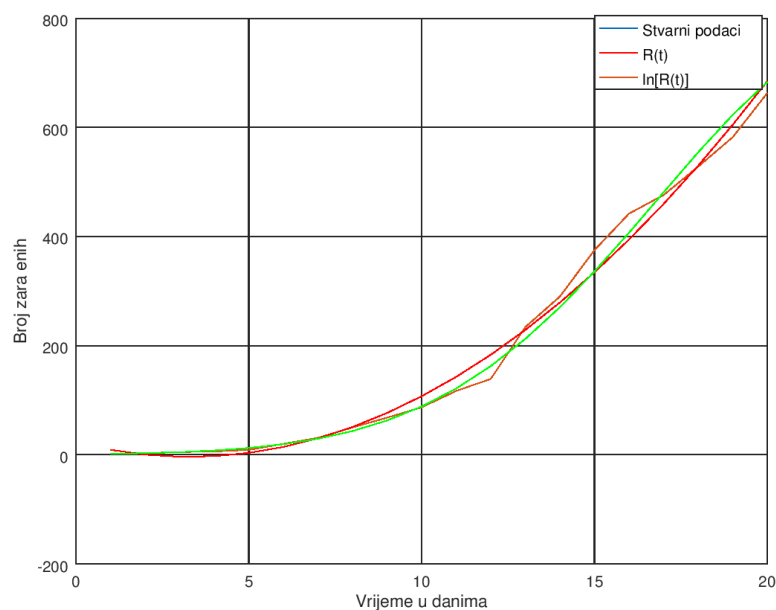
Drugi val epidemije počine 108 dana nakon izbijanja prvog vala epidemije. Pretpostavimo da od 108. dana kreće naš SIR model. Pretpostavka da u drugom valu epidemije možemo krenuti na isti način kao i kod početka zaraze je opravdana zbog toga što je u periodu od 88. do 108. dana bilo samo 6 novozaraženih pojedinaca. Stoga zanemarujući tih 6 novozaraženih pojedinaca pretpostavimo da su svi zaraženi 108. dana iz skupine I prešli u skupinu R . To je inače jaka pretpostavka, ali kako je u periodu od 88. do 108. dana zaraženo samo 6 novih pojedinaca, njihove oporavke možemo zanemariti. Prema podacima znamo da je $I(108) = 2249$. Stoga je $S_0 = N - I(108) = 4058000 - 2249 = 4055751$, odnosno promatrana populacija se smanjila. Period oporavka od bolesti i dalje je isti i iznosi $\beta = \frac{1}{14}$. Kao i kod prvog vala vrijedi da je $R(t) = 0$ za $t \in \{108, 109, \dots, 121\}$. Uz analogno induktivno zaključivanje kao kod prvog vala računamo $R(t)$ i $\ln[R(t)]$ za $t \in \{1, 2, \dots, 15\}$.

t	$R(t)$	$\ln[R(t)]$
1	2	0.693
2	3	1.099
3	5	1.609
4	6	1.792
5	9	2.197
6	20	2.996
7	31	3.434
8	50	3.912
9	68	4.219
10	87	4.466
11	117	4.762
12	139	4.935
13	234	5.455
14	290	5.670
15	375	5.927

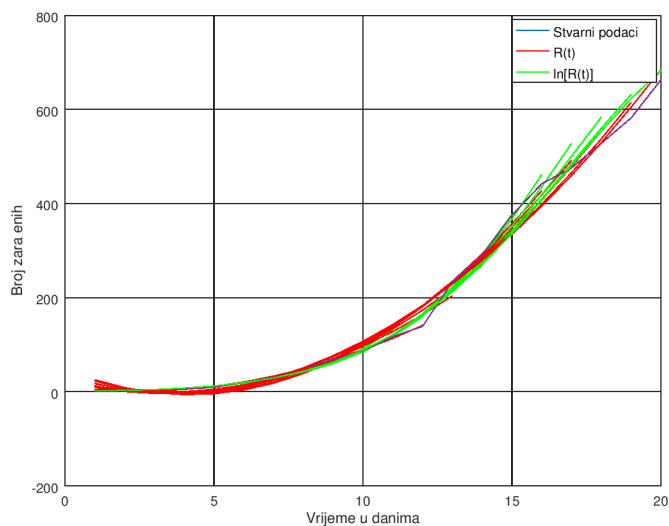
16	442	6.0913
17	476	6.1654
18	528	6.2691
19	582	6.3665
20	663	6.4968

Tablica 2.5: Oporavljeni u prvih 20 dana drugog vala epidemije.

Sada imamo 20 točaka u kojima moramo aproksimirati kvadratni polinom $R(t)$, odnosno $\ln[R(t)]$ iz jednadžbe (2.32), odnosno iz jednadžbe (2.36). Uz analogne razloge kao za prvi val pogledajmo kako izgleda aproksimacija funkcija $R(t)$ i $\ln[R(t)]$ metodom najmanjih kvadrata u prvih 20 dana drugog vala.

Slika 2.18: Metoda najmanjih kvadrata za $R(t)$ i $\ln[R(t)]$ za prvih 20 dana drugog vala epidemije

Možemo uočiti da će stvarne podatke o zaraženima dobro aproksimirati razvoj u red funkcije $R(t)$, ali i funkcije $\ln[R(t)]$. Iz tog razloga promatramo aproksimacije funkcija $R(t)$ i $\ln[R(t)]$ pomoću metode najmanjih kvadrata od 10. do 20. dana. Tada grafički dobivamo rezultat:



Slika 2.19: Metoda najmanjih kvadrata za $R(t)$ i $\ln[R(t)]$ od 10. do 20. dana drugog vala epidemije

Iz formule (2.35) dobivamo sljedeći set podataka $\{R(0), I_0, R_0\}$ za aproksimaciju funkcije $R(t)$ metodom najmanjih kvadrata od 1. do n . dana:

n	$R(0)$	I_0	R_0
10	9.9	-99.930	-1.92719
11	11.2727	-111.510	-1.77788
12	10.2045	-103.129	-1.89208
13	24.6014	-208.706	-1.07291
14	33.4890	-269.883	-0.87197
15	43.6308	-335.655	-0.72288
16	48.6286	-366.295	-0.66615
17	43.7353	-337.851	-0.72342
18	36.4240	-297.447	-0.83075
19	27.9422	-252.776	-0.99769
20	22.7851	-226.834	-1.12970

Tablica 2.6: Metoda najmanjih kvadrata za $R(t)$ od 1. do n . dana, $n \in \{10, \dots, 20\}$.

Iz Tablice 2.6 možemo uočiti da je aproksimacijom funkcije $R(t)$ dobiveni $R_0 < 0$ zbog toga što se kvadratna funkcija dobivena aproksimacijom pomoću metode najmanjih kva-

drata jedim dijelom nalazi ispod osi x , što se vidi na Slici 2.19. Očito je da aproksimacija funkcije $R(t)$ neće dati dobar opis epidemije.

Pomoću formule (2.39) dobivamo sljedeći set podataka $\{R(0), I_0, R_0\}$ za aproksimaciju funkcije $\ln[R(t)]$ metodom najmanjih kvadrata od 1. do n . dana:

n	$R(0)$	I_0	R_0
10	1.19176	7.6498	7.3750
11	1.10338	7.7997	7.8921
12	1.02251	7.8387	8.3961
13	1.04620	7.8446	8.2506
14	1.04233	7.8422	8.2730
15	1.04022	7.8400	8.2846
16	1.02498	7.8179	8.3657
17	0.99318	7.7573	8.5319
18	0.96563	7.6922	8.6746
19	0.94539	7.6364	8.7779
20	0.93869	7.6159	8.8113

Tablica 2.7: Metoda najmanjih kvadrata za $\ln[R(t)]$ od 1. do n . dana, $n \in \{10, \dots, 20\}$.

Uočimo da su $R(0), I_0, R_0 > 0$ pa su pretpostavke modela ispunjene. Također primijetimo da je $R_0 \in [7.375, 8.8113]$ stabilan, stoga ćemo za opis drugog vala epidemije uzeti aproksimaciju funkcije $\ln[R(t)]$.

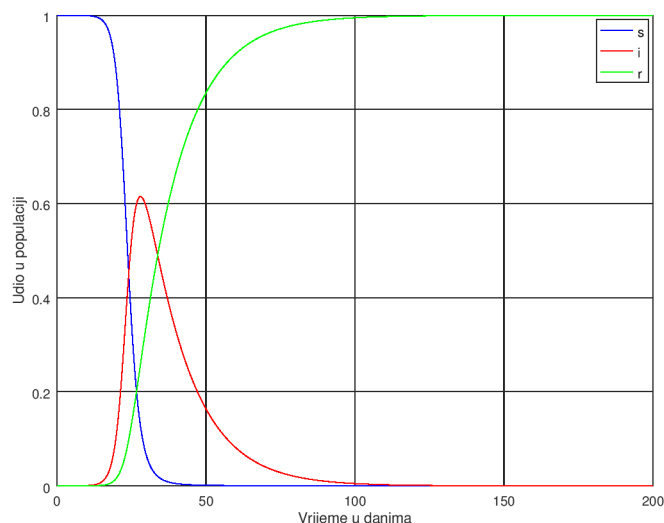
Uzimamo prosječne vrijednosti za $R(0), I_0$ i R_0 iz Tablice 2.7. Tada imamo set podataka:

$$\begin{aligned} R(0) &= 1.0286, \\ I_0 &= 7.7577, \\ R_0 &= 8.3303. \end{aligned}$$

Uočimo da je $R_0 > 1$ pa će se epidemija razvijati. Kako bi smo došli do koeficijenta αN koji nam treba za grafički prikaz modela pogledajmo formulu $R_0 = \frac{\alpha N}{\beta}$. Iz te formule slijedi da je $\alpha N = 0.595$. Sada imamo početne podatke za normalizirani model.

$$s(0) = 1, \quad i(0) = \frac{I_0}{N} = 1.91 \cdot 10^{-6}, \quad r(0) = \frac{R(0)}{N} = 2.53 \cdot 10^{-7}.$$

Te koeficijenti $\alpha N = 0.595$ te $\beta = \frac{1}{14}$. Tada dobivamo da se drugi val trebao širiti ovako:



Slika 2.20: Graf SIR modela na osnovu prvih 20 dana drugog vala epidemije za $R(t)$.

Uočimo da drugi val završava 130 dana nakon pojave prvog slučaja. Prema jednadžbi (2.13) vrijedi $s(t_\infty) = 2.41 \cdot 10^{-4}$. Numerički dobivamo rezultat $s(t_\infty) = 3.12 \cdot 10^{-4}$ za $t_\infty \in [0, 200]$, dakle prema ovako dobivenim podacima drugi val je završio unutar 130 dana i gotovo cijela populacija je bila zaražena $r(t_\infty) = 0.99969$, što se očito ne slaže sa stvarnim podacima. Prema (2.16) maksimalan udio zaražene populacije na vrhuncu epidemije je $i(t_*) = 0.62548$, dok je numerički $i(t_*) = 0.61487$. To znači da je na vrhuncu drugog vala epidemije bilo zaraženo preko 61% populacije, što se također ne slaže sa stvarnim podacima.

Zaključak

Prema epidemiološkim podacima iz prvog i drugog vala epidemije možemo zaključiti da prethodni način računanja koeficijenata ne daje dobre koeficijente samo na početku epidemije. Uvođenje epidemioloških mjera promijeni koeficijente, te nam model govori samo što bi se dogodilo da ne uvedemo nikakve epidemiološke mjere.

2.6 Kako će se epidemija COVID-19 širiti na osnovu koeficijenta strogosti mjera

U podacima iz reference [3] za COVID-19 u Republici Hrvatskoj navedeni su koeficijenti strogosti mjera. To je broj $\omega \in [0, 1]$. Ako je $\omega = 0$ to znači da u državi ne postoje nikakve mjere zaštite od virusne bolesti. Ukoliko je $\omega = 1$ to znači da su svi pojedinci izolirani, a samim tim svi kontakti svedeni na nulu. Tada će vrijediti da je i $\alpha N = 0$.

Prema referenci [3] koeficijent ω ovisi o devet parametara, a to su: zatvaranje škola, zatvaranje radnih mjesta, otkazivanje javnih okupljanja, restrikcije na privatna okupljanja, ukidanje javnog prijevoza, javna kampanja o važnosti mjera, obaveza samoizolacije, restrikcije kretanja unutar države te restrikcije međunarodnih putovanja. Podaci za Republiku Hrvatsku dani su u Tablici 2.8.

Prema epidemiološkim studijama iz reference [2] koeficijent $\alpha N = 0.2$ ukoliko se virus u populaciji širi slobodno (bez ikakvih mjera borbe protiv virusa). Sada definirajmo koeficijent αN sa formulom:

$$\alpha N = 0.2 \cdot (1 - \omega)$$

Ova formula ima smisla jer što su mjere strože ω će biti veći pa će $1 - \omega$ biti manji, a to povlači da će i αN biti manji. Znamo da će se epidemija širiti ako je $R_0 > 1$, odnosno $\alpha N > \beta = 1/14 = 0.07143$. U sljedećoj tablici možemo uočiti da će za primjenu strogih mjera u borbi protiv virusa αN biti dovoljno mali da $R_0 < 1$, odnosno da epidemija odumire.

t	ω	αN
1-15	0.1389	0.17222
15-19	0.2222	0.15556
19-20	0.3148	0.13704
20-21	0.3704	0.12592
21-22	0.3981	0.12038
22-24	0.4167	0.11666
24-25	0.4444	0.11112
25-26	0.5000	0.10000
26-27	0.6666	0.06668
27-29	0.7778	0.04444
29-64	0.9630	0.00740
64-78	0.8981	0.02038
78-92	0.7037	0.05926

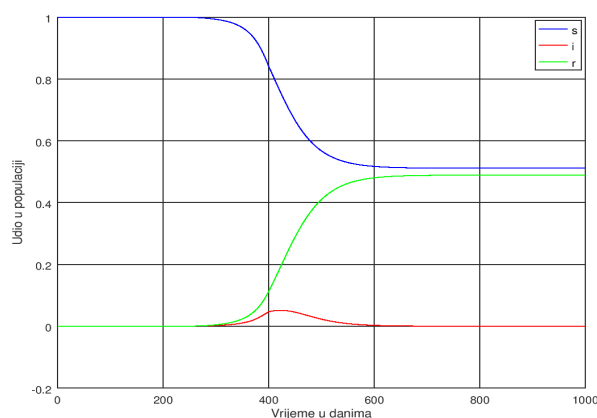
t	ω	αN
92-95	0.5370	0.09260
95-110	0.5093	0.09814
110-138	0.5469	0.09062
138-144	0.4907	0.10186
144-150	0.4630	0.10740
150-196	0.3519	0.12962
196-244	0.2870	0.14260
244-269	0.3148	0.13704
269-276	0.3889	0.12222
276-291	0.4722	0.10556
291-325	0.5093	0.09814
325-365	0.4722	0.10556
365-400	0.4352	0.11296
400-425	0.5278	0.09444

Tablica 2.8: Podaci o strogoći mjera ω i koeficijentu αN u prvih 425 dana epidemije.

Sada ćemo definirati αN kao step funkciju kroz cijeli period trajanja epidemije. Za početne podatke uzimamo:

$$s(0) = 1, \quad r(0) = 0, \quad i(0) = 1/N.$$

- Prva pretpostavka: pretpostavimo da će se od 425. dana epidemije primjenjivati ista razina mjera kao od 420. do 425. dana epidemije.



Slika 2.21: Procjena za nastavak istih mjera.

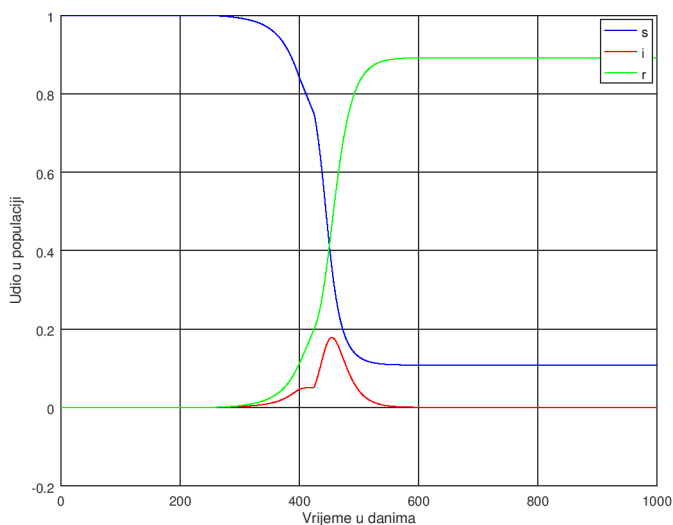
Uočimo da u ovom primjeru epidemija traje 600 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.51116	0.05116	0.48884

Tablica 2.9: Rezultati sa Slike 2.21.

Nakon prestanka cijele epidemije udio populacije koja će ostati podložna zarazi je $s(t_\infty) = 0.51116$, odnosno približno $S(t_\infty) = s(t_\infty)N = 2074288$ pojedinaca. Ukupan udio populacije koji je bio zaražen će biti $r(t_\infty) = 0.48884$, odnosno približno $R(t_\infty) = r(t_\infty)N = 1983712$ pojedinaca. Na vrhuncu epidemije udio zaražene populacije u ukupnoj populaciji je $i(t_*) = 0.05116$, odnosno na vrhuncu epidemije će biti zaraženo $I(t_*) = i(t_*)N \approx 207428$ pojedinaca.

- Druga pretpostavka: pretpostavimo da će se nakon 425. dana sve mjere ukinuti. Tada dobivamo graf:



Slika 2.22: Procjena za ukidanje mjera

Uočimo da u ovom primjeru epidemija također traje 600 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

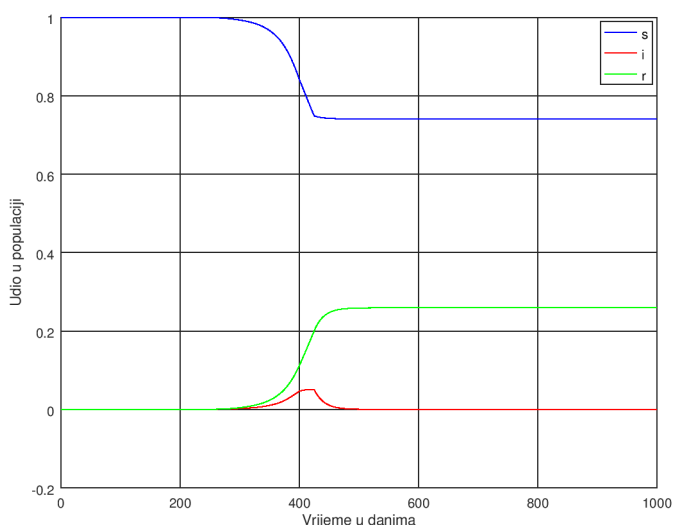
Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.10787	0.17824	0.89213

Tablica 2.10: Rezultati sa Slike 2.22.

Nakon prestanka cijele epidemije udio populacije koja će ostati podložna zarazi je $s(t_\infty) = 0.10787$, odnosno nešto više od 437764 pojedinca. Ukupan udio populacije koji je bio zaražen će biti $r(t_\infty) = 0.89213$, odnosno približno 3620263 pojedinca. Na vrhuncu epidemije udio zaražene populacije u ukupnoj populaciji je $i(t_*) = 0.17824$, odnosno na vrhuncu epidemije će biti zaraženo $I(t_*) = i(t_*)N \approx 723298$ pojedinaca. Možemo zaključiti da će ukidanje mjera zaštite od COVID-19 značajno pogoršati epidemiološku situaciju na vrhuncu epidemije, ali neće utjecati na trajanje epidemije.

- Treća pretpostavka: od 425. dana epidemije uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine (točnije 23.3.2020.)

Tada imamo sljedeći graf:



Slika 2.23: Procjena za uvođenje strogih mjera

U tom slučaju epidemija traje puno kraće i završava 475. dana. Također vidljivo je da će udio populacije koja je preboljela virus biti manji. Analogno kao i kod ostalih primjera pogledajmo numeričke rezultate:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.74078	0.05116	0.25913

Tablica 2.11: Rezultati sa Slike 2.23.

Nakon prestanka cijele epidemije udio populacije koja će ostati podložna zarazi je $s(t_\infty) = 0.74078$, odnosno približno $S(t_\infty) = 3006085$ pojedinaca. Ukupan udio populacije koji je bio zaražen je $r(t_\infty) = 0.25913$, odnosno približno $R(t_\infty) = 1051550$ pojedinaca. Na vrhuncu epidemije udio zaražene populacije u ukupnoj populaciji je $i(t_*) = 0.05116$, odnosno na vrhuncu epidemije će biti zaraženo $I(t_*) = i(t_*)N \approx 207428$ pojedinaca. Možemo zaključiti da će uvođenje strogih mjera zaštite od COVID-19 značajno smanjiti trajanje epidemije, ali će na vrhuncu epidemije i dalje biti jednak udio zaraženih u cijeloj populaciji kao kod prve pretpostavke.

Poglavlje 3

A-SIR model

U ovom poglavlju opisujemo epidemiju koju karakterizira veliki broj oboljelih koji nemaju simptome, ali su i dalje zarazni. Veliki broj asimptomatskih slučajeva odražava se na dinamiku epidemije na dva načina:

- a) Asimptomatski slučajevi šire zarazu bez mjera opreza i ulaze u kontakte s ljudima koji također ne poštuju mjere opreza.
- b) Pod pretpostavkom trajnog imuniteta, oporavljeni pojedinac pridonosi kolektivnom imunitetu koji se dostiže kada populacija (S) podložnih zarazi padne ispod *praga epidemije*.

3.1 Osnovno o modelu

Ovaj model iz reference [2] uzima sve pretpostavke SIR modela koje se odnose na ponašanje pojedinca i karakteristike virusa opisane u Poglavlju 2. U ovome modelu pretpostavit ćemo trajni imunitet pojedinca koji je bio zaražen (prešao iz populacije I u populaciju R). Pretpostavit ćemo kao i u osnovnom SIR modelu da su zaraženi istog trenutka i zarazni. Promatramo konstantnu populaciju N čiji je opis dan u osnovnom SIR modelu. Jedina razlika ovog modela je u tome što se klase I (zaraženi i zarazni) i R (oporavljeni, umrli, izolirani) dijele u dvije klase. Prvu klasu populacije I označimo istom oznakom $I(t)$ i ona predstavlja simptomatske slučajeve te $J(t)$ koja predstavlja asimptomatske slučajeve. Prvu klasu populacije R označimo istom oznakom $R(t)$ i ona predstavlja dio populacije R koji je imao simptome. Drugu klasu populacije R označimo sa $U(t)$ i ona će predstavljati dio populacije R koji je bio asimptomatski zaražen. Simptomatski zaraženi pojedinci će biti izolirani ili u bolnici i prelaze iz klase I u R uz *stopu uklanjanja* β . Asimptomatski zaraženi pojedinci

prelaze iz klase J u klasu U uz stopu uklanjanja $\eta \ll \beta$. To implicitno znači da za prosječna vremena oporavka od bolesti vrijedi sljedeće: $\eta^{-1} \gg \beta^{-1}$.

Pretpostavimo da će zaraženi pojedinac s vjerojatnošću ξ pripadati klasi I te s vjerojatnošću $1 - \xi$ pripadati klasi J .

Pošto je populacija konstanta vrijedi: $N = S + I + J + U + R$. Tada će naš A-SIR (Asimptomatski-SIR) model izgledati:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha S(I + J), \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha\xi S(I + J) - \beta I, \\ \frac{dJ}{dt} &= \alpha(1 - \xi)S(I + J) - \eta J, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I, \\ \frac{dU}{dt} &= \eta J.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Pojasnimo jednadžbe iz A-SIR modela:

- Prva jednadžba

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S(I + J),$$

govori nam kako promjena broja pojedinaca podložnih zarazi S u vremenu t , odnosno $\frac{dS}{dt}$ ovisi o broju pojedinaca koji su podložni zarazi S , broju već zaraženih pojedinaca (simptomatski i asimptomatski) $(I + J)$ te koeficijentu α . Koeficijent α predstavlja stopu incidencije, odnosno udio ljudi koje jedan zaraženi pojedinac zarazi u jednom danu. Također uočimo minus na desnoj strani jednadžbe koji predstavlja smanjenje brojnosti populacije podložne zarazi.

- Druga jednadžba

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\xi S(I + J) - \beta I,$$

govori nam kako promjena broja simptomatski zaraženih pojedinaca I u vremenu t , odnosno $\frac{dI}{dt}$ ovisi o izrazu $\alpha\xi S(I + J)$ koji predstavlja sve one pojedince koji su iz skupine S prešli u skupinu I . Izraz $-\beta I$ govori nam kojom se brzinom brojnost populacije I smanjuje. Koeficijent β je stopa uklanjanja i interpretiramo ga analogno kao i u SIR modelu.

- Treća jednađžba

$$\frac{dJ}{dt} = \alpha(1 - \xi)S(I + J) - \eta J,$$

govori nam kako promjena broja asimptomatski zaraženih pojedinaca J u vremenu t , odnosno $\frac{dJ}{dt}$ ovisi o izrazu $\alpha(1 - \xi)S(I + J)$ koji predstavlja sve one pojedince koji su iz skupine S prešli u skupinu J . Izraz $-\eta J$ govori nam kojom se brzinom brojnost populacije J smanjuje te analogno kao kod populacije I koeficijent η je stopa uklanjanja.

- Četvrta jednađžba

$$\frac{dR}{dt} = \beta I,$$

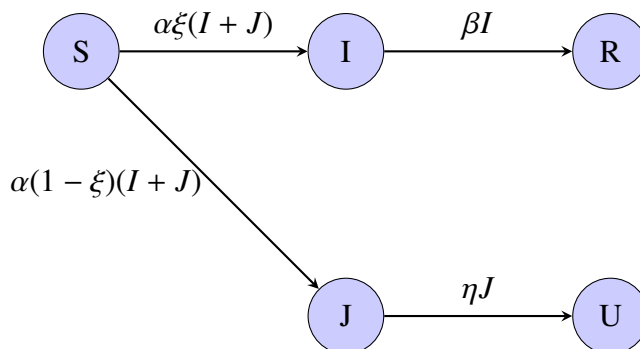
govori nam kako promjena populacije R ovisi samo o koeficijentu β i broju simptomatski zaraženih I . Pozitivan predznak znači da brojnost populacije R raste.

- Peta jednađžba

$$\frac{dU}{dt} = \eta J,$$

govori nam kako promjena populacije U ovisi samo o koeficijentu η i broju asimptomatski zaraženih J . Pozitivan predznak znači da brojnost populacije U raste.

- Shematski prikaz A-SIR modela



Ako zbrojimo sve jednađžbe sustava (3.1) imamo:

$$\frac{d}{dt}(S + I + J + U + R) = \frac{dN}{dt} = 0,$$

odnosno populacija N je konstantna što je i bila pretpostavka modela.

- Normalizirani sustav (3.1):

Uvedimo nove nepoznanice s, i, j, u, r :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad j(t) = \frac{J(t)}{N}, \quad u(t) = \frac{U(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}.$$

Uvrštavanjem prethodnih nepoznanica u sustav (3.1) dobivamo normalizirani sustav:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\alpha N s(i + j), \\ \frac{di}{dt} &= \alpha N \xi s(i + j) - \beta i, \\ \frac{dj}{dt} &= \alpha N (1 - \xi) s(i + j) - \eta j, \\ \frac{dr}{dt} &= \beta i, \\ \frac{du}{dt} &= \eta j. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Normalizirani sustav (3.2) ćemo koristiti kod simulacija modela. Uočimo da je normalizirani sustav (3.2) sličan sustavu (3.1), ali sa jednom bitnom razlikom: Koeficijent αN predstavlja broj ljudi koje jedan zaraženi pojedinac zarazi u jednom danu.

Posljednje dvije jednačbe sustava (3.1) daju nam integrale:

$$\begin{aligned} R(t) &= R(0) + \beta \int_0^t I(\tau) d\tau, \\ U(t) &= U(0) + \eta \int_0^t J(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Stoga ih možemo smatrati "rekonstrukcijskim jednačbama", pa ćemo se u idućem poglavlju usredotočiti na prve tri jednačbe u formuli (3.1).

Alternativni zapis formule (3.1)

Definiramo ukupan broj zaraženih sa:

$$K(t) = I(t) + J(t). \tag{3.4}$$

Omjer simptomatskih slučajeva zaraze i ukupnog broja slučajeva definiramo sa:

$$x(t) = \frac{I(t)}{K(t)}, \tag{3.5}$$

tada je očito omjer između asimptomatskih slučajeva zaraze i ukupnog broja slučajeva jednak:

$$y(t) = 1 - x(t).$$

U terminima novih varijabli pogledajmo kako izgledaju druga i treća jednažba sustava (3.1):

$$\frac{dI}{dt} = \alpha\xi S K - \beta I, \quad \frac{dJ}{dt} = \alpha(1 - \xi)S K - \eta J.$$

Iz jednažbe (3.4) očito je:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dI}{dt} + \frac{dJ}{dt}.$$

Stoga zbrajanjem prethodnih izraza dolazimo do jednažbe:

$$\frac{dK}{dt} = \alpha S K - \beta I - \eta J.$$

Uvrštavanjem jednažbe (3.5) u prethodni izraz dobivamo:

$$\frac{dK}{dt} = \alpha S K - [\beta x + \eta(1 - x)] K.$$

Preostaje nam još zapisati $x(t)$ u terminima novih varijabli. Derivacijom jednažbe (3.5) po t imamo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{I'(t)K(t) - I(t)K'(t)}{K^2(t)}.$$

Uvrštavanjem $\frac{dI}{dt}$ iz druge jednažbe sustava (3.1) i $\frac{dK}{dt} = \frac{dI}{dt} + \frac{dJ}{dt}$ te raspisom dolazimo do jednažbe za $x(t)$ koja glasi:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha S (\xi - x) - (\beta - \eta)(1 - x).$$

Konačno, sustav (3.1) u terminima novih varijabli glasi:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\alpha S K, \\ \frac{dK}{dt} &= \alpha S K - [\beta x + \eta(1 - x)] K, \\ \frac{dx}{dt} &= \alpha S (\xi - x) - (\beta - \eta)(1 - x). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Iz posljednje jednažbe očito je koeficijent x dinamička varijabla.

3.2 Dinamika A-SIR modela

Vratimo se na jednadžbu (3.1). Uočimo da će se $I(t)$ povećavati sve dok je uvjet: $\alpha\xi S(I + J) > \beta I$ zadovoljen, dakle sve dok je:

$$S > \gamma_1 := \frac{1}{\xi} \frac{\eta}{\alpha} \frac{I}{J+I} = \frac{x}{\xi} \frac{\beta}{\alpha}. \quad (3.7)$$

Stoga kao i u prethodnom poglavlju koeficijent γ_1 zovemo *pragom epidemije* i on ovisi o fiksnim parametrima ξ, α, β i o varijabli x definiranoj u (3.5).

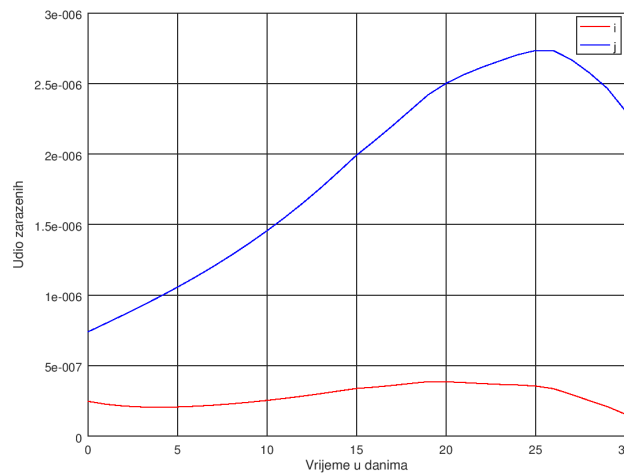
Slično prethodnom, broj asimptomatskih slučajeva zaraze $J(t)$ će rasti sve dok je zadovoljen izraz $\alpha(1 - \xi)S(I + J) > \eta J$, odnosno:

$$S > \gamma_2 := \frac{1}{1 - \xi} \frac{\eta}{\alpha} \frac{J}{J+I} = \frac{1 - x}{1 - \xi} \frac{\eta}{\alpha}. \quad (3.8)$$

pa će *prag epidemije* γ_2 ovisiti o fiksnim parametrima ξ, η, α i o varijabli $y(t) = 1 - x(t)$. Vrijedi:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1 - \xi}{\xi} \frac{\beta}{\alpha} \frac{I}{J} = \frac{1 - \xi}{\xi} \frac{\beta}{\eta} \frac{x}{1 - x}. \quad (3.9)$$

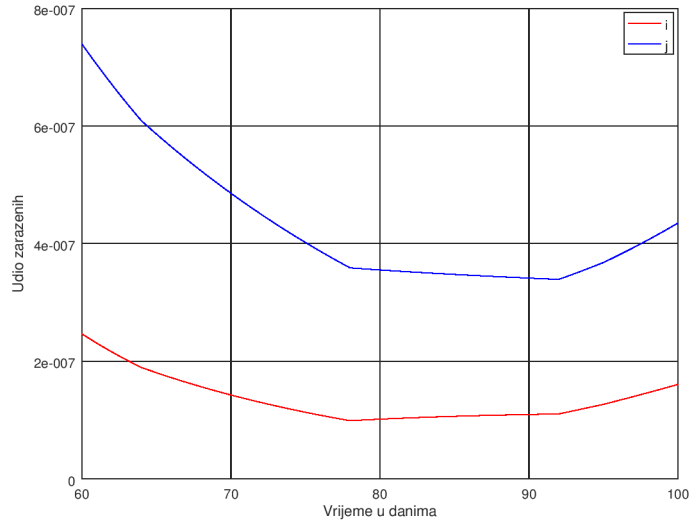
Kako očekujemo da je $\xi < 0.5$ i $\beta > \eta$, a s druge strane $I < J$ pa je $x < 1 - x$, pa ne možemo tvrditi da su γ_1 i γ_2 proporcionalni. To znači da ćemo imati situacija kada će se I odnosno $i = \frac{I}{N}$ smanjivati, a J odnosno $j = \frac{J}{N}$ rasti ili obrnuto. Pogledajmo primjer jedne takve situacije.



Slika 3.1: Graf funkcija i i j za $\beta = \frac{1}{3}$, $\eta = \frac{1}{14}$, $\xi = \frac{1}{3}$.

U prethodnom grafu smo koristili podatke koji nemaju stvarnu primjenu na COVID-19, a u svrhu pokazivanja jednog takvog slučaja. Uočimo da u prvih 5 dana funkcija i pada, dok funkcija j raste. Također od 19. do 26. dana funkcija i pada, dok funkcija j raste.

Pogledajmo sada obrnuti primjer.



Slika 3.2: Graf funkcija i i j za $\beta = \frac{1}{13}$, $\eta = \frac{1}{18}$ i $\xi = \frac{1}{3}$.

U ovom slučaju vrijednost funkcije i od 78. dana epidemije raste, dok vrijednost funkcije j i dalje pada.

U početku epidemije, dok su vremena uklanjanja β i η još nepoznati imamo da je: $J \approx \frac{1-\xi}{\xi}I$ stoga i $1-x \approx \frac{1-\xi}{\xi}x$ pa imamo:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \approx \frac{\beta}{\eta} > 1. \quad (3.10)$$

U slučaju virusne bolesti COVID-19 poznato je da je period inkubacije prosječno 5.1 dana pa su vrijeme uklanjanja i vrijeme oporavka $\beta^{-1} \approx 5-7$ dana i $\eta^{-1} \approx 14-21$ dana, prema referenci [2]. Kao što je spomenuto u uvodu koeficijent ξ je još uvijek predmet rasprava, ali prema današnjim podacima, iz reference [2], smatra se da on iznosi $\xi = \frac{1}{3}$.

3.3 Rana dinamika epidemije

Uz pretpostavku da je $S(t) \approx S_0$ u ranoj fazi epidemije, sustav jednažbi (3.1) svodi se na sustav koji se sastoji od dvije linearne jednažbe s konstantnim koeficijentima:

$$\frac{dI}{dt} = (\alpha\xi S_0 - \beta)I + \alpha\xi S_0 J, \quad (3.11)$$

$$\frac{dJ}{dt} = [\alpha(1 - \xi)S_0]I + [\alpha(1 - \xi)S_0 - \eta]J, \quad (3.12)$$

i integrala definiranih u (3.3). Stoga se u ovom slučaju lagano dolazi do analitičkog rješenja. Nakon toga dolazimo do funkcija $R(t)$ i $U(t)$.

3.4 Određivanje parametara za A-SIR model

Radi procjene nepoznatih parametara α, β , kao i kod SIR modela (poglavlje 2.5) promatramo razvoj u red funkcija $R(t)$ i $\ln R(t)$:

- *Razvojem u red funkcije $R(t)$*

Taylorov red drugog stupnja oko točke $t_0 = 0$ općenito ima oblik:

$$R(t) = r_0 + r_1 t + \frac{1}{2} r_2 t^2. \quad (3.13)$$

Deriviranjem četvrte jednažbe sustava (3.1) imamo da je $R''(t) = \beta I'(t)$. Uvrštavanjem jednažbe (3.11) u posljednji izraz dobivamo:

$$R''(t) = \beta [\alpha(I(t) + J(t))S_0\xi - \beta I(t)]. \quad (3.14)$$

Za $t = 0$ iz (3.14) dobivamo treći koeficijent Taylorovog reda r_2 . Koeficijenti r_0 i r_1 dobiju se direktno uvrštavanjem $t = 0$, odnosno derivacijom funkcije $R(t)$ i uvrštavanjem $t = 0$.

Razvojem u Taylorov red drugog stupnja funkcije $R(t) = \beta I(t)$ oko točke $t_0 = 0$ dobivamo:

$$R(t) \approx R(0) + \beta I_0 t + \frac{1}{2} \beta [\alpha(I_0 + J_0)S_0\xi - \beta I_0] t^2. \quad (3.15)$$

Izjednačavanjem jednažbe (3.13) sa njenim razvojem u red (3.15) dobivamo koeficijente:

$$R(0) = r_0, \quad I_0 = \frac{r_1}{\beta}. \quad (3.16)$$

Koeficijent $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ jer je u početku epidemije:

$$\gamma = \gamma_1(0) = \frac{x(0)\beta}{\xi\alpha}.$$

Prisjetimo se iz (3.5) da je $x(t) = \frac{I(t)}{K(t)}$ pa je $x(0) = \frac{I(0)}{K(0)}$, odnosno $x(0)$ je udio simptomatski zaražene populacije u trenutku $t = 0$, odnosno $x(0) = \xi$. Tada imamo:

$$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Preostaje odrediti koeficijent γ . Znamo da je:

$$r_2 = \beta[\alpha S_0 \xi (I_0 + J_0) - \beta I_0].$$

Pošto je prema (3.4) $I_0 + J_0 = I(0) + J(0) = K(0)$, odnosno $K(0)$ je ukupan broj zaraženih u trenutku $t = 0$. Tada će $K(0)\xi = I(0)$ jer je ξ vjerojatnost da zaraženi pojedinac pripada skupini I u bilo kojem trenutku, samim time i u trenutku $t = 0$. Tada imamo:

$$r_2 = \beta[\alpha I_0 S_0 - \beta I_0].$$

Prema (3.16) vrijedi $I_0 = \frac{r_1}{\beta}$, odnosno:

$$\begin{aligned} r_2 &= \beta \left[\frac{\alpha S_0 r_1}{\beta} - \frac{r_1 \beta}{\beta} \right], \\ r_2 &= \alpha S_0 r_1 - \beta r_1, \\ \alpha S_0 r_1 &= r_2 + \beta r_1, & \left| : \beta \right. \\ \frac{S_0 r_1}{\gamma} &= \frac{r_2}{\beta} + r_1, \\ \frac{S_0 r_1}{\gamma} &= \frac{\beta r_1 + r_2}{\beta}, & \left| : S_0 r_1 \right. \\ \frac{1}{\gamma} &= \frac{\beta r_1 + r_2}{\beta S_0 r_1}, \\ \gamma &= \frac{\beta S_0 r_1}{\beta r_1 + r_2} \end{aligned}$$

Odnosno, γ je isti kao u jednadžbi (2.35).

- *Razvojem u red funkcije $\ln[R(t)]$*

Taylorov red drugog stupnja oko točke $t_0 = 0$ općenito ima oblik:

$$\ln[R(t)] = A + Bt + \frac{C}{2}t^2, \quad (3.17)$$

Dvostrukom derivacijom funkcije $\ln[R(t)]$ imamo:

$$(\ln[R(t)])'' = \left(\frac{R'(t)}{R(t)}\right)' = \frac{R''(t)R(t) - R'(t)R'(t)}{R(t)^2}. \quad (3.18)$$

Sada uvrštavanjem (3.14) u (3.18) i uzimanjem $t = 0$ dobivamo treći koeficijent Taylorovog razvoja C . Koeficijenti A i B dobiju se direktno uvrštavanjem $t = 0$, odnosno derivacijom funkcije $\ln[R(t)]$ i uvrštavanjem $t = 0$.

Razvojem u Taylorov red drugog stupnja funkcije $\ln[R(t)]$ oko točke $t_0 = 0$ dobivamo:

$$\ln R(t) \approx \ln R(0) + \frac{I_0}{R(0)}\beta t + \frac{1}{2} \frac{[\alpha(I_0 + J_0)R(0)S_0\xi - \beta I_0(I_0 + R(0))]}{R(0)^2} t^2. \quad (3.19)$$

Uspoređujući jednadžbe (3.19) i (3.17) možemo izraziti parametre $R(0)$, I_0 i $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$.

Pošto su novozaraženi s vjerojatnošću ξ u klasi I i s vjerojatnošću $1 - \xi$ u klasi J , prirodno je uzeti početni uvjet:

$$J_0 = \left(\frac{\xi}{1 - \xi}\right) I_0. \quad (3.20)$$

Konačno, dobivamo:

$$R(0) = e^A, \quad I_0 = \frac{B}{\beta} e^A, \quad \gamma = \frac{\beta S_0 B}{\beta B + B^2 + 2C}. \quad (3.21)$$

Jednadžbe (3.16) i (3.21) govore nam kako bi trebali izgledati parametri $R(0)$, I_0 i γ , zavisno od naše procjene parametara α i β .

3.5 Kako će se epidemija COVID-19 širiti na osnovu koeficijenta strogosti mjera

Poznati su nam podaci da je cijela populacija u početku epidemije podložna zarazi, odnosno $S_0 = 4058000$. Pošto je period inkubacije virusa prosječno 5.1 dan, uzmimo da je koeficijent $\beta = \frac{1}{7}$. Razlog zašto smo uzeli 7 dana leži u tome da će od pojave simptoma (nakon perioda inkubacije) do potvrde bolesti proći prosječno 1.9 dana. Stoga će simptomatski zaraženi pojedinac prvih 7 dana širiti bolest po koeficijentu αN , nakon čega će biti

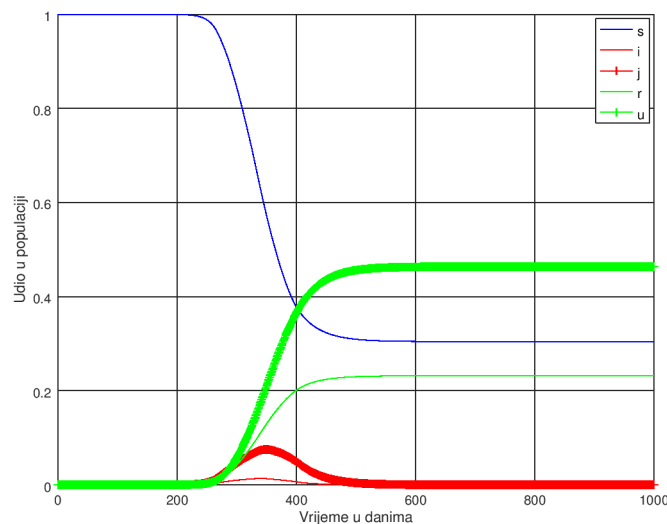
potpuno izoliran od populacije (iako će i dalje biti zarazan). Odnosno nakon što je izoliran, simptomatski zaraženi pojedinac će širiti bolest uz koeficijent $\alpha N = 0$ (neće širiti zarazu). Asimptomatski zaraženi pojedinac neće biti svjestan da ima virusnu bolest stoga će i dalje biti u zaraženoj populaciji 21 dan, odnosno dok ne preboli virusnu bolest. Njegova stopa uklanjanja je $\eta = \frac{1}{21}$. Preostaje nam još odrediti koeficijent ξ , odnosno vjerojatnost da će zaraženi pojedinac imati simptome. Sada pogledajmo ASIR model za različite vrijednosti parametra ξ .

Uz analognu interpretaciju i podatke kao iz SIR modela za početne podatke uzimamo:

$$s(0) = 1, \quad r(0) = 0, \quad i(0) = 1/N, \quad j(0) = 3i(0), \quad u(0) = 3r(0).$$

Te koeficijente αN iz Tablice 2.8, $\beta = \frac{1}{7}$, $\eta = \frac{1}{21}$, $\xi = \frac{1}{3}$.

- Prva pretpostavka: pretpostavimo da će se od 425. dana epidemije primjenjivati ista razina mjera kao od 420. do 425. dana epidemije.



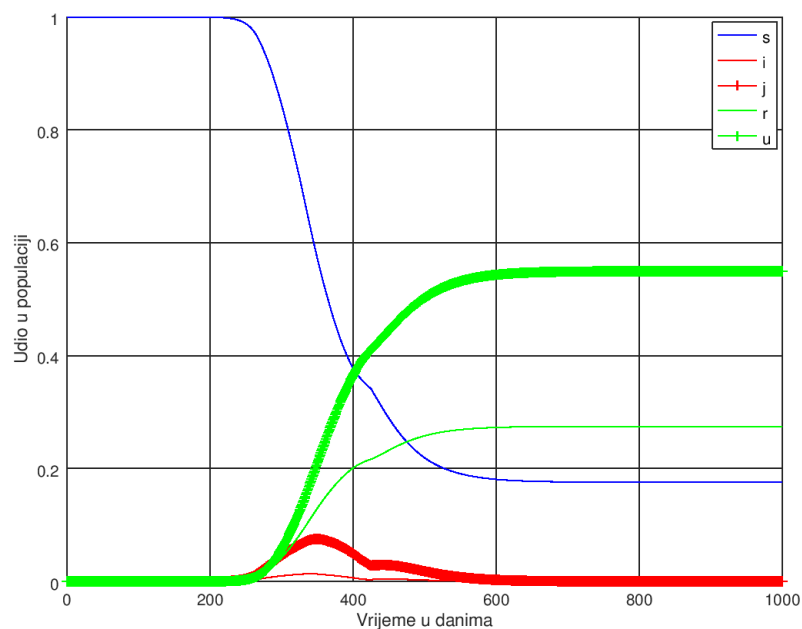
Slika 3.3: Procjena za nastavak istih mjera i $\xi = \frac{1}{3}$.

Uočimo da u ovom primjeru epidemija traje 550 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$j(t_*)$	$r(t_\infty)$	$u(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.30443	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$7.52 \cdot 10^{-2}$	0.23186	0.46371

Tablica 3.1: Rezultati sa Slike 3.3.

- Druga pretpostavka: pretpostavimo da će se nakon 425. dana sve mjere ukinuti.



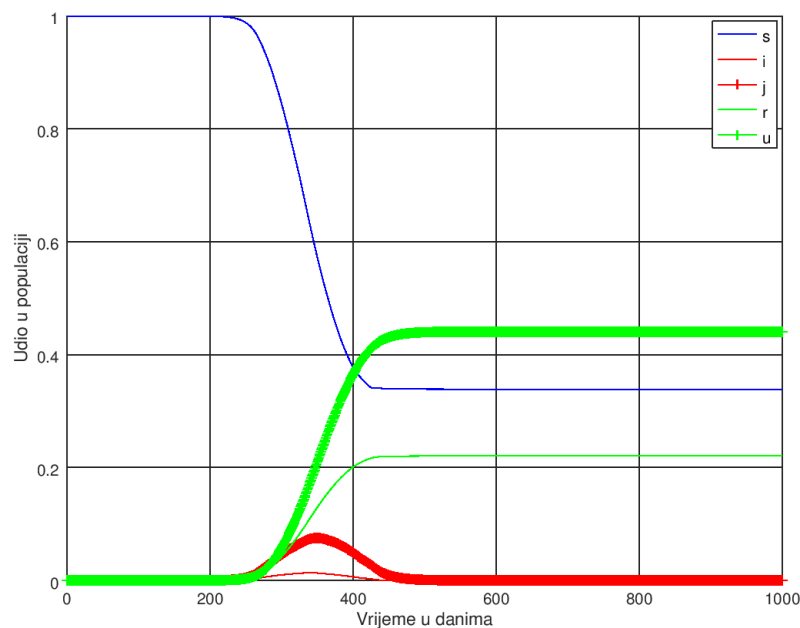
Slika 3.4: Procjena za ukidanje mjera i $\xi = \frac{1}{3}$.

Uočimo da u ovom primjeru epidemija traje nešto više od 600 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$j(t_*)$	$r(t_\infty)$	$u(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.17570	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$7.52 \cdot 10^{-2}$	0.27477	0.54953

Tablica 3.2: Rezultati sa Slike 3.4.

- Treća pretpostavka: od 425. dana epidemije uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine (točnije 23.3.2020.)



Slika 3.5: Procjena za uvođenje strogih mjera i $\xi = \frac{1}{3}$.

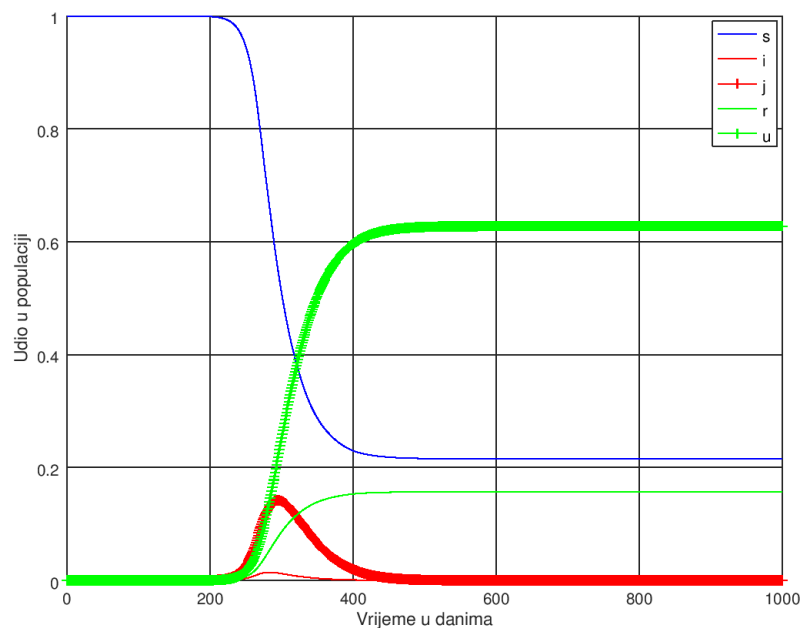
Uočimo da u ovom primjeru epidemija traje 500 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$j(t_*)$	$r(t_\infty)$	$u(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.33884	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$7.52 \cdot 10^{-2}$	0.22039	0.44077

Tablica 3.3: Rezultati sa Slike 3.5.

Možemo zaključiti da za $\xi = \frac{1}{3}$ dobivamo točnije podatke nego u SIR modelu za epidemiju do prvih 420 dana epidemije. Pogledajmo što će se dogoditi ako smanjimo $\xi = \frac{1}{5}$. Ostali podaci za model ostaju isti.

- Prva pretpostavka: pretpostavimo da će se od 425. dana epidemije primjenjivati ista razina mjera kao od 420. do 425. dana epidemije.



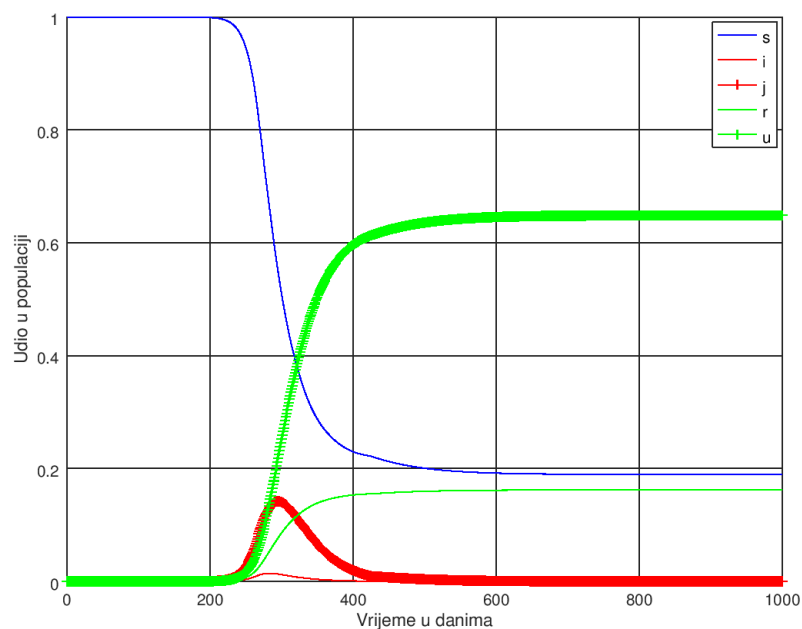
Slika 3.6: Procjena za nastavak istih mjera i $\xi = \frac{1}{5}$.

Uočimo da u ovom primjeru epidemija traje 500 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$j(t_*)$	$r(t_\infty)$	$u(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.21532	$1.4 \cdot 10^{-2}$	0.14204	0.15694	0.62775

Tablica 3.4: Rezultati sa Slike 3.6.

- Druga pretpostavka: pretpostavimo da će se nakon 425. dana sve mjere ukinuti.



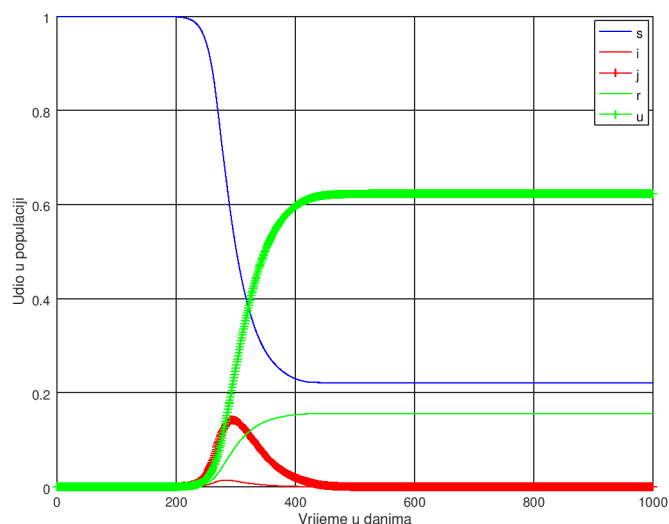
Slika 3.7: Procjena za ukidanje mjera i $\xi = \frac{1}{5}$.

Uočimo da u ovom primjeru epidemija traje 500 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$j(t_*)$	$r(t_\infty)$	$u(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.18943	$1.4 \cdot 10^{-2}$	0.14204	0.16211	0.64846

Tablica 3.5: Rezultati sa Slike 3.7.

- Treća pretpostavka: od 425. dana epidemije uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine (točnije 23.3.2020.)



Slika 3.8: Procjena za uvođenje strogih mjera i $\xi = \frac{1}{5}$.

Uočimo da u ovom primjeru epidemija traje 450 dana. Prema numeričkim podacima s grafa dolazimo do sljedećih rezultata:

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$j(t_*)$	$r(t_\infty)$	$u(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.22135	$1.4 \cdot 10^{-2}$	0.14204	0.15573	0.62292

Tablica 3.6: Rezultati sa Slike 3.8.

Zaključak

Uočimo da se smanjenjem koeficijenta ξ udio simptomatski oporavljene populacije na kraju epidemije smanjuje, dok se udio asimptomatski oporavljene populacije na kraju epidemije povećava. Udio simptomatski zaraženih na vrhuncu epidemije će biti veći kao i udio asimptomatski zaraženih pojedinaca. Povećavanjem koeficijenta ξ na kraju epidemije ostati će manji udio populacije koji će biti podložan zarazi.

Poglavlje 4

Ostale varijacije SIR modela

U ovom poglavlju opisujemo nekoliko varijacija SIR modela izostavljajući detaljnu analizu modela.

4.1 SIRS model

Ovaj model iz reference [5] uzima sve pretpostavke SIR modela koje se odnose na karakteristike virusa i ponašanje pojedinca kao u Poglavlju 2. Glavna razlika između SIR i SIRS modela je u tome što se kod SIRS modela pojedinac nakon određenog vremenskog perioda može iz skupine oporavljenih pojedinaca R vratiti u skupinu pojedinaca podložnih zarazi S . Razlog tome je gubitak imuniteta kod oporavljenih pojedinaca. Pretpostavke o širenju bolesti, osobinama pojedinaca i populaciji su iste kao u SIR modelu. Pošto je populacija konstantna vrijedi: $N = S + I + R$. SIRS model je opisan sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I - \delta R.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Pojasnimo jednadžbe iz modela:

- Prva jednadžba

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \delta R,$$

govori nam kako promjena broja pojedinaca podložnih zarazi S u vremenu t , odnosno $\frac{dS}{dt}$ ovisi o izrazu $-\alpha SI$ kojeg interpretiramo analogno kao u SIR modelu. Uz

taj izraz javlja se i δR koji nam govori kojom se dinamikom pojedinci iz skupine R vraćaju u skupinu S . Koeficijent δ zove se *stopa gubitka imuniteta*.

- Druga jednadžba

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I,$$

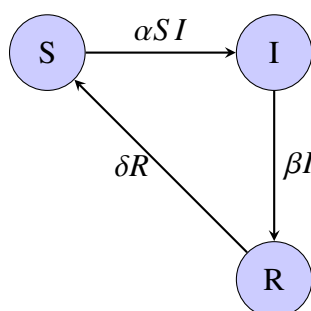
interpretira se analogno kao u SIR modelu.

- Treća jednadžba

$$\frac{dR}{dt} = \beta I - \delta R,$$

govori nam kako promjena broja oporavljenih pojedinaca R u vremenu t , odnosno $\frac{dR}{dt}$ ovisi o izrazu βI koji predstavlja one pojedince koji su iz skupine I prešli u skupinu R . Kao i kod SIR modela koeficijent β je *stopa uklanjanja*. Također uočimo izraz $-\delta R$ koji predstavlja smanjenje brojnosti populacije R ovisno o gubitku imuniteta pojedinaca iz skupine R .

- Shematski prikaz SIRS modela



Ako zbrojimo sve jednadžbe sustava (4.1) imamo:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = \frac{dN}{dt} = 0,$$

odnosno populacija N je konstantna, što je i bila pretpostavka modela.

- Normalizirani sustav (4.1):

Uvedimo nove nepoznanice s, i, r :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}.$$

Uvrštavanjem prethodnih nepoznanica u sustav (4.1) dobivamo normalizirani sustav:

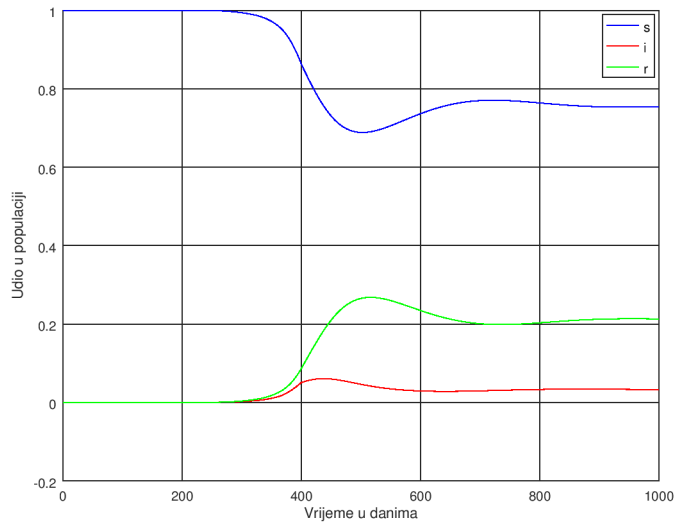
$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -\alpha N s i + \delta r, \\ \frac{di}{dt} &= \alpha N s i - \beta i, \\ \frac{dr}{dt} &= \beta i - \delta r.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Normalizirani sustav ćemo koristiti kod simulacija modela.

Primjene modela

U ovom modelu koristit ćemo analogne pretpostavke kao u primjenama SIR i ASIR modela. Ukupna populacija broju $N = 4058000$ pojedinaca. Koefficient αN zadan je u Tablici 2.8. Koefficient $\beta = \frac{1}{14}$ zbog toga što je pojedincu potrebno 14 dana da se oporavi od bolesti. U ovisnosti o različitim vrijednostima stope gubitka imuniteta δ prikazat ćemo rezultate modela.

- Pojedinaac izgubi imunitet nakon 90 dana $\delta = \frac{1}{90}$
 - Nakon 425. dana epidemije na snazi ostaju jednake mjere kao od 420. do 425. dana

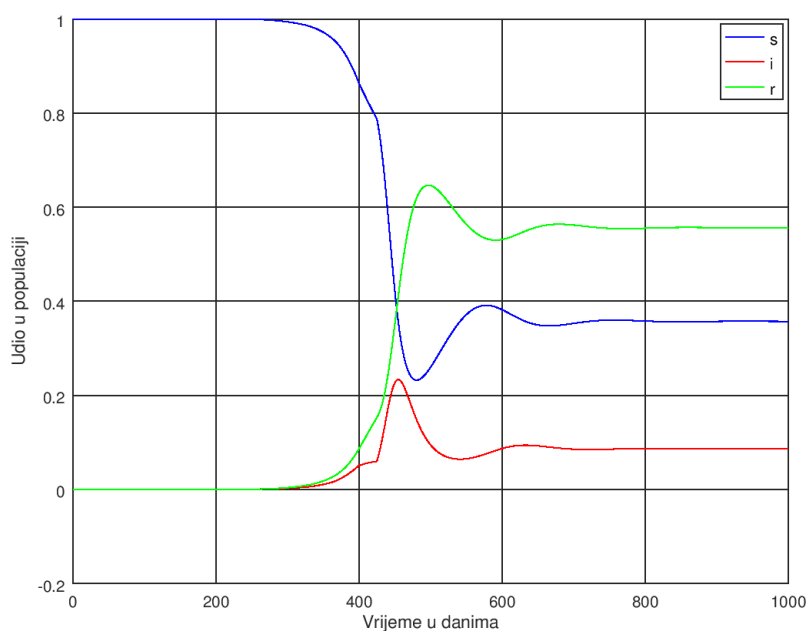


Slika 4.1: Procjena za nastavak istih mjera i $\delta = \frac{1}{90}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$i(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.75424	$6.06 \cdot 10^{-2}$	0.21291	$3.28 \cdot 10^{-2}$

Tablica 4.1: Rezultati sa Slike 4.1.

■ Nakon 425. dana sve mjere se ukidaju

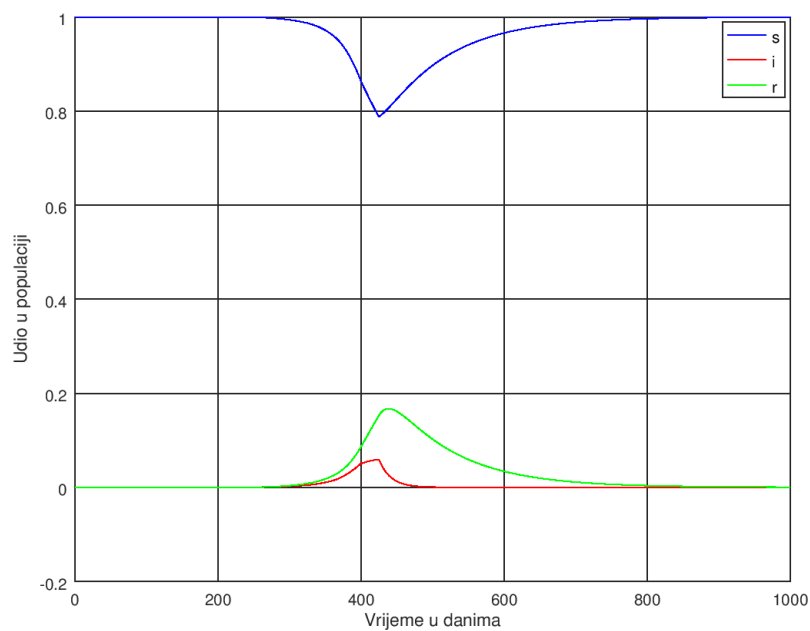


Slika 4.2: Procjena za ukidanje mjera i $\delta = \frac{1}{90}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$i(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.35712	0.23334	0.55631	$8.65 \cdot 10^{-2}$

Tablica 4.2: Rezultati sa Slike 4.2.

- Nakon 425. dana uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine

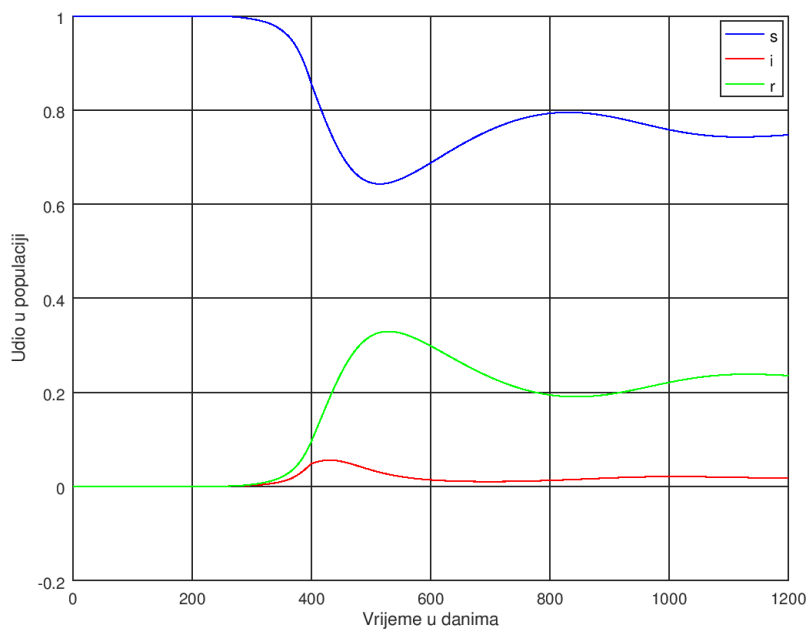


Slika 4.3: Procjena za uvođenje strogih mjera i $\delta = \frac{1}{90}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$i(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.9996	$5.94 \cdot 10^{-2}$	$4.03 \cdot 10^{-4}$	0

Tablica 4.3: Rezultati sa Slike 4.3.

- Pojedinaac izgubi imunitet nakon 180 dana, odnosno $\delta = \frac{1}{180}$.
- Nakon 425. dana epidemije na snazi ostaju jednake mjere kao od 420. do 425. dana

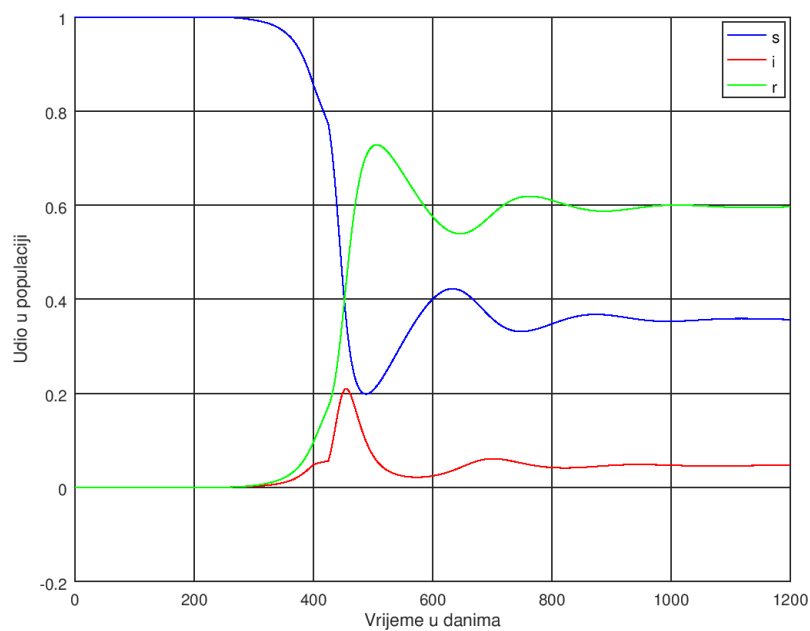


Slika 4.4: Procjena za nastavak istih mjera i $\delta = \frac{1}{180}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$i(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.74721	$5.56 \cdot 10^{-2}$	0.23554	$1.72 \cdot 10^{-2}$

Tablica 4.4: Rezultati sa Slike 4.4.

- Nakon 425. dana sve mjere se ukidaju

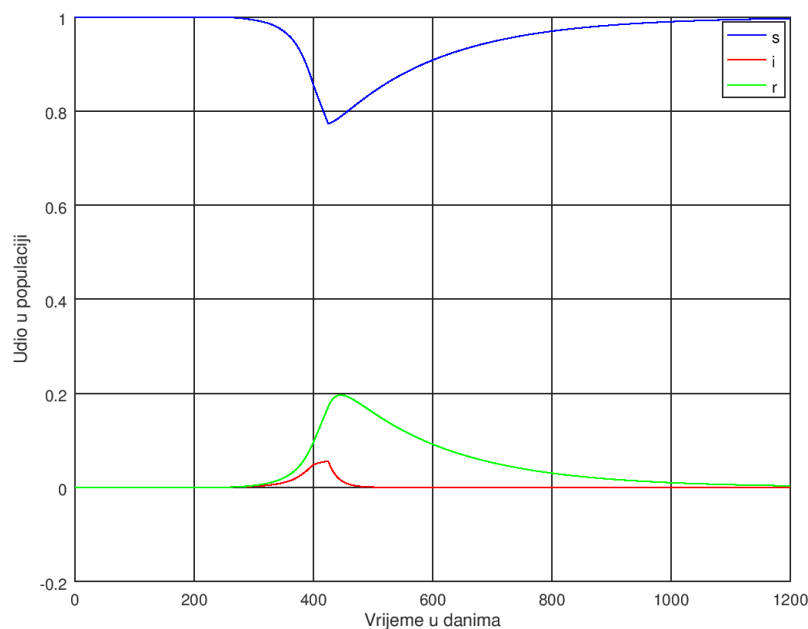


Slika 4.5: Procjena za ukidanje mjera i $\delta = \frac{1}{180}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$i(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.35689	0.20977	0.59638	$4.67 \cdot 10^{-2}$

Tablica 4.5: Rezultati sa Slike 4.5.

- Nakon 425. dana uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine



Slika 4.6: Procjena za uvođenje strogih mjera i $\delta = \frac{1}{180}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$i(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.99671	$5.53 \cdot 10^{-2}$	$3.29 \cdot 10^{-3}$	0

Tablica 4.6: Rezultati sa Slike 4.6.

Zaključak

Iz prethodnih primjera možemo uočiti kako se povećanjem perioda trajanja imuniteta neznatno smanjuje udio populacije koja je na kraju epidemije podložna zarazi, a smanjuje se i udio zaraženih na vrhuncu epidemije. U svim primjerima možemo primijetiti i da će zarazna bolest u populaciji kružiti. Sa povećanjem perioda trajanja imuniteta smanjuje se udio populacije koji je stalno zaražen. Također uočimo da uvođenjem strogih mjera možemo primijetiti da zaraza neće kružiti populacijom.

4.2 SIRWS model

Ovaj model iz reference [5] uzima sve pretpostavke SIR modela koje se odnose na karakteristike virusa i ponašanje pojedinca kao u Poglavlju 2. U ovom modelu, dodatno na pretpostavke SIR modela, pretpostavljamo da pojedinac iz skupine oporavljenih R prelazi u novu skupinu W . Skupina W označava one pojedince koje su *slabo imuni*. Poznato je kako pojedinac određeni vremenski period nakon što je prebolio COVID-19 u svome organizmu ima virusna antitijela koja onemogućavaju reinfekciju. Razina antitijela u organizmu pojedinca se postupno smanjuje i pojedinac prelazi iz skupine R u skupinu W . Ukoliko se razina antitijela nastavi smanjivati pojedinac prelazi iz skupine W u skupinu S . Međutim, ukoliko pojedinac u skupini slabo imunih W ponovno dođe u doticaj sa zaraženim, razina antitijela u njegovom organizmu se ponovno povećava i pojedinac će se vratiti u skupinu R koja je "zaštićena od bolesti". Prilikom doticaja sa zaraženom osobom pojedinac iz skupine W neće se zaraziti nego će se njegov organizam na osnovu već prisutnih antitijela obraniti od bolesti i povećati razinu antitijela. Populacija je konstantna što znači: $S + I + W + R = N$. Navedimo jednadžbe SIRWS modela:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI + \kappa W, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I - \kappa R + \nu \alpha IW, \\ \frac{dW}{dt} &= \kappa R - \kappa W - \nu \alpha IW.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Pojasnimo jednadžbe iz sustava (4.3):

- Prva jednadžba

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \kappa W,$$

govori nam kako promjena broja pojedinaca podložnih zarazi S u vremenu t , odnosno $\frac{dS}{dt}$ ovisi o izrazu $-\alpha SI$ koji predstavlja one pojedince koji iz skupine S prelaze u skupinu I uz *stopu incidencije* α , te o izrazu κW koji predstavlja broj pojedinaca koji su iz skupine W prešli u skupinu S uz *stopu gubitka imunosti* κ . Koeficijent κ računa se kao:

$$\frac{\text{pojedinac}}{\text{vrijeme trajanja imuniteta u danima}}.$$

- Druga jednadžba

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I,$$

govori nam kako promjena broja zaraženih pojedinaca I u vremenu t , odnosno $\frac{dI}{dt}$ ovisi o αSI koji predstavlja one pojedince koji su prešli iz skupine S u skupinu I uz stopu incidencije α i izrazu $-\beta I$ koji predstavlja one pojedince koji su iz skupine I prešli u skupinu R uz stopu uklanjanja β . Koeficijent β interpretiramo analogno kao u SIR modelu.

- Treća jednadžba

$$\frac{dR}{dt} = \beta I - \kappa R + \nu \alpha IW,$$

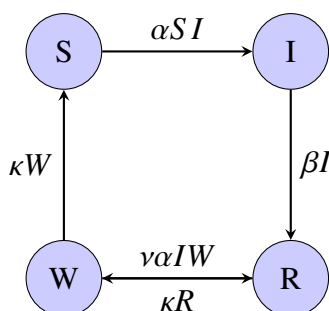
govori nam kako promjena broja pojedinaca oporavljenih od bolesti R u vremenu t ovisi o izrazima βI koji predstavlja pojedince koji su prešli iz skupine I u skupinu R , $-\kappa R$ koji predstavlja pojedince koji su napustili skupinu R i prešli u skupinu W te $\nu \alpha IW$ koji predstavlja broj pojedinaca iz skupine W koji su bili u doticaju sa zaraženim pojedincima i stekli imunitet. Koeficijent ν zovemo stopom dobivanja imuniteti i predstavlja udio slabo imunih pojedinaca koji u doticaju sa zaraženim osobama stvore antitijela.

- Četvrta jednadžba

$$\frac{dW}{dt} = \kappa R - \kappa W - \nu \alpha IW,$$

govori nam kako promjena broja slabo imunih pojedinaca W u vremenu t , odnosno $\frac{dW}{dt}$ ovisi o izrazima κR koji predstavlja one pojedince koji su iz skupine R prešli u skupinu W , $-\kappa W$ koji predstavlja one pojedince koji su napustili skupinu W i prešli u skupinu S uz stopu gubitka imuniteti κ te izrazu $-\nu \alpha IW$ koji predstavlja one pojedince koji su kontaktom sa zaraženima razvili dodatna antitijela i prešli u skupinu R .

- Shematski prikaz SIRWS modela:



Zbrajanjem Jednadžbi u sustavu (4.3) imamo:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R + W) = \frac{dN}{dt} = 0,$$

odnosno populacija N je konstantna, što je i bila pretpostavka modela.

- Normalizirani sustav (4.3):

Uvedimo nove nepoznanice s, i, r, w :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}, \quad w(t) = \frac{W(t)}{N}.$$

Uvrštavanjem prethodnih nepoznanica u sustav (4.3) dobivamo normalizirani sustav:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\alpha N s i + \kappa w, \\ \frac{di}{dt} &= \alpha N s i - \beta i, \\ \frac{dr}{dt} &= \beta i - \kappa r + \nu \alpha N i w, \\ \frac{dw}{dt} &= \kappa r - \kappa w - \nu \alpha N i w. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Normalizirani sustav koristiti ćemo kod simulacija modela.

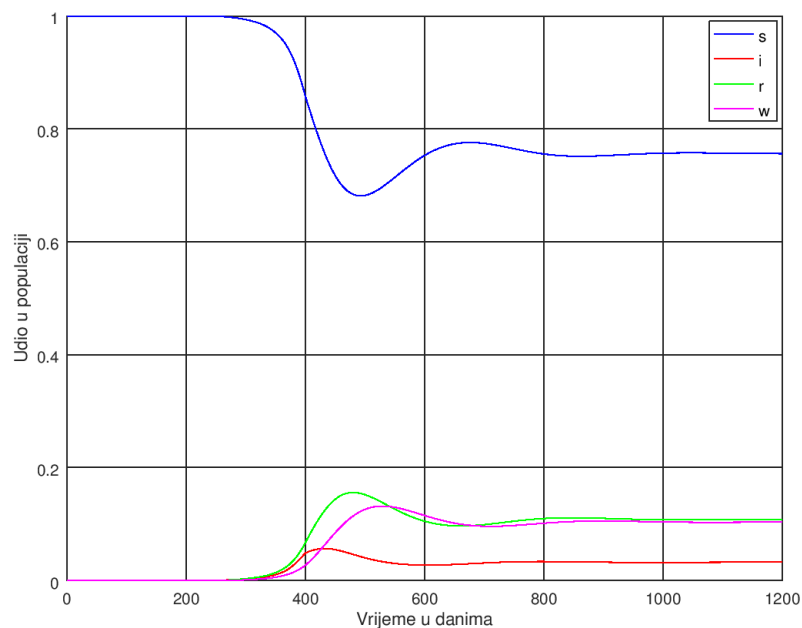
Primjene modela

U ovom modelu koristit ćemo analogne pretpostavke kao u primjenama SIR i ASIR modela. Ukupna populacija broju $N = 4058000$ pojedinaca. Koeficijent αN zadan je Tablici 2.8. Koeficijent $\beta = \frac{1}{14}$ zbog toga što je pojedincu potrebno 14 dana da se oporavi od bolesti. U ovisnosti o različitim vrijednostima stope gubitka imuniteta κ i stope dobivanja imunosti ν prikazat ćemo rezultate modela. Početni uvjeti su:

$$s(0) = 1, \quad i(0) = 1/N, \quad r(0) = 0, \quad w(0) = 0.$$

- Uzmimo da je trajanje imuniteta 90 dana, odnosno $\kappa = \frac{1}{90}$ i stopa dobivanja imunosti $\frac{1}{3}$, odnosno $\nu = \frac{1}{3}$. To znači da će svaki treći slabo imuni pojedinac u kontaktu sa zaraženim ponovno steći imunitet.

- Nakon 425. dana epidemije na snazi ostaju jednake mjere kao od 420. do 425. dana

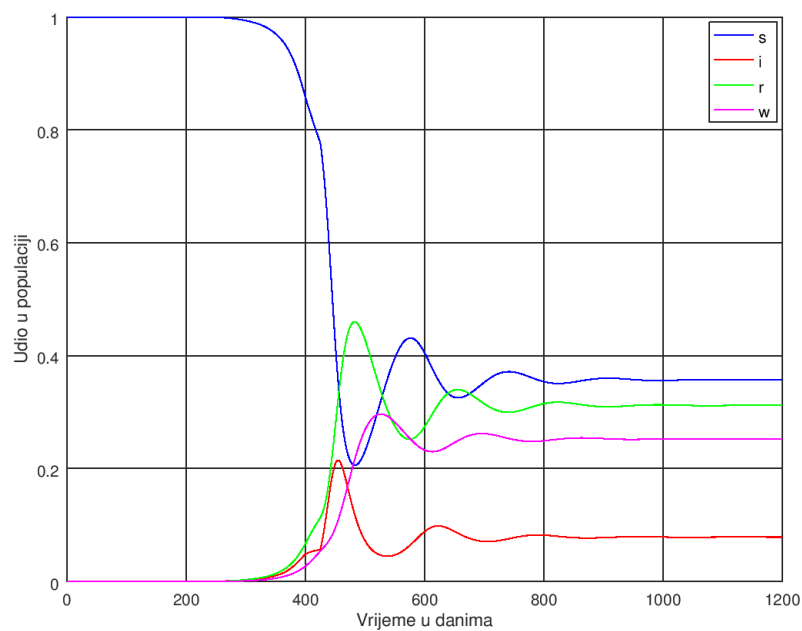


Slika 4.7: Procjena za nastavak istih mjera, $\kappa = \frac{1}{90}$, $\nu = \frac{1}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.75609	$5.64 \cdot 10^{-2}$	0.10828	0.1034

Tablica 4.7: Rezultati sa Slike 4.7.

- Nakon 425. dana sve mjere se ukidaju

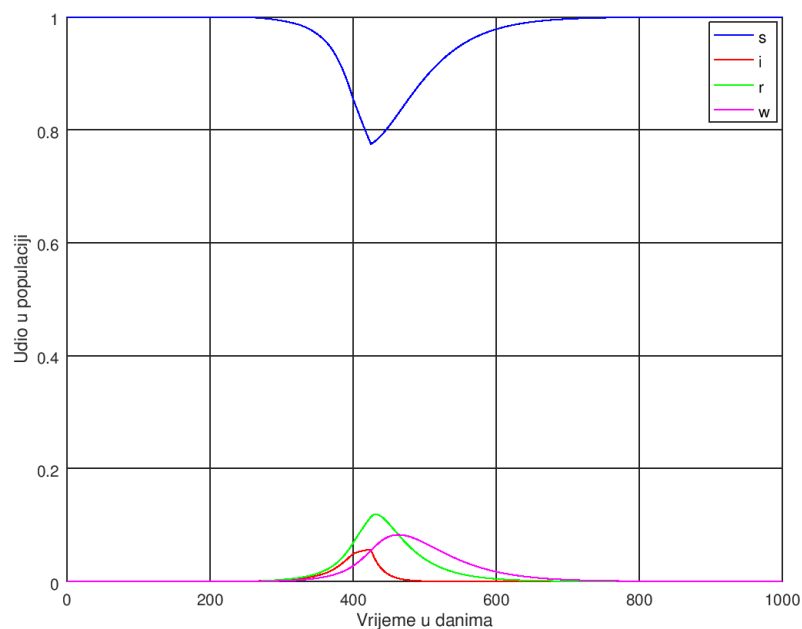


Slika 4.8: Procjena za ukidanje mjera, $\kappa = \frac{1}{90}$, $\nu = \frac{1}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.35709	0.21463	0.31194	0.2525

Tablica 4.8: Rezultati sa Slike 4.8.

- Nakon 425. dana uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine

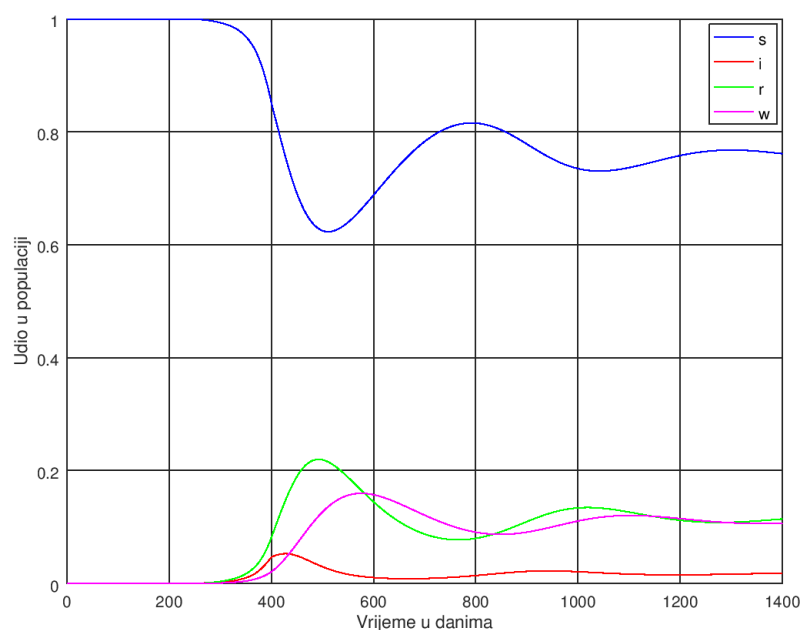


Slika 4.9: Procjena za uvođenje strogih mjera, $\kappa = \frac{1}{90}$, $\nu = \frac{1}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.9999	$5.63 \cdot 10^{-2}$	0	0

Tablica 4.9: Rezultati sa Slike 4.9.

- Uzmimo da je trajanje imuniteta 180 dana, odnosno $\kappa = \frac{1}{180}$ i stopa dobivanja imuniteta $\frac{1}{3}$, odnosno $\nu = \frac{1}{3}$. To znači da će svaki treći slabo imuni pojedinac u kontaktu sa zaraženim ponovno steći imunitet.
 - Nakon 425. dana epidemije na snazi ostaju jednake mjere kao od 420. do 425. dana

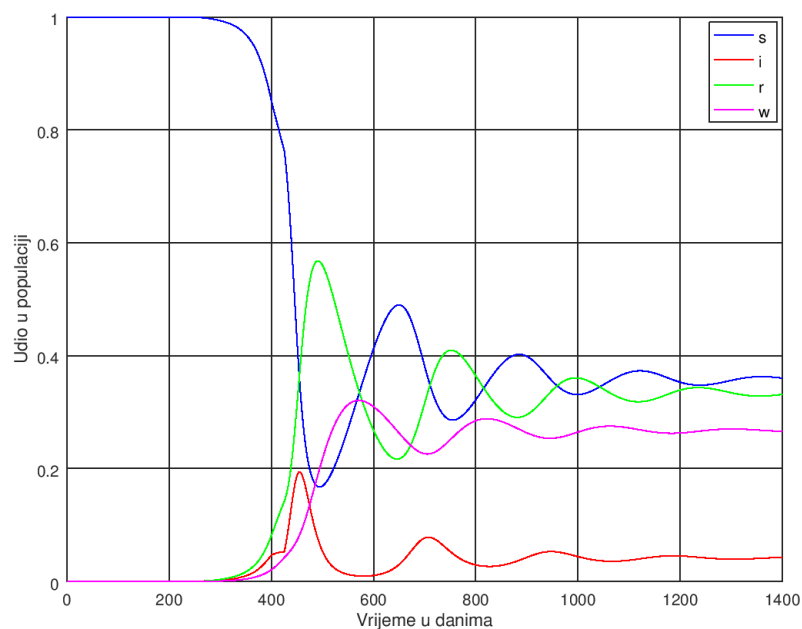


Slika 4.10: Procjena za nastavak istih mjera, $\kappa = \frac{1}{180}$, $\nu = \frac{1}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.76132	$5.26 \cdot 10^{-2}$	0.11417	0.10659

Tablica 4.10: Rezultati sa Slike 4.10.

- Nakon 425. dana sve mjere se ukidaju



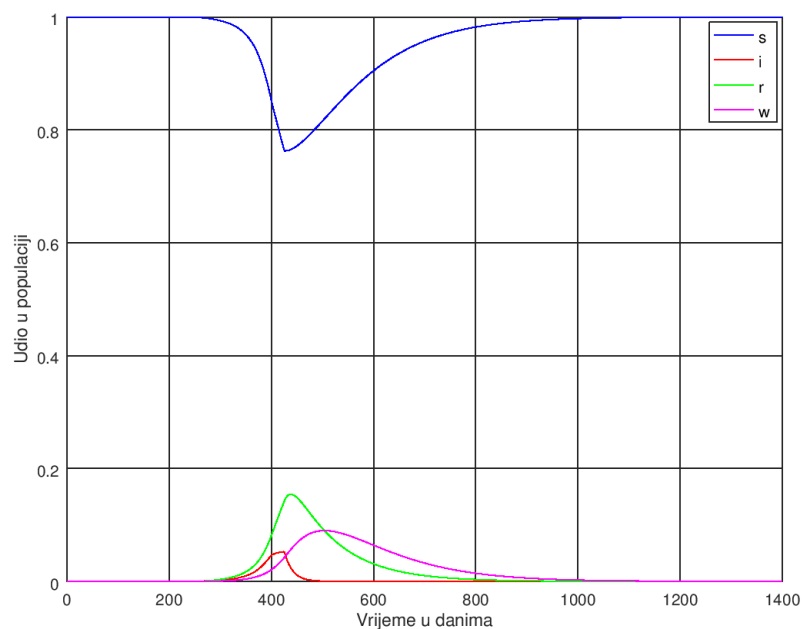
Slika 4.11: Procjena za ukidanje mjera, $\kappa = \frac{1}{180}$, $\nu = \frac{1}{3}$.

Period	$i(t_*)$
Cijela epidemija	0.19408

Tablica 4.11: Rezultati sa Slike 4.11.

U ovom primjeru funkcije s , r , w osciliraju pa nema smisla gledati njihove vrijednosti u t_∞ .

- Nakon 425. dana uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine

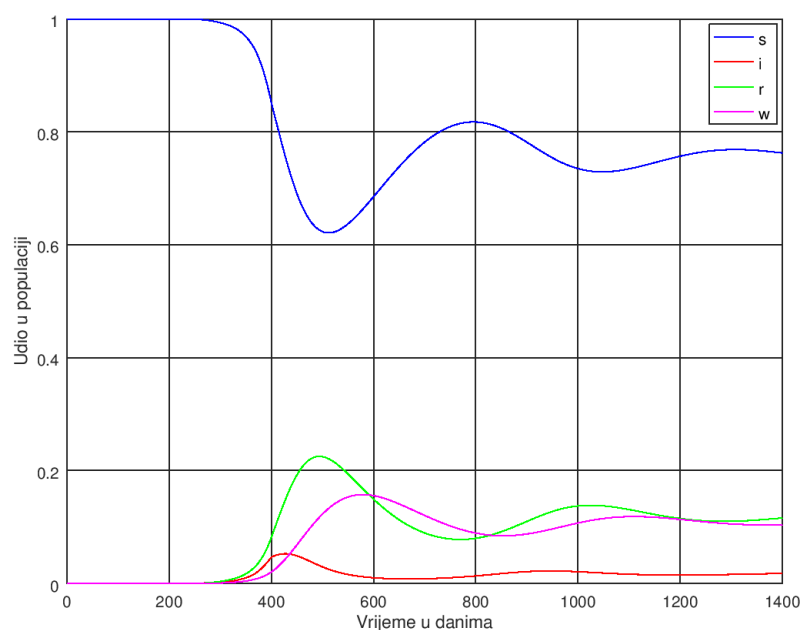


Slika 4.12: Procjena za uviđenje strogih mjera, $\kappa = \frac{1}{180}$, $\nu = \frac{1}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.99995	$5.26 \cdot 10^{-2}$	0	0

Tablica 4.12: Rezultati sa Slike 4.12.

- Uzmimo da je trajanje imuniteta 180 dana, odnosno $\kappa = \frac{1}{180}$ i stopa dobivanja imuniteta $\frac{2}{3}$, odnosno $\nu = \frac{2}{3}$. To znači da će dva od tri slabo imuna pojedinca u kontaktu sa zaraženim ponovno steći imunitet.
 - Nakon 425. dana epidemije na snazi ostaju jednake mjere kao od 420. do 425. dana

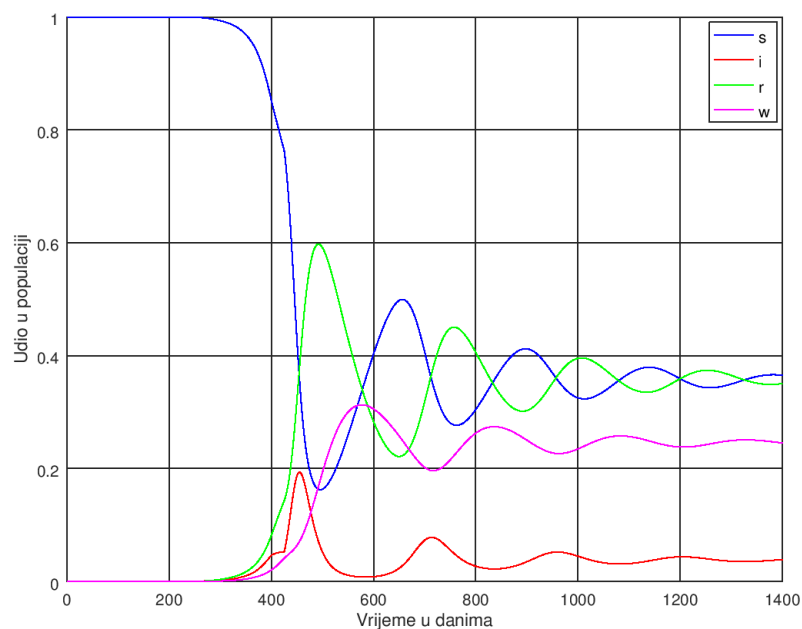


Slika 4.13: Procjena za nastavak istih mjera, $\kappa = \frac{1}{180}$, $\nu = \frac{2}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.76261	$5.26 \cdot 10^{-2}$	0.11598	0.10387

Tablica 4.13: Rezultati sa Slike 4.13.

- Nakon 425. dana sve mjere se ukidaju

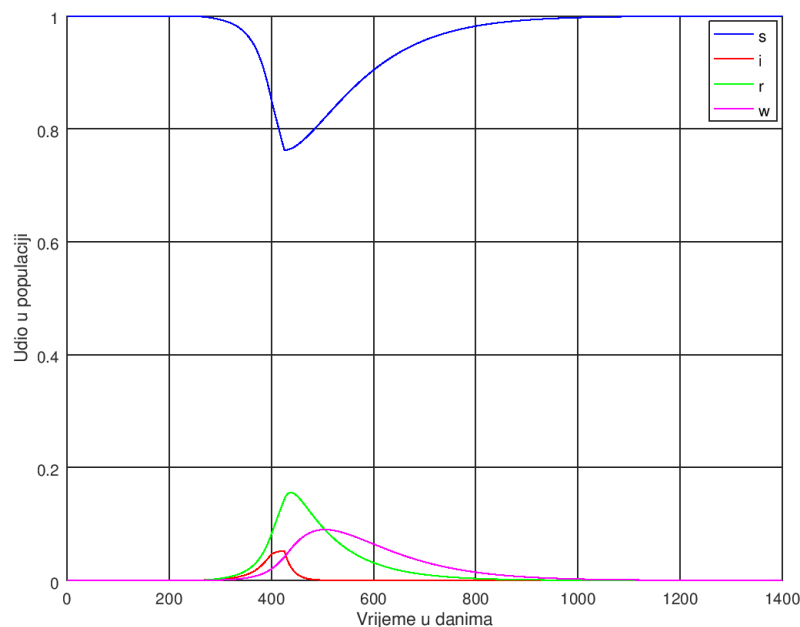


Slika 4.14: Procjena za ukidanje mjera, $\kappa = \frac{1}{180}$, $\nu = \frac{2}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.36535	0.19350	0.35057	0.24555

Tablica 4.14: Rezultati sa Slike 4.14.

- Nakon 425. dana uvodimo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine



Slika 4.15: Procjena za uviđenje strogih mjera, $\kappa = \frac{1}{180}$, $\nu = \frac{2}{3}$.

Period	$s(t_\infty)$	$i(t_*)$	$r(t_\infty)$	$w(t_\infty)$
Cijela epidemija	0.99995	$5.25 \cdot 10^{-2}$	0	0

Tablica 4.15: Rezultati sa Slike 4.15.

Zaključak

Uočimo da se povećavanjem koeficijenta κ povećavaju i udjeli podložnih zarazi na kraju epidemije, oporavljenih od bolesti i slabo imunih, dok se udio oboljele populacije na vrhuncu epidemije smanjuje.

Uočimo da ćemo povećanjem koeficijenta ν dobiti jako slične rezultate s tim da će se ukupan udio oporavljene populacije neznatno povećati, dok će se udio slabo imunih neznatno smanjiti. Udio oboljelih na vrhuncu epidemije u ovom slučaju će padati, ali promjena neće biti značajna. Kao i u SIRS modelu možemo primijetiti da će zaraza kružiti populacijom osim ako ne uvedemo stroge mjere kao u ožujku 2020. godine.

4.3 SIR model uz konstantno cijepljenje

U ovom modelu iz reference [6] opisujemo kako se ponaša virusna bolest COVID-19 uz konstantno cijepljenje pojedinaca iz skupine podložnih zarazi S . Nakon cijepljenja pojedinac iz skupine S prelazi direktno u skupinu R , odnosno cijepljeni pojedinci neće moći biti zaraženi. Pretpostavljamo i da nakon bolesti, pojedinac razvije trajan imunitet. Također ovaj model nasljeđuje sve pretpostavke SIR modela koje se odnose na ponašanje pojedinca i karakteristike virusa iz Poglavlja 2. Pojasnimo još pojam konstantnog cijepljenja. To znači da će se svakog dana cijepiti fiksni broj ljudi. Pretpostavit ćemo da je populacija konstantna, odnosno $S + I + R + M = N$, gdje M označava broj ljudi koji se cijepi u jednom danu. Tada naš model izgleda:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI - M, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I + M.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Pojasnimo jednadžbe iz sustava (4.8):

- Prva jednadžba

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI - M,$$

govori nam kako promjena broja pojedinaca podložnih zarazi S u vremenu t ovisi o izrazi $-\alpha SI$ koji predstavlja one pojedince koji su iz skupine S prešli u skupinu I uz stopu incidencije α . Koeficijent α je stopa incidencije i interpretiramo kao i u SIR modelu. Izraz $-M$ predstavlja broj pojedinaca koji su cijepljeni i javlja se s predznakom minus jer cijepljeni pojedinci više nisu podložni zarazi nego su od nje zaštićeni.

- Druga jednadžba

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I,$$

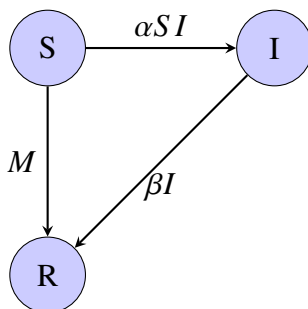
drugu jednadžbu interpretiramo analogno kao u SIR modelu, kao i koeficijent β . Prisjetimo se, koeficijent β je stopa uklanjanja.

- Treća jednadžba

$$\frac{dR}{dt} = \beta I + M,$$

govori nam kako promjena broja pojedinaca iz skupine R u vremenu t , odnosno $\frac{dR}{dt}$ ovisi o broju pojedinaca koji su preboljeli infekciju βI i broju pojedinaca koji su se cijepili M .

- Shematski prikaz modela



Zbrajanjem svih jednažbi iz sustava (4.5) imamo:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = \frac{dN}{dt} = 0,$$

odnosno populacija je konstantna, što je i bila pretpostavka.

- Normalizirani sustav (4.5): Uvedimo nepoznanice s, i, r :

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}.$$

Uvrštavanjem prethodnih nepoznanica u sustav (4.5) dobivamo normalizirani sustav:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\alpha N s i - \frac{M}{N}, \\ \frac{di}{dt} &= \alpha N s i - \beta i, \\ \frac{dr}{dt} &= \beta i + \frac{M}{N}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

U odnosu na sustav (4.5) u sustavu (4.6) koeficijent αN predstavlja broj ljudi koje zarazi jedan zaraženi pojedinac, a ne udio kao kod modela (4.5). S druge strane izraz $\frac{M}{N}$ predstavlja udio ljudi u populaciji koji prijeđu iz skupine S u skupinu R .

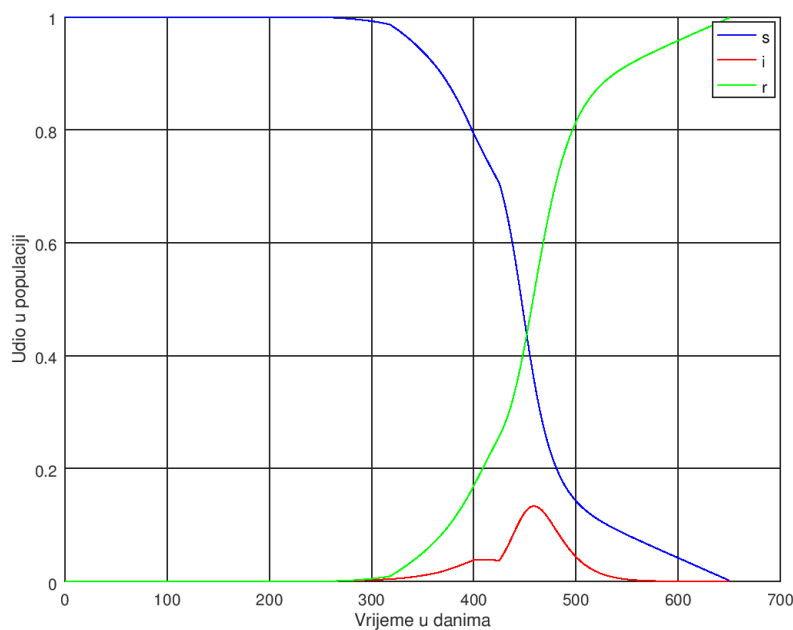
Primjene modela

Kao i kod prethodnih modela pretpostavimo da je promatrana populacija konstantna $N = 4058000$. Prema podacima cijepljenje je počelo 318. dana epidemije i trajalo je do 425. dana u valovima. Prosječan broj cijepljenih osoba po danu je $M = 3255$, odnosno udio populacije koja se dnevno procijepi je približno $\frac{M}{N} = 0.0008$. Koeficijent αN uzimamo iz Tablice 2.8, koeficijent $\beta = \frac{1}{14}$. Kao početne podatke uzimamo:

$$s(0) = 1, \quad i(0) = \frac{1}{N}, \quad r(0) = 0.$$

Pogledajmo različite varijante modela ovisno o cijepljenju i mjerama zaštite od virusa.

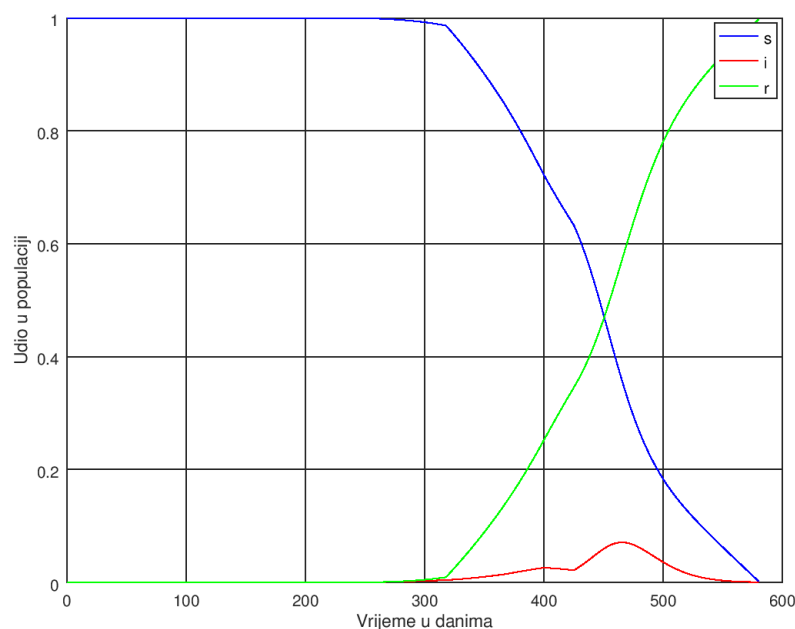
- Od 425. dana epidemije ukidamo sve mjere zaštite i $\frac{M}{N} = 0.0008$, $M = 3255$.



Slika 4.16: Procjena za ukidanje mjera zaštite i $\frac{M}{N} = 0.0008$.

U ovom slučaju udio populacije koja je stekla imunitet cijepljenjem je 0.2672. Udio populacije koja je stekla imunitet nakon što je preboljela virus je $r(t_\infty) = 0.7328$.

- Od 425. dana epidemije ukidamo sve mjere zaštite i $\frac{M}{N} = 0.002$, $M = 8116$.

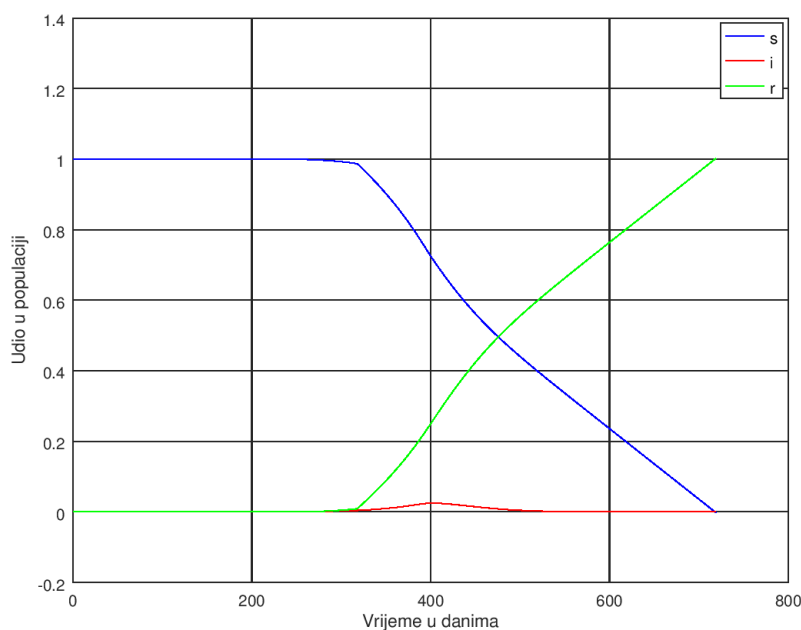


Slika 4.17: Procjena za ukidanje mjera zaštite i $\frac{M}{N} = 0.002$.

U ovom slučaju udio populacije koja je stekla imunitet cijepljenjem je 0.5254. Udio populacije koja je stekla imunitet nakon što je preboljela virus je $r(t_\infty) = 0.4746$. Uočimo da će se dnevnim povećanjem udjela cijepljenih pojedinaca u ukupnoj populaciji smanjiti udio zaražene populacije na vrhuncu epidemije, ali to neće značajno utjecati na trajanje same epidemije. Također primijetimo da se udio populacije koja će preboljeti virus značajno smanjio.

Pogledajmo što će se dogoditi ukoliko uz povećanu procijepljenost postrožimo mjere:

- Od 425. dana epidemije na snazi ostaju iste mjere kao od 420. do 425. dana epidemije i $\frac{M}{N} = 0.002$, $M = 8116$.

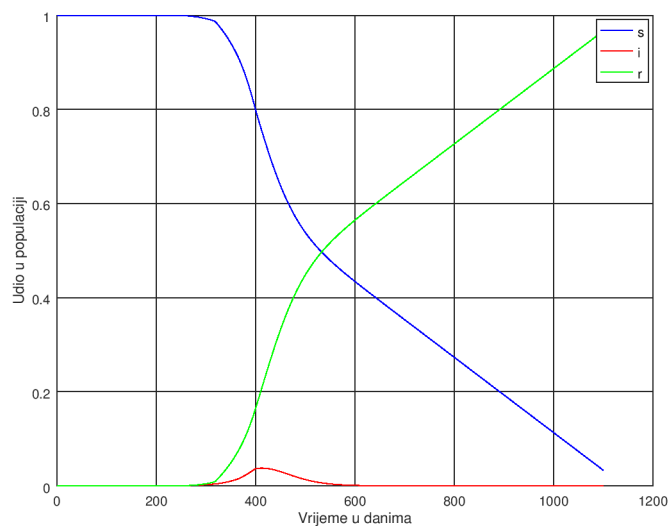


Slika 4.18: Procjena za uvođenje mjera zaštite i $\frac{M}{N} = 0.002$.

U ovom slučaju udio populacije koja je stekla imunitet cijepljenjem je 0.8. Udio populacije koja je stekla imunitet nakon što je preboljela virus je $r(t_\infty) = 0.2$. Uvođenjem strožih mjera uz pojačano cijepljenje populacije udio zaraženih na vrhuncu epidemije znatno pada i epidemija traje kraće. Također smanjuje se i udio populacija koja je preboljela virus.

Pogledajmo što će se dogoditi ukoliko u smanjimo udio cijepljene populacije na $\frac{M}{N} = 0.0008$, odnosno $M = 3255$ uz ostavljanje iste razine mjera:

- Od 425. dana epidemije na snazi ostaju iste mjere kao od 420. do 425. dana epidemije i $\frac{M}{N} = 0.0008$, $M = 3255$.

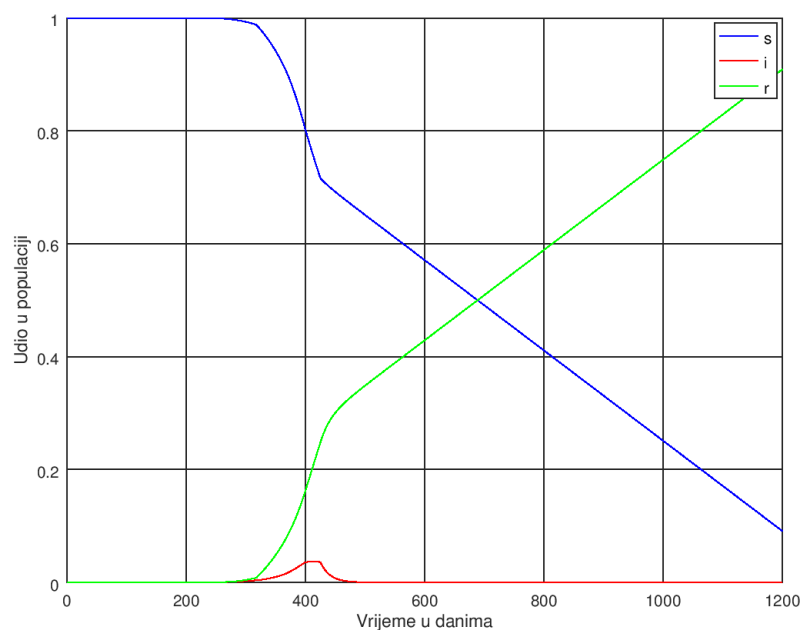


Slika 4.19: Procjena za uvođenje mjera zaštite i $\frac{M}{N} = 0.0008$.

U ovom slučaju udio populacije koja je stekla imunitet cijepljenjem je 0.6616. Udio populacije koja je stekla imunitet nakon što je preboljela virus je $r(t_\infty) = 0.3384$. Dakle, ukoliko smanjimo dnevni udio cijepljene populacije i ostavimo iste mjere trajanje epidemije će se povećati kao i udio zaraženih na vrhuncu epidemije.

Pogledajmo što će se dogoditi ukoliko ostavimo nisku razinu procijepljenosti $\frac{M}{N} = 0.0008$, odnosno $M = 3255$ i postrožimo mjere:

- Od 425. dana epidemije primjenjuju se mjere kao u ožujku 2020. i $\frac{M}{N} = 0.0008$, $M = 3255$.



Slika 4.20: Procjena za uvođenje strogih mjera zaštite i $\frac{M}{N} = 0.0008$.

U ovom slučaju udio populacije koja je stekla imunitet cijepljenjem je 0.8042. Udio populacije koja je stekla imunitet nakon što je preboljela virus je $r(t_\infty) = 0.1958$. Primijetimo da se uz jako stroge mjere i nisku stopu procijepljenosti trajanje epidemije značajno smanji, kao i udio populacije koja će preboljeti virus.

Zaključak

Možemo zaključiti da će se ukidanjem ili popuštanjem mjera zaštite od virusa trajanje epidemije povećati, dok će smanjenjem procijepljenosti udio zaražene populacije na vrhuncu epidemije biti sve veći.

Zanimljivo je i uočiti da će virus uz srednju razinu mjera i pojačanu procijepljenost jednako pogoditi populaciju kao i uz visoku razinu mjera i slabu procijepljenost.

Bibliografija

- [1] <https://hr.wikipedia.org/wiki/COVID-19>.
- [2] Giuseppe Gaeta, *A simple SIR model with a large set of asymptomatic infectives*, AIMS Press, Math. Eng. 3 (2021), No. 2 , Paper No. 013, 39 pp.
- [3] ourworldindata.org.
- [4] Leah Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, SIAM, New York, 2005.
- [5] Hildeberto Jardón-Kojakhmetov, Christian Kuehn, Andrea Pugliese, Mattia Sensi, *A geometric analysis of the SIR, SIRS and SIRWS epidemiological models*, Elsevier, Nonlinear Anal. Real World Appl. 58 (2021), 103220, 27 pp.
- [6] Sudi Mungkasi, *Variational iteration and successive approximation methods for a SIR epidemic model with constant vaccination strategy*, Elsevier, Appl. Math. Model. 90 (2021), 1–10.

Sažetak

U ovome diplomskom radu detaljno smo analizirali SIR model i na osnovu podataka s početka epidemije formirali model za prvi i drugi val epidemije. Iz dobivenih rezultata možemo zaključiti da model ne opisuje dobro stvarne podatke, što znači da ćemo u početku epidemije imati jako loša predviđanja o razvoju epidemije. Vjerojatan razlog tome je uvođenje mjera.

Nakon toga posvetili smo se modeliranju baziranom na osnovu svih dosadašnjih podataka vezanih uz koeficijent strogosti mjera zaštite protiv virusa. Ovakav način interpretacije epidemije daje točnije podatke stoga smo odlučili primjenjivati ovu interpretaciju na ostale modele u ovom radu.

Zatim smo detaljno odradili analizu za ASIR model, baziranu na koeficijentu strogosti mjera. Pomoću ASIR modela dobivali smo podatke koji su bliže stvarnim podacima nego u SIR modelu.

Nakon toga posvetili smo se SIRS, SIRW i SIR modelu s konstantnim cijepljenjem. Ove modele nismo detaljno analizirali nego smo ih predstavili kao modele koji na zanimljiv način opisuju epidemiju. U SIRS i SIRW modelu možemo uočiti da se populacija zaraženih, oporavljenih i podložnih zarazi javljaju u valovima što je zanimljivo jer se epidemija virusne bolesti COVID-19 u Republici Hrvatskoj također javljala u valovima. U ovim modelima zaraza i dalje kruži populacijom što će se, pored cijepljenja, moguće dogoditi i u stvarnosti.

Na kraju možemo zaključiti da ni jedan od navedenih modela neće aproksimirati stvarno stanje potpuno točno. Razlog tomu je možda u nepreciznom određivanju parametara modela, te uvođenju mjera koje mijenjaju parametre. Kod svakog od modela možemo shvatiti na koji način će se ponašati epidemija ukoliko se promijene karakteristike virusa (mutacije virusa koje utječu na trajanje imuniteta) ili ukoliko se promijeni naš stav prema epidemiji (uvođenje ili ukidanje mjera).

Summary

In this thesis, we analyzed the SIR model in detail and based on the data from the beginning of the epidemic formed a model for the first and second wave of the epidemic. From the obtained results we can conclude that the model does not describe well the actual data, which means that at the beginning of the epidemic we will have very poor predictions about the development of the epidemic. Probable reason for this is introduction of epidemic measures.

After that, we focused on modeling based on all previous data related to the stringency coefficient. This way of interpreting the epidemic provides more accurate data, so we decided to apply this interpretation to other models in this paper.

We then performed a detailed analysis for the ASIR model, based on the stringency coefficient. Using the ASIR model, we obtained data that are closer to the actual data than in the SIR model.

After that, we dedicated ourselves to the SIRS, SIRW and SIR models with constant vaccination. We did not analyze these models in detail, but presented them as models that describe the epidemic in an interesting way. In the SIRS and SIRW model, we can see that the population of infected, recovered and susceptible to infections occurs in waves, which is interesting because the epidemic of the viral disease COVID-19 in the Republic of Croatia also occurred in waves. In these models, the infection is still circulating in the population, which, in addition to vaccination, is possibly to happen in reality.

In the end, we can conclude that none of the above models will approximate the actual situation completely accurately. The reason for this may be in the imprecise determination of the model parameters, and the introduction of measures that change the parameters. In each of the models, we can understand how the epidemic will behave if the characteristics of the virus change (virus mutations that affect the duration of immunity) or if our attitude towards the epidemic changes (introduction or abolition of measures).

Životopis

- Osnovne informacije:

Ime i prezime: Branimir Marijan,
Datum i mjesto rođenja: 7.2.1997, Livno, BiH,
Adresa: Lazinska ulica 40, 10110 Zagreb,
Broj telefona: +385 95 529 9235,
E-mail: mabrani997@gmail.com,
Stečeno zvanje: bacc. math.

- O meni:

Srednju školu završio sam u Općoj gimnaziji Livno u Livnu, BiH u periodu od 2011. do 2015. godine nakon čega sam upisao studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu 2015. godine. Godine 2019. završio sam preddiplomski studij matematike, smjer Matematika. Nakon završenog preddiplomskog studija upisao sam diplomski studij Primijenjena matematika koji trenutno pohađam.