SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Mijoč

KONSTRUKCIJE PRAVILNOG SEDAMNAESTEROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, veljača 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovu krunu mog studiranja posvećujem svim osobama koje su obilježile prethodnih pet godina moga života. Ipak, posebno bih se htjela zahvaliti svojoj obitelji te svojim najvjernijim prijateljima. Mama i tata, hvala vam na neizmjernoj podršci i prilici da danas budem ovdje gdje jesam. Mama, posebno hvala na svakom glasu ohrabrenja i poruci "Ti to možeš, ti to hoćeš, ti to znaš" koju si mi redovito ponavljala prije svakog kolokvija i usmenog ispita. Tata, tebi hvala na svakoj šutnji i svakom pozivu koji je uvijek završavao sa "Ljube, čuvaj se." Mojoj sestri i braći zahvaljujem na tom što su me svakodnevno podsjećali koliko vrijede i koliko ih volim. Hvala mojoj Prx jer mi je uvijek ponavljala koliko sam sposobna i koliko mogu napraviti, samo s malom vjerom u sebe. Tebi Krešo hvala na svemu, predugo bi bilo da nabrajam, ali znaj da bez tebe ovih pet godina ne bi bile to što jesu. Ive i Petra, zahvaljujem vam što ste zadnje dvije godine mog studiranja učinile najposebnijima ikad. Također, zahvaljujem svim profesorima i asistentima koji su mi prenijeli toliko znanja, a posebno hvala mojoj mentorici na iskazanom trudu i pomoći. I na kraju, hvala Tebi što si sve napravio baš tako kako je!

Sadržaj

Uvod

Geometrijske konstrukcije koje se izvode samo ravnalom i šestarom danas se nazivaju euklidskim konstrukcijama. Popularno pitanje je jesu li (i kako) konstrukcije pravilnih mnogokuta izvedive samo ravnalom i šestarom. Konstrukcije pravilnih mnogokuta najčešće se izvode upisivanjem mnogokuta u zadanu kružnicu. Konstrukcije mnogokuta s parnim brojem stranica su lako izvedive dok se konstrukcije s neparnim brojem stranica, primjerice konstrukcija peterokuta, sedmerokuta, deveterokuta i slično, smatraju kompliciranijima. Jedna od zanimljivih konstrukcija pravilnog mnogokuta je konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta.

Da se pravilan sedamnaesterokut može konstruirati samo ravnalom i šestarom dokazao je 1796. godine Carl Friedrich Gauss. U to vrijeme to je bio jedan od najneočekivanijih rezultata njegovog istraživanja teorije brojeva. U prvom poglavlju opisan je Gaussov dokaz konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta koji se temelji na podjeli kružnice na 17 sukladnih dijelova.

Poznato je da Gauss nije nikad izveo konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta niti je za to bio zainteresiran. Ipak, dugi niz godina sve poznate konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta temeljile su se upravo na njegovoj analizi. Neke od njih prikazane su u drugom poglavlju. Tu se, između ostalog, nalaze i konstrukcije samo ravnalom i samo šestarom.

Tek početkom 20. stoljeća pojavile su se konstrukcije koje se ne temelje na Gaussovoj analizi. One su opisane u trećem poglavlju ovog rada.

Poglavlje 1

O mogućnosti konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta (Gaussov dokaz)

1.1 O konstrukciji ravnalom i šestarom

Pod pojmom geometrijskih konstrukcija podrazumijevamo onaj dio geometrije u ravnini (planimetrije) koji probleme rješava konstruktivnim metodama. Konstruiranje se obavlja uz pomoć instrumenata za konstrukciju. Konstrukcije u kojima su kao jedini instrumenti dopušteni ravnalo i šestar nazivamo euklidskim konstrukcijama. Naime, prva tri postulata (od pet) u Euklidovim *Elementima* kažu:

- da se može nacrtati dužina između dvije zadane točke;
- da se neka dužina može produžiti neograničeno;
- da se oko svake točke može nacrtati kružnica s danim polumjerom.

Dani postulati također podrazumijevaju da se sjecišta dvaju pravaca, pravca i kružnice te dviju kružnica smatraju uvijek određenima.

Upotrebom ravnala i šestara moguće je izvesti sljedeće operacije:

1. konstrukcija pravca kroz dvije dane različite točke;
2. konstrukcija sjecišta dvaju danih neparalelnih pravaca od kojih je jedan zadan s dvije različite točke;
3. konstrukcija kružnice sa središtem u danoj točki koja prolazi kroz drugu danu točku;
4. konstrukcija dvaju sjecišta dane kružnice i jednog pravca (koji siječe tu kružnicu) koji je zadan s dvije svoje različite točke; konstrukcija dvaju sjecišta danog pravca

i jedne kružnice (koja siječe taj pravac) koja je zadana svojim središtem i jednom svojom točkom;

5. konstrukcija sjecišta jedne dane kružnice i još jedne kružnice (koja siječe prvu kružnicu) koja je zadana svojim središtem i još jednom svojom točkom.

Konstrukcije ravnalom i šestarom se koriste u konstrukcijama pravilnih mnogokuta. Konstrukcija pravilnog n-terokuta svodi se zapravo na zadatak dijeljenja jedinične kružnice na n sukladnih dijelova. Tada su tetive te kružnice, koje spajaju uzastopne djelišne točke, stranice pravilnog n-terokuta. Sve do kraja 18. stoljeća vjerovalo se da se ravnalom i šestarom, od svih pravilnih mnogokuta s neparnim brojem stranica, mogu konstruirati samo trokut, peterokut i petnaesterokut. U to vrijeme dokazano je da se može konstruirati svaki mnogokut čiji je broj stranica prost broj koji umanjen za jedan daje potenciju broja dva, čiji je eksponent opet potencija broja dva. To su prosti brojevi oblika $2^{2^m} + 1$, općenito poznati i kao Fermatovi brojevi. Do danas je poznato pet brojeva tog oblika koji mogu biti stranice pravilnog mnogokuta. Upravo tih pet prostih brojeva danas nazivamo Gaussovi prosti brojevi, a oni su $3, 5, 17, 257$ i 65537. Gauss je pokazao da se samo za ove brojeve, pri provođenju analize konstrukcije, mogu dobiti kvadratne jednadžbe čija su rješenja konstrukcijski izvediva ravnalom i šestarom. U nastavku će biti obrađena, ne tako popularna, konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta, koju je dokazao upravo Gauss.

1.2 Gaussov dokaz konstrukcije

Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.) se intenzivno bavio pitanjem konstrukcija pravilnih n-terokuta ravnalom i šestarom. Svoje matematičke rezultate zapisivao je vodeći dnevnik. Prva zabilješka datira 30. ožujka 1796. godine, dan nakon što je, prema vlastitim riječima, došao do dokaza mogućnosti konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta ravnalom i šestarom. O svom otkriću Gauss je prijatelju Christianu Ludwigu Gerlingu, profesoru matematike, fizike i astronomije u Marburgu, u rujnu 1819. napisao pismo u kojem opisuje dokaz konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta.

Dokaz se zasniva na podjeli kruga na 17 sukladnih dijelova. Neka je

$$2\pi = 17\varphi.$$

Uočimo da je $\cos n\varphi = \cos(17 - n)\varphi$. Uvedimo sljedeće oznake:

$$a = \cos\varphi + \cos 4\varphi, \quad b = \cos 2\varphi + \cos 8\varphi,$$

$$c = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi, \quad d = \cos 6\varphi + \cos 7\varphi,$$

$$e = a + b, \quad f = c + d.$$

Imamo

$$2(e+f) = 2(a+b+c+d) = 2\sum_{k=1}^{8} \cos k\varphi = \sum_{k=1}^{16} \cos k\varphi.$$

Neka je $g = \sum_{k=1}^{16} \sin k\varphi$. Tada je

$$\begin{aligned}
2(e+f) + ig &= \sum_{k=1}^{16} (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) \\
&= \sum_{k=1}^{16} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k \\
&= \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{17} - 1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi) - 1} - 1 \\
&= \frac{\cos 17\varphi + i \sin 17\varphi - 1}{\cos \varphi + i \sin \varphi - 1} - 1 \\
&= \frac{\cos 2\pi + i \sin 2\pi - 1}{\cos \varphi + i \sin \varphi - 1} - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Kako je $e + f \in \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$, to je $2(e+f) = -1$ i $g = 0$. Dakle,

$$e + f = -\frac{1}{2}.$$

Korištenjem formule za pretvorbu umnoška kosinusa u zbroj dobiva se

$$\begin{aligned}
2ab &= 2\left(\cos \varphi + \cos 4\varphi\right)\left(\cos 2\varphi + \cos 8\varphi\right) \\
&= 2\left(\cos \varphi \cdot \cos 2\varphi + \cos \varphi \cdot \cos 8\varphi + \cos 4\varphi \cdot \cos 2\varphi + \cos 4\varphi \cdot \cos 8\varphi\right) \\
&= \cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 7\varphi + \cos 9\varphi + \cos 2\varphi + \cos 6\varphi + \cos 4\varphi + \cos 12\varphi \\
&= \cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 7\varphi + \cos 8\varphi + \cos 2\varphi + \cos 6\varphi + \cos 4\varphi + \cos 5\varphi \\
&= a + b + c + d \\
&= e + f \\
&= -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2ac &= 2\left(\cos \varphi + \cos 4\varphi\right)\left(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi\right) \\
&= 2\left(\cos \varphi \cdot \cos 3\varphi + \cos \varphi \cdot \cos 5\varphi + \cos 4\varphi \cdot \cos 3\varphi + \cos 4\varphi \cdot \cos 5\varphi\right) \\
&= \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \cos 7\varphi + \cos \varphi + \cos \varphi + \cos 9\varphi \\
&= 2\cos \varphi + 2\cos 4\varphi + \cos 2\varphi + \cos 6\varphi + \cos 7\varphi + \cos 8\varphi \\
&= 2a + b + d,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2ad &= 2(\cos\varphi + \cos 4\varphi)(\cos 6\varphi + \cos 7\varphi)\\
&= 2(\cos\varphi\cdot\cos 6\varphi + \cos\varphi\cdot\cos 7\varphi + \cos 4\varphi\cdot\cos 6\varphi + \cos 4\varphi\cdot\cos 7\varphi)\\
&= \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 6\varphi + \cos 8\varphi + \cos 10\varphi + \cos 2\varphi + \cos 11\varphi + \cos 3\varphi\\
&= \cos 8\varphi + \cos 2\varphi + \cos 5\varphi + \cos 3\varphi + 2\cos 6\varphi + 2\cos 7\varphi\\
&= b + c + 2d,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2bc &= 2(\cos 2\varphi + \cos 8\varphi)(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi)\\
&= 2(\cos 2\varphi\cdot\cos 3\varphi + \cos 2\varphi\cdot\cos 5\varphi + \cos 8\varphi\cdot\cos 3\varphi + \cos 8\varphi\cdot\cos 5\varphi)\\
&= \cos\varphi + \cos 5\varphi + \cos 3\varphi + \cos 7\varphi + \cos 5\varphi + \cos 11\varphi + \cos 13\varphi + \cos 3\varphi\\
&= \cos\varphi + \cos 4\varphi + 2\cos 3\varphi + 2\cos 5\varphi + \cos 6\varphi + \cos 7\varphi\\
&= a + 2c + d,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2bd &= 2(\cos 2\varphi + \cos 8\varphi)(\cos 6\varphi + \cos 7\varphi)\\
&= 2(\cos 2\varphi\cdot\cos 6\varphi + \cos 2\varphi\cdot\cos 7\varphi + \cos 8\varphi\cdot\cos 6\varphi + \cos 8\varphi\cdot\cos 7\varphi)\\
&= \cos 8\varphi + \cos 4\varphi + \cos 9\varphi + \cos 5\varphi + \cos 14\varphi + \cos 2\varphi + \cos 15\varphi + \cos\varphi\\
&= \cos\varphi + \cos 4\varphi + 2\cos 2\varphi + 2\cos 8\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi\\
&= a + 2b + c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2cd &= 2(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi)(\cos 6\varphi + \cos 7\varphi)\\
&= 2(\cos 3\varphi\cdot\cos 6\varphi + \cos 3\varphi\cdot\cos 7\varphi + \cos 5\varphi\cdot\cos 6\varphi + \cos 5\varphi\cdot\cos 7\varphi)\\
&= \cos 9\varphi + \cos 3\varphi + \cos 10\varphi + \cos 4\varphi + \cos 11\varphi + \cos\varphi + \cos 12\varphi + \cos 2\varphi\\
&= \cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 7\varphi + \cos 8\varphi + \cos 2\varphi + \cos 6\varphi + \cos 4\varphi + \cos 5\varphi\\
&= a + b + c + d\\
&= e + f\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$2ac + 2ad + 2bc + 2bd = 4a + 4b + 4c + 4d,$$

tj.

$$2ef = -2 \quad \text{ili} \quad ef = -1.$$

Iz $e + f = -\frac{1}{2}$ i $ef = -1$ vidi se da su e i f korijeni kvadratne jednadžbe

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0.$$

Korijeni te jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
e - f &= a + b - c - d \\
&= (\cos\varphi - \cos 7\varphi) + (\cos 2\varphi - \cos 6\varphi) + (\cos 4\varphi + \cos 8\varphi) - (\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) \\
&= 2\sin 3\varphi \sin 4\varphi + 2\sin 2\varphi \sin 4\varphi + 2\sin 2\varphi \sin 6\varphi - 2\sin\varphi \sin 4\varphi \\
&= 2\sin 4\varphi(\sin 3\varphi - \sin\varphi) + 2\sin 2\varphi \sin 4\varphi + 2\sin 2\varphi \sin 6\varphi \\
&= 4\sin\varphi \sin 4\varphi \cos 2\varphi + 2\sin 2\varphi \sin 4\varphi + 2\sin 2\varphi \sin 6\varphi.
\end{aligned}$$

Kako su $\varphi, 2\varphi, 4\varphi, 6\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$, to su $\sin\varphi, \sin 2\varphi, \sin 4\varphi, \sin 6\varphi$ pozitivni, a kako je još i $2\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, to je i $\cos 2\varphi$ pozitivan, pa je $e - f > 0$, tj. $e > f$. Dakle,

$$e = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{i} \quad f = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}.$$

Nadalje, a i b su rješenja jednadžbe

$$x^2 - ex - \frac{1}{4} = 0$$

pa su njihove vrijednosti

$$\frac{e \pm \sqrt{e^2 + 1}}{2},$$

preciznije,

$$a = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(\sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right),$$

$$b = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right).$$

Predznaci u a i b su takvi jer vrijedi

$$\begin{aligned}
a - b &= (\cos\varphi + \cos 4\varphi) - (\cos 2\varphi + \cos 8\varphi) \\
&= (\cos\varphi - \cos 2\varphi) + (\cos 4\varphi - \cos 8\varphi) \\
&= 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2} + 2\sin 2\varphi \sin 6\varphi > 0
\end{aligned}$$

obzirom da su $\sin\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{3\varphi}{2}, \sin 2\varphi, \sin 6\varphi$ pozitivni. Dakle, dobili smo $a - b > 0$, tj. $a > b$.

Također, vrijedi $c > d$ jer je

$$\begin{aligned} c - d &= (\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) - (\cos 6\varphi + \cos 7\varphi) \\ &= (\cos 3\varphi - \cos 6\varphi) + (\cos 5\varphi - \cos 7\varphi) \\ &= 2\sin\frac{9\varphi}{2}\sin\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi\sin 6\varphi > 0. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$c = \frac{f + \sqrt{f^2+1}}{2} \quad \text{i} \quad d = \frac{f - \sqrt{f^2+1}}{2}$$

$$c = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\left(\sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right),$$

$$d = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\left(\sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right).$$

Budući da je $\cos\varphi + \cos 4\varphi = a$ i $\cos\varphi\cos 4\varphi = \frac{1}{2}c$, dobiva se da su $\cos\varphi$ i $\cos 4\varphi$ rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}c = 0.$$

Kako su $\varphi, 4\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, a funkcija kosinus je padajuća na tom intervalu, to je

$$\cos\varphi = \frac{a + \sqrt{a^2 - 2c}}{2}, \quad \cos 4\varphi = \frac{a - \sqrt{a^2 - 2c}}{2}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 2c}}{2} \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

Poznato je da, ako su zadane jedinična dužina i dužina duljine x, moguće je ravnalom i šestarom konstruirati dužinu duljine $\sqrt{x}$, pa je moguće konstruirati i sve dužine koje se iz zadanih dužina dobiju operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i uzimanja drugog korijena. Prema tome, iz prethodnih razmatranja slijedi da je ravnalom i šestarom moguće konstruirati $\cos\frac{2\pi}{17}$, a stoga i pravilni sedamnaesterokut.

U nastavku ćemo pokazati Gaussovu analizu. Gauss svoj dokaz mogućnosti konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta zasniva na rješavanju jednadžbe $x^{17} - 1 = 0$, gdje je x duljina stranice pripadajućeg sedamnaesterokuta. On odbacuje trivijalno rješenje $x = 1$ te rješava jednadžbu

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0.$$

Ključnu ulogu u rješavanju jednadžbe $x^{17} - 1 = 0$ igra činjenica da ostatci različiti od nule modulo 17 (to su: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 i 16) tvore cikličku grupu u odnosu na množenje, tj. da se množenje tih ostataka ponaša kao zbrajanje ostataka modulo 16. Također, treba primijetiti da se svaki ostatak različit od nule modulo 17 može prikazati kao potencija nekog od tih ostataka. To slijedi iz činjenice da je broj 17 prost broj. Gauss je za rješavanje koristio potencije broja 3, tj. sljedeću tablicu potencija broja 3 i pripadnih ostataka modulo 17:

pot.	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}
ost.	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

Primjerice, iz prethodne tablice zaključujemo $15 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{17}$ jer je $3^6 \cdot 3^{10} = 3^{16}$.

Ostatci modulo 16 mogu se prirodno podijeliti u dvije grupe ostataka: grupu parnih i grupu neparnih ostataka. Ovakvoj podjeli ekvivalentna je podjela ostataka modulo 17 na potencije s parnim i potencije s neparnim eksponentima, odnosno na kvadrate i nekvadrate. Podjela je sljedeća:

kvadrati	3^0	3^2	3^4	3^6	3^8	3^{10}	3^{12}	3^{14}
	1	9	13	15	16	8	4	2
nekvadrati	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	3^{13}	3^{15}
	3	10	5	11	14	7	12	6

Jednadžbu

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

rješavamo tako da rješenje x_1 bude $\cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$.

Na osnovi podjele ostataka modulo 16 u grupe kvadrata i nekvadrata, uvodimo supstituciju

$$w_0 = x + x^9 + x^{13} + x^{15} + x^{16} + x^8 + x^4 + x^2,$$

$$w_1 = x^3 + x^{10} + x^5 + x^{11} + x^{14} + x^7 + x^{12} + x^6,$$

tako da se u w_0 nalaze potencije broja x čiji su eksponenti kvadrati modulo 17, a u w_1 nalaze se potencije broja x čiji su eksponenti nekvadrati modulo 17. Očigledno, vrijedi $w_0 + w_1 = -1$. Ako pomnožimo w_0 i w_1, očigledno ćemo dobiti 64 pribrojnika. Dokažimo najprije da niti jedan od njih nije 0. Kada pomnožimo jedan pribrojnik iz w_0 s jednim pribrojnikom iz w_1, dobivamo pribrojnik oblika

$$x^{3^{2k}+3^{2j+1}}$$

i treba dokazati da je

$$3^{2j+1} \not\equiv -3^{2k} \pmod{17}.$$

Kako je $3^8 \equiv -1 \pmod{17}$, to je

$$-3^{2k} \equiv 3^{2k+8} \pmod{17}.$$

Ako bi vrijedilo $3^{2j+1} \equiv 3^{2k+8} \pmod{17}$, tada bi bilo

$$2j+1 \equiv 2k+8 \pmod{16},$$

a to nije moguće jer paran broj ne može biti kongruentan neparnom broju modulo 16. Dakle, pri množenju w_0 i w_1 dobivaju se 64 pribrojnika oblika

$$x^n = x^{3^{2k}+3^{2j+1}}, \quad 1 \leq n \leq 16.$$

Rezultat množenja w_0 i w_1 podijelit ćemo u grupe. Prvu grupu, s_0, činit će pribrojnici koji se dobivaju množenjem prvog pribrojnika od w_0 s prvim pribrojnikom od w_1, množenjem drugog pribrojnika od w_0 s drugim pribrojnikom od w_1 i tako redom. Za prvu grupu pribrojnika dobiva se

$$\begin{aligned} s_0 &= xx^3 + x^9x^{10} + x^{13}x^5 + x^{15}x^{11} + x^{16}x^{14} + x^8x^7 + x^4x^{12} + x^2x^6 \\ &= x^4 + x^2 + x + x^9 + x^{13} + x^{15} + x^{16} + x^8 \\ &= w_0. \end{aligned}$$

Ako gornje pribrojnike prikažemo pomoću eksponenta potencije x-a kao potencije broja 3, dobivamo:

$$x^4 = xx^3 = x^{3^0}x^{3^1} = x^{3^0+3^1} = x^{3^{12}}.$$

Drugi pribrojnik u s_0 jednak je

$$x^2 = x^9x^{10} = x^{3^2}x^{3^3} = x^{3^2+3^3} = x^{3^2(3^0+3^1)} = x^{3^2 3^{12}} = x^{3^{2+12}},$$

treći pribrojnik u s_0 jednak je

$$x = x^{13}x^5 = x^{3^4}x^{3^5} = x^{3^4(3^0+3^1)} = x^{3^4 3^{12}} = x^{3^{4+12}}$$

i dalje analogno. Dakle, svaki pribrojnik u s_0 dobiva se tako što se u eksponentu paran stupanj trojke pomnoži sa $3^0 + 3^1 = 4 \equiv 3^{12} \pmod{17}$, a 3^{12} je eksponent prvog pribrojnika u s_0.

Kako bismo dobili s_1, množimo na sljedeći način: od w_1 uzimamo pribrojnike pomjerene ciklički udesno za jedno mjesto, tj. prvi pribrojnik od w_0 množi se s drugim pribrojnikom od w_1, drugi pribrojnik od w_0 množi se s trećim pribrojnikom od w_1 itd. Predzadnji pribrojnik od w_0 množi se sa zadnjim pribrojnikom od w_1, a zadnji pribrojnik od w_0 množi se s prvim pribrojnikom od w_1. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} s_1 &= xx^{10} + x^9x^5 + x^{13}x^{11} + x^{15}x^{14} + x^{16}x^7 + x^8x^{12} + x^4x^6 + x^2x^3 \\ &= x^{11} + x^{14} + x^7 + x^{12} + x^6 + x^3 + x^{10} + x^5 \\ &= w_1. \end{aligned}$$

Objasnimo rezultat množenja za s_1, drugu grupu pribrojnika. Prvi pribrojnik je

$$x^{11} = xx^{10} = x^{3^0}x^{3^3} = x^{3^0+3^3} = x^{3^7}.$$

Drugi pribrojnik jednak je

$$x^{14} = x^9x^5 = x^{3^2}x^{3^5} = x^{3^2+3^5} = x^{3^2(3^0+3^3)} = x^{3^2 3^7} = x^{3^{2+7}},$$

treći pribrojnik je

$$x = x^{13}x^{11} = x^{3^4}x^{3^7} = x^{3^4(3^0+3^3)} = x^{3^4 3^7} = x^{3^{4+7}}$$

itd. U s_1 se svaki pribrojnik dobiva tako da se u eksponentu paran stupanj broja 3 množi s istim brojem, tj. sa $11 = 3^0 + 3^3 \equiv 3^7 \pmod{17}$, a 3^7 je eksponent u prvom pribrojniku.

Ako je prvi pribrojnik u umnošku $x^{3^{2k}+3^{2j+1}} = 3^s$, tada su ostali oblika

$$x^{3^{2(k+m)}+3^{2(j+m)+1}} = x^{3^{2k+2m}+3^{2j+1+2m}} = x^{3^{2m}(3^{2k}+3^{2j+1})} = x^{3^{2m}3^s} = x^{3^{2m+s}}, \quad m = 1, \ldots, 7.$$

Kada je s paran dobiva se w_0, a kada je s neparan dobiva se w_1. Za ostale grupe pribrojnika dobivamo:

$$\begin{aligned} s_2 &= xx^5 + \cdots = x^6 + \cdots = x^{3^{15}} + \cdots = w_1, \\ s_3 &= xx^{11} + \cdots = x^{12} + \cdots = x^{3^{13}} + \cdots = w_1, \\ s_4 &= xx^{14} + \cdots = x^{15} + \cdots = x^{3^6} + \cdots = w_0, \\ s_5 &= xx^7 + \cdots = x^8 + \cdots = x^{3^{10}} + \cdots = w_0, \\ s_6 &= xx^{12} + \cdots = x^{13} + \cdots = x^{3^4} + \cdots = w_0, \\ s_7 &= xx^6 + \cdots = x^7 + \cdots = x^{3^{11}} + \cdots = w_1, \end{aligned}$$

pa je konačno

$$w_0w_1 = w_0 + w_1 + w_1 + w_1 + w_0 + w_0 + w_0 + w_1 = 4(w_0 + w_1) = -4.$$

Dakle, dobili smo sustav

$$w_0 + w_1 = -1, \qquad w_0 w_1 = -4,$$

koji je ekvivalentan kvadratnoj jednadžbi

$$w^2 + w - 4 = 0$$

čija su rješenja

$$w_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ovaj postupak rastavljanja na pribrojnike može se nastaviti analogno. Pribrojnik w_0 može se rastaviti na dva pribrojnika: potencije od x čiji su eksponenti parne potencije broja 3 u kojima su eksponenti oblika $4k$, njih ćemo označiti sa w_{00}, te potencije od x čiji su eksponenti parne potencije broja 3 čiji su eksponenti oblika $4k+2$, označeni sa w_{10}. Također i w_1 rastavimo u dvije grupe pribrojnika. Pribrojnici čiji su eksponenti neparne potencije broja 3 s eksponentima oblika $4k+1$, označeni sa w_{01}, te pribrojnici u kojima su eksponenti neparne potencije broja 3 s eksponentima oblika $4k+3$, označeni sa w_{11}. U konačnici dobivamo

$$w_{00} = x + x^4 + x^{16} + x^{13}, \qquad w_{10} = x^2 + x^8 + x^{15} + x^9,$$
$$w_{01} = x^3 + x^{12} + x^{14} + x^5, \qquad w_{10} = x^6 + x^7 + x^{11} + x^{10}.$$

Vrijede sljedeći sustavi jednadžbi:

$$\begin{aligned} w_{00} + w_{10} &= w_0, \\ w_{00}w_{10} &= w_{01} + w_{10} + w_{00} + w_{11} = w_0 + w_1 = -1, \\ w_{01} + w_{11} &= w_1, \\ w_{01}w_{11} &= w_{10} + w_{11} + w_{01} + w_{00} = w_0 + w_1 = -1. \end{aligned}$$

Množenje možemo izvesti direktno ili primjenom analognog postupka kao i pri množenju w_0 i w_1. Zaključujemo da su w_{00} i w_{10} rješenja jednadžbe $z^2 - w_0 z - 1 = 0$, a w_{01} i w_{11} rješenja jednadžbe $z^2 - w_1 z - 1 = 0$. Dakle,

$$w_{00,10} = \frac{w_0 \pm \sqrt{w_0^2 + 4}}{2}, \quad w_{01,11} = \frac{w_1 \pm \sqrt{w_1^2 + 4}}{2}.$$

Treba biti oprezan pri određivanju predznaka ispred korijena. Algebarski, rješenja kvadratnih jednadžbi su međusobno ekvivalentna, no ako ih promatramo kao kompleksne brojeve, ona imaju određene vrijednosti, tj. među sedamnaestim korijenima iz 1 postoji jednoznačno uređenje (poredak) na jediničnoj kružnici o kojem ovisi predznak rješenja.

Određivanje predznaka korijena tako da se dobije $x_1 = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$, analizirat će se kasnije.

Nastavljajući analogan postupak podjele pribrojnika iz $w_{00} = x + x^4 + x^{16} + x^{13}$ dobiva se

$$w_{000} = x + x^{16}, \quad w_{100} = x^4 + x^{13},$$

iz čega slijedi

$$w_{000} + w_{100} = w_{00}, \quad w_{000}w_{100} = x^5 + x^{12} + x^{14} + x^3 = w_{01},$$

pa su w_{000} i w_{100} rješenja jednadžbe $z^2 - w_{00}z + w_{01}$. Kako je

$$x + x^{16} = w_{000}, \quad xx^{16} = x^{17} = 1,$$

to su x i x^{16} su rješenja jednadžbe

$$z^2 - w_{000}z + 1 = 0.$$

Za konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta ovu jednadžbu nije potrebno rješavati jer vrijedi da je

$$w_{000} = x + x^{16} = x + \frac{1}{x} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$$

ako je $x = x_1 = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$. U općenitom slučaju je

$$x^k = \left(\cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}\right)^k$$

pa je

$$x_{17-k} = \cos(17-k)\frac{2\pi}{17} + i\sin(17-k)\frac{2\pi}{17} = \cos k\frac{2\pi}{17} - i\sin k\frac{2\pi}{17} = \overline{x_k},$$

tj. x_{17-k} i x_k su konjugirano kompleksni brojevi. Odatle je

$$x^k + x^{17-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{17} \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, 16.$$

Odredimo predznake pri rješavanju kvadratnih jednadžbi tako da dobijemo da je

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17},$$

tj. da je $w_{000} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$.

Vrijedi:

$$w_{000} = x + x^{16} = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \quad w_{100} = x^4 + x^{13} = 2\cos 4\frac{2\pi}{17},$$
$$w_{010} = x^8 + x^9 = 2\cos 8\frac{2\pi}{17}, \quad w_{110} = x^2 + x^{15} = 2\cos 2\frac{2\pi}{17},$$
$$w_{001} = x^3 + x^{14} = 2\cos 3\frac{2\pi}{17}, \quad w_{101} = x^5 + x^{12} = 2\cos 5\frac{2\pi}{17},$$
$$w_{011} = x^7 + x^{10} = 2\cos 7\frac{2\pi}{17}, \quad w_{111} = x^6 + x^{11} = 2\cos 6\frac{2\pi}{17}.$$

Budući da je kosinus padajuća funkcija na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, to je

$$2\cos\frac{2k\pi}{17} > 2\cos\frac{2l\pi}{17}, \quad 1 \leq k < l \leq 8,$$

pa vrijedi

$$w_{000} > w_{110} > w_{001} > w_{100} > 0 > w_{101} > w_{111} > w_{011} > w_{010}.$$

Koristeći $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ za $0 < \alpha < \pi$, dobivamo nejednakosti

$$-w_{010} > w_{000} > -w_{011} > w_{110} > -w_{111} > w_{001} > -w_{101} > w_{100} > 0.$$

Imamo

$$w_{00} = x + x^4 + x^{16} + x^{13} = w_{000} + w_{100} > 0,$$
$$w_{10} = x^2 + x^8 + x^{15} + x^9 = w_{010} + w_{110} < 0,$$
$$w_{01} = x^3 + x^{12} + x^{14} + x^5 = w_{001} + w_{101} > 0,$$
$$w_{11} = x^6 + x^7 + x^{11} + x^{10} = w_{011} + w_{111} < 0,$$

a također i

$$w_{00} = w_{000} + w_{100} > w_{000} > w_{001} > w_{001} + w_{101} = w_{01}.$$

Budući da je kosinus monotono padajuća funkcija na $\langle 0, \pi\rangle$, vrijedit će $w_0 > 0$, odnosno

$$w_{000} = 2\cos\frac{2\pi}{17} > 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad w_{110} = 2\cos\frac{4\pi}{17} > 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$
$$w_{100} > 0 \quad \text{i} \quad w_{010} > -1.$$

Kada sve zbrojimo, dobivamo

$$w_0 = w_{000} + w_{010} + w_{100} + w_{110} > \sqrt{3} + \sqrt{2} + 0 - 1 > 0.$$

Također, $-w_{111} > w_{001}$, $w_{011} < 0$ i $w_{100} < 0$, pa je

$$w_1 = w_{001} + w_{011} + w_{101} + w_{111} < 0.$$

Budući da je $w_0 > 0$ i $w_1 < 0$, vrijedi

$$w_0 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad w_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{i} \quad |w_1| > |w_0|.$$

Znamo da je $w_{00} + w_{10} = w_0 > 0$ i $w_{00}w_{10} = -1$, pa zbog $w_{00} > 0 > w_{10}$ vrijedi

$$w_{00} = \frac{w_0 + \sqrt{w_0^2 + 4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4},$$

$$w_{10} = \frac{w_0 - \sqrt{w_0^2 + 4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4},$$

$$|w_{00}| > |w_{10}|.$$

Također, znamo da je $w_{01} + w_{11} = w_1 < 0$ i $w_{01}w_{11} = -1$, pa zbog $w_{01} > 0 > w_{11}$ vrijedi

$$w_{01} = \frac{w_1 + \sqrt{w_1^2 + 4}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4},$$

$$w_{11} = \frac{w_1 - \sqrt{w_1^2 + 4}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4},$$

$$|w_{11}| > |w_{01}|.$$

Konačno se iz sustava jednadžbi

$$w_{000} + w_{100} = w_{00}, \quad w_{000}w_{100} = w_{01},$$

ekvivalentnog kvadratnoj jednadžbi $x^2 - w_{00}x + w_{01} = 0$ te iz $w_{000} > w_{100} > 0$ dobiva

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{2\pi}{17} &= w_{000} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \frac{\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\cos\frac{8\pi}{17} &= w_{100}\\ &= \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}-\frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{4}.\end{aligned}$$

Analogno se iz sustava jednadžbi

$$w_{010}+w_{110}=w_{10}<0,\quad w_{010}w_{110}=w_{11}<0,$$

ekvivalentnog kvadratnoj jednadžbi $x^2-w_{10}x+w_{11}=0$ i činjenice $w_{110}>0>w_{010}$, uz $|w_{010}|>|w_{110}|$, dobiva

$$\begin{aligned}2\cos\frac{4\pi}{17} &= w_{110}\\ &= \frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}+\frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\cos\frac{16\pi}{17} &= w_{010}\\ &= \frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}-\frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{4}.\end{aligned}$$

Iz sustava jednadžbi

$$w_{001}+w_{101}=w_{01}>0,\quad w_{001}w_{101}=w_{10}<0,$$

ekvivalentnog kvadratnoj jednadžbi $x^2-w_{01}x+w_{10}=0$ i činjenice $w_{001}>0>w_{101}$, uz $|w_{001}|>|w_{101}|$, dobiva se

$$\begin{aligned}2\cos\frac{6\pi}{17} &= w_{001}\\ &= \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}+\frac{\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\cos\frac{10\pi}{17} &= w_{101}\\ &= \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}-\frac{\sqrt{17-3\sqrt{17}+\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{4},\end{aligned}$$

te konačno, iz sustava jednadžbi

$$w_{011} + w_{111} = w_{11} < 0, \quad w_{011}w_{111} = w_{00} > 0,$$

ekvivalentnog kvadratnoj jednadžbi $x^2 - w_{11}x + w_{00} = 0$ i činjenice $0 > w_{111} > w_{011}$, uz $|w_{011}| > |w_{111}|$, dobiva

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{12\pi}{17} &= w_{111} \\ &= \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} + \frac{\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{14\pi}{17} &= w_{011} \\ &= \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} - \frac{\sqrt{17-3\sqrt{17}-\sqrt{170-38\sqrt{17}}}}{4}. \end{aligned}$$

Ovdje završava Gaussova analiza iz koje je vidljivo da je pravilan sedamnaesterokut moguće konstruirati pomoću ravnala i šestara.

Tek sad možemo dati geometrijsku intrepretaciju rješenja koje je Gauss opisao u svom pismu. Za $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$ imamo

$$\begin{aligned} w_0 &= x + x^2 + x^4 + x^8 + x^9 + x^{13} + x^{15} + x^{16} \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + (\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) \\ &\quad + (\cos 8\varphi + i\sin 8\varphi) + (\cos 9\varphi + i\sin 9\varphi) + (\cos 13\varphi + i\sin 13\varphi) \\ &\quad + (\cos 15\varphi + i\sin 15\varphi) + (\cos 16\varphi + i\sin 16\varphi) \\ &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + (\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) \\ &\quad + (\cos 8\varphi + i\sin 8\varphi) + (\cos 8\varphi - i\sin 8\varphi) + (\cos 4\varphi - i\sin 4\varphi) \\ &\quad + (\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi) \\ &= 2(\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 8\varphi) = 2(a+b) = 2e, \end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned} w_1 &= x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{14} \\ &= (\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) + (\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) + (\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi) \\ &\quad + (\cos 7\varphi + i\sin 7\varphi) + (\cos 10\varphi + i\sin 10\varphi) + (\cos 11\varphi + i\sin 11\varphi) \\ &\quad + (\cos 12\varphi + i\sin 12\varphi) + (\cos 14\varphi + i\sin 14\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) + (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi) + (\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) \\
&\quad + (\cos 7\varphi + i \sin 7\varphi) + (\cos 7\varphi - i \sin 7\varphi) + (\cos 6\varphi - i \sin 6\varphi) \\
&\quad + (\cos 5\varphi - i \sin 5\varphi) + (\cos 3\varphi - i \sin 3\varphi) \\
&= 2(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 6\varphi + \cos 7\varphi) = 2(c + d) = 2f.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$e = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{i} \quad f = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4},$$

što je ranije dobiveno primjenom trigonometrijskih identiteta.

Poglavlje 2

Neke konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta na osnovi Gaussove analize

U ovom poglavlju prikazat ćemo nekoliko konstrukcija koje koriste Gaussovu analizu mogućnosti konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta. Zanimljivo je to da Gauss nikad nije izveo geometrijsku konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta, niti je za to bio zainteresiran.

2.1 O konstrukcijama pravilnog sedamnaesterokuta na osnovi Gaussove analize

Jedan od pogodnih načina za konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta je primjenom rješenja jednadžbe $x^2 - w_{00}x + w_{01} = 0$, tj. jedne od veličina

$$w_{000} = 2\cos\frac{2\pi}{17} \quad \text{ili} \quad w_{100} = 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{\pi}{34}.$$

Ako računamo $w_{000} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, tada nad polumjerom jedinične kružnice trebamo konstruirati normalu u $\frac{w_{000}}{2}$. Presjek te normale i kružnice su dvije točke. Te točke i točka u kojoj polumjer siječe kružnicu su tri uzastopne točke pravilnog sedamnaesterokuta.

Ukoliko računamo $w_{100} = 2\sin\frac{\pi}{34}$, tada dobivamo stranicu pravilnog poligona od 34 stranice upisanog u jediničnu kružnicu. Ako konstruiramo kružnicu čije je središte proizvoljna točka polazne jedinične kružnice, a polumjer $w_{100} = 2\sin\frac{\pi}{34}$, tada presjek ove dvije kružnice predstavlja dvije uzastopne točke pravilnog sedamnaesterokuta.

U prethodnom poglavlju dobili smo

$$w_0 + w_1 = -1 \quad \text{i} \quad w_0 w_1 = -4,$$

tj. w_0 i w_1 su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$, u kojoj su svi koeficijenti poznati. Pri konstrukciji ovih rješenja treba uzeti u obzir da je $w_0 > 0 > w_1$, ako koristimo orijentirane dužine, odnosno da je $|w_1| > |w_0|$ kada ih ne koristimo.

Konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta možemo izvesti po koracima sljedeće algebarske analize:

1. Konstruiramo rješenja w_0 i w_1 kvadratne jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$.
2. Konstruiramo po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje, w_{00}, kvadratne jednadžbe $x^2 - w_0 x - 1 = 0$.
3. Konstruiramo po apsolutnoj vrijednosti manje rješenje, w_{01}, kvadratne jednadžbe $x^2 - w_1 x - 1 = 0$.
4. Konstruiramo veće rješenje w_{000} kvadratne jednadžbe $x^2 - w_{00}x + w_{01} = 0$.
5. U jediničnoj kružnici odredimo kružni isječak središnjeg kuta α čiji je kosinus $\frac{w_{000}}{2}$.

Danim koracima lako se konstruira pravilni sedamnaesterokut ako se koristi neki grafički način rješavanja kvadratnih jednadžbi. U konstrukciji pravilnog sedamnaesterokuta najčešće se koristi Carlyleov teorem o konstrukciji rješenja kvadratne jednadžbe.

Teorem 2.1.1 (Carlyleov teorem)**.** *Neka su p i q realni brojevi te neka kvadratna jednadžba*

$$x^2 - px + q = 0$$

ima realna rješenja. Neka je dana kružnica čiji je jedan promjer određen točkama $A(0, 1)$ i $P(p, q)$. Presjek kružnice i osi apscisa neka su točke $X_1(x_1, 0)$ i $X_2(x_2, 0)$. Tada su x_1 i x_2 rješenja dane kvadratne jednadžbe.

Dokaz. Središte zadane kružnice je točka $S\left(\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$, a polumjer ima duljinu $|AS|$, tj.

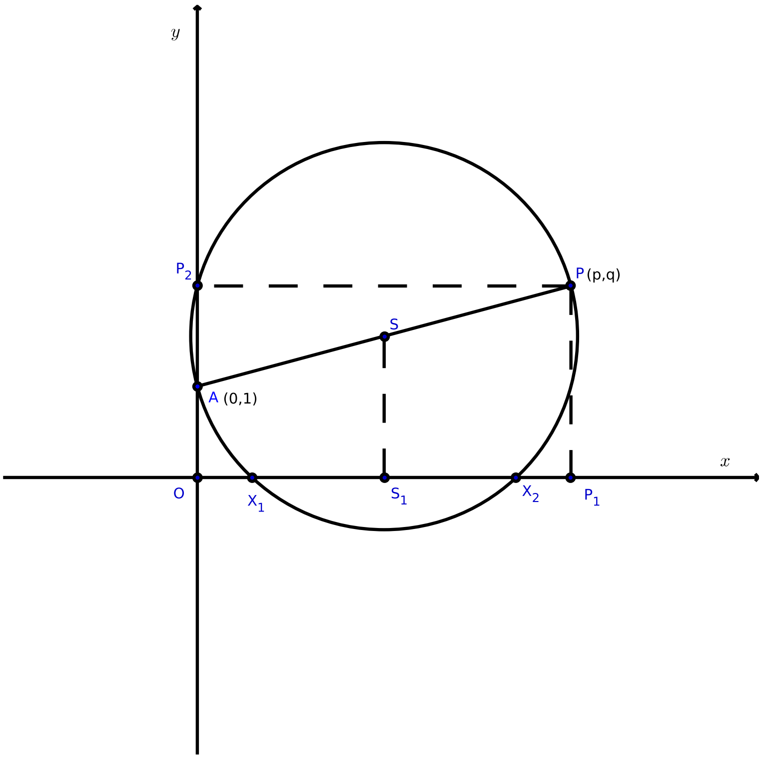
$$r = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

Tada je jednadžba zadane kružnice

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2,$$

odnosno

$$x^2 - px + y^2 - (q+1)y + q = 0.$$



Slika 2.1: Konstrukcija rješenja X_1 i X_2 kvadratne jednadžbe $x^2 - px + q = 0$

Da bismo odredili presjek kružnice s x-osi, rješavamo jednadžbu $y = 0$. Dobivamo da apscise točaka presjeka X_1 i X_2 zadovoljavaju jednadžbu $x^2 - px + q = 0$.

Tvrdnja se lako dokazuje i geometrijski. Neka je P_1 ortogonalna projekcija točke P na x-os, a P_2 ortogonalna projekcije točke P na y-os. Ako je S_1 ortogonalna projekcija točke S na x-os, tada je $|OS_1| = |S_1P_1|$ i $|X_1S_1| = |S_1X_2|$, odakle slijedi $|OX_1| = |X_2P_1|$ i konačno

$$|OX_1| + |OX_2| = |OP_1| \quad \text{odnosno} \quad x_1 + x_2 = p.$$

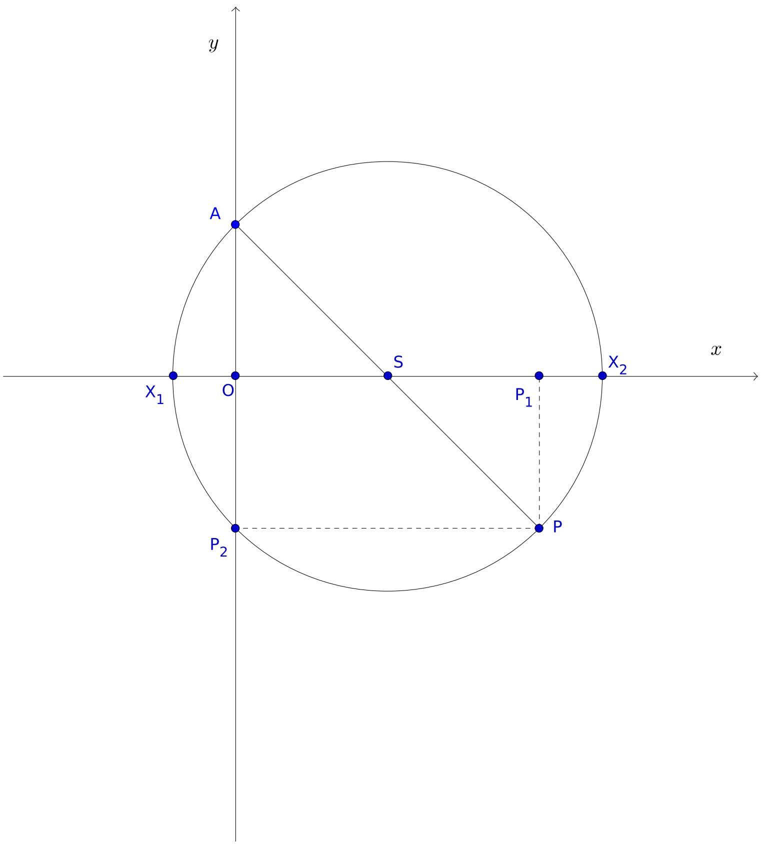
Iz potencije točke O na kružnicu slijedi da je

$$|OX_1| \cdot |OX_2| = |OA| \cdot |OP_2| \quad \text{odnosno} \quad x_1x_2 = q.$$

□

Za konstrukcijsko rješavanje kvadratne jednadžbe dovoljno je odrediti središte kružnice S jer pomoću polumjera $\overline{SA}$ lako konstruiramo traženu kružnicu. Kada je $q \neq 1$, tada kružnica siječe os ordinata u dvije točke, A i P_2, a vrijedi $|OP_2| = |P_1P| = q$, pa se S dobiva kao sjecište simetrala dužina $\overline{OP_1}$ i $\overline{AP_2}$.

Poseban slučaj predstavlja rješavanje jednadžbe $x^2 - px - 1 = 0$ jer se tada središte S, polovište dužine $\overline{AP}$, poklapa s polovištem dužine $\overline{OP_1}$. Ovaj poseban slučaj pojavljuje se u drugom i trećem koraku prethodno navedene analize za konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta.



Slika 2.2: Konstrukcija rješenja X_1 i X_2 kvadratne jednadžbe $x^2 - px - 1 = 0$

Carlyleov teorem može se poopćiti na rješavanje kvadratne jednadžbe oblika $x^2 - px + ab = 0$. U tom slučaju konstruiramo kružnicu čiji jedan promjer ima krajnje točke $A(0, a)$ i $P(p, b)$. Kada se stavi $a = 1$ i $b = q$ dobiva se Carlyleov teorem.

Prema tome, w_0 i w_1 se dobiju kao presjeci x-osi i kružnice čiji je promjer određen točkama $(0, 1)$ i $(-1, -4)$; w_{00} kao presjek x-osi i kružnice sa središtem u $\left(0, \frac{w_0}{2}\right)$ koja prolazi kroz $(0, 1)$, pri čemu se bira točka presjeka udaljenija od ishodišta; w_{01} kao presjek x-osi i kružnice sa središtem u $\left(0, \frac{w_1}{2}\right)$ koja prolazi kroz $(0, 1)$, pri čemu se bira točka presjeka bliže ishodištu; w_{000} kao presjek x-osi i kružnice čiji je promjer određen točkama $(0, 1)$ i (w_{00}, w_{01}), pri čemu se bira veća vrijednost.

2.2 Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta uzastopnim rješavanjem kvadratnih jednadžbi

Uz pomoć Carlyleovog postupka, rješavanjem niza kvadratnih jednadžbi, upisat ćemo pravilan sedamnaesterokut u jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu O koordinatnog sustava. Neka je T_1 presjek te kružnice s pozitivnim dijelom x-osi.

Prvo treba (konstrukcijski) riješiti jednadžbu

$$x^2 + x - 4 = 0.$$

Koristeći Carlyleov teorem za rješavanje kvadratne jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$, konstruiramo kružnicu nad promjerom $\overline{AP}$, pri čemu je $A(0, 1)$, a $P(-1, -4)$. Neka ova kružnica siječe pozitivan dio osi apscisa u točki $E_0(w_0, 0)$, a negativan dio osi apscisa u točki $E_1(w_1, 0)$.

U sljedeća dva koraka treba riješiti kvadratne jednadžbe

$$x^2 - w_0 x - 1 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - w_1 x - 1 = 0$$

čiji je slobodan član -1, a u tom slučaju se središte tražene kružnice nalazi na osi apscisa. U oba slučaja potrebno je konstruirati samo veće rješenje kvadratne jednadžbe.

Za jednadžbu $x^2 - w_0 x - 1 = 0$ središte Carlyleove kružnice je u točki F_0, polovištu dužine $\overline{OE_0}$, a za jednadžbu $x^2 - w_1 x - 1 = 0$ u točki F_1, polovištu dužine $\overline{OE_1}$. Za konstrukciju većeg rješenja jednadžbe $x^2 - w_0 x - 1 = 0$ opišimo luk kružnice sa središtem u F_0, polumjera $\overline{AF_0}$, koji siječe pozitivan dio x-osi. Tu točku označimo sa G_0. Za konstrukciju većeg rješenja jednadžbe $x^2 - w_1 x - 1 = 0$, na analogan način opišemo luk kružnice sa središtem u F, polumjera $\overline{AF_1}$, koji siječe pozitivan dio x-osi. Tu točku označimo sa G_1. Tada je

$$|OG_0| = w_{00} \quad \text{i} \quad |OG_1| = w_{01}.$$

Ostaje još konstruirati veće rješenje jednadžbe $x^2 - w_{00} x + w_{01} = 0$. U točki G_0 podignemo okomicu na x-os i na njoj označimo točku Q takvu da je

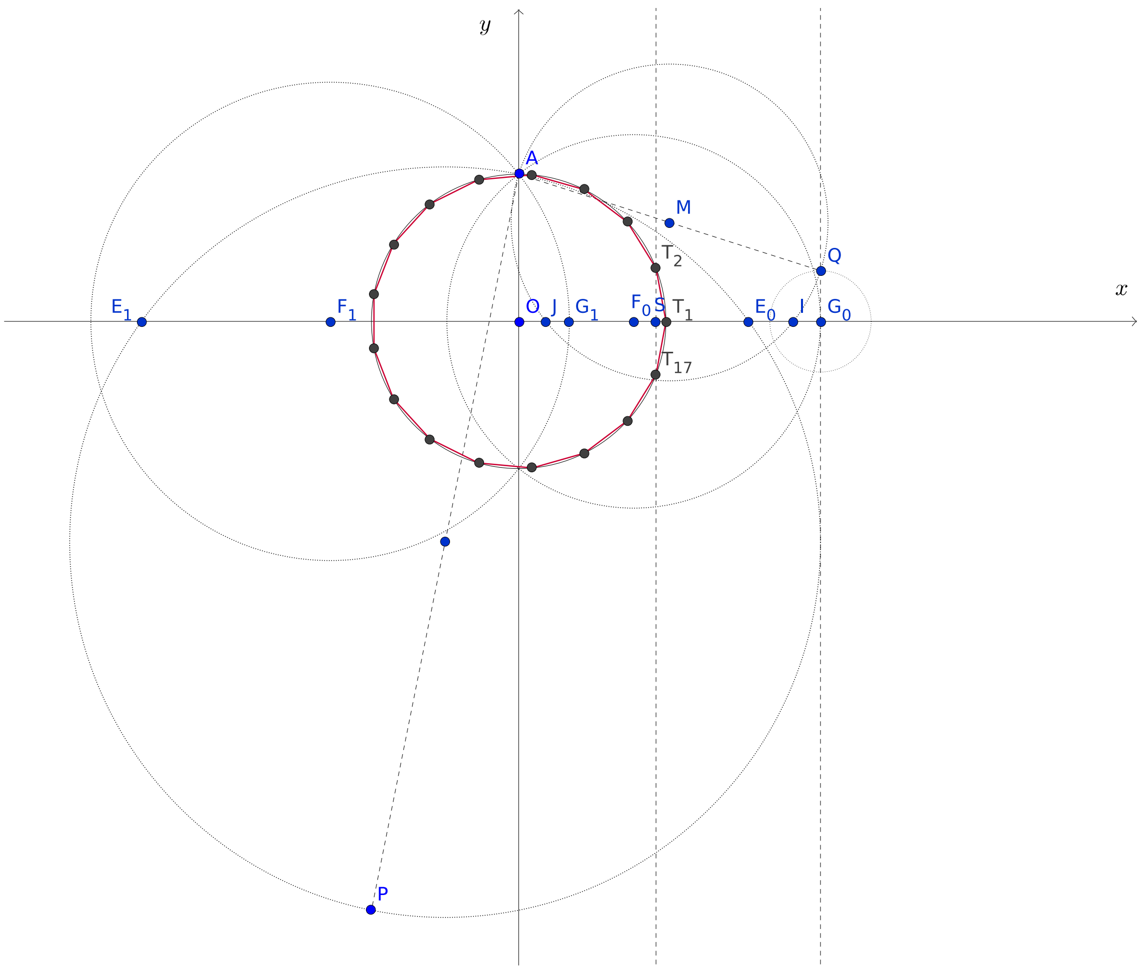
$$|G_0 Q| = |OG_1|.$$

Kružnica čiji je promjer $\overline{AQ}$ i središte točka M, siječe pozitivan dio x-osi u točkama I i J. Sa I označimo točku koja je udaljenija od ishodišta koordinatnog sustava. Tada za točku

S, polovište dužine $\overline{OI}$, vrijedi

$$|OS| = \cos\frac{2\pi}{17}.$$

Sa T_2 i T_{17} označimo sjecišta normale na x-os konstruirane u točki S s jediničnom kružnicom središta O i polumjera $\overline{OT_1}$. Točke T_{17}, T_1 i T_2 predstavljaju tri uzastopne točke pravilnog sedamnaesterokuta upisanog u jediničnu kružnicu. Ostale točke pravilnog sedamnaesterokuta lako se konstruiraju prenošenjem duljine osnovice $\overline{T_1T_2}$ uz pomoć šestara.



Slika 2.3: Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta direktnim rješavanjem kvadratnih jednadžbi

2.3 Callagyjeva konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Konceptualno jednostavnu konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta dao je, bez dokaza, engleski matematičar James J. Callagy 1983. godine.

Neka je dana jedinična kružnica sa središtem O i neka je $\overline{OT_1}$ njen polumjer. Neka je na kružnici odabrana točka B takva da vrijedi $OB \perp OT_1$, te točka C takva da vrijedi $OC \perp OB$. Na polumjeru $\overline{OB}$ konstruiramo točku E takvu da je $|OE| = \dfrac{|OB|}{4}$ i konstruiramo pravac ET_1. Neka u pravokutnom trokutu $\triangle T_1EO$ simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu E siječe nasuprotnu katetu $\overline{OT_1}$ u točki F_0', a simetrala vanjskog kuta pri vrhu E siječe produžetak nasuprotne katete u točki F_1'.

Promotrimo pravokutni trokut $\triangle OT_1E$ s pravim kutom pri vrhu O. Duljine kateta tog trokuta su $|OT_1| = 1$ i $|OE| = \dfrac{1}{4}$ pa je hipotenuza duljine $|ET_1| = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$. Teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta tvrdi da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica. Dakle, ako promotrimo simetralu $\sphericalangle OET_1$, vrijedi

$$\frac{|OF_0'|}{|F_0'T_1|} = \frac{|OE|}{|T_1E|},$$

odakle slijedi

$$\frac{|OF_0'|}{1 - |OF_0'|} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{17}}{4}},$$

pa je

$$|OF_0'| = \frac{1}{1 + \sqrt{17}} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{1}{8} \cdot w_0.$$

Analogno tome, iz pravokutnog trokuta $\triangle OCE_1$ s pravim kutom pri vrhu O, dobije se

$$|OF_1'| = \frac{1}{8} \cdot w_1.$$

Neka je točka G_0' presjek kružnice sa središtem F_0', radijusa $\overline{F_0'E}$ i pravca OT_1 (sjecište s desne strane točke O), a točka G_1' presjek kružnice sa središtem F_1', radijusa $\overline{F_1'E}$ i pravca OT_1 (sjecište s desne strane točke O). Iz prethodne konstrukcije slijedi

$$|OG_0'| = \frac{w_{00}}{4} \quad \text{i} \quad |OG_1'| = \frac{w_{01}}{4}.$$

Konstruirajmo kružnicu čiji je promjer dužina $\overline{CG_1'}$. Presjek te kružnice i pravca OB, s donje strane točke O, označimo sa H. Koristeći svojstvo potencije točke na kružnicu, imamo

$$|OH|^2 = |OC| \cdot |OG_1'|,$$

a kako je $|OC| = 1$, to je

$$|OH| = \frac{\sqrt{w_{01}}}{2}.$$

S donje strane pravca OT_1 konstruirajmo polukružnicu čiji je promjer dužina $\overline{OG_0'}$ i na njemu točku K takvu da je $|OK| = |OH|$. Trokut $\triangle OKG_0'$ je pravokutan pa je

$$\begin{aligned} |KG_0'|^2 &= |OG_0'|^2 - |OK|^2 \\ &= \frac{w_{00}^2}{16} - \frac{w_{01}}{4} \\ &= \frac{w_{00}^2 - 4w_{01}}{16}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$|KG_0'| = \frac{\sqrt{w_{00}^2 - 4w_{01}}}{4}.$$

Neka kružnica sa središtem u G_0', polumjera $\overline{G_0'K}$, siječe dužinu $\overline{G_0'T_1}$ u točki S. Tada je

$$\begin{aligned} |OS| &= |OG_0'| + |G_0'S| \\ &= \frac{w_{00}}{4} + \frac{\sqrt{w_{00}^2 - 4w_{01}}}{4} \\ &= \frac{w_{00} + \sqrt{w_{00}^2 - 4w_{01}}}{4}, \end{aligned}$$

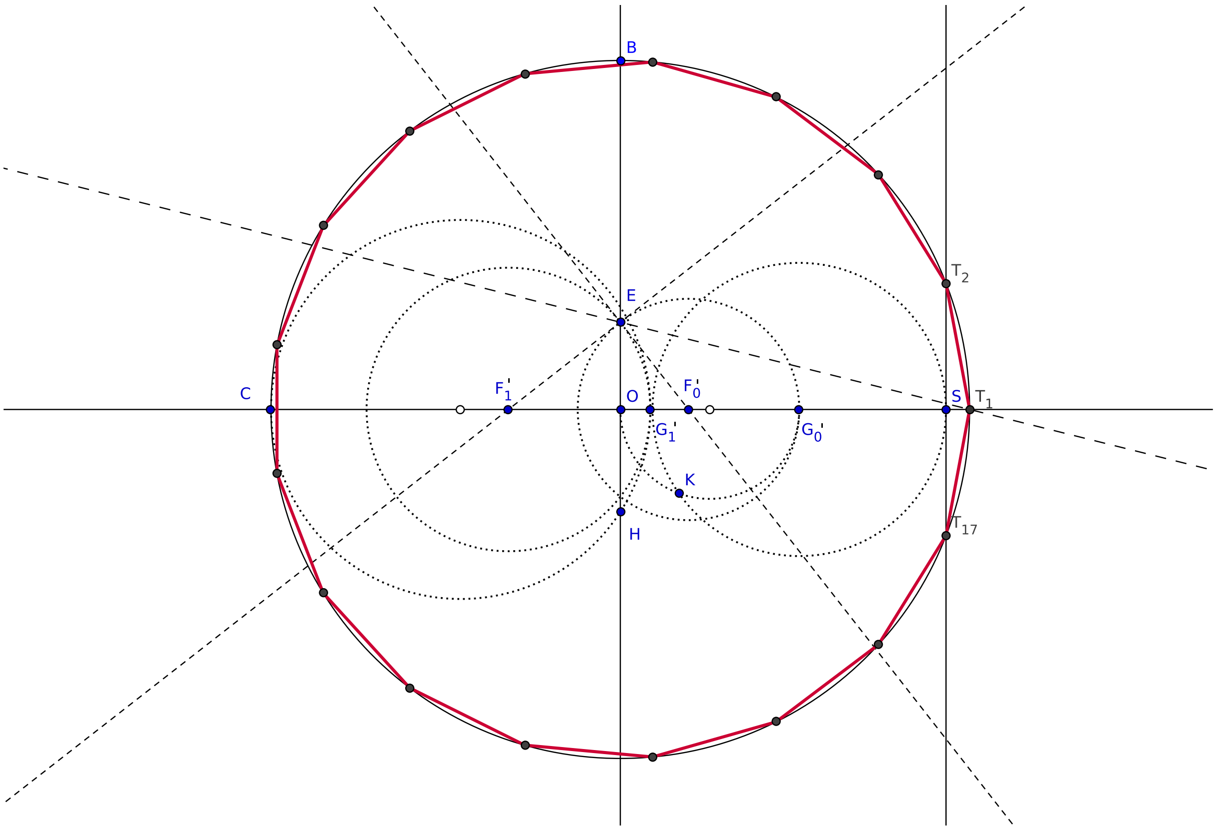
pa je $|OS|$ očigledno polovina većeg rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - w_{00}x + w_{01} = 0.$$

Dakle,

$$|OS| = \frac{w_{000}}{2} = \cos\frac{2\pi}{17}.$$

Prema tome, presjek polazne kružnice i okomice konstruirane u točki S na promjer $\overline{CT_1}$ su točke T_2 i T_{17} upisanog pravilnog sedamnaesterokuta.



Slika 2.4: Callagyjeva konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

2.4 Von Pfleidererova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Christoph Friedrich von Pfleiderer, profesor matematike i fizike u Tübingenu, prvi je na osnovi Gaussove analize konstruirao pravilni sedamnaesterokut i konstrukciju opisao (bez dokaza) u pismu Gaussu 1802. godine. Ova konstrukcija je objavljena javnosti tek 1917. godine.

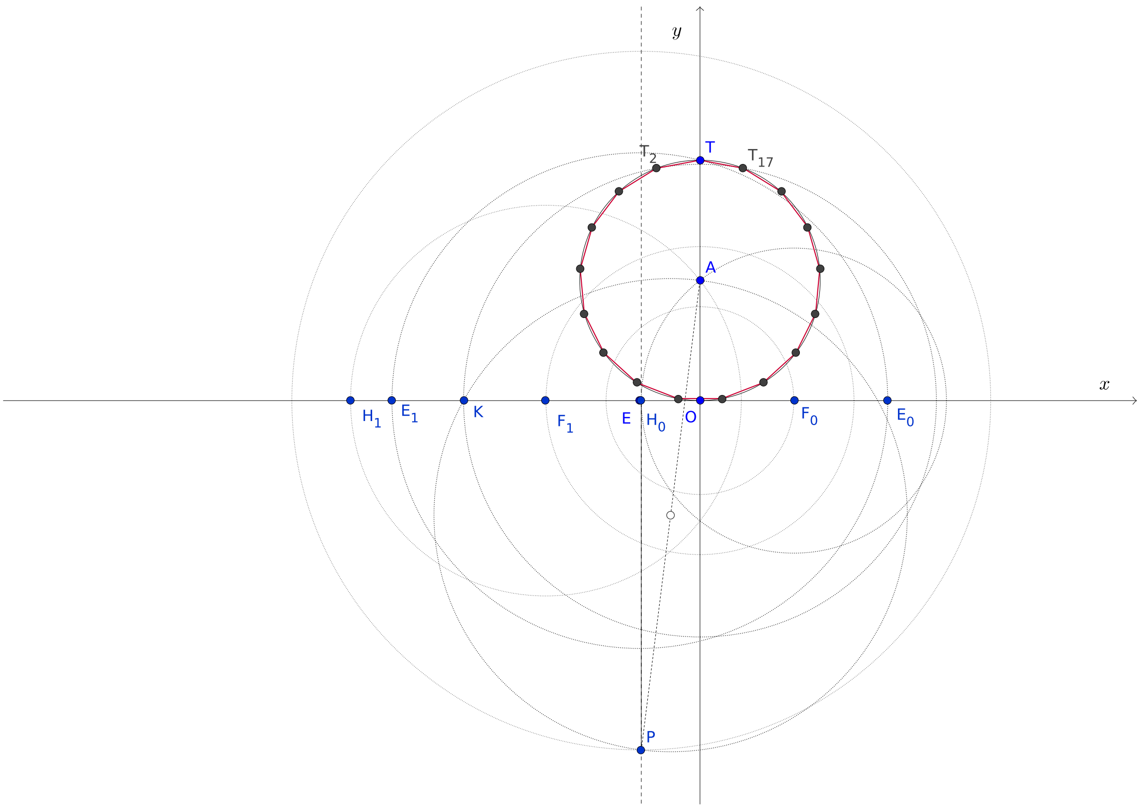
Konstruirajmo jediničnu kružnicu sa središtem u točki $A(0,1)$. Neka kružnica određena središtem $E\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ i polumjerom $\overline{ET}$, gdje je $T(0,2)$, siječe x-os u točkama E_0 i E_1, pri čemu je E_0 točka na pozitivnom dijelu, a E_1 na negativnom dijelu x-osi.

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} |OE_0| &= |EE_0| - |OE| = |ET| - |EO| = \sqrt{|OT|^2 + |OE|^2} - \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{4 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} = w_0. \end{aligned}$$

Analogno se dobiva da je

$$|OE_1| = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} = w_{1.}$$



Slika 2.5: Von Pfleidererova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Nadalje, na x-osi konstruiramo točke F_0 i F_1 takve da vrijedi

$$|OF_0| = \frac{|OE_0|}{2} = \frac{w_0}{2} \quad \text{i} \quad |OF_1| = \frac{|OE_1|}{2} = \frac{w_1}{2}.$$

Zatim opišemo kružni luk sa središtem u F_0, polumjera $\overline{F_0A}$ i neka je točka H_0 presjek tog kružnog luka s negativnim dijelom x-osi. Opišemo i kružni luk sa središtem u F_1, polumjera $\overline{F_1A}$ i neka je točka H_1 presjek tog kružnog luka s negativnim dijelom x-osi.

Za razliku od prethodnih konstrukcija, von Pfleiderer nakon geometrijskog rješavanja kvadratnih jednadžbi

$$x^2 - w_0x - 1 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - w_1x - 1 = 0$$

u kojima odabire manja rješenja, tj. $|OH_0| = w_{10}$ i $|OH_1| = w_{11}$, rješava jednadžbu

$$x^2 - w_{10}x + w_{11} = 0.$$

U točki H_0 konstruiramo okomicu na x-os, s donje strane x-osi, i na njoj odredimo točku P takvu da je $|H_0P| = |OH_1|$. Neka kružnica promjera $\overline{AP}$ siječe negativan dio x-osi u točki K. Tada vrijedi

$$|OK| = w_{010} = 2\cos 8\frac{2\pi}{17} = -2\cos\frac{\pi}{17}.$$

Ako iz točke O konstruiramo kružnicu polumjera $\overline{OK}$, ona će sjeći jediničnu kružnicu u točno dvije točke, T_2 i T_{17}. Ako stavimo $T = T_1$, dobivamo tri uzastopne točke pravilnog sedamnaesterokuta. Ostale točke dobijemo pomoću šestara.

2.5 Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta samo šestarom

Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta samo šestarom pronađena je relativno kasno. Naime, 1895. godine, njemački matematičar Felix Klein se u svojoj knjizi o elementarnoj geometriji požalio da mu nije poznata spomenuta konstrukcija. Dvije godine poslije, francuski matematičar Louis Gérard, objavio je konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta izvedivu samo šestarom.

Neka je u koordinatnom sustavu dana jedinična kružnica sa središtem u ishodištu O. Neka je B presjek kružnice i negativnog dijela x-osi. Opišimo kružnicu sa središtem u točki B, polumjera $\overline{OB}$. Presjek te i jedinične kružnice označimo točkom C. Presjek kružnice sa središtem u C polumjera $\overline{OB}$ i jedinične kružnice označimo sa D. Konačno, kružnica sa središtem D polumjera $\overline{OB}$ siječe jediničnu kružnicu u točki T_1. Trokut $\triangle BCT_1$ je pravokutan, s pravim kutom pri vrhu C, jer je C točka nad promjerom $\overline{BT_1}$. Budući da je točka C na kružnici sa središtem B i polumjerom $|BO| = 1$, a $|BT_1| = 2$, iz $\triangle BCT_1$ slijedi $|CT_1| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Analogno, iz pravokutnog trokuta $\triangle T_1DB$, s pravim kutom pri vrhu D, slijedi $|BD| = \sqrt{3}$. Dakle, $|BD| = |T_1C| = \sqrt{3}$.

Neka se kružnica sa središtem B polumjera $\overline{BD}$ i kružnica sa središtem T_1, istog polumjera, sijeku u točkama H i H'. Iz pravokutnog trokuta $\triangle BOH$ s pravim kutom pri vrhu O vidimo da je

$$|OH| = \sqrt{|BH|^2 - |OB|^2} = \sqrt{|BD|^2 - |OB|^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2},$$

a to je upravo duljina stranice kvadrata upisanog u jediničnu kružnicu. Neka kružnica sa središtem B, polumjera $\overline{OH}$, siječe jediničnu kružnicu u točkama A i A'. Te točke su upravo presjeci jedinične kružnice s y-osi.

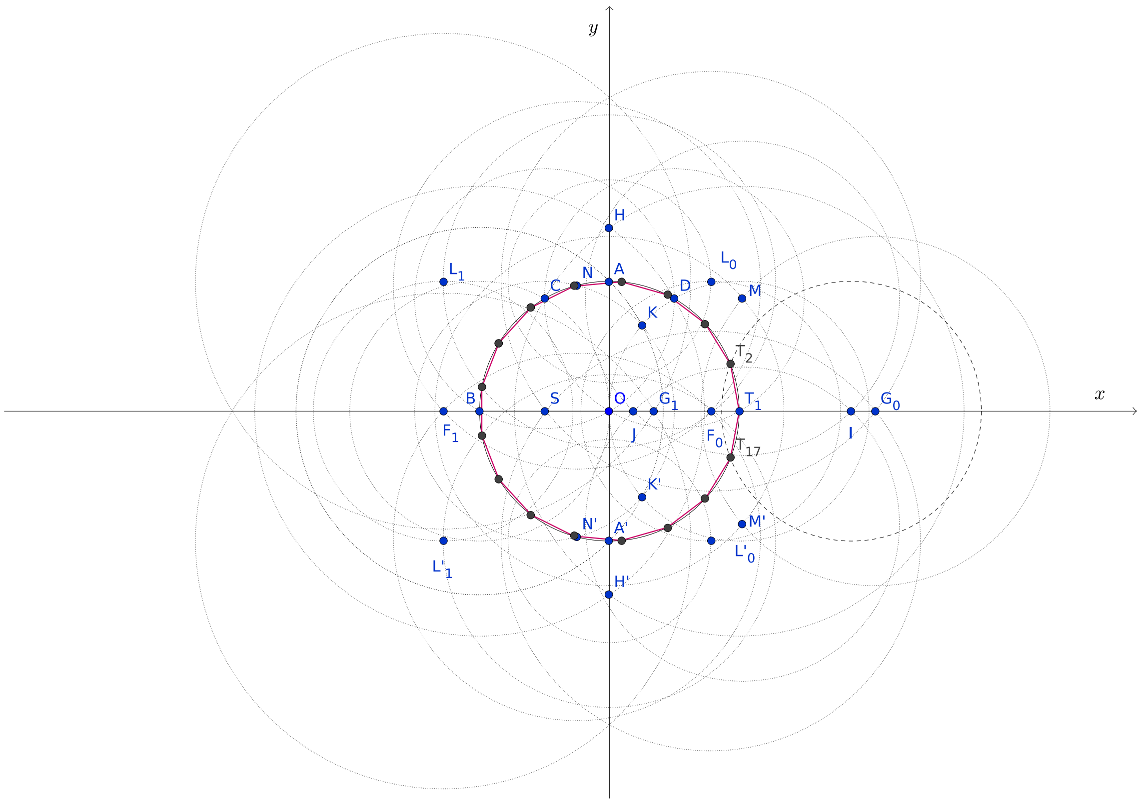
Odredimo sada točke $F_0\left(\frac{w_0}{2}, 0\right)$ i $F_1\left(\frac{w_1}{2}, 0\right)$. Iz prethodne konstrukcije poznato je da su točke F_0 i F_1 sjecišta x-osi i kružnice sa središtem $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, polumjera $\frac{\sqrt{17}}{4}$. Ako želimo ove točke odrediti samo uz pomoć šestara, postupak je sljedeći: u točki $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ konstruiramo okomicu na os apscisa i odredimo presjek te okomice s jediničnom kružnicom. Ta okomica je upravo simetrala dužine određene točkom O i polovištem dužine $\overline{OB}$. Najprije odredimo polovište polumjera $\overline{OB}$, to neka je točka S. Neka kružnica sa središtem B, polumjera $\overline{BA}$, siječe kružnicu sa središtem T_1 polumjera 1 u točkama K i K'. Koordinate točaka K i K' dobivaju se rješavanjem sustava jednadžbi

$$(x+1)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2 \quad \text{i} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

pa dobivamo da je apscisa točaka K i K' jednaka $\frac{1}{4}$.

Konstruirajmo dvije kružnice polumjera 1, jednu sa središtem K i drugu sa središtem K'. Sa T_1 i S označimo njihova sjecišta. Točka S je osnosimetrična točki T_1 u odnosu na pravac KK', pa je S polovište dužine $\overline{OB}$. Neka kružnica sa središtem S polumjera 1 siječe jediničnu kružnicu (početnu, sa središtem u ishodištu) u točkama N i N'. U tom slučaju točka N pripada simetrali dužine $\overline{OS}$. Budući da se ta simetrala nalazi između točaka O i S, a točka S je polovište jedinične dužine $\overline{OB}$, jednadžba simetrale je $x = \frac{1}{4}$, tj. $x_N = \frac{1}{4}$. Ordinata točke N, tj. y_N dobije se iz pravokutnog trokuta u kojem je $x_N^2 + y_N^2 = |ON|^2$. Točka N pripada jediničnoj kružnici pa vrijedi $y_n^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$, odnosno

$$N\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$



Slika 2.6: Gérardova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta samo šestarom

Budući da su točke A i B zadane koordinatama $(0, 1)$ i $(-1, 0)$, to je njihova udaljenost jednaka $\sqrt{2}$. Neka kružnica sa središtem N polumjera $|AB| = \sqrt{2}$ siječe kružnicu sa središtem N' istog polumjera u točkama F_0 i F_1, pri čemu je F_0 na pozitivnom dijelu x-osi. Jasno je da je $|F_0N| = \sqrt{2}$. Tada vrijedi

$$|OF_0| + \frac{1}{4} = \sqrt{|F_0N|^2 - y_N^2},$$

pa je

$$|OF_0| = \sqrt{2 - \frac{15}{16}} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{w_0}{2}.$$

Analogno se iz činjenice $|F_1N|^2 = \left(|F_1O| - \frac{1}{4}\right)^2 + y_N^2$ dobiva

$$|OF_1| = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{w_1}{2}.$$

Sad prelazimo na drugi i treći korak konstrukcije. Neka jedinična kružnica sa središtem F_0 siječe kružnicu sa središtem A, polumjera $\overline{OF_0}$, u točki L_0 tako da je OF_0L_0A pravokutnik. Nadalje, jedinična kružnica sa središtem F_0 siječe kružnicu sa središtem A', polumjera $\overline{OF_0}$ u točki L_0' tako da je $OA'L_0'F_0$ pravokutnik. Analognu konstrukciju izvodimo i s točkom F_1. Dakle, točku L_1 dobivamo kao presjek jedinične kružnice sa središtem F_1 i kružnice sa središtem A, polumjera $\overline{OF_1}$, tako da je OAL_1F_1 pravokutnik, a L_1' dobivamo kao presjek jedinične kružnice sa središtem F_1 i kružnice sa središtem A', polumjera $\overline{OF_1}$, tako da je $OF_1L_1'A'$ pravokutnik.

Neka kružnica sa središtem u točki L_0 polumjera $\overline{F_0H}$ siječe kružnicu sa središtem L_0' polumjera $\overline{F_0H}$ u točki G_0, desno od L_0L_0'. Dakle $|F_0H| = |G_0L_0|$. Tada je

$$\begin{aligned}
|OG_0| &= |OF_0| + |F_0G_0| = \frac{w_0}{2} + \sqrt{|G_0L_0|^2 - |F_0L_0|^2} \\
&= \frac{w_0}{2} + \sqrt{|OF_0|^2 + |OH|^2 - |F_0L_0|^2} \\
&= \frac{w_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{w_0}{2}\right)^2 + 2 - 1} = \frac{w_0 + \sqrt{w_0^2 + 4}}{2},
\end{aligned}$$

pa je $|OG_0|$ pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - w_0x - 1 = 0$, tj. $|OG_0| = w_{00}$.

Neka kružnica sa središtem u točki L_1 polumjera $\overline{F_1H}$ siječe kružnicu sa središtem L_1' polumjera $\overline{F_1H}$ u točki G_1, desno od L_1L_1'. Tada je

$$\begin{aligned}
|OG_1| &= |OF_1| + |F_1G_1| = \frac{w_1}{2} + \sqrt{|G_1L_1|^2 - |F_1L_1|^2} \\
&= \frac{w_1}{2} + \sqrt{|OF_1|^2 + |OH|^2 - |F_1L_1|^2} \\
&= \frac{w_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{w_1}{2}\right)^2 + 2 - 1} = \frac{w_1 + \sqrt{w_1^2 + 4}}{2},
\end{aligned}$$

pa je $|OG_1|$ pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - w_1x - 1 = 0$, tj. $|OG_1| = w_{01}$.

Konstruiramo točke M i M' kao presjeke kružnica sa središtima u točkama O i G_0, polumjera $\overline{BG_1}$. Tada je apscisa točke M, budući da se ona nalazi na simetrali dužine $\overline{OG_0}$ duljine w_{00}, jednaka $\frac{w_{00}}{2}$, a ordinata je

$$\sqrt{|G_1C|^2 - \left(\frac{|OG_0|}{2}\right)^2} = \sqrt{(|BO| + |OG_1|)^2 - \left(\frac{|OG_0|}{2}\right)^2} = \sqrt{(1 + w_{01})^2 - \frac{w_{00}^2}{4}}.$$

Neka se kružnice sa središtima M i M', istog polumjera $\overline{G_1C}$, sijeku u točkama I i J, pri čemu vrijedi $|OI| > |OJ|$. Duljina polumjera tih kružnica jednaka je

$$|G_1C| = \sqrt{|G_1S|^2 + |SC|^2} = \sqrt{\left(w_{01} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{w_{01}^2 + w_{01} + 1}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} |OI| &= \frac{w_{00}}{2} + \sqrt{|MI|^2 - \left(\frac{|MM'|}{2}\right)^2} \\ &= \frac{w_{00}}{2} + \sqrt{w_{01}^2 + w_{01} + 1 - (1 + w_{01})^2 + \frac{w_{00}^2}{4}} \\ &= \frac{w_{00}}{2} + \frac{\sqrt{w_{00}^2 - 4w_{01}}}{2}, \end{aligned}$$

pa je $|OI|$ veće rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - w_{00}x + w_{01} = 0$. Analogno se dobiva da je drugo rješenje te kvadratne jednadžžbe

$$|OJ| = \frac{w_{00}}{2} - \frac{\sqrt{w_{00}^2 - 4w_{01}}}{2}.$$

Kada iz točke I opišemo kružni luk polumjera 1, on siječe početnu jediničnu kružnicu u dvije točke. Te točke, T_2 i T_{17} su točke traženog pravilnog sedamnaesterokuta, upisanog u jediničnu kružnicu.

2.6 Potencija točke i kvadratna jednadžba

U sljedećim konstrukcijama pravilnog sedamnaesterokuta koristi se drugačije grafičko rješavanje kvadratnih jednadžbi. Za grafičko rješavanje kvadratnih jednadžbi možemo primijeniti potenciju točke u odnosu na kružnicu.

Primjerice, treba riješiti kvadratnu jednadžbu

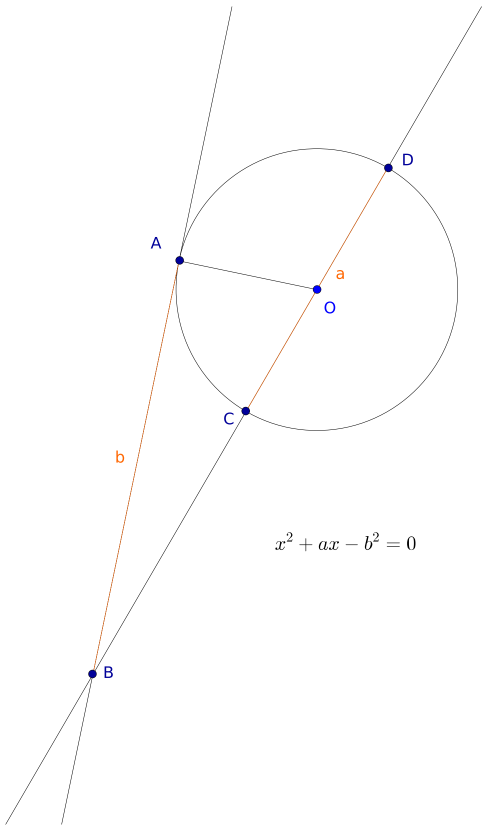
$$x^2 + ax - b^2 = 0 \iff x(x + a) = b^2.$$

Prvo konstruiramo kružnicu sa središtem O i polumjerom $\frac{a}{2}$. Konstruiramo proizvoljan polumjer $\overline{OA}$ i u točki A tangentu na kružnicu. Na toj tangenti konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ duljine b. Konstruiramo pravac BO. Taj pravac siječe kružnicu u točkama C i D. Tada vrijedi (potencija točke obzirom na kružnicu)

$$|BC| \cdot |BD| = |AB|^2,$$

što je ekvivalentno sa

$$x(x+a) = b^2.$$



Slika 2.7: Grafičko rješavanje uz pomoć potencije točke (1)

Ako slobodan član kvadratne jednadžbe nije izražen kao suprotan kvadratu, jednadžbu je moguće grafički riješiti ako prethodno konstruiramo korijen slobodnog člana. Primjerice, jednadžbu

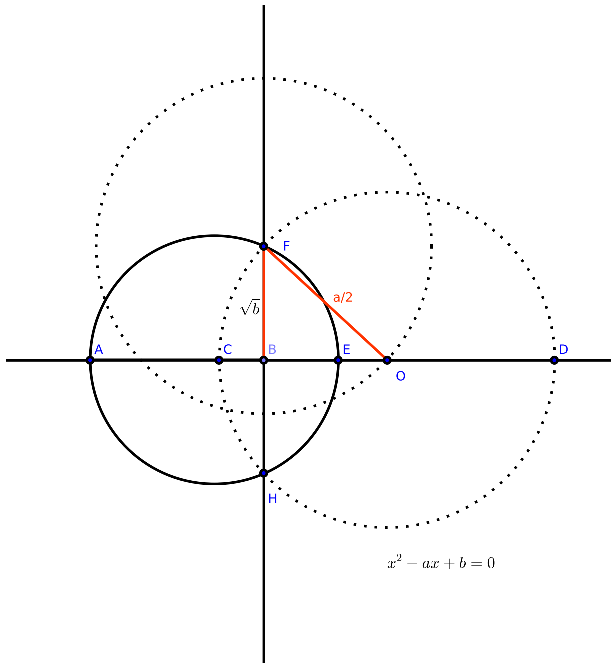
$$x^2 - ax + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(a-x) = \left(\sqrt{b}\right)^2$$

rješavamo na sljedeći način: konstruiramo horizontalan pravac i na njemu označimo dužinu $\overline{AB}$ duljine b. Na tom pravcu konstruiramo točku E takvu da vrijedi $|BE| = 1$. Potom konstruiramo kružnicu kojoj je $\overline{AE}$ promjer. Neka su točke F i H presjeci okomice podignute u točki B na pravac AB. Vrijedi $|BF| \cdot |BH| = |AB| \cdot |BE| = b$. U točki F opišemo kružnicu polumjera $\dfrac{a}{2}$ i neka ona siječe pravac AB u točki O. Zatim konstruiramo kružnicu sa središtem O polumjera $\dfrac{a}{2}$ i neka ona siječe pravac AB u točkama C i D. Ako stavimo $|BC| = x$, tada je $|BD| = a - x$. Vrijedi

$$|BC| \cdot |BD| = |BF| \cdot |BH|,$$

što je ekvivalentno sa

$$x(a - x) = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$



Slika 2.8: Grafičko rješavanje uz pomoć potencije točke (2)

2.7 Ampèreova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Francuski matematičar i fizičar Andre-Marie Ampère je, na sastanku francuske akademije znanosti, 1835. godine prikazao crtež vrlo jednostavne konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta. Njegova konstrukcija koristi geometrijsko rješavanje kvadratnih jednadžbi pomoću potencije točke na kružnicu.

Neka je $\overline{OA}$ vertikalan polumjer u jediničnoj kružnici sa središtem O. U točki A konstruiramo tangentu na kružnicu i na njoj točku E, s lijeve strane točke A, takvu da vrijedi $|AE| = \dfrac{|OA|}{4}$. Neka kružnica sa središtem E, polumjera $\overline{OE}$, siječe tangentu u točkama F_0 i

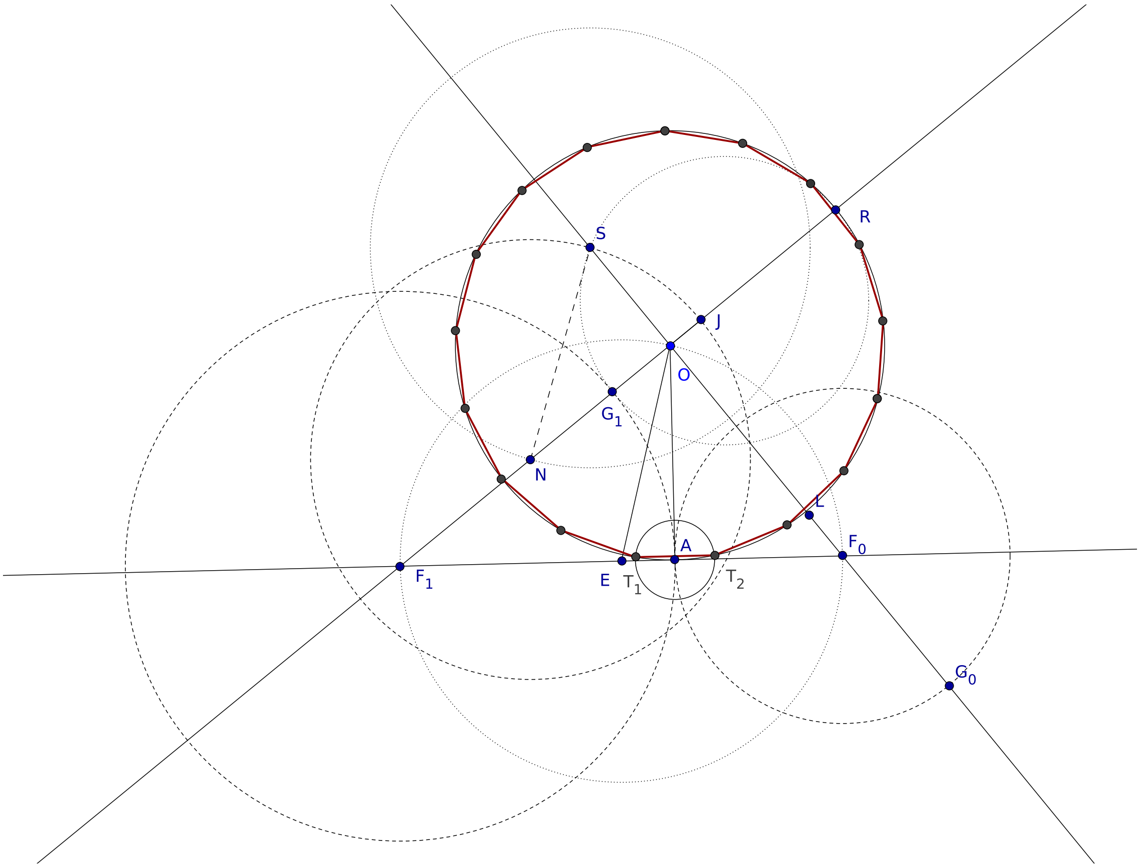
F_1, tako da je F_0 s desne strane točke A. Tada su $|OF_0|$ i $|OF_1|$ polovine rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$, tj.

$$|OF_0| = \frac{w_0}{2} \quad \text{i} \quad |OF_1| = \frac{w_1}{2}.$$

Jednadžbe

$$x^2 - w_0 x - 1 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - w_1 x - 1 = 0$$

rješavaju se korištenjem potencije točke na kružnicu (ovdje je slobodan član suprotan kvadratu).



Slika 2.9: Ampereova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Konstruiramo pravce OF_0 i OF_1 te opišemo luk oko točke F_0 polumjera $\overline{F_0A}$ tako da siječe OF_1 u točki G_0 s one strane točke F_0 s koje nije točka O. Na analogan način opišemo luk oko točke F_1 polumjera $\overline{F_1A}$ tako da siječe OF_1 u točki G_1 između točaka O

i F_1. Veće rješenje jednadžbe $x^2 - w_0 x - 1 = 0$ je veće i po apsolutnoj vrijednosti pa je $w_{00} = |OG_0|$, a veće rješenje jednadžbe $x^2 - w_1 x - 1 = 0$ je manje po apsolutnoj vrijednosti pa je $w_{01} = |OG_1|$.

Za rješavanje jednadžbe $x^2 - w_{00}x + w_{01} = 0$ primjenjuje se grafičko rješavanje jednadžbi pomoću potencije točke (za slučaj kada slobodan član nije suprotan kvadratu). Prvo konstruiramo korijen iz vrijednosti $w_{01} = |OG_1|$. Neka je R presjek pravca OG_1 i polazne kružnice s one strane točke O s koje nije točka G_1. U odnosu na prethodnu konstrukciju, točka R dobiva se jednostavnije. Tada je $|OR| = 1$. Ako upišemo polukružnicu kojoj je $\overline{G_1R}$ promjer i označimo sa S presjek te polukružnice i pravca OF_0 (s gornje strane točke O), u kružnici čiji promjer je $\overline{G_1R}$ vrijedi

$$|OS|^2 = |OG_1| \cdot |OR| = |OG_1|.$$

Na pravcu OG_1, s one strane točke O s koje je točka G_1, treba odrediti točku N tako da je $|SN| = \dfrac{|OG_0|}{2}$. Neka je točka L polovište $\overline{OG_0}$. Opišemo kružni luk sa središtem S, polumjera $|OL|$, tako da siječe OG_1 u točki N koja je s iste strane točke O s koje je i točka G_1. Opišimo kružni luk sa središtem N polumjera $|NS| = |OL|$. Neka taj luk siječe pravac OG_1 u točki J tako da je točka O između točaka J i N.

Ako opišemo kružnicu sa središtem A polumjera $\overline{OJ}$, tada u presjeku s jediničnom kružnicom dobivamo dvije uzastopne točke pravilnog sedamnaesterokuta.

2.8 Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta samo ravnalom

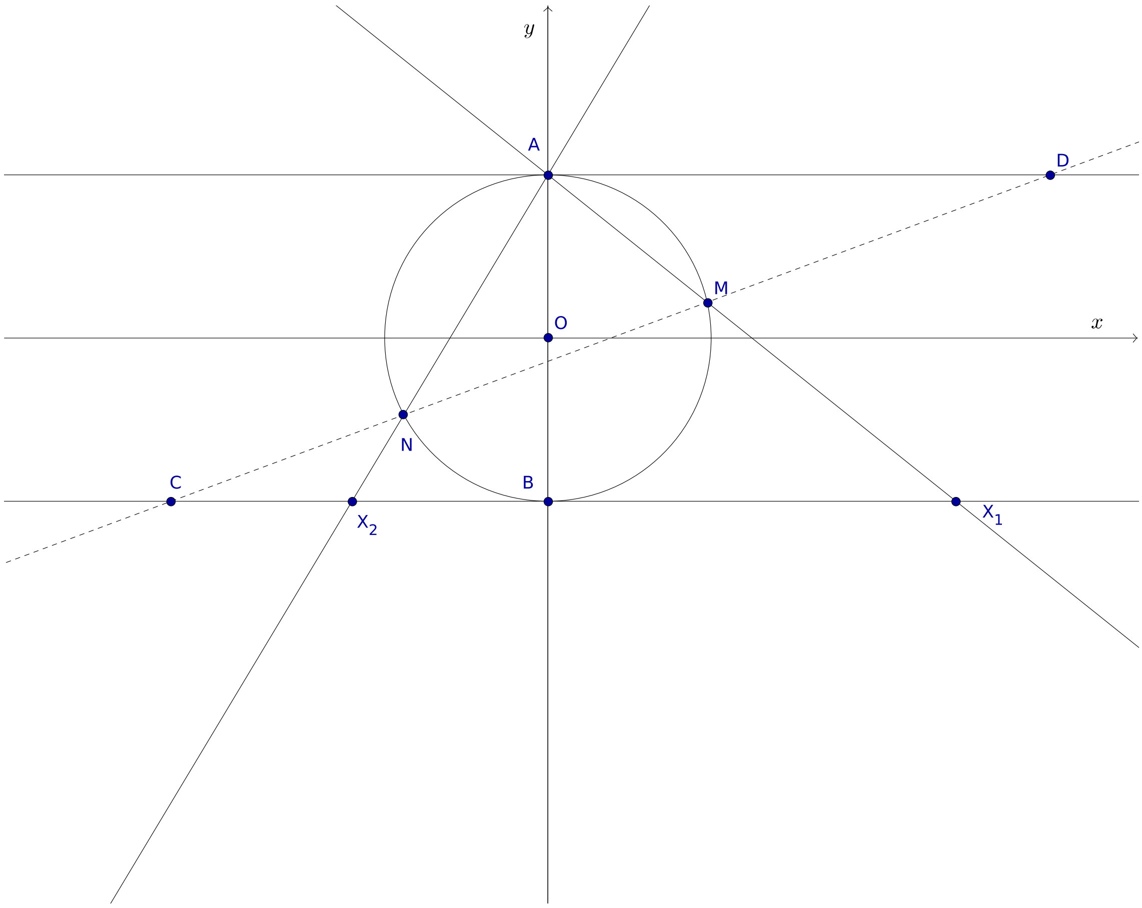
Konstrukciju pravilnog sedamnaesterokuta, upisanog u kružnicu, samo ravnalom objavio je 1842. godine, bez dokaza, njemački matematičar von Schtaut. Dokaz je objavio njemački matematičar Schröter tek 1872. godine.

Najprije ćemo opisati Steinerovu konstrukciju koja omogućava rješavanje kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ pomoću ravnala i jedne fiksne jedinične kružnice.

Teorem 2.8.1 (Steiner)**.** *Neka je dana kvadratna jednadžba*

$$x^2 + px + q = 0, \quad p \neq 0,$$

s realnim koeficijentima p, q, koja ima realna rješenja. Neka je dana jedinična kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Neka su dane točke $A(0,1)$ i $B(0,-1)$ te konstruirane tangente $y = 1$ i $y = -1$. Neka su na tangentama konstruirane točke D i C takve da je $|AD| = -\frac{4}{p}$, tj. $D\left(-\frac{4}{p}, 1\right)$ i $|BC| = -\frac{q}{p}$, tj. $C\left(-\frac{q}{p}, -1\right)$. Sa M i N označimo *presjeke pravca CD s jediničnom kružnicom. Konstruiramo pravce AM i AN. Neka je presjek pravca AM s tangentom konstruiranom u točki B označen sa $X_1(x_1, -1)$, a presjek pravca AN s tangentom konstruiranom u točki B sa $X_2(x_2, -1)$. Tada su x_1 i x_2 rješenja polazne kvadratne jednadžbe.*



Slika 2.10: Konstrukcija rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$

Dokaz. Promotrimo trokute $\triangle AMB$ i $\triangle ABX_1$. Ti trokuti su slični prema K-K-K teoremu, pa vrijedi

$$|AM| : |AB| = |AB| : |AX_1|$$

iz čega se dobiva da je

$$|AM| \cdot |AX_1| = |AB|^2.$$

Potpuno analogno, iz sličnosti pravokutnih trokuta $\triangle ANB$ i $\triangle ABX_2$ dobivamo

$$|AN| \cdot |AX_2| = |AB|^2$$

pa vrijedi

$$|AM| \cdot |AX_1| = |AN| \cdot |AX_2| = |AB|^2 = 4.$$

Iz ove jednakosti slijedi da točke M, N, X_1 i X_2 pripadaju istoj kružnici jer točka A ima istu potenciju u odnosu na točke M i X_1 te na točke N i X_2. Upravo zbog toga za točku C vrijedi $|CX_1| \cdot |CX_2| = |CM| \cdot |CN|$. Potencija točke C u odnosu na kružnicu, kojoj pripadaju točke A, N, B i M, jednaka je $|CB|^2 = |CM| \cdot |CN|$ pa dobivamo

$$|CX_1| \cdot |CX_2| = |CM| \cdot |CN| = |CB|^2.$$

Budući da je $|CX_1| = |BC| + |BX_1|$ i $|CX_2| = |BC| - |BX_2|$, vrijedi

$$(|BC| + |BX_1|)\,(|BC| - |BX_2|) = |BC|^2.$$

Kada izraz malo sredimo, konačno dobivamo

$$|BC| = \frac{|BX_1| \cdot |BX_2|}{|BX_1| + |BX_2|} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

Trokuti $\triangle AMO$ i $\triangle X_1MC$ su slični pa je

$$\frac{|AD|}{|X_1C|} = \frac{|AM|}{|X_1M|} = \frac{|AM| \cdot |AX_1|}{|X_1M| \cdot |AX_1|}.$$

Također, vrijedi

$$|AM| \cdot |AX_1| = |AB|^2, \quad |X_1M| \cdot |AX_1| = |BX_1|^2,$$

pa je

$$\frac{|AD|}{|X_1C|} = \frac{|AB|^2}{|BX_1|^2}.$$

Slijedi

$$|CX_1| = \frac{|AD|}{|AB|^2} \cdot |BX_1|^2.$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle AND$ i $\triangle X_2NC$ analogno dobivamo da vrijedi

$$|CX_2| = \frac{|AD|}{|AB|^2} \cdot |BX_2|^2.$$

Kada se ove dvije jednakosti oduzmu, dobiva se

$$|CX_1| - |CX_2| = \frac{|AD|}{|AB|^2} \left(|BX_1|^2 - |BX_2|^2\right).$$

Kako je $|CX_1| - |CX_2| = |BX_1| + |BX_2|$, odatle slijedi

$$\frac{|AD|}{|AB|^2}\left(|BX_1| - |BX_2|\right) = 1,$$

odnosno

$$|AD| = \frac{|AB|^2}{|BX_1| + |BX_2|} = \frac{4}{x_1 + x_2}.$$

Konačno, iz $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = |BC| = -\frac{q}{p}$ i $\frac{4}{x_1 + x_2} = |AD| = -\frac{4}{p}$ slijedi $x_1 + x_2 = -p$ i $x_1 x_2 = q$, pa su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$. □

Da bismo uspješno konstruirali rješenja kvadratne jednadžbe pri konstrukciji pravilnog sedamnaesterokuta, potreban je sljedeći teorem koji omogućuje konstrukciju koeficijenata jednadžbe u sljedećem koraku.

Teorem 2.8.2. *Neka je dana jedinična kružnica sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Neka su točke presjeka s y-osi točke* $A(0, 1)$ *i* $B(0, -1)$ *i neka su u tim točkama konstruirane tangente na kružnicu, tj. pravci* $y = 1$ *i* $y = -1$. *Neka je na kružnici dana točka M, različita od A i B, te neka pravac AM siječe pravac* $y = -1$ *u točki C, a pravac BM pravac* $y = 1$ *u točki D. Neka je zadana točka I na promjeru* $\overline{AB}$ *takva da je* $|AI| : |BI| = 4$ *te neka pravac DI siječe pravac* $y = -1$ *u točki E. Tada vrijedi*

(i) $|AD| = \frac{4}{|BC|}$,

(ii) $|BE| = \frac{|AD|}{4}$.

Dokaz. Iz sličnosti pravokutnih trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DAB$ slijedi da je

$$|AD| : |AB| = |AB| : |BC|$$

odnosno

$$|AD| \cdot |BC| = |AB|^2 = 4$$

iz čega slijedi $|AD| = \frac{4}{|BC|}$, odnosno tvrdnja (i).

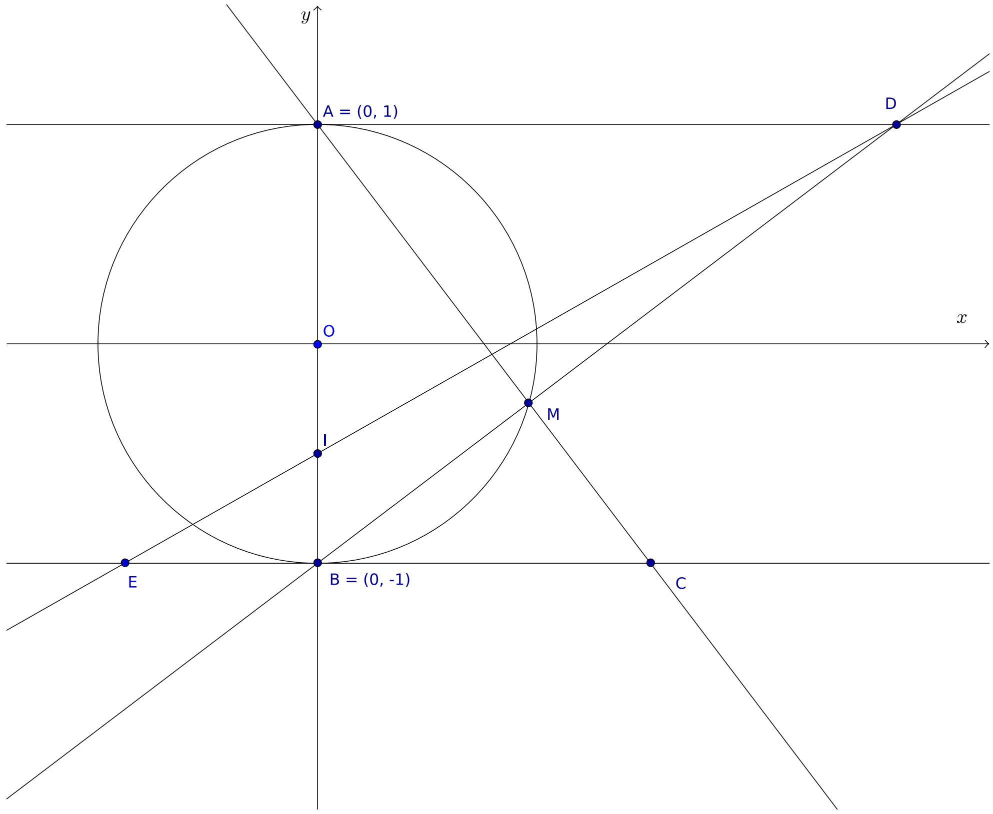
Iz sličnosti pravokutnih trokuta $\triangle DAI$ i $\triangle EBI$ slijedi

$$|BE| : |BI| = |AD| : |AI|$$

odnosno

$$|BE| = |AD| \cdot \frac{|BI|}{|AI|},$$

a kako je $|AI| : |BI| = 4$, slijedi tvrdnja (ii). □



Slika 2.11: Pomoćne konstrukcije za rješavanje kvadratne jednadžbe

Sada se svi koraci konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta mogu relativno lako izvesti.

Konstruiramo jediničnu kružnicu i pravce $y = 1$ i $y = -1$. Na pravcu $y = 1$ označimo točku $(-4, 1)$, a na pravcu $y = -1$ točku $(4, -1)$. Kroz točke $(-4, 1)$ i $(4, -1)$ konstruiramo pravac i njegove presjeke s jediničnom kružnicom označimo točkama K i L. Na osnovi Steinerovog teorema, kada iz točke A konstruiramo pravce kroz točke K i L, na tangenti $y = -1$ dobivamo točke $W_0(w_0, -1)$ i $W_1(w_1, -1)$. Pri tome su vrijednosti w_0 i w_1 rješenja kvadratne jednadžbe

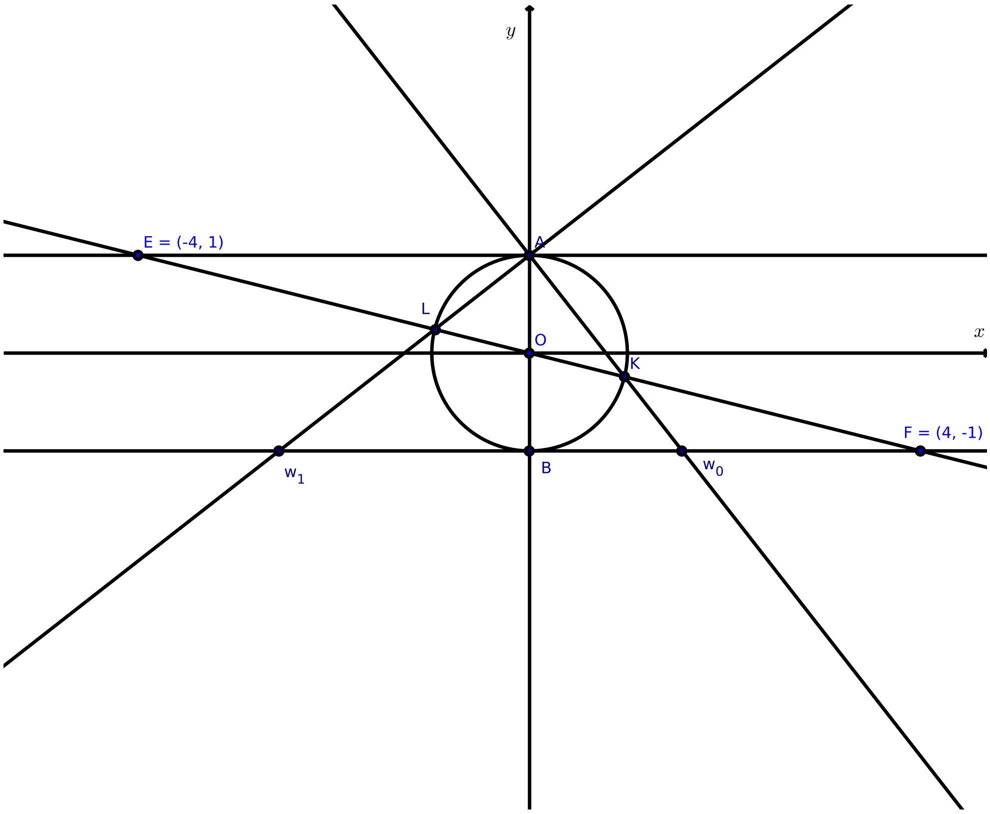
$$x^2 + px + q = 0.$$

Vrijedi da je $-4 = -\frac{4}{p}$ i $4 = -\frac{q}{p}$ pa slijedi da je

$$p = 1 \quad \text{i} \quad q = -4,$$

odnosno w_0 i w_1 su rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + x - 4 = 0.$$



Slika 2.12: Konstrukcija rješenja jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$

Prijeđimo na drugi korak, tj. nalaženje većeg rješenja jednadžbe

$$x^2 - w_0 x - 1 = 0.$$

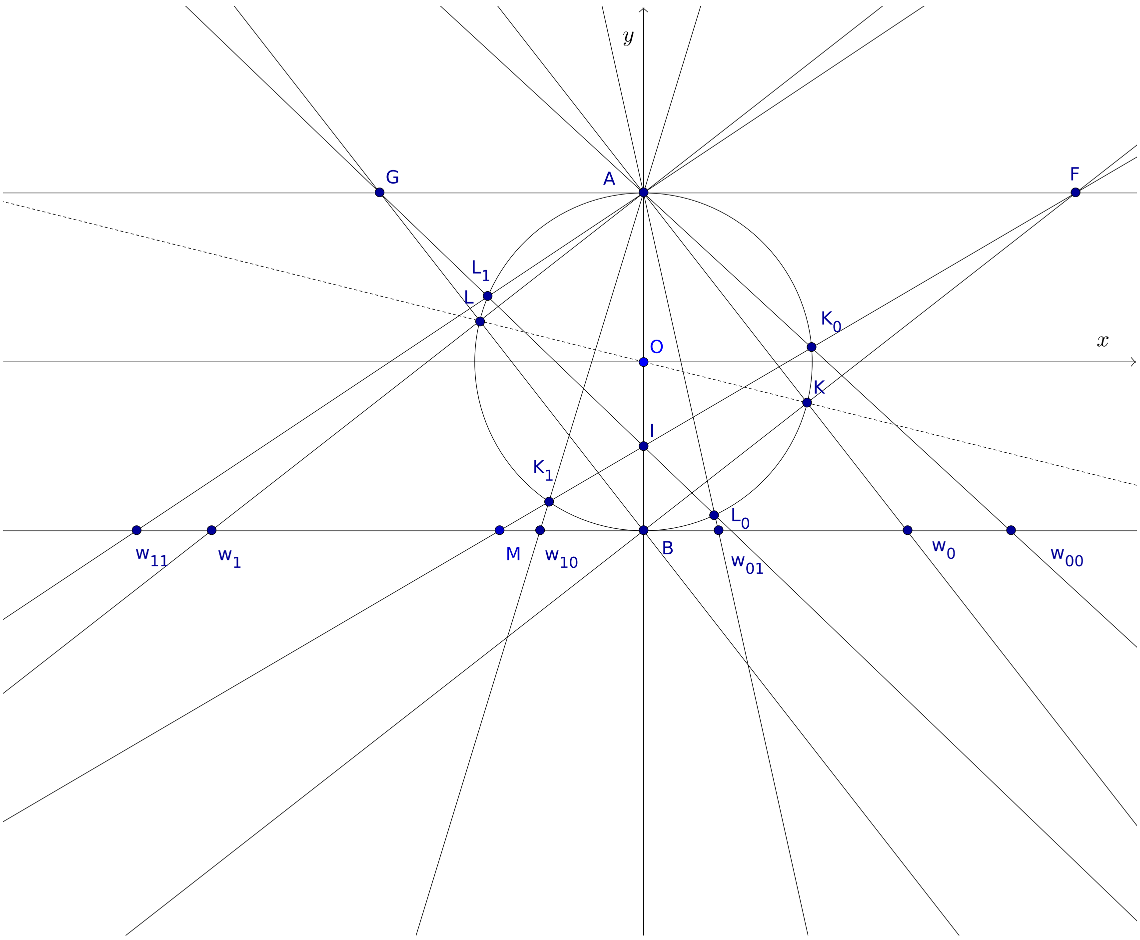
Konstruiramo pravac BK i njegov presjek s pravcem $y = 1$ označimo sa F. Na osnovi prethodnog teorema i tvrdnje (i) vrijedi $|AF| = \frac{4}{w_0}$. Konstruiramo pravac FI, gdje je I točka koja pripada polumjeru $\overline{AB}$ i za koju vrijedi $|AI| : |BI| = 4$, i njegov presjek s pravcem $y = -1$ označimo sa M. Prema tvrdnji (ii) prethodnog teorema vrijedi $|BM| = \frac{|AF|}{4} = \frac{1}{w_0}$. Presjek pravca FI s jediničnom kružnicom označimo točkama K_0 i K_1, kao na slici. Analogno, presjek pravca GI, gdje je G točka presjeka pravca BL s pravcem $y = 1$, s jediničnom kružnicom označimo sa L_1 i L_0, kao na slici. Presjeke pravca AK_0 i pravca AL_0 s pravcem $y = -1$ označimo sa w_{00} i w_{10}. Te točke su rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px + q = 0,$$

u kojoj je

$$p = -\frac{4}{|AF|} = -4 \cdot \frac{w_0}{4} = -w_0 \quad \text{i} \quad q = -p \cdot \left(-\frac{1}{w_0}\right) = -1,$$

tj. w_{00} i w_{10} su rješenja jednadžbe $x^2 - w_0 x - 1 = 0$ i w_{00} je veće rješenje te kvadratne jednadžbe.



Slika 2.13: Konstrukcija rješenja jednadžbe $x^2 - w_0 x - 1 = 0$ i $x^2 - w_1 x - 1 = 0$

U trećem koraku konstruiramo rješenja w_{01} i w_{11} kvadratne jednadžbe

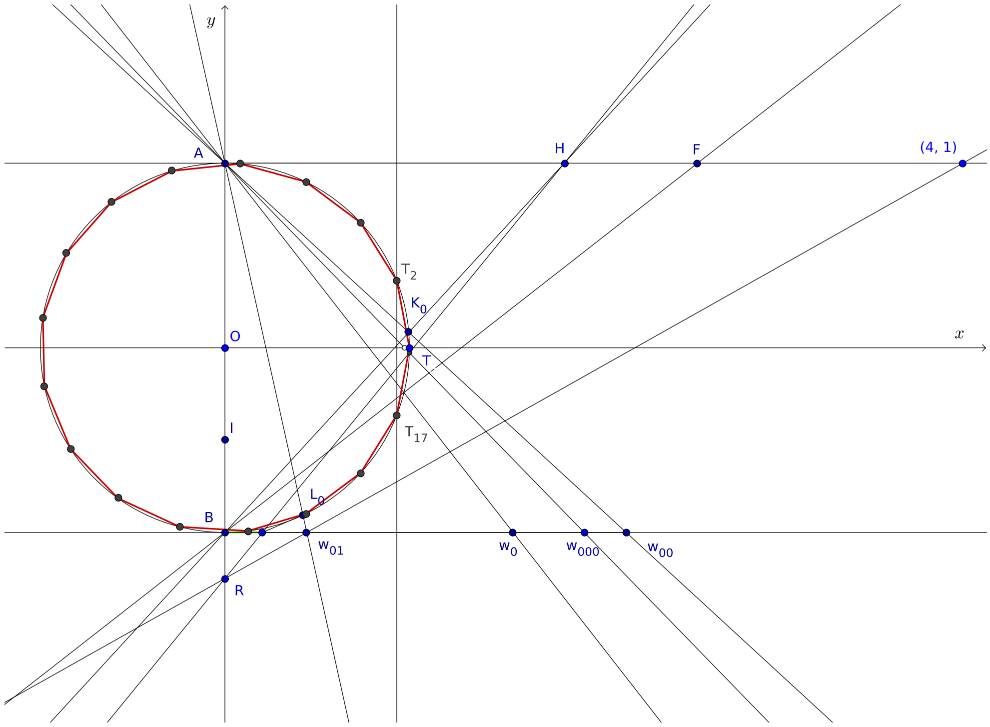
$$x^2 - w_1 x - 1 = 0,$$

potpuno analogno kao i u drugom koraku i w_{01} je veće rješenje zadane kvadratne jednadžbe.

Presjek pravca AK_1 s pravcem $y = -1$ je rješenje w_{10}, a presjek pravca AL_1 s pravcem $y = -1$ je rješenje w_{11}, odnosno ti presjeci su rješenja jednadžbi

$$x^2 - w_0 x - 1 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - w_1 x - 1 = 0.$$

Prijeđimo na četvrti korak konstrukcije. Konstruiramo pravac BK_0 i njegov presjek s pravcem $y = 1$ označimo sa H. Na osnovi prethodnog teorema i tvrdnje (i) vrijedi $|AH| = \dfrac{4}{w_{00}}$.



Slika 2.14: Konstrukcija većeg rješenja jednadžbe $x^2 - w_{00}x - w_{01} = 0$

Kroz točke $(4, 1)$ i w_{01} konstruiramo pravac i neka on siječe y-os u točki R. Neka je s dužina na pravcu $y = -1$ od točke B do točke presjeka pravca RH i pravca $y = -1$. Na osnovi Talesova teorema o proporcionalnosti vrijedi

$$\frac{s}{|AH|} = \frac{w_{01}}{4}, \quad \text{pa je} \quad s = \frac{w_{01}}{4} \cdot \frac{4}{w_{00}} = \frac{w_{01}}{w_{00}}.$$

Kada iz točke A konstruiramo pravac koji prolazi kroz točku koja je presjek jedinične kružnice i pravca RH, na pravcu $y = -1$, na osnovi Steinerova teorema dobivamo rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{u kojoj je} \quad p = -\frac{4}{|AH|} = -w_{00} \quad \text{i} \quad q = -sp = w_{01}.$$

Veće rješenje, na slici označeno sa w_{000} jednako je $2\cos\frac{2\pi}{17}$. Ako pravac kroz točku A i w_{000} presiječemo s pozitivnim dijelom x-osi, dobit ćemo točku koja je od ishodišta koordinatnog sustava udaljena točno $\cos\frac{2\pi}{17}$. U toj točki konstruiramo okomicu na x-os. Presjek te okomice i jedinične kružnice su točke T_2 i T_{17} pravilnog sedamnaesterokuta. Točka T_1 je točka s koordinatama $(1, 0)$.

2.9 Graefeova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Kombinacijom Carlyleovog i Steinereovog grafičkog rješenja kvadratne jednadžbe dobiva se efektna kostrukcija pravilnog sedamnaesterokuta koju je 1910. godine objavio njemački matematičar Heinrich Franz Konrad Karl Friedrich Graefe. Konstrukcija je sljedeća.

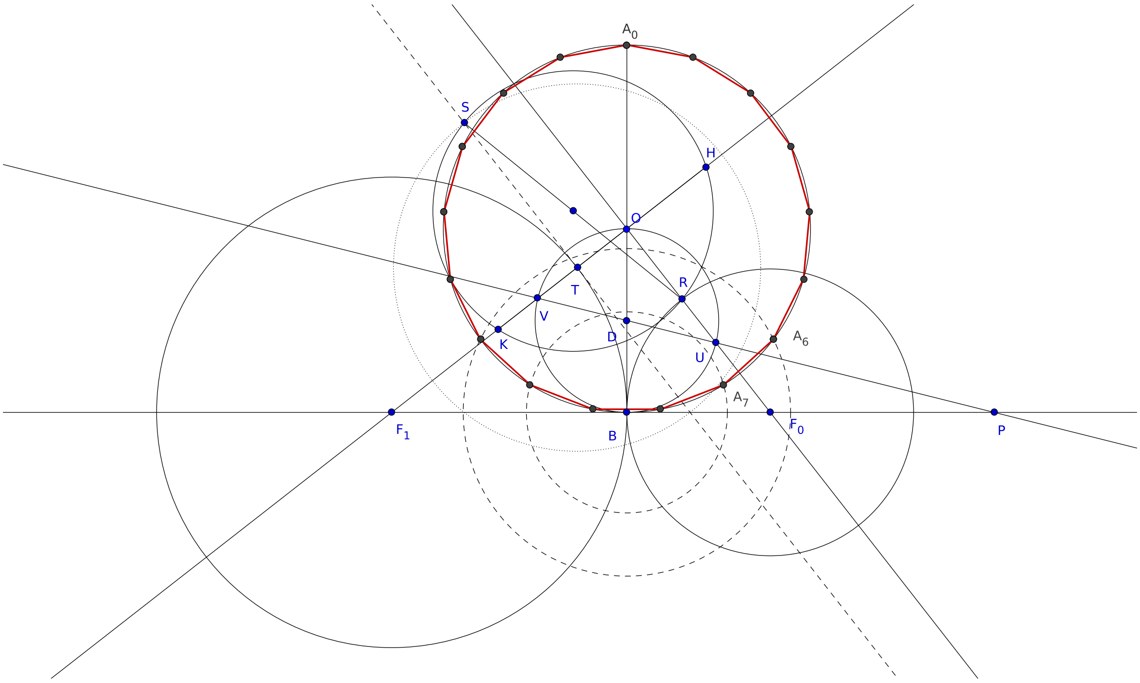
U jediničnoj kružnici sa središtem O konstruira se promjer $\overline{A_0B}$, kao na slici. U točki B konstruira se tangenta i na njoj se odredi točka P takva da je $|BP| = |A_0B|$. Zatim se opiše kružnica sa središtem D polumjera $\overline{OD}$, gdje je točka D polovište $\overline{OB}$. Konstruira se pravac DP i njegov presjek s kružnicom $(D, \overline{OD})$ označimo sa U i V. Neka pravac OU siječe konstruiranu tangentu u točki F_0, a pravac OV u točki F_1. Vrijedi

$$|BF_0| = \frac{w_0}{2} \quad \text{i} \quad |BF_1| = \frac{w_1}{2}.$$

Konstruiramo kružnicu sa središtem F_0 polumjera $\overline{F_0B}$ i njegov presjek sa $\overline{OF_0}$ označimo sa R, a presjek kružnice sa središtem F_1 polumjera $\overline{F_1B}$ sa $\overline{OF_1}$ označimo sa T. Promotrimo pravokutan trokut $\triangle OBF_0$. Vrijedi $|OF_0|^2 = |OB|^2 + |BF_0|^2 = 1^2 + \left(\frac{w_0}{2}\right)^2$, odnosno $|OF_0| = \sqrt{1 + \frac{w_0^2}{4}}$. Tada se iz pravokutnog trokuta $\triangle OBF_0$ dobiva

$$|OR| = |OF_0| - |RF_0| = |OF_0| - |BF_0| = \sqrt{1 + \frac{w_0^2}{4}} - \frac{w_0}{2} = \left|\frac{w_0}{2} - \frac{\sqrt{4 + w_0^2}}{2}\right| = |w_{10}|,$$

pa je duljina dužine $\overline{OR}$ po apsolutnoj vrijednosti manje rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - w_0x - 1 = 0$.



Slika 2.15: Graefeova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Promotrimo pravokutan trokut $\triangle OBF_1$. Vrijedi $|OF_1|^2 = |OB|^2 + |BF_1|^2 = 1^2 + \left(\frac{w_1}{2}\right)^2$, odnosno $|OF_1| = \sqrt{1 + \frac{w_1^2}{4}}$. Zatim se potpuno analogno dobiva

$$|OT| = |OF_1| - |TF_1| = |OF_1| - |BF_1| = \sqrt{1 + \frac{w_1^2}{4}} - \frac{w_1}{2} = \left|\frac{w_1}{2} - \frac{\sqrt{4 + w_1^2}}{2}\right| = |w_{01}|,$$

pa je duljina dužine $\overline{OT}$ po apsolutnoj vrijednosti manje rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - w_1 x - 1 = 0$.

Za rješenja w_{001} i w_{101} kvadratne jednadžbe $x^2 - w_{01}x + w_{10}$ vrijedi $w_{001} + w_{101} = w_{01}$ i $w_{001}w_{101} = w_{10}$. Također, prema ranijoj analizi, vrijedi

$$w_{001} > 0 > w_{101}, \quad w_{001} = 2\cos\frac{6\pi}{17} \quad \text{i} \quad w_{101} = 2\cos\frac{10\pi}{17} = -2\cos\frac{7\pi}{17}.$$

Jednadžbu $x^2 - w_{01}x + w_{10} = 0$ grafički riješimo Carlyleovim postupkom. Pola konstrukcije već imamo. Pravci TO i OR sijeku se pod pravim kutom jer je $\sphericalangle VOU$ kut nad promjerom kružnice. U kvadratnoj jednadžbi $x^2 - w_{01}x + w_{10} = 0$ vrijedi $w_{10} < 0$ pa u točki T treba konstruirati okomicu na pravac OV. Odredimo točku S takvu da je $|TS| = 1$ i to tako da točke R i S budu s različitih strana pravca OV. Konstruiramo kružnicu kojoj je $\overline{RS}$ promjer i neka on siječe pravac OV u točkama H i K. Tada je

$$|TH| = w_{001} = 2\cos\frac{6\pi}{17}, \quad \text{a} \quad |TK| = w_{101} = -2\cos\frac{7\pi}{17}.$$

Konstruiramo kružnicu sa središtem B polumjera $\overline{TH}$. Neka ona siječe jediničnu kružnicu desno od promjera $\overline{A_0B}$ u točki A_6. Zatim konstruiramo kružnicu sa središtem B polumjera $\overline{TK}$ i neka ona siječe jediničnu kružnicu desno od promjera $\overline{A_0B}$ u točki A_7. Točke A_6 i A_7 su dvije susjedne točke pravilnog sedamnaesterokuta upisanog u danu jediničnu kružnicu. Ostale točke pravilnog sedamnaesterokuta se lako dobiju.

Poglavlje 3

Ostale konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta

Geometrijske konstrukcije rješenja niza kvadratnih jednadžbi koje je postavio Gauss koristile su se za konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta gotovo tijekom cijelog 19. stoljeća. Jednadžbu $x^{17} - 1 = 0$ rješavamo eliminacijom trivijalnog rješenja $x = 1$ i supstitucijom $y = x + \frac{1}{x}$. Imamo tzv. simetričnu jednadžbu

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

koju najprije podijelimo sa x^8. Dobivamo

$$x^8 + \frac{1}{x^8} + x^7 + \frac{1}{x^7} + \cdots + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

Uočimo da se u gornjoj jednadžbi pojavljuje osam pribrojnika oblika $x^k + \frac{1}{x^k}$. Stavimo $s_k = x^k + \frac{1}{x^k}$ i $y = s_1$. Uočimo da je $s_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$ te da za svaki $k \geq 2$ vrijedi

$$ys_k = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = s_{k+1} + s_{k-1},$$

pa je

$$s_{k+1} = ys_k - s_{k-1}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} s_3 &= ys_2 - s_1 = y^3 - 3y, \\ s_4 &= ys_3 - s_2 = y^4 - 4y^2 + 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_5 &= ys_4 - s_3 = y^5 - 5y^3 + 5y, \\
s_6 &= ys_5 - s_4 = y^6 - 6y^4 + 9y^2 - 2, \\
s_7 &= ys_6 - s_5 = y^7 - 7y^5 + 14y^3 - 7y, \\
s_8 &= ys_7 - s_6 = y^8 - 8y^6 + 20y^4 - 16y^2 + 2,
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
0 &= s_8 + s_7 + s_6 + s_5 + s_4 + s_3 + s_2 + s_1 + 1 \\
&= y^8 + y^7 - 7y^6 - 6y^5 + 15y^4 + 10y^3 - 10y^2 - 4y + 1.
\end{aligned}$$

Jednadžbu možemo faktorizirati, odnosno prikazati kao umnožak dva polinoma četvrtog stupnja čiji su koeficijenti iracionalni. Dakle, dobiva se

$$\begin{aligned}
& y^8 + y^7 - 7y^6 - 6y^5 + 15y^4 + 10y^3 - 10y^2 - 4y + 1 \\
= & \left(y^4 + \frac{1-\sqrt{17}}{2}y^3 - \frac{3+\sqrt{17}}{2}y^2 + (2+\sqrt{17})y - 1\right) \\
& \cdot \left(y^4 + \frac{1+\sqrt{17}}{2}y^3 - \frac{3-\sqrt{17}}{2}y^2 + (2-\sqrt{17})y - 1\right).
\end{aligned}$$

Tek početkom 20. stoljeća talijanski matematičar Alessandro Padoa pronašao je geometrijski postupak za dokaz konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta koji ne koristi Gaussovu analizu. Njegova ideja je izabrati četiri rješenja i za njih naći jednadžbu četvrtog stupnja koja odgovara prvom polinomu gornje faktorizacije. Ako sa α označimo kut $\frac{\pi}{17}$, tada tražimo jednadžbu čija su rješenja

$$2\cos\alpha, \quad 2\cos 2\alpha, \quad 2\cos 4\alpha \quad \text{i} \quad 2\cos 8\alpha.$$

Veza između kuta i njegovog dvostrukog kuta se lako nađe te na taj način Padoa izbjegava algebarsku analizu i korištenje kompleksnih korijena iz jedinice. Ipak, Padoino rješenje je bilo dosta komplicirano i kasnije je ovaj postupak pojednostavljen. U ovom poglavlju bit će izložena dva rješenja, trigonometrijsko i geometrijsko.

3.1 Geometrijska analiza mogućnosti konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta

Sudeći po tome da se ova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta nalazi u svim suvremenim udžbenicima, čini se da je najpopularnija.

Neka je dan pravilan 34-terokut upisan u kružnicu. U njemu ćemo istaknuti jedan karakteristični trokut. To je jednakokračni trokut čija je osnovica stranica pravilnog 34-terokuta, a krakovi udaljenosti vrhova od središta kružnice. Neka su I i J dva uzastopna vrha pravilnog 34-terokuta, a A treći vrh karakterističnog trokuta. Budući da se radi o pravilnom 34-terokutu upisanom u kružnicu, kut pri vrhu A jednak je $\frac{\pi}{17}$. Zbog jednostavnosti ćemo staviti da je $\alpha = \frac{\pi}{17}$. Tada su $\sphericalangle AIJ$ i $\sphericalangle AJI$ sukladni i iznose $\frac{\pi - \frac{\pi}{17}}{2} = \frac{8\pi}{17} = 8\alpha$.

U trokutu $\triangle AJI$ konstruiramo niz točaka, odnosno dužina za koje vrijedi $|JI| = |IH| = |HG| = |GF| = |FE| = |ED| = |DC| = |CB|$. Tada je $\triangle JIH$ jednakokračan pa vrijedi

$$\sphericalangle IHJ = \sphericalangle HJI = \sphericalangle AIJ = 8\alpha.$$

Tada je i $\sphericalangle JIH = \sphericalangle IAJ = \alpha$. Dakle, $\triangle AIJ$ i $\triangle IJH$ su slični.

Trokut $\triangle IGH$ je također jednakokračan jer vrijedi $|IH| = |GH|$. Tada je $\sphericalangle HGI = \sphericalangle HIG = \sphericalangle AIJ - \sphericalangle HIJ = 8\alpha - \alpha = 7\alpha$. Budući da je zbroj sva tri kuta u trokutu jednak π, vrijedi $\sphericalangle IHG = \pi - 2\sphericalangle HIG = 17\alpha - 2 \cdot 7\alpha = 3\alpha$. U trokutu $\triangle HFG$ je $\sphericalangle GHF = \pi - \sphericalangle GHJ - \sphericalangle JHI = 17\alpha - 3\alpha - 8\alpha = 6\alpha$, a tada je i $\sphericalangle GFH = 6\alpha$ pa je $\sphericalangle HGF = \pi - 2\sphericalangle GHF = 17\alpha - 2 \cdot 6\alpha = 5\alpha$.

Analogno se dobiva i da je $\sphericalangle FGE = \sphericalangle FEG = 5\alpha$, da je $\sphericalangle EFD = \sphericalangle EDF = 4\alpha$, da je $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DCE = 3\alpha$ i da je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD = 2\alpha$. Budući da je $\sphericalangle CBD$ vanjski kut trokuta $\triangle ABC$, vrijedi $\sphericalangle CBA = 2 \cdot \sphericalangle BCA$, odnosno

$$\sphericalangle BCA = \alpha = \sphericalangle BAC \Longrightarrow |AB| = |BC|.$$

Dakle, $\triangle ABC$ je jednakokračan.

Iz sličnosti trokuta $\triangle AIJ$ i $\triangle IJH$ dobiva se omjer

$$|AI| : |IJ| = |IJ| : |JH|.$$

Ako pretpostavimo da je $|IJ| = 1$, tada iz gornjeg omjera slijedi

$$|AI| \cdot |JH| = 1.$$

Promotrimo pravokutni trokut (u trokutu $\triangle AIJ$) koji nastaje kad iz vrha A konstruiramo visinu na stranicu $\overline{IJ}$ i njegovu hipotenuzu $\overline{AI}$. Primijenimo li poučak o kosinusu na kut $\sphericalangle JIH = 8\alpha$, dobivamo $|AI| = \frac{1/2}{\cos 8\alpha}$, odnosno

$$|AI| = \frac{1}{2\cos 8\alpha}.$$

Tada, iz jednakosti $|AI| \cdot |JH| = 1$ slijedi $|JH| = 2\cos 8\alpha$. Analognim postupkom dobivamo

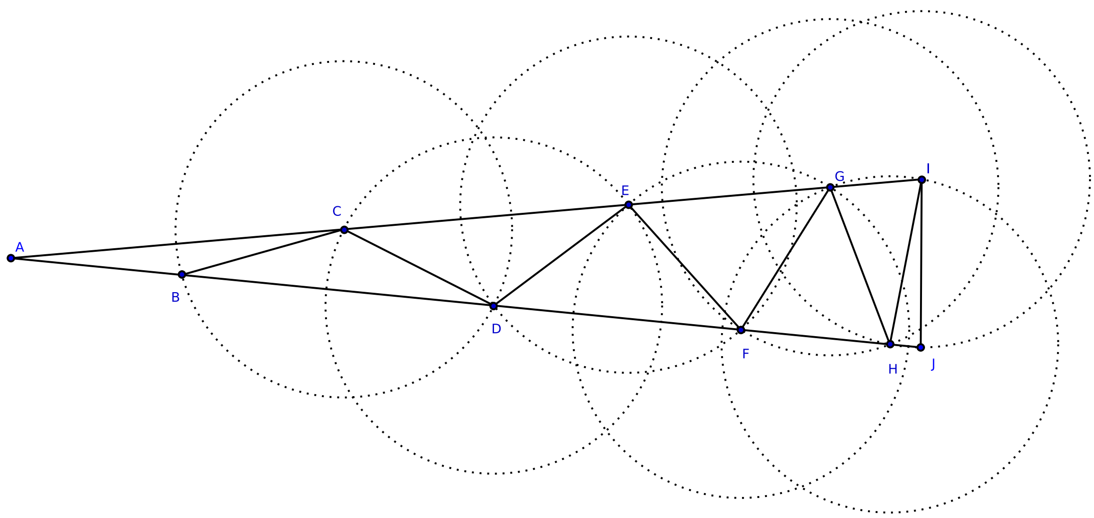
$$|GI| = 2\cos 7\alpha, \quad |EG| = 2\cos 5\alpha, \quad |CE| = 2\cos 3\alpha \quad \text{i} \quad |AC| = 2\cos\alpha.$$

Dakle,

$$|AI| = |AC| + |CE| + |EG| + |GI| = 2\cos\alpha + 2\cos 3\alpha + 2\cos 5\alpha + 2\cos 7\alpha.$$

Kada ove vrijednosti uvrstimo u gornji omjer, dobiva se

$$\frac{2\cos\alpha + 2\cos 3\alpha + 2\cos 5\alpha + 2\cos 7\alpha}{1} = \frac{1}{2\cos 8\alpha}.$$



Slika 3.1: Konstrukcija pomoćnih trokuta

Nakon što na lijevoj strani jednakosti prvi i četvrti te drugi i treći pribrojnik transformiramo u umnožak, dobivamo

$$4\cos 4\alpha\cos 3\alpha + 4\cos 4\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2\cos 8\alpha}.$$

Sada na lijevoj strani izlučimo $4\cos 4\alpha$ te zbroj kosinusa pretvorimo u umnožak:

$$4\cos 4\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha) = \frac{1}{2\cos 8\alpha} \quad \text{odnosno} \quad 16\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = 1.$$

Iskoristimo formulu za kosinus dvostrukog kuta

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

iz koje se dobiva

$$(2\cos\alpha)^2 = 2\cos 2\alpha + 2.$$

Odatle slijedi

$$(2\cos 2\alpha)^2 = 2\cos 4\alpha + 2, \quad (2\cos 4\alpha)^2 = 2\cos 8\alpha + 2,$$

$$(2\cos 8\alpha)^2 = 2\cos 16\alpha + 2 = 2\cos(\pi - \alpha) + 2 = -2\cos\alpha + 2.$$

Ako stavimo da je

$$x_1 = -2\cos\alpha, \quad x_2 = 2\cos 2\alpha, \quad x_3 = 2\cos 4\alpha \quad \text{i} \quad x_4 = 2\cos 8\alpha,$$

dobiva se da je $-2\cos\dfrac{\pi}{17}$ jedno od rješenja algebarskog sustava jednadnadžbi

$$x_1^2 = x_2 + 2, \quad x_2^2 = x_3 + 2, \quad x_3^2 = x_4 + 2, \quad x_4^2 = x_1 + 2,$$

pri čemu važi veza

$$x_1x_2x_3x_4 = -1.$$

Riješimo algebarski ovaj sustav jednadžbi. Kada se od $x_1^2 = x_2 + 2$ oduzme $x_3^2 = x_4 + 2$, a od $x_2^2 = x_3 + 2$ oduzme $x_4^2 = x_1 + 2$, dobiva se

$$x_1^2 - x_3^2 = x_2 - x_4, \quad x_2^2 - x_4^2 = x_3 - x_1$$

iz čega nakon množenja slijedi

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = -1.$$

Uvodimo supstituciju $u = x_1x_3$ i $v = x_1 + x_3$. Tada je

$$x_2x_4 = -\frac{1}{u}, \quad x_2 + x_4 = -\frac{1}{v}.$$

Ako sustav zapišemo u obliku

$$x_1^2 - 1 = x_2 + 1, \quad x_2^2 - 1 = x_3 + 1, \quad x_3^2 - 1 = x_4 + 1, \quad x_4^2 - 1 = x_1 + 1$$

i ove jednadžbe međusobno pomnožimo te podijelimo sa $(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1)(x_4 + 1)$, dobivamo

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)(x_4 - 1) = 1.$$

Ako sad pomnožimo prvu i treću te drugu i četvrtu zagradu, dobivamo

$$(x_1x_3 - x_1 - x_3 + 1)(x_2x_4 - x_2 - x_4 + 1) = 1.$$

Gornja jednadžba se pomoću u i v može napisati u obliku

$$(u - v + 1)\left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + 1\right) = 1.$$

Budući da je $u \neq 0$ i $v \neq 0$, ovu jednadžbu možemo pomnožiti sa $uv \neq 0$ i dobiti

$$(u - v + 1)(uv - v + u) = uv.$$

Sve međusobno izmnožimo i dobivamo

$$u^2v - uv + u^2 - uv^2 + v^2 - uv + uv - v + u = uv,$$

odnosno, nakon sređivanja,

$$(u - v)(uv - v + u + 1) = 0.$$

Ako je $u = v$, tada, ako pomnožimo $x_1^2 = x_2 + 2$ i $x_3^2 = x_4 + 2$, dobiva se da je $u^2 = -\frac{3}{u} + 4$. Analogno se dobiva $\frac{1}{u^2} = 3u + 4$ kada se pomnože $x_2^2 = x_3 + 2$ i $x_4^2 = x_1 + 2$. Dakle, u je zajedničko rješenje jednadžbama

$$u^3 - 4u + 3 = 0 \quad \text{i} \quad 3u^3 + 4u^2 - 1 = 0.$$

Primjenom Euklidovog algoritma na polinome $u^3 - 4u + 3 = 0$ i $3u^3 + 4u^2 - 1 = 0$ dobiva se da su oni međusobno prosti, tj. da nemaju zajedničko rješenje. Dakle,

$$uv - v + u + 1 = 0$$

odnosno

$$v = \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Ako sad pomnožimo $x_1^2 = x_2 + 2$ i $x_3^2 = x_4 + 2$ dobivamo jednadžbu

$$(x_1x_3)^2 = x_2x_4 + 2(x_2 + x_4) + 4.$$

Uvedemo supstituciju i dobivamo

$$u^2 = -\frac{1}{u} - \frac{2}{v} + 4.$$

Obzirom da je $v = \dfrac{1+u}{1-u}$, odatle slijedi

$$u^4 + u^3 - 6u^2 - u + 1 = 0.$$

Dobivenu simetričnu jednadžbu podijelimo sa $u^2 \neq 0$ te dobivamo

$$u^2 + \frac{1}{u^2} + u - \frac{1}{u} - 6 = 0.$$

Uvodimo supstituciju $s = u - \dfrac{1}{u}$. Tada je $s^2 + 2 = u^2 + \dfrac{1}{u^2}$. Konačno se dobiva jednadžba

$$s^2 + s - 4 = 0.$$

Njena rješenja su $s_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$, odnosno dobivamo da je

$$u - \frac{1}{u} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Tada je u rješenje kvadratne jednadžbe

$$u^2 - \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}u - 1 = 0,$$

pa ga je moguće konstruirati pomoću ravnala i šestara. Obzirom da je $v = \dfrac{1+u}{1-u}$, moguće je konstruirati i v. Kako je $x_1x_3 = u$ i $x_1 + x_3 = v$, to su x_1 i x_3 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 2vx + u = 0$.

Time je dokazano da je $x_1 = -2\cos\dfrac{\pi}{17}$ moguće konstruirati pomoću ravnala i šestara, što znači da je pomoću ravnala i šestara moguće konstruirati pravilni 34-erokut, a time i pravilni sedamnaesterokut.

3.2 Richmondova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Da bi se izvela konstrukcija na osnovi jednadžbi dobivenih u prethodnom poglavlju, potrebno je uočiti vezu između zbroja i umnoška kosinusa kuta $\alpha = \dfrac{\pi}{17}$, odnosno uočiti da vrijedi

$$(2\cos 2\alpha)(2\cos 8\alpha) = 2\cos 6\alpha + 2\cos 10\alpha,$$

kao i

$$-2\cos\alpha + 2\cos 4\alpha = 2\cos 16\alpha + 2\cos 4\alpha = (2\cos 6\alpha)(2\cos 10\alpha).$$

U prvoj jednakosti je lijeva strana x_2x_4, a u drugoj $x_1 + x_3$. Ako se uvede pomoćni kut β takav da je

$$x_2x_4 = \operatorname{tg}\beta,$$

tada je

$$2\cos 6\alpha + 2\cos 10\alpha = \operatorname{tg}\beta.$$

Kako je $x_2x_4 = -\dfrac{1}{u}$ i $x_1 + x_3 = v$ te vrijedi $v = \dfrac{1+u}{1-u}$, to je

$$(2\cos 6\alpha)(2\cos 10\alpha) = \frac{1 - \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\beta - 1}{1 + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Međutim, iz uvjeta

$$s = u - \frac{1}{u} \quad \text{i} \quad s^2 + s - 4 = 0,$$

uzevši u obzir da je $-\dfrac{1}{u} = x_2x_4 = (2\cos 2\alpha)(2\cos 8\alpha) = \operatorname{tg}\beta$, dobiva se da je

$$s = \operatorname{tg}\beta - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}^2\beta - 1}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{2}{\operatorname{tg} 2\beta},$$

pa je

$$\frac{4}{\operatorname{tg}^2 2\beta} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\beta} - 4 = 0,$$

odnosno

$$4(1 - \operatorname{tg}^2 2\beta) = 2\operatorname{tg} 2\beta$$

i konačno

$$\frac{2\operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2 2\beta} = 4,$$

tj. β je rješenje trigonometrijske jednadžbe

$$\operatorname{tg} 4\beta = 4.$$

Neka je β_0 najmanje pozitivno rješenje ove jednadžbe. Zbog uvjeta $0 < x_2x_4 = \operatorname{tg}\beta$, kut β mora biti šiljasti pa su moguća rješenja β_0 i $\beta_0 + \dfrac{\pi}{4}$. Kako je

$$\operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = (2\cos 6\alpha)(2\cos 10\alpha) < 0,$$

budući da je $\cos 6\alpha > 0$, a $\cos 10\alpha < 0$, to rješenje $\beta_0 + \frac{\pi}{4}$ otpada.

Sada se konstrukcija lako objašnjava i dokazuje. U jediničnoj kružnici konstruiramo horizontalan promjer $\overline{AT_0}$. Potom konstruiramo na njega okomit polumjer $\overline{OK}$, takav da je točka K s donje strane dužine $\overline{AT_0}$. Taj polumjer produžimo s gornje strane točke O, za malo više od pola duljine polumjera.

Neka su T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5 uzastopni vrhovi pravilnog sedamnaesterokuta. Neka je F nožište okomice spuštene iz T_3 na $\overline{AT_0}$. Kako je $\sphericalangle T_3OF = 6\alpha$, primjenom poučka o kosinusu na pravokutni trokut $\triangle T_3OF$, s pravim kutom pri vrhu F, dobivamo $|OF| = \cos 6\alpha$. Analogno, ako je G nožište okomice spuštene iz T_5 na $\overline{AT_0}$, tada vrijedi $|OG| = \cos 10\alpha$.

Iz prvog uvjeta dobiva se da je

$$\frac{\cos 6\alpha + \cos 10\alpha}{2} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\beta.$$

Dakle, najprije treba konstruirati četvrtinu veličine $\operatorname{tg}\beta$. Ovo je lako izvesti uzmemo li u obzir da je $\operatorname{tg} 4\beta = 4$. Podijelimo dužinu $\overline{OK}$ na četiri dijela i neka je E točka na $\overline{OK}$ takva da je $|OE| = \frac{|OK|}{4}$. Podijelimo kut $\sphericalangle OBT_0$ na četiri jednaka dijela. Neka je C točka na $\overline{OT_0}$ takva da je

$$\sphericalangle OBC = \frac{1}{4}\sphericalangle OBT_0.$$

Tada je

$$|OC| = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos 6\alpha + \cos 10\alpha}{2},$$

tj. točka C je polovište dužine $\overline{FG}$.

Iskoristimo sad drugi uvjet, tj.

$$\cos 6\alpha \cdot \cos 10\alpha = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Konstruiramo kut $\sphericalangle CBE$ veličine $\frac{\pi}{4}$ tako da je točka E na pravcu AT_0. Tada je kut

$$\sphericalangle OBE = \frac{\pi}{4} - \beta$$

pa se zbog $|OB| = \frac{1}{4}$ dobiva da je

$$|OE| = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right).$$

Ako opišemo polukružnicu promjera $\overline{ET_0}$, tada je $\triangle ET_0H$ pravokutan, a $\overline{OH}$ je njegova visina na hipotenuzu, pa je

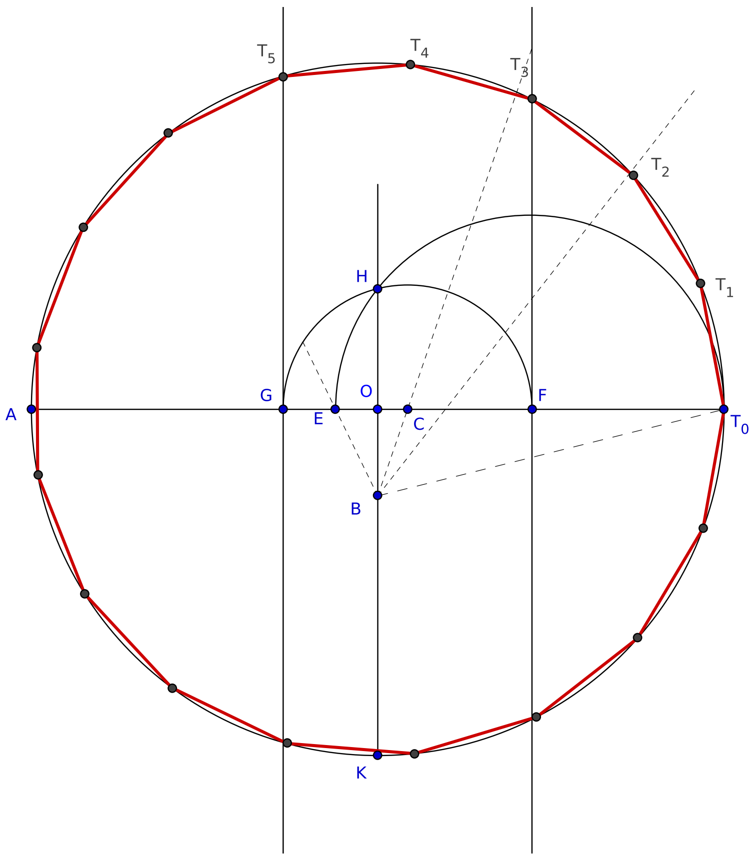
$$|OH|^2 = |OE| \cdot |OT_0| = |OE| = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right).$$

Dakle,

$$|OH|^2 = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \cos 6\alpha \cdot \cos 10\alpha = |OF| \cdot |OG|,$$

pa točka H leži na polukružnici čije je središte točka C, a promjer $\overline{FG}$. Time je dokaz konstrukcije završen.

Konstrukcija se izvodi na sljedeći način: u jediničnoj kružnici konstruiramo promjer $\overline{AT_0}$ i na njega okomit polumjer $\overline{OK}$, takav da je točka K s donje strane promjera $\overline{AT_0}$. Polumjer $\overline{OK}$ produžimo s gornje strane točke O. Polumjer $\overline{OK}$ podijelimo na četiri jednaka dijela i sa E označimo točku koja je najbliža točki O, tako da je $|OE| = \dfrac{|OK|}{4}$.



Slika 3.2: Richmondova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Kut $\sphericalangle T_0EO$ podijelimo na četiri sukladna dijela i odredimo točku C na promjeru $\overline{AT_0}$ takvu da je

$$\sphericalangle CEO = \frac{1}{4}\sphericalangle T_0EO.$$

Na dužini $\overline{BC}$ u vrhu B konstruiramo kut od $\frac{\pi}{4}$. Presjek kraka kuta s dužinom $\overline{AT_0}$ označimo sa E. Nad dužinom $\overline{ET_0}$ s gornje strane opišemo polukružnicu. Njen presjek s produžetkom polumjera $\overline{OK}$ označimo sa H. Konstruiramo polukružnicu sa središtem C polumjera $\overline{CH}$ i neka on siječe dužinu $\overline{AT_0}$ u točkama F i G, kao na slici. U točkama F i G konstruiramo okomice na dužinu $\overline{AT_0}$, one sijeku jediničnu kružnicu u točkama T_3 i T_5 s gornje strane dužine $\overline{AT_0}$. Te točke, kao i točka T_0 pripadaju pravilnom sedamnaesterokutu. Ostale točke lako konstruiramo.

3.3 Geometrijski izvod Gaussova dokaza

Ponovo promotrimo karakterističan trokut pravilnog 34-erokuta (vidite sliku 3.1). Osnovice trokuta $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEF, \triangle EFG, \triangle FGH, \triangle GHJ$ i $\triangle HJI$ označimo redom sa $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$ i y_8. Svi kraci ovih trokuta su duljine 1 pa je

$$y_1 = |AC| = 2\cos\alpha, \quad y_2 = |BD| = 2\cos 2\alpha,$$

$$y_3 = |CE| = 2\cos 3\alpha, \quad y_4 = |DF| = 2\cos 4\alpha,$$

$$y_5 = |EG| = 2\cos 5\alpha, \quad y_6 = |FH| = 2\cos 6\alpha,$$

$$y_7 = |GJ| = 2\cos 7\alpha, \quad y_8 = |HI| = 2\cos 8\alpha,$$

gdje je $\alpha = \frac{\pi}{17}$. Trokut $\triangle AIJ$ je jednakokračan. Iz jednakosti $|AI| = |AJ|$ slijedi

$$1 + y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$$

odnosno

$$y_2 + y_4 + y_6 + y_8 - y_1 - y_3 - y_5 - y_7 = -1.$$

Lijevu stranu podijelimo na dva zbroja

$$x_1 = y_2 + y_4 + y_8 - y_1 \quad \text{i} \quad x_2 = -y_3 - y_5 - y_7 + y_6.$$

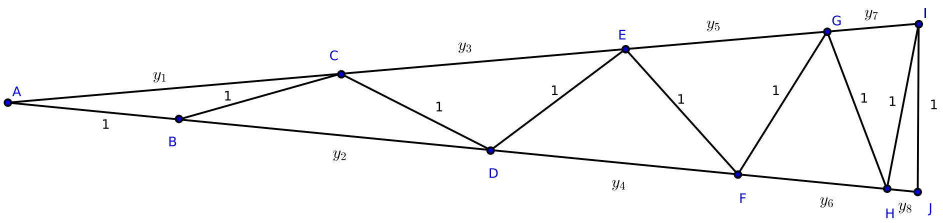
Tada je moguće izraziti i x_1x_2 kao zbroj ipsilona koristeći formulu za transformaciju umnoška kosinusa u zbroj. Iz $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$ i $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ dobivaju se formule za množenje y_i i y_j :

$$y_i^2 = 2 + y_{2i},$$

$$y_i y_j = y_{i+j} + y_{|i-j|} \text{ za } i \neq j,$$

$$y_i = -y_{17-i} \text{ za } i > 8.$$

Za oduzimanje se koristi apsolutna vrijednost razlike, budući da je kosinus parna funkcija.



Slika 3.3: Konstrukcija pomoćnih trokuta

Tada je

$$\begin{aligned}
-x_1x_2 &= (y_2 + y_4 + y_8 - y_1)(y_3 + y_5 - y_6 + y_7) \\
&= y_2y_3 + y_3y_8 + y_3y_4 - y_1y_3 + y_2y_5 + y_5y_8 + y_4y_5 - y_1y_5 \\
&\quad -y_2y_6 - y_6y_8 - y_4y_6 + y_1y_6 + y_2y_7 + y_7y_8 + y_4y_7 - y_1y_7 \\
&= y_1 + y_5 - y_6 + y_5 + y_1 + y_7 - y_4 - y_2 + y_3 + y_7 + y_3 - y_4 + y_1 - y_8 - y_6 - y_4 \\
&\quad -y_4 - y_8 - y_2 + y_3 - y_2 + y_7 + y_5 + y_7 + y_5 - y_8 + y_1 - y_2 - y_6 + y_3 - y_6 - y_8 \\
&= 4y_1 - 4y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 4y_5 - 4y_6 + 4y_7 - 4y_8 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da za x_1 i x_2 vrijedi

$$x_1 + x_2 = -1 \quad \text{i} \quad x_1x_2 = -4,$$

odnosno da su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su

$$w_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Jedno rješenje je pozitivno, a drugo negativno. Međutim, $|y_5| > |y_6|$, pa je $x_2 < 0$ i zbog toga je

$$x_1 = w_0 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = w_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Iz ovih jednakosti jasno je vidljivo da je negativno rješenje po apsolutnoj vrijednosti veće od pozitivnog.

Ako se ovaj postupak grupiranja nastavi tako da se x_1 podijeli na

$$u_1 = y_2 + y_8, \quad u_2 = y_4 - y_1,$$

tada je

$$u_1 + u_2 = x_1,$$

$$\begin{aligned} u_1 u_2 &= (y_2 + y_8)(y_4 - y_1) \\ &= y_2 y_4 - y_1 y_2 + y_4 y_8 - y_1 y_8 \\ &= y_6 + y_2 - y_3 - y_1 + y_5 + y_4 + y_8 - y_7 \\ &= -1, \end{aligned}$$

pa su u_1 i u_2 rješenja kvadratne jednadžbe $u^2 - x_1 u - 1 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$u_{1,2} = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 4}}{2}.$$

Budući da je $\sqrt{x_1^2 + 4} > 0$, to je rješenje sa znakom plusa ispred korijena pozitivno, a sa znakom minusa negativno. Jasno je da je $u_1 > 0$, pa je

$$u_1 = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4}}{2}, \quad u_2 = \frac{x_1 - \sqrt{x_1^2 + 4}}{2}.$$

Kako je x_1 pozitivna veličina, to je u_1 veće rješenje i po apsolutnoj vrijednosti.

Analogno, kada se x_2 podijeli na dva pribrojnika

$$v_1 = y_6 - y_7, \quad v_2 = -y_3 - y_5,$$

tada je

$$v_1 + v_2 = x_2,$$

$$\begin{aligned} -v_1v_2 &= (y_6 - y_7)(y_3 + y_5) \\ &= y_3y_6 + y_5y_6 - y_3y_7 - y_5y_7 \\ &= -y_8 + y_3 - y_6 + y_1 + y_7 - y_4 + y_5 - y_2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

pa su v_1 i v_2 rješenja kvadratne jednadžbe $v^2 - x_2v - 1 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$v_{1,2} = \frac{x_2 \pm \sqrt{x_2^2 + 4}}{2}.$$

Kao i u prethodnom slučaju, rješenje sa znakom plusa ispred korijena je pozitivno, a sa znakom minusa negativno. Jasno je da je $v_2 = -y_3 - y_5 < 0$, pa je

$$v_1 = \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 4}}{2}, \quad v_2 = \frac{x_2 - \sqrt{x_2^2 + 4}}{2}.$$

Međutim, x_2 je negativan broj pa je negativno rješenje veće po apsolutnoj vrijednosti, tj. $|v_2| > |v_1|$.

Promatrajmo sad y_2 i y_8. Za njih vrijedi $y_2 > y_8 > 0$, kao i

$$y_2 + y_8 = u_1, \quad y_2y_8 = -y_7 + y_6 = v_1.$$

Zbog toga su y_2 i y_8 rješenja jednadžbe

$$z^2 - u_1z + v_1 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$z_{1,2} = \frac{u_1 \pm \sqrt{u_1^2 - 4v_1}}{2}.$$

Oba rješenja su pozitivna jer je $\sqrt{u_1^2 - 4v_1} < u_1$. Veće rješenje dobiva se kada se korijen dodaje, a manje kada se korijen oduzima. Tada je

$$y_2 = \frac{u_1 + \sqrt{u_1^2 - 4v_1}}{2} \quad \text{i} \quad y_8 = \frac{u_1 - \sqrt{u_1^2 - 4v_1}}{2}.$$

3.4 Erchingerova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Na osnovi prethodne analize može se dokazati Erchingerova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta koju je on izložio 1825. godine. Gauss je napisao pohvalan prikaz Erchingerova izlaganja u kome je ukratko opisao samo konstrukciju, ali sam dokaz Erchingerove konstrukcije nije sačuvan niti je poznato da je kasnije negdje objavljen. Dalje u tekstu dan je Gaussov opis Erchingerove konstrukcije s dodanim objašnjenjima kako bi se dobio potpun dokaz.

Neka je na proizvoljnom pravcu istaknuta dužina $\overline{BO}$. Konstruirat ćemo točke E_0 i E_1 takve da je $|OE_0| \cdot |BE_0| = |OE_1| \cdot |BE_1| = 4|BO|^2$. Ako je $\overline{OB}$ jedinična dužina, tada u točki O konstruiramo okomicu na nju te na njoj označimo točku K takvu da je $|OK| = 2|BO|$. Opišemo kružnicu sa središtem T, polumjera $\overline{TK}$, gdje je T polovište dužine $\overline{BO}$. Ta kružnica siječe pravac BO u točkama koje zadovoljavaju gornju jednakost jer je okomica OK zapravo tangenta na kružnicu promjera $\overline{BO}$, a sve točke na kružnici sa središtem T polumjera $\overline{TK}$ imaju istu potenciju. Za točku E_0 vrijedi

$$|BE_0| - |OE_0| = |BO| \quad \text{i} \quad |BE_0| \cdot |OE_0| = 4|BO|^2.$$

Zbog toga su $|BE_0|$ i $|OE_0|$ rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$, a analogno se dobiva da su $|BE_1|$ i $|OE_1|$ rješenja iste te jednadžbe.

Neka je F_0 polovište dužine $\overline{OE_0}$, a L polovište dužine $\overline{OK}$. Neka kružnica sa središtem F_0 polumjera $\overline{F_0L}$ siječe pravac BO u točkama G_0 i H_0. Tada, slično kao i prije, vrijedi

$$|G_0O| \cdot |G_0E_0| = |H_0E_0| \cdot |H_0O| = |OL|^2 = |OB|^2,$$

pa je

$$|G_0O| - |G_0E_0| = |OE_0| \quad \text{i} \quad |G_0O| \cdot |G_0E_0| = |OB|^2,$$

odnosno $|G_0O|$ i $|G_0E_0|$ su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - |OE_0|x - 1 = 0$. Pri tome je $|OE_0|$ po apsolutnoj vrijednosti manje rješenje jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$, a $|OG_0|$ je po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednadžbe $x^2 - |OE_0|x - 1 = 0$, pa je $|OG_0|$ pozitivno rješenje.

Analogno kao i u prethodnom slučaju konstruira se polovište dužine $\overline{OE_1}$, tj. točka F_1. Zatim konstruiramo kružnicu sa središtem F_1 polumjera $\overline{F_1L}$ te njen presjek s pravcem BO, s desne strane točke O, označimo sa G_1. Tada je

$$|G_1E_1| - |G_1O| = |OE_1| \quad \text{i} \quad |G_1O| \cdot |G_1E| = |OB|^2.$$

Zbgo toga su $|G_1O|$ i $|G_1E_1|$ rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - |OE_1|x - 1 = 0$. Pri tome je $|OE_1|$ po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednadžbe $x^2 + x - 4 = 0$, a $|OG_1|$ je po apsolutnoj vrijednosti manje rješenje jednadžbe $x^2 - |OE_0|x - 1 = 0$, pa je $|OG_1|$ pozitivno rješenje.

Neka kružnica čiji je promjer $\overline{BG_1}$ siječe u točki R okomicu podignutu u O na BG_1. Tada je $|BO| \cdot |OG_1| = |OR|^2$. Konstruiramo kružnicu promjera $\overline{OG_0}$ i sa S označimo presjek te kružnice i paralele s pravcem OB konstruirane u R, tako da je S bliže točki R. Potom u točki S konstruiramo okomicu na BO. Presjek okomice i pravca BO označimo sa J. Vrijedi

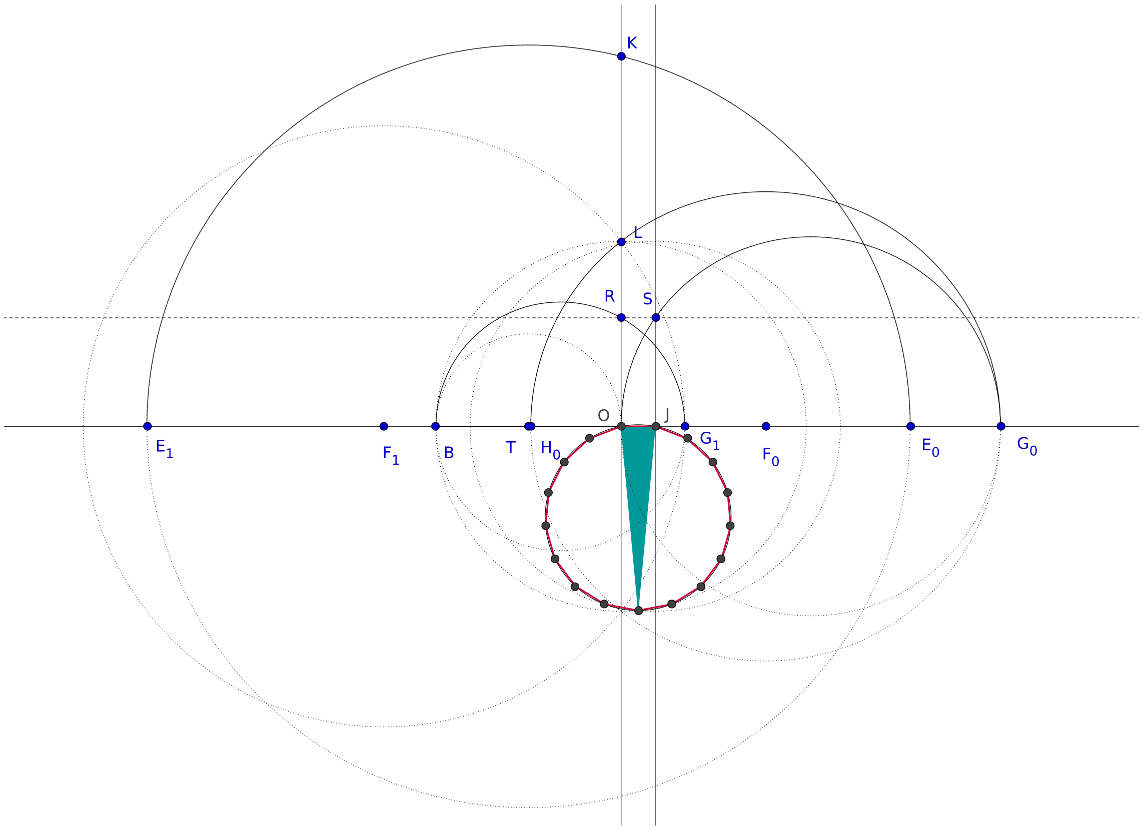
$$|OJ| \cdot |JG_0| = |JS|^2 = |OR|^2 = |BO| \cdot |OG_1|.$$

Time je dobiveno manje rješenje sustava jednadžbi

$$|OJ| + |JG_0| = |OG_0| \quad \text{i} \quad |OJ| \cdot |JG_0| = |BO| \cdot |OG_1|,$$

što je zapravo y_8 na osnovi analize prethodnog odjeljka.

Ako konstruiramo trokut čije su dvije stranice duljine $|BO|$, a treća $|OJ|$ i ako mu opišemo kružnicu, tada je $\overline{OJ}$ stranica pravilnog sedamnaesterokuta upisanog u tu kružnicu.



Slika 3.4: Erchingerova konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Bibliografija

[1] B. Dakić, B. Pavković, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[2] Đ. Paunić, *Pravilni poligoni*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2009.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[5] M. Fernežir, *Konstrukcije pravilnog peterokuta*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, 2015.

[6] N. Lepen, *Konstrukcije pravilnog sedmerokuta*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, 2016.

[7] *Seminar – Carl Friedrich Gauss*, `http://gimnazija-cres.hr/wp-content/uploads/2014/02/Carl-Fridrich-Gauss.pdf`, 28.1.2017.

[8] `http://facstaff.susqu.edu/brakke/constructions/big-gon.htm`, 2.2.2017.

Sažetak

U ovom radu izloženi su dokazi mogućnosti konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta samo pomoću ravnala i šestara. Tu mogućnost prvi je dokazao Gauss rješavajući jednadžbu $x^{17} - 1 = 0$. U ovom radu je opisano nekoliko konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta koje se temelje na Gaussovoj analizi, ali i nekoliko konstrukcija koje su po svojoj prirodi više geometrijske. Ukratko, konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta samo ravnalom i šestarom je izvediva, ali je vrlo složena.

Summary

In this work we present proofs of constructability of a regular heptadecagon (a seventeen-sided polygon) using only a ruler and a compass. This possibility was first proved by Gauss solving the equation $x^{17} - 1 = 0$. We describe several constructions of a regular heptadecagon which are based on the Gauss's analysis, and also several constructions which are of a more geometric nature. Briefly, it is possible to construct a regular heptadecagon using only a ruler and a compass, but it is very complex.

Životopis

Ja, Petra Mijoč, rođena sam 9.3.1993. godine u Metkoviću, gdje sam i odrasla. Pohađala sam osnovnu školu Don Mihovila Pavlinovića. Po završetku osnovne škole 2007. godine upisujem Gimnaziju Metković, prirodoslovno–matematički program. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, akademske 2011./2012. godine, upisujem Prirodoslovno–matematički fakultet u Zagrebu, smjer nastavnički. Preddiplomski studij završila sam 2014. godine te iste upisujem diplomski studij matematike, smjer nastavnički.